

### Вопросы для разминки перед экзаменом:

1. Оцените плотность ядерной материи в  $\text{г/см}^3$ .
2. Оцените энергию фотона в зеленой области спектра в эВ.
3. Оцените отношение скорости электрона в основном состоянии атома водорода Бора к скорости света?
4. Считая, что температура поверхности Солнца  $T=6000\text{K}$ , оцените длину волны, на которую приходится максимум интенсивности солнечного света?
5. Найти энергию фотона (эВ), длина волны которого равна комптоновской длине волны.
6. Напишите нестационарное уравнение Шредингера для частицы массы  $m$ , движущейся по оси  $x$  в потенциальном поле  $U(x)$ .
7. Напишите стационарное уравнение Шредингера для частицы массы  $m$ , движущейся по оси  $x$  под действием возвращающей силы  $f = -kx$ , ( $k$ - константа).
8. Чему равны возможные значения энергии частицы в предыдущей задаче.
9. Напишите формулу для разложения произвольной волновой функции  $\psi(x)$  по собственным функциям эрмитова оператора  $\varphi_n(x)$  для дискретного и непрерывного спектра.
10. Напишите уравнение на собственные значения оператора  $\hat{L}_z$  (проекция момента импульса на ось  $z$ )
11. Чему равны собственные значения оператора  $\hat{L}_z$  (проекция момента импульса на ось  $z$ )?
12. Напишите условие ортогональности собственных функций оператора импульса.
13. Чему равна размерность собственных функций оператора координаты  $\hat{x}$ .
14. Чему равны собственные значения операторов  $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z, \hat{S}^2$ ?
15. Свободный электрон с энергией  $E$  движется в положительном направлении оси  $X$  и имеет спин, направленный "вверх". Напишите волновую функцию электрона.
16. Оцените расстояние между соседними уровнями электронов в металле с концентрацией  $n=10^{22}\text{ см}^{-3}$ .
17. Оцените, какая часть электронов дает вклад в теплоемкость металлов при комнатной температуре.
18. Оцените величину ускоряющего потенциала для наблюдения дифракции электронов при нормальном падении на монокристалл никеля в опыте Дэвиссона-Джермера.
19. Электрон с кинетической энергией  $E$  движется в положительном направлении оси  $X$ . Нарисовать зависимость плотности вероятности положения электрона от  $X$ .
20. Электрон с импульсом  $p$  движется в положительном направлении оси  $X$  и отражается от бесконечно высокого потенциального барьера. Нарисовать зависимость плотности вероятности положения электрона от  $X$ .
21. Электрон с кинетической энергией  $E=0.999$  эВ движется в положительном направлении оси  $X$  и отражается от потенциального барьера в виде ступеньки высотой  $U=1$  эВ. Оцените глубину проникновения (расстояние, на котором плотность вероятности убывает в  $e$  раз).
22. Электрон в бесконечной яме шириной  $a$  характеризуется волновой функцией  $\psi = \frac{2i}{\sqrt{5}}\varphi_1 - \frac{3}{\sqrt{5}}\varphi_2$ , где  $\varphi_n$  – нормированная волновая функция стационарного состояния с квантовыми числами  $n$ . Какие, и с какой вероятностью, значения энергии могут быть измерены в этом состоянии?
23. Найдите коммутатор  $[\hat{x}\hat{p}]$
24. Покажите, что матрицы Паули являются эрмитовыми.
25. Напишите формулу и постройте график плотности вероятности основного состояния гармонического осциллятора. Укажите классические пределы.
26. Напишите выражение для зависящей от времени волновой функции основного состояния электрона в прямоугольной яме шириной  $a$  с бесконечно высокими стенками.
27. Напишите выражение и постройте график для распределения Бозе-Эйнштейна ( $\mu=0$ ). Что по осям?
28. Напишите выражение и постройте график для распределения Ферми-Дирака при  $T=0$ . Что по осям?
29. Чему равен объем квантового состояния в импульсном пространстве в (а) одномерном, (б) двумерном и (в) трехмерном случаях?
30. Чему равна размерность коэффициентов Эйнштейна  $A$  и  $B$ ?

**Задачи к экзамену по курсу «Введение в квантовую физику»**

1. Считая Солнце и Землю абсолютно черными телами, находящимися в состоянии теплового равновесия, оцените температуру Земли  $T_1$ . Средний радиус земной орбиты  $r = 1,5 \cdot 10^{11}$  м, температура на поверхности Солнца  $T = 6000$  К, радиус Солнца  $R = 7 \cdot 10^8$  м.
2. Исходя из формулы Планка для спектральной плотности  $\rho_\omega(T)$ , получите выражение для спектральной плотности  $\rho_\lambda(T)$ .
3. Найдите угол отдачи  $\varphi$  электрона в экспериментах Комптона, считая известными энергию падающего фотона  $\hbar\omega_0$  и угол рассеяния  $\theta$ .
4. При увеличении напряжения на рентгеновской трубке в  $\eta = 1,5$  раза длина волны коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра изменилась на  $\Delta\lambda = 26$  пм. Найдите первоначальное напряжение на трубке.
5. Свободная частица массы  $m$  движется со скоростью  $v$ . Найдите фазовую и групповую скорость волнового пакета, характеризующего эту частицу. Рассмотреть релятивистский и нерелятивистский случай.
6. Ширина волнового пакета, описывающего свободный нерелятивистский электрон, увеличилось в  $n = 10$  раз за время  $\tau \approx 10^{-15}$  секунды. Используя соотношение неопределенностей, найти начальную ширину волнового пакета.
7. Параллельный пучок электронов, движущихся со скоростью  $v = 1,5 \cdot 10^6$  м/с, через узкую щель падает нормально на экран, расположенный на расстоянии  $L = 0,1$  м от щели. Определить ширину щели  $d$ , при которой ширина её изображения на экране будет минимальной.
8. Пучок электронов, ускоренных разностью потенциалов  $U = 500$  кВ, попадает на тонкую поликристаллическую фольгу. На экране, отстоящем на  $L = 20$  см от фольги, наблюдается дифракционная картина в виде колец. Определить период решетки в материале фольги, если известно, что радиус первого кольца равен  $r_1 = 0,8$  мм.
9. Найдите разность длин волн  $\Delta\lambda$  между головными линиями серии Бальмера и Лаймана для ионов гелия  ${}^4\text{He}^+$ .
10. Найти собственные значения и собственные функции оператора импульса  $\hat{p}_x$  в координатном представлении.
11. Найти собственные значения и собственные функции оператора координаты  $\hat{x}$  в координатном представлении.
12. Пусть волновая функция частицы в некоторый момент времени имеет в сферических координатах вид  $\psi(r, \theta, \varphi) = \chi(r, \theta) \cos^2 \varphi$ . Какие значения проекции момента импульса  $L_z$  частицы могут быть измерены, и с какой вероятностью?
13. Волновая функция частицы в некоторый момент времени имеет вид

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{L}}, & x \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right] \\ 0, & x \in \left(-\infty, -\frac{L}{2}\right] \cup \left[\frac{L}{2}, \infty\right) \end{cases}$$

Найти дисперсию координаты  $D_x$ .

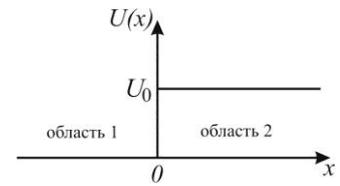
14. Волновая функция частицы в некоторый момент времени имеет вид

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{L}}, & x \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right] \\ 0, & x \in \left(-\infty, -\frac{L}{2}\right] \cup \left[\frac{L}{2}, \infty\right) \end{cases}$$

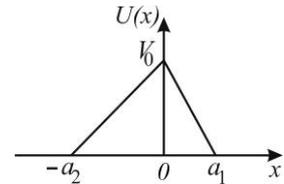
Найти волновую функцию частицы в импульсном представлении  $\psi(p)$  в тот же момент времени.

15. Частица массы  $m$  находится в двумерном потенциале  $U(x, y) = m\omega^2(x^2 + y^2)/2$  (двумерный гармонический осциллятор). Найти уровни энергии  $E$  частицы и кратности их вырождения  $g$ .

16. Свободная нерелятивистская частица массы  $m$  с энергией  $E$  движется из минус бесконечности в положительном направлении оси  $x$ . В точке  $x = 0$  потенциальная энергия частицы скачком увеличивается на величину  $U_0$  ( $E > U_0$  см. рис). Вычислить коэффициенты отражения  $R$  и прохождения  $T$  частицы.



17. Найти коэффициент прохождения нерелятивистской частицы массы  $m$  через треугольный потенциальный барьер, высота которого  $V_0$ , а ширина основания  $a$  (см. рис.). Энергия частицы  $0 < E \ll V_0$ . Вычислить только экспоненциальный множитель.



18. Найти собственные значения и собственные векторы оператора проекции спина  $\hat{s}_z$ .
19. Найти расщепление  $\Delta E$  уровней энергии свободного электрона в однородном стационарном магнитном поле с индукцией  $B$ .
20. Концентрация свободного нерелятивистского электронного (неполяризованного) газа равна  $n$ . Найти энергию  $\varepsilon_F$  и импульс  $p_F$  Ферми электронного газа.
21. Энергия Ферми свободного нерелятивистского электронного (неполяризованного) газа равна  $\varepsilon_F$ . Найти среднюю энергию электронов  $\bar{E}$  при нулевой температуре ( $T = 0$  К).
22. Концентрация свободного нерелятивистского электронного (неполяризованного) газа равна  $n$ . Оценить молярную теплоемкости  $C_V$  электронного газа при  $kT \ll \varepsilon_F$ .
23. Получить формулу Планка для спектральной плотности энергии  $\rho_\omega(T)$  исходя из распределения Бозе-Эйнштейна.
24. Найти температуру Дебая  $T_D$  для акустических фононов одной поляризации, если известна скорость звука  $c_{зв}$  в кристалле и концентрация атомов  $n$ .
25. Найти теплоемкость  $C_V$  кристалла, считая, что фононы имеют линейный закон дисперсии  $\omega = c_{зв} k$ . Рассмотреть случай малых температур  $T \ll T_D$ .
26. Найти температуру Дебая  $T_D$  двумерного кристалла, считая закон дисперсии фононов в кристалле линейным. Известна скорость звука  $c_{зв}$  в кристалле и поверхностная концентрация атомов  $n$ .
27. Поверхностная концентрация свободного двумерного нерелятивистского электронного (неполяризованного) газа равна  $n_2$ . Найти энергию  $\varepsilon_F^{(2D)}$  и импульс  $p_F^{(2D)}$  Ферми электронного газа. при нулевой температуре ( $T = 0$  К).
28. Энергия Ферми свободного двумерного нерелятивистского электронного (неполяризованного) газа равна  $\varepsilon_F^{(2D)}$ . Найти его среднюю кинетическую энергию  $\bar{E}^{(2D)}$  при нулевой температуре ( $T = 0$  К).