

Волновые свойства частиц

(1923)

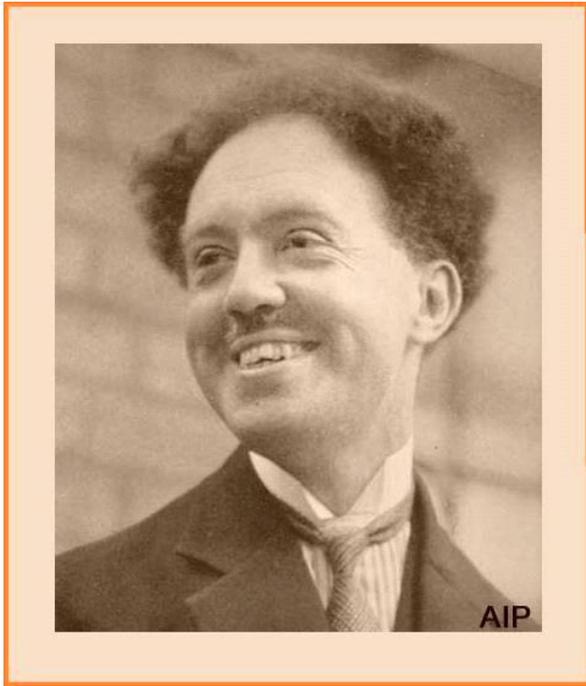
Волна де Бройля

$$\Psi(\vec{r}, t) = A e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\vec{r} - Et)}$$

$$E = \hbar\omega$$

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}$$

$$\lambda_{\text{дБ}} = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{h}{p}$$



Louis-Victor Pierre Raymond deBroglie



1929

А.Эйнштейн М.Борну о диссертации де Бройля (1925)

“Прочтите ее! Хотя и кажется, что ее писал сумасшедший, написана она солидно.”

Свойства волн де Бройля

Нерелятивистский случай

$$\frac{v}{c} \ll 1 \quad E = \frac{p^2}{2m}$$

Для электрона

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mE}} = \frac{6.28 \cdot 1.05 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 0.9 \cdot 10^{-30} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} E}} = \frac{1.23}{\sqrt{E[\text{эВ}]}} \text{ нм}$$

$$V_{gp} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp} = v$$

Групповая скорость
равна скорости частицы

$$V_{\phi} = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p} = \frac{p}{2m} = \frac{\hbar k}{2m}$$

Волны де Бройля
испытывают дисперсию даже в вакууме!
Это приводит к “размыванию” волнового пакета

Свойства волн де Бройля

Релятивистский случай

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4 \quad E = E_{\text{кин}} + mc^2$$

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{E^2 - m^2 c^4}}$$

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{E_{\text{кин}} (E_{\text{кин}} + 2mc^2)}} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mE_{\text{кин}}}} \frac{1}{\sqrt{1 + E_{\text{кин}} / (2mc^2)}}$$

Ошибка по нерелятивистской формуле меньше 1%

Электрон $mc^2=0.51$ МэВ $E_{\text{кин}} < 20$ кэВ

Протон $mc^2=938.2$ МэВ $E_{\text{кин}} < 37$ МэВ

Свойства волн де Бройля

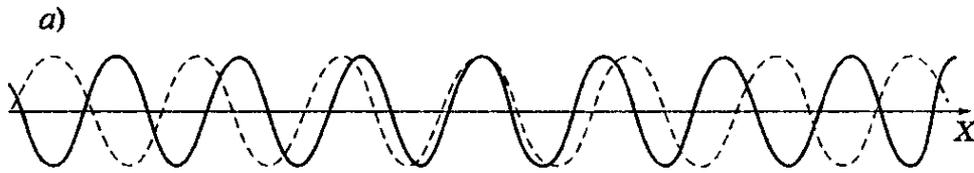
$$\lambda = h / p$$

Длины волн де Бройля для различных объектов

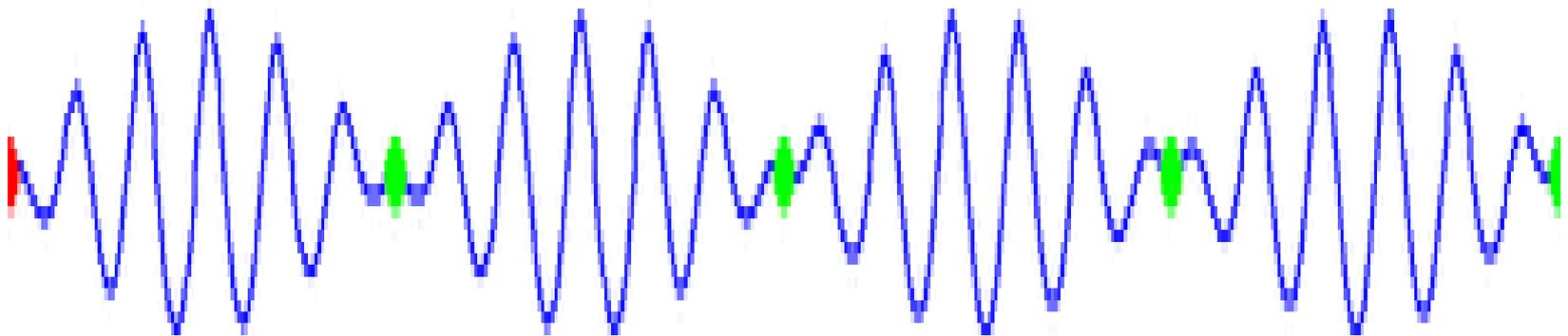
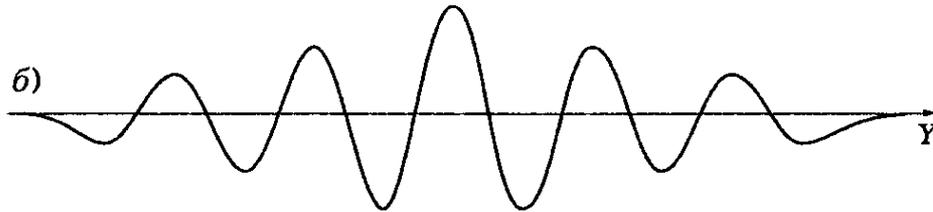
Объект	Масса (г)	Скорость(м/с)	λ (м)
Медленные электроны	9×10^{-28}	1.0	7×10^{-4}
Быстрые электроны	9×10^{-28}	5.9×10^6	1×10^{-10}
Альфа частицы	6.6×10^{-24}	1.5×10^7	7×10^{-15}
Один г массы	1.0	0.01	7×10^{-29}
Баскетбольный мяч	142	25.0	2×10^{-34}
Земля	6.0×10^{27}	3.0×10^4	4×10^{-63}

Волновой пакет

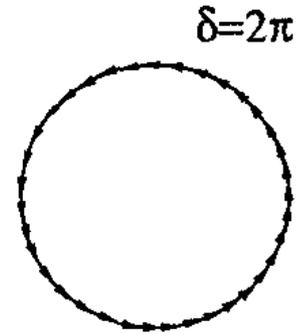
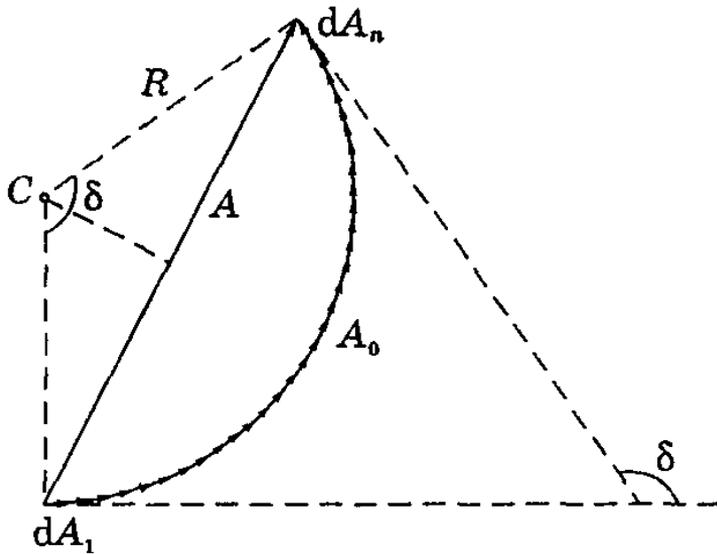
$$E_1 = A \cos(\omega t - kx),$$
$$E_2 = A \cos[(\omega + d\omega)t - (k + dk)x].$$
$$E = E_1 + E_2 = 2A \cos \frac{t d\omega - x dk}{2} \cos(\omega t - kx).$$



$$V_{gp} = \frac{d\omega}{dk} \quad V_{\phi} = \frac{\omega}{k}$$

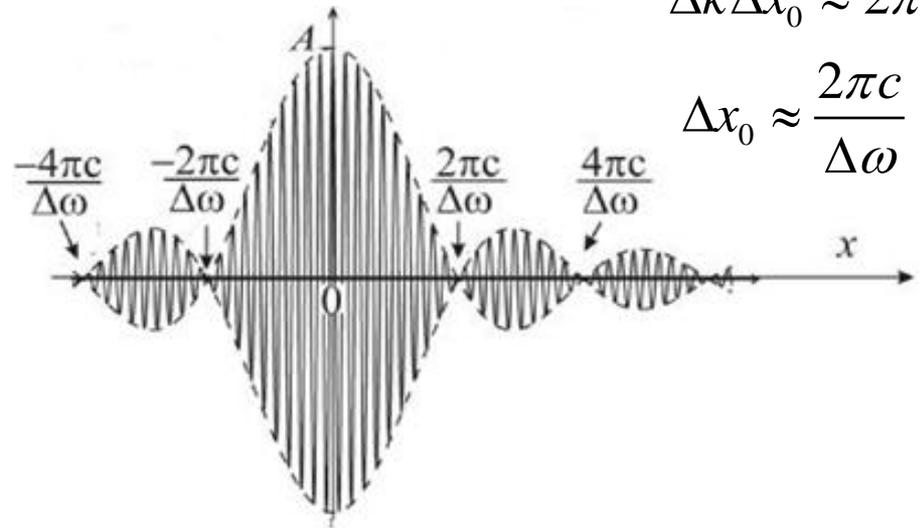


Волновой пакет



$$A = 2R \sin \frac{\delta}{2}, \quad A_0 = R\delta.$$

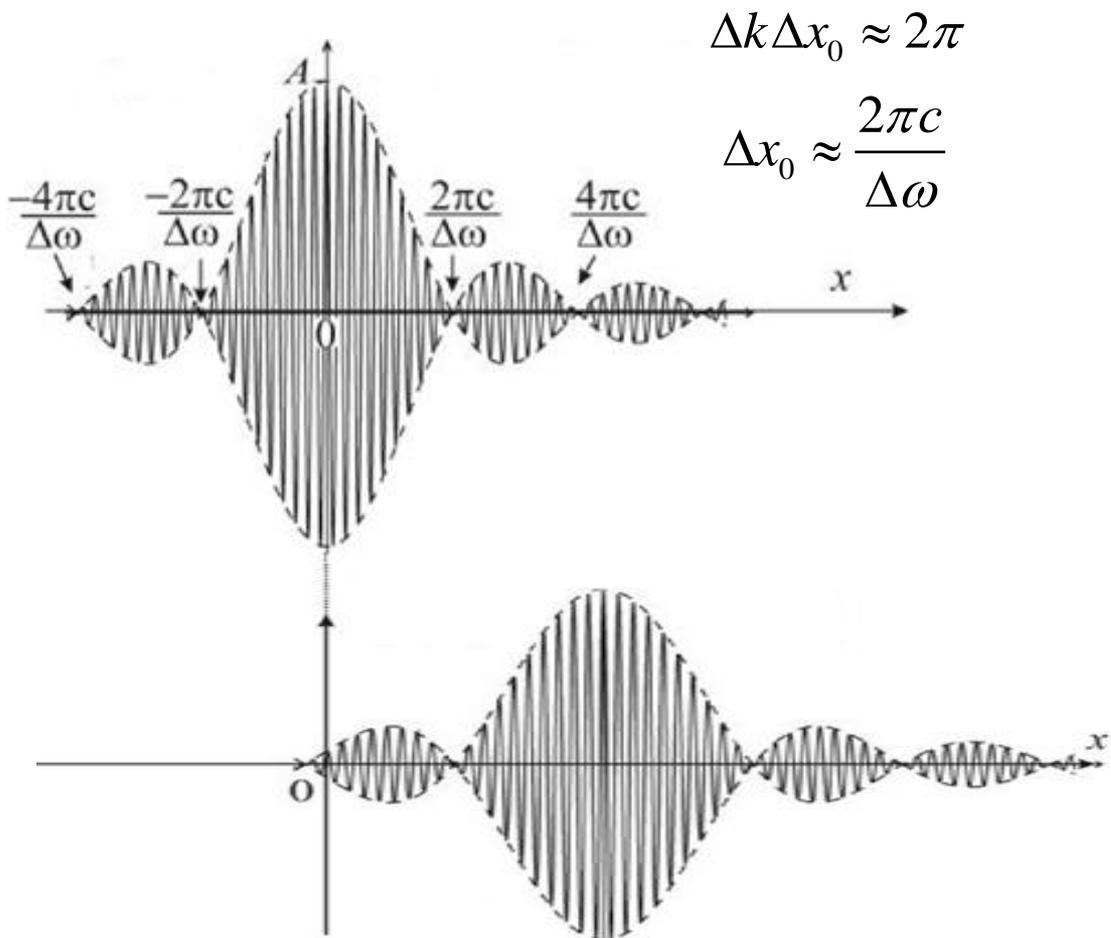
$$A = A_0 \frac{\sin(\delta/2)}{\delta/2}$$



$$\Delta k \Delta x_0 \approx 2\pi$$

$$\Delta x_0 \approx \frac{2\pi c}{\Delta\omega}$$

“Расплывание” волнового пакета



$$\Delta k \Delta x_0 \approx 2\pi$$

$$\Delta x_0 \approx \frac{2\pi c}{\Delta \omega}$$

$$(\Delta x)_t = (\Delta x)_0 + (\Delta u)t$$

$$\Delta u = \left(\frac{du}{dk}\right)_0 \Delta k = \left(\frac{d^2 \omega}{d^2 k}\right)_0 \Delta k$$

$$\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 = \frac{dE}{dp} = \frac{p}{m} \Rightarrow \left(\frac{d^2 \omega}{d^2 k}\right)_0 = \frac{\hbar}{m}$$

$$\Delta u = \left(\frac{du}{dk}\right)_0 \Delta k = \left(\frac{d^2 \omega}{d^2 k}\right)_0 \Delta k$$

Расплывается вдвое за время τ

$$\frac{(\Delta x)_t - (\Delta x)_0}{(\Delta x)_0} = \frac{(\Delta u)\tau}{(\Delta x)_0} = 1$$

$$\tau = \frac{m}{2\pi\hbar} (\Delta x_0)^2$$

Видео

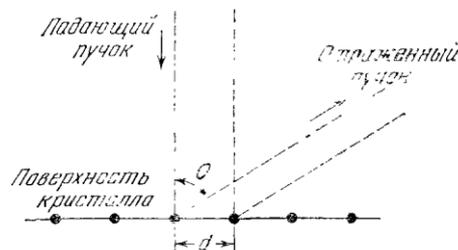
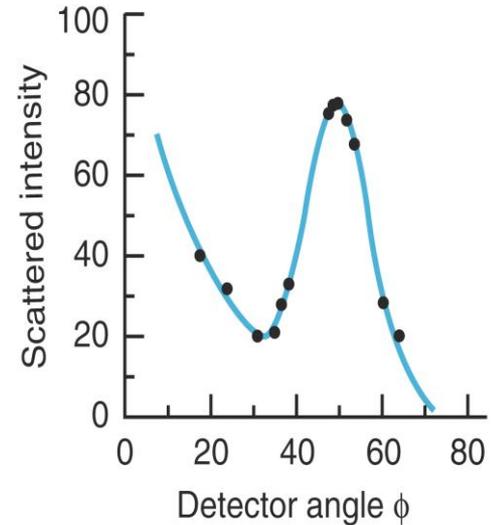
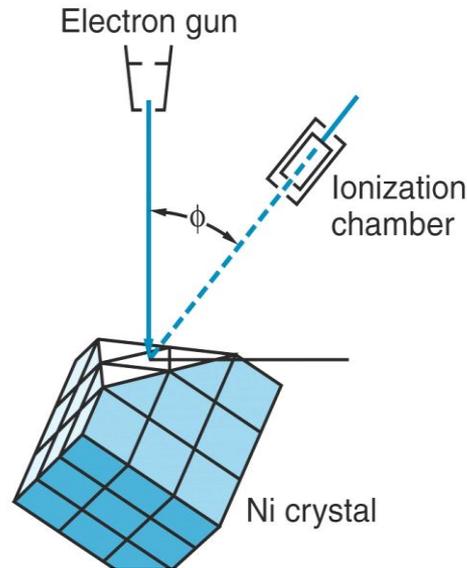
Электрон в атоме

$$\Delta x_0 \approx 10^{-10} \text{ м} \quad m \approx 10^{-30} \text{ кг} \quad \tau \approx 0.16 \cdot 10^{-16} \text{ с}$$

Пылинка

$$\Delta x_0 \approx 10^{-6} \text{ м} \quad m \approx 10^{-6} \text{ кг} \quad \tau \approx 0.16 \cdot 10^{16} \text{ с} \approx 10^8 \text{ лет}$$

Опыт Девиссона-Джермера (1927)



$$d \sin \theta = m\lambda$$

$$d = 2.15 \text{ \AA} \quad E = 54 \text{ эВ}$$

$$\theta = 50^\circ \quad m = 1$$

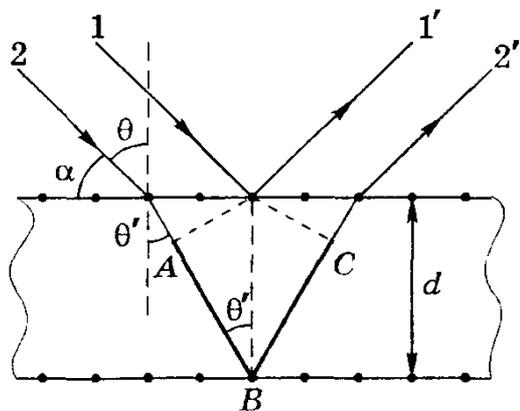
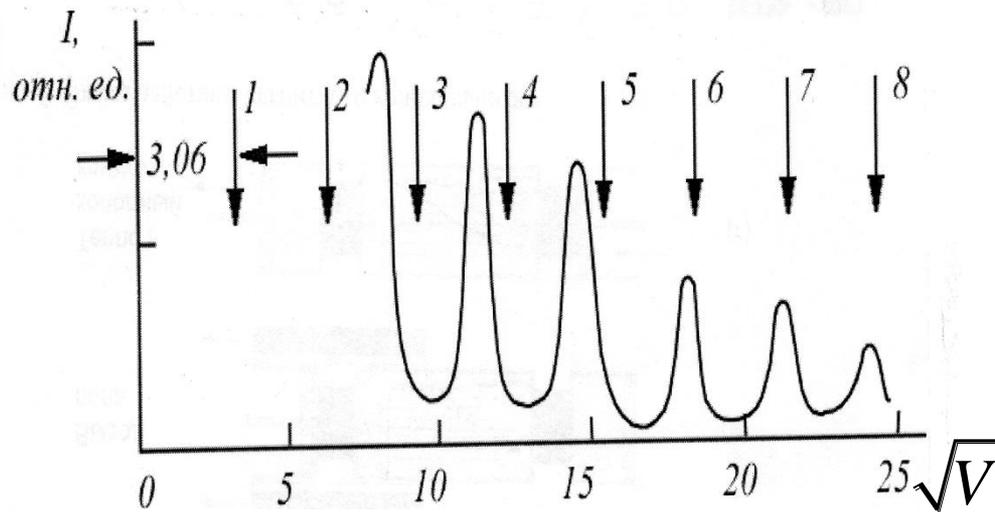
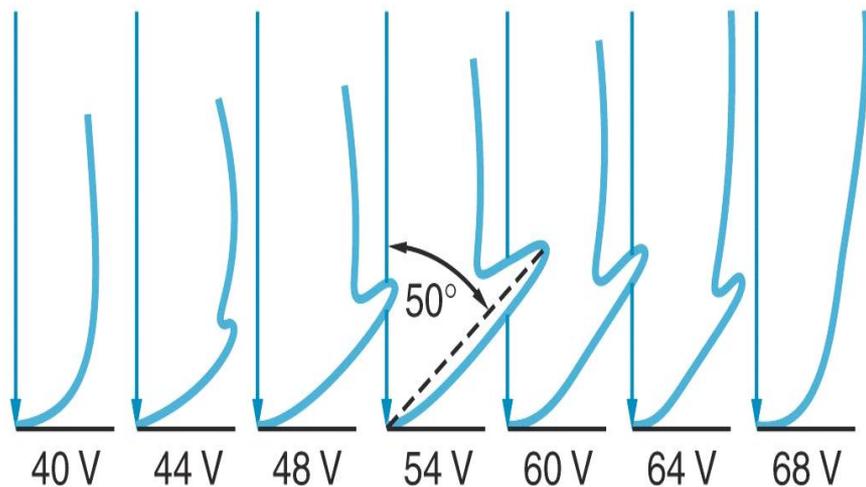
$$\lambda_{\text{эксп}} = 1.65 \text{ \AA}$$

$$\lambda_{\text{теор}} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mE}} = 1.67 \text{ \AA}$$



1937

Опыт Девиссона-Джермера (1927)



$$\sin \theta = n \sin \theta'$$

$$\Delta = n(ABC) = n \cdot 2d \cos \theta'$$

$$2dn \cos \theta' = 2dn \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta}{n^2}} = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} = m\lambda$$

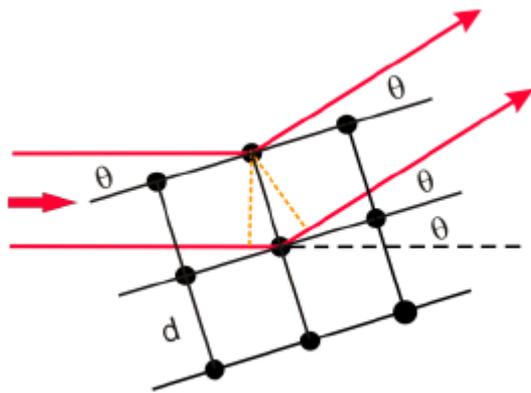
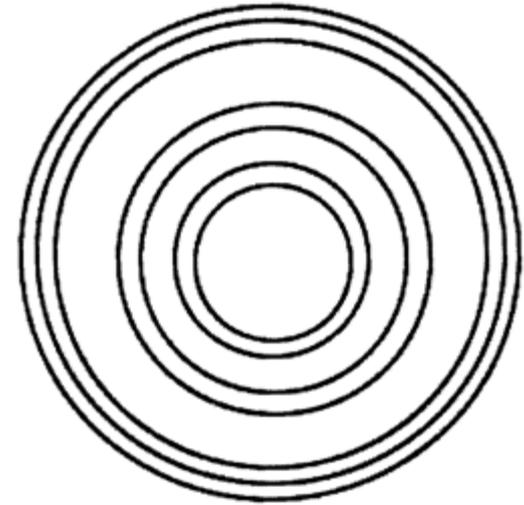
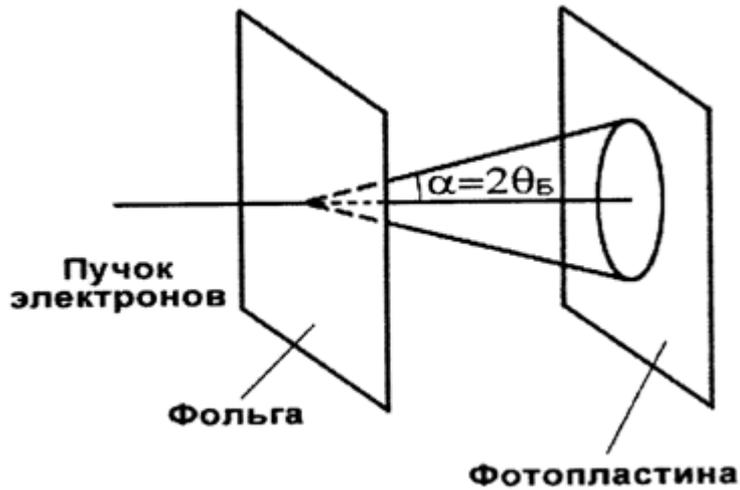
$$d \sin \theta = m\lambda \quad \sqrt{V} \sim m$$

$$n = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\sqrt{eV + A_{\text{вых}}}}{\sqrt{eV}} = \sqrt{1 + \frac{e\phi}{eV}}$$

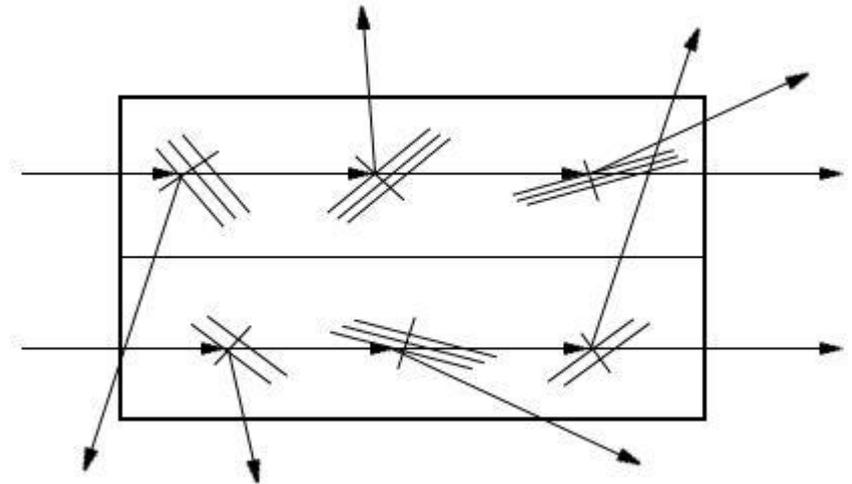
$$2d \sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha} = m\lambda$$

Опыт Дж.П.Томсона (1927)

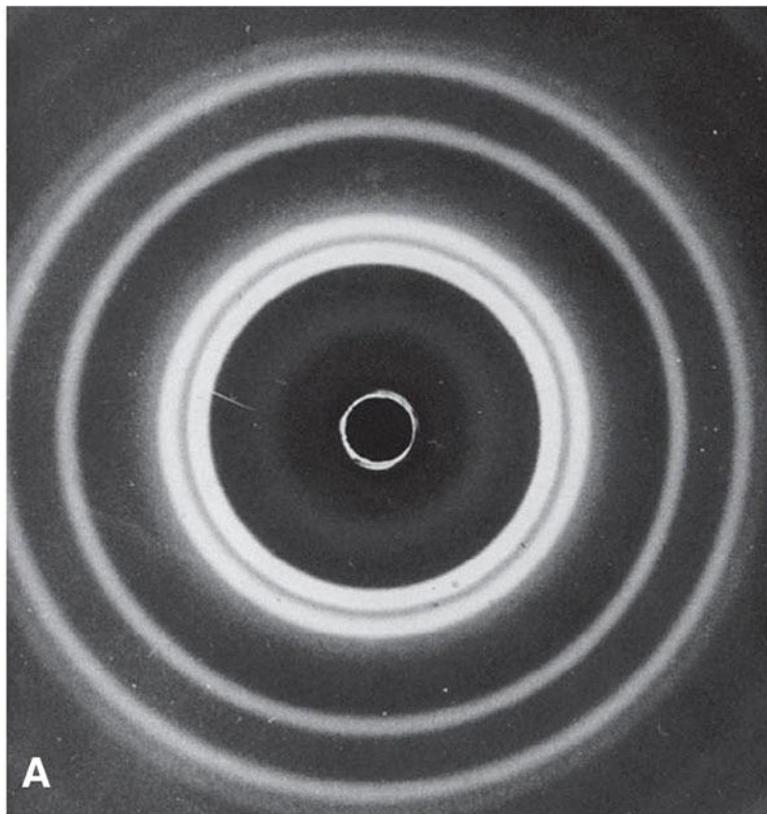
Дифракция электронов на поликристаллическом образце



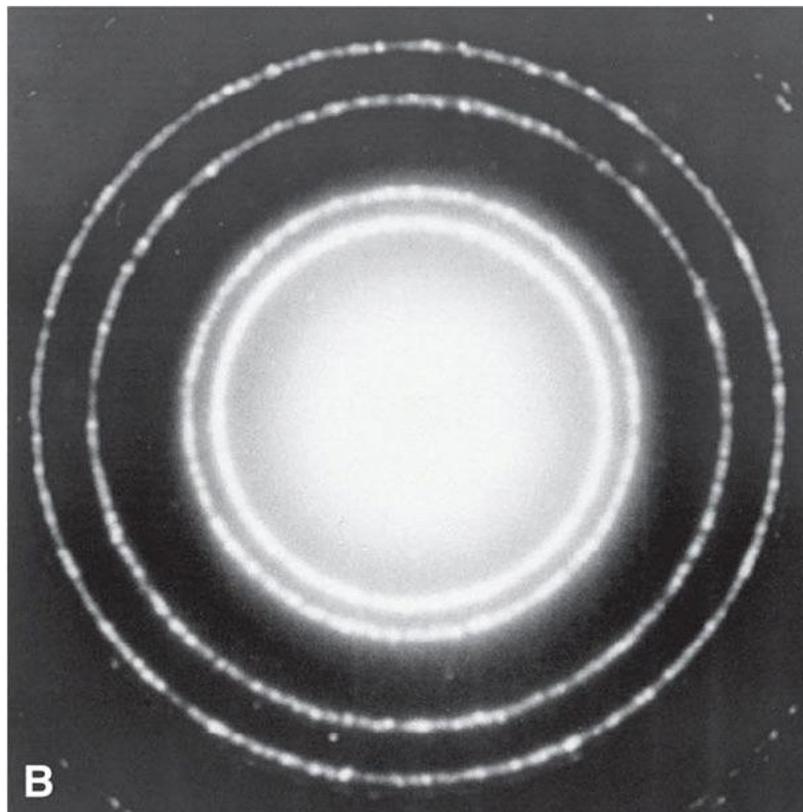
Брэгговское отражение от микрокристалла



Дифракция рентгеновских лучей и электронов

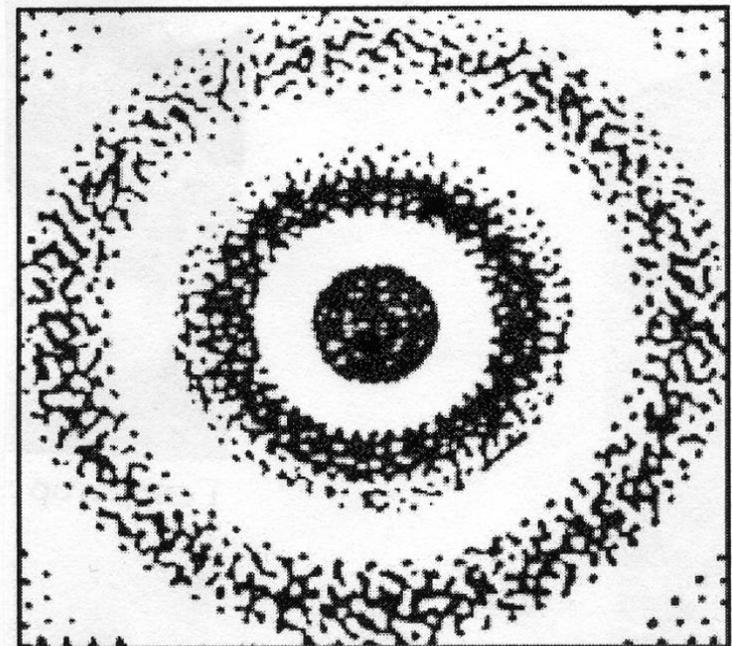
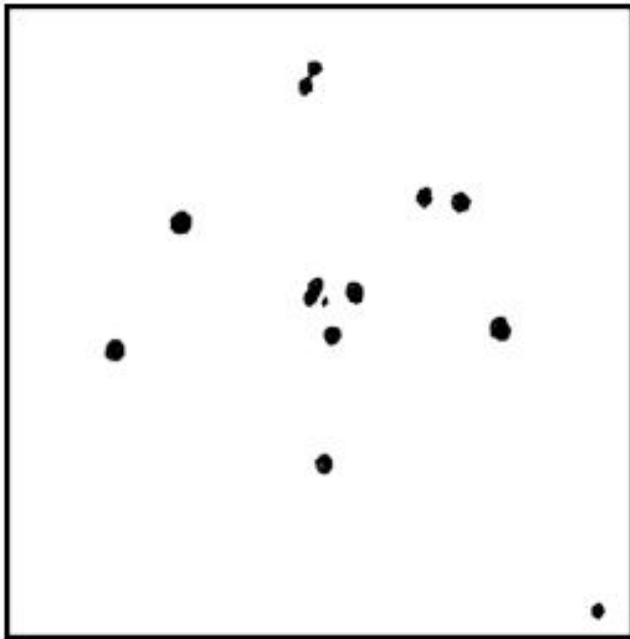


Дифракция рентгеновских лучей
на алюминиевой фольге

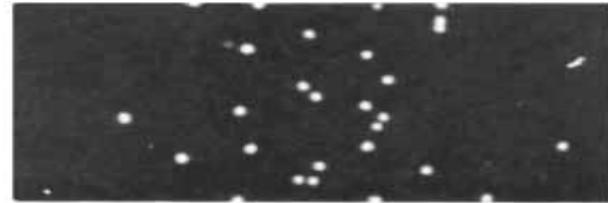
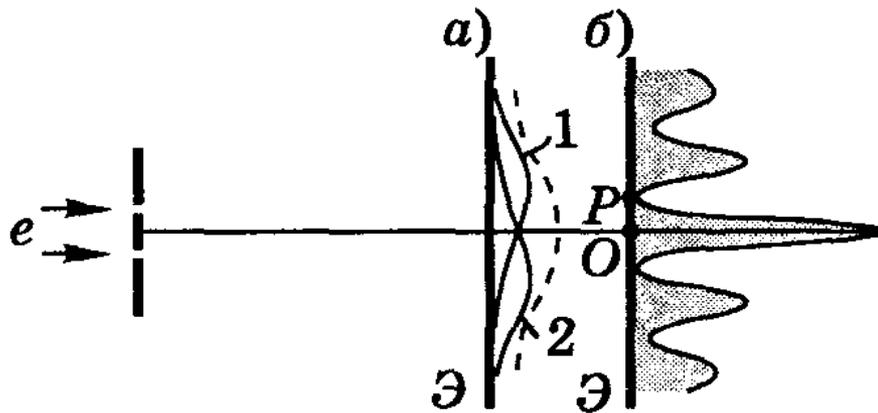


Дифракция электронов на
алюминиевой фольге

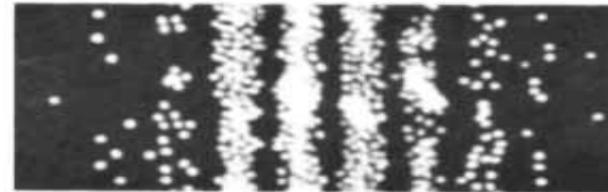
Дифракция одиночных электронов (В.А.Фабрикант 1947 г.)



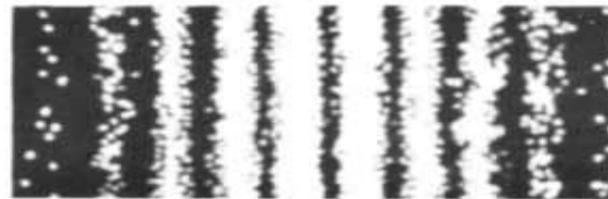
Дифракция одиночных электронов на двух щелях



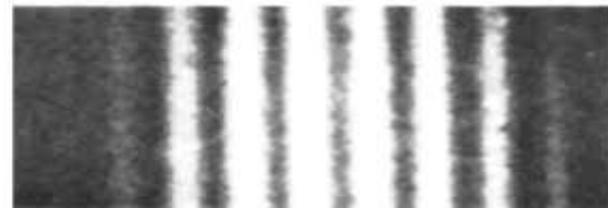
(a) After 28 electrons



(b) After 1000 electrons



(c) After 10000 electrons



(d) Two-slit electron pattern

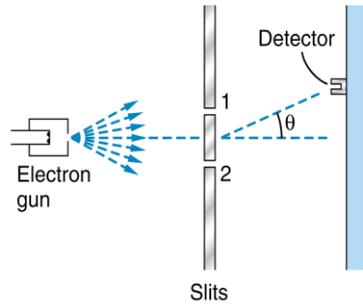
Дифракция электронов

В газете [The New York Times](#) была опубликована статья сотрудника философского факультета университета Нью-Йорка Роберта Криза (Robert Crease) и историка Брукхевенской Национальной Лаборатории Стони Брук (Stony Brook), которые провели опрос среди американских физиков, чтобы определить десять красивейших экспериментов за всю историю этой науки.

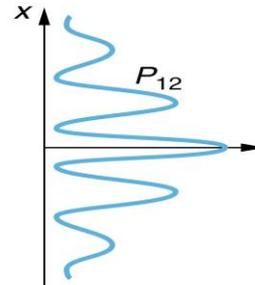
1 место:

Проведенный в 1961 году эксперимент немецкого физика Клауса Йонссона, в котором он доказал, что законы интерференции и дифракции действуют для пучков элементарных частиц также, как для световых волн. Эксперимент Йонссона практически повторял двухвековой давности эксперимент Томаса Юнга, только вместо луча света был использован пучок электронов.

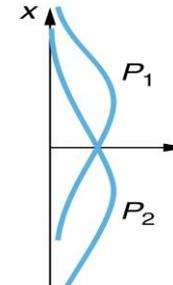
Дифракция электронов на двух щелях



Jönsson, 1961



two slits open

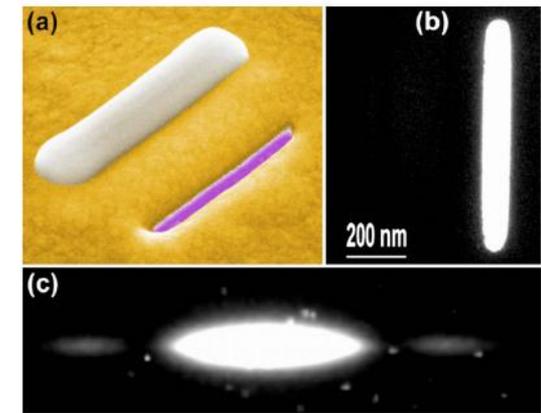
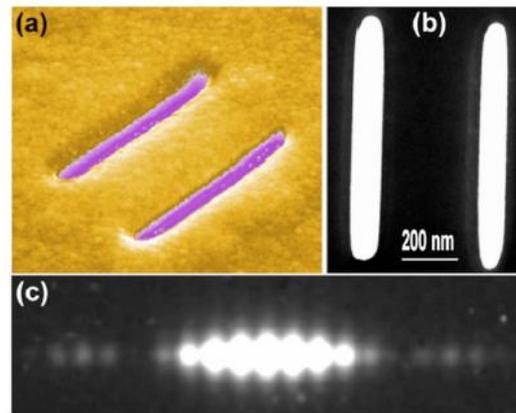
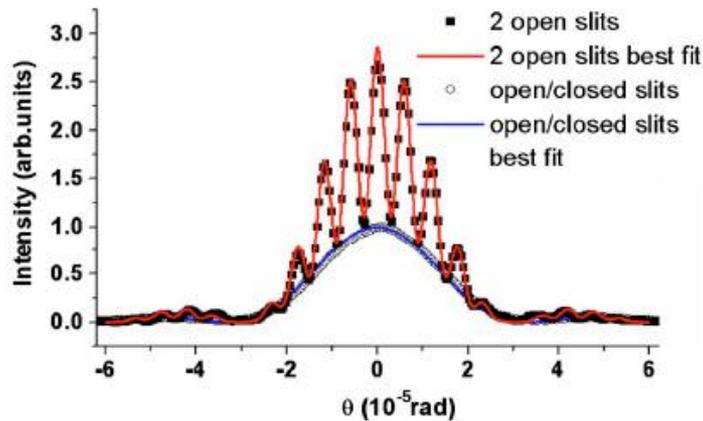
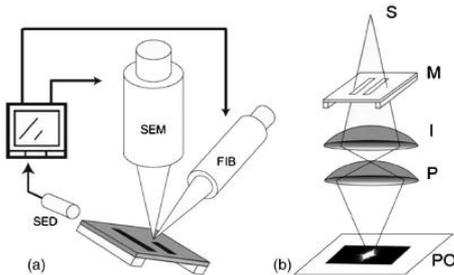


one slit open

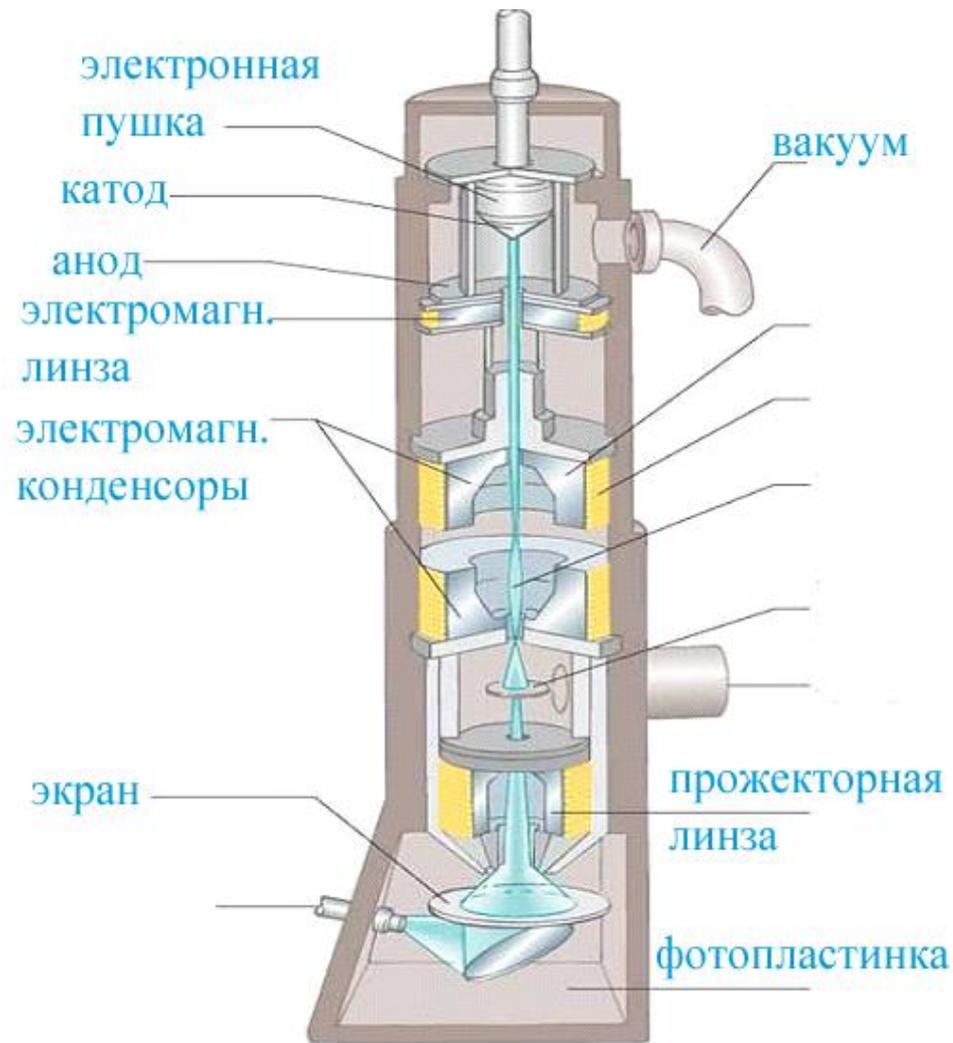
APPLIED PHYSICS LETTERS 93, 073108 (2008)

Nanofabrication and the realization of Feynman's two-slit experiment

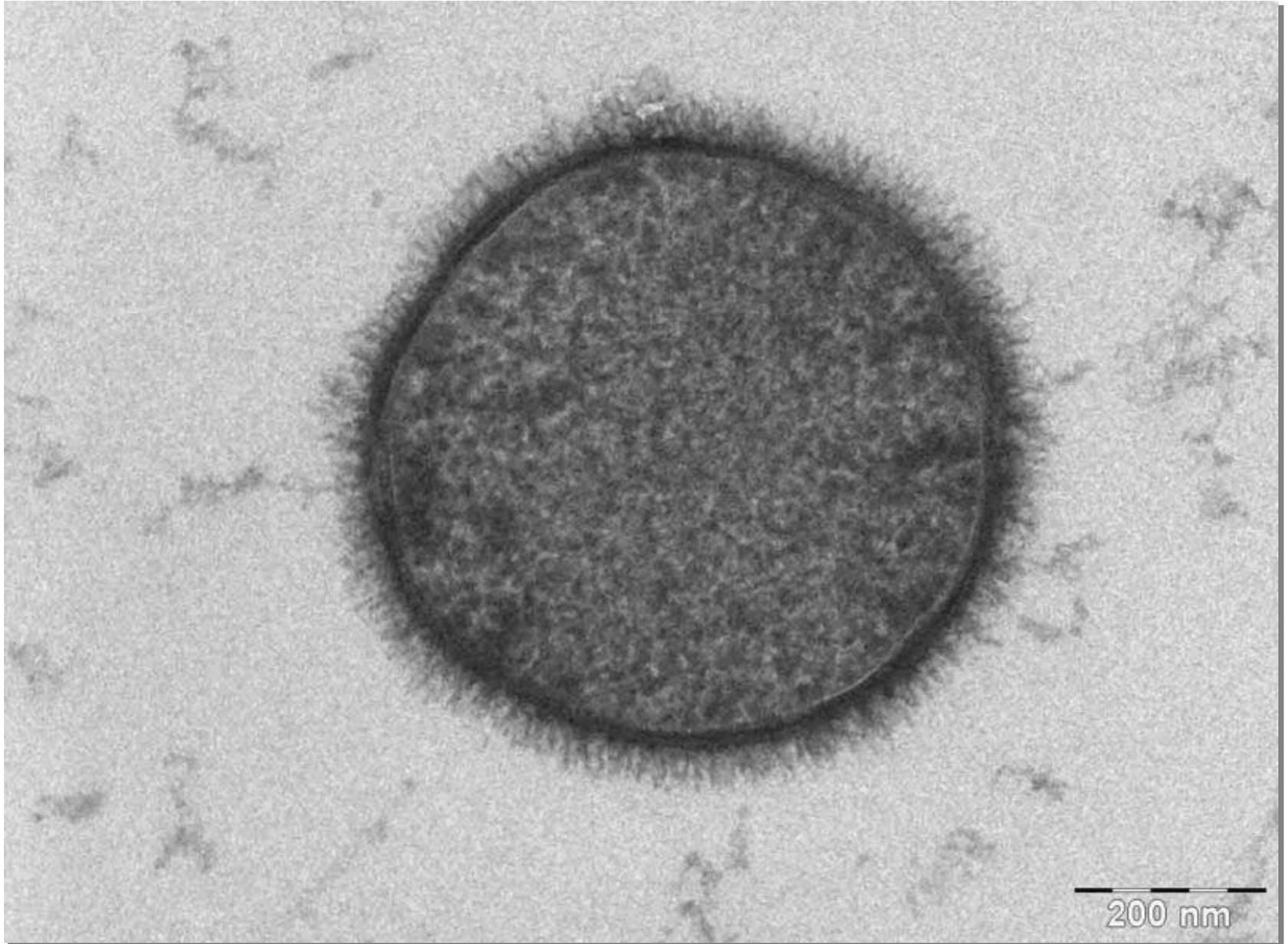
Stefano Frabboni,^{1,2,a)} Gian Carlo Gazzadi,² and Giulio Pozzi³



Электронный микроскоп



TEM image of a bacterium



Принцип неопределенности Гейзенберга (1927)



Werner Heisenberg
(1901-1976)

Нельзя характеризовать мгновенное состояние микрочастицы точными значениями ее положения и импульса

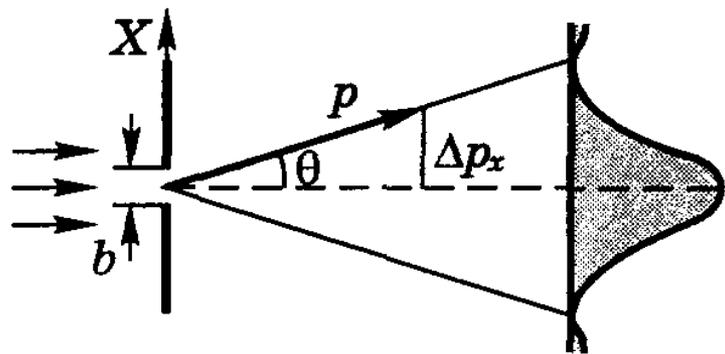
$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar$$

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$$



Нобелевская премия по физике (1932)
Мюнхенский университет

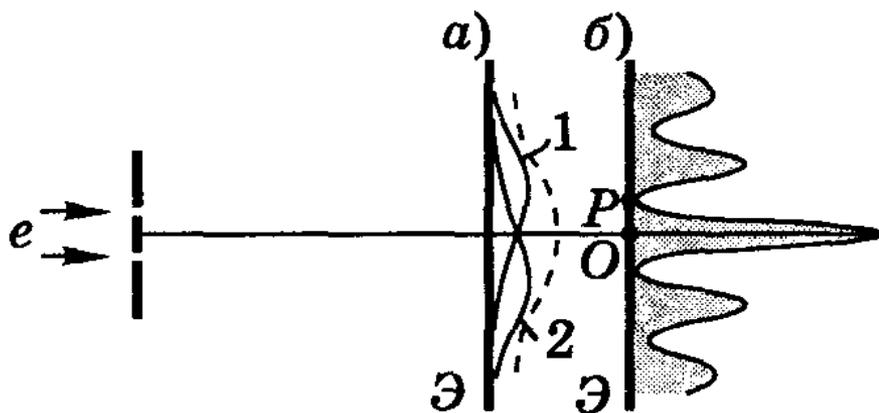
Принцип неопределенности Гейзенберга (1927)



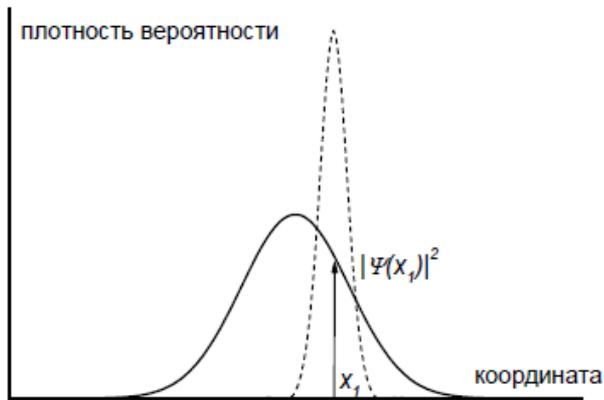
$$b \sin \theta = \lambda.$$

$$\Delta p_x \approx p \sin \theta.$$

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \approx p \lambda = 2\pi \hbar,$$



Квантовые измерения



Квантовое измерение
изменяет состояние
частицы

