

Глава 7

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ СТАЦИОНАРНОГО ТОКА
В ВАКУУМЕ

§ 7.1. Теоретический материал

Магнитостатическое поле. Всякий движущийся заряд порождает в окружающем пространстве помимо электрического, и магнитное поле. Магнитное поле, порождаемое постоянными (стационарными) токами или покоящимися магнитами, является магнитостатическим полем. Характеристики такого поля не изменяются с течением времени. С другой стороны, на любой движущийся заряд, помещённый во внешнее магнитное поле, действует со стороны этого поля некоторая сила.

Элемент линейного тока – если электрический ток силы I течет по бесконечно тонкому (в физическом смысле) проводнику, то он называется линейным током. В этом случае можно говорить об элементе тока на участке dl проводника. Величина $I dl$ называется элементом линейного тока. Здесь вектор dl совпадает по направлению с током, текущим в проводнике. Каждый элемент линейного тока создаёт своё магнитостатическое поле.

Магнитная постоянная – в системе единиц СИ $\mu_0 \equiv 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м (равенство точное), $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$, где c – скорость света в вакууме.

Взаимодействие элементов линейного тока описывается **законом Био–Савара–Лапласа–Ампера**: сила, действующая на элемент линейного тока $I_2 dl_2$ со стороны элемента линейного тока $I_1 dl_1$ равна

$$d\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 I_1 [dl_2 [dl_1 \mathbf{r}_{12}]]}{r_{12}^3}, \quad (7.1)$$

где \mathbf{r}_{12} – вектор, направленный от элемента $I_1 dl_1$ к $I_2 dl_2$.

Взаимодействие элементов тока не удовлетворяет третьему закону Ньютона $d\mathbf{F}_{12} \neq -d\mathbf{F}_{21}$, однако для суммарных сил взаимодействия замкнутых контуров с током третий закон Ньютона выполняется $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$.

Вектор магнитной индукции \mathbf{B} . В соответствии с принципом близкодействия (аналогично электростатике) взаимодействие двух

элементов тока можно представить следующим образом: элемент тока $I_1 dl_1$ создаёт в заданной точке магнитное поле, величина и направление которого характеризуется силовой характеристикой поля – вектором магнитной индукции \mathbf{B} .

Величина магнитной индукции пропорциональна максимальной силе, действующей на элемент тока (см. (7.2)), или максимальному вращающему моменту, действующему на замкнутый контур с током.

Единицы измерения магнитной индукции – в системе единиц СИ единицей измерения индукции магнитного поля является Тесла $\left(\text{Тл} = \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Вб}}{\text{м}^2} \right)$. В системе единиц Гаусса индукция магнитного поля измеряется в Гауссах: $1 \text{ Тл} = 10^4 \text{ Гс}$.

Линия магнитного поля – линия, касательная к которой в каждой точке совпадает по направлению с вектором индукции магнитного поля \mathbf{B} в данной точке. Линии магнитного поля – замкнутые линии в силу вихревого характера поля \mathbf{B} .

Закон Ампера: сила, действующая на элемент линейного тока, помещенный в магнитное поле индукции \mathbf{B} , равна

$$d\mathbf{F} = I[d\mathbf{l} \mathbf{B}] . \quad (7.2)$$

Закон Био–Савара–Лапласа: элемент линейного тока $I dl$ создает магнитное поле, индукция которого в точке с радиус-вектором \mathbf{r} , определяется соотношением

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I[d\mathbf{l} \mathbf{r}]}{r^3} ; \quad (7.3)$$

тогда для замкнутого линейного тока I :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L \frac{[d\mathbf{l} \mathbf{r}]}{r^3} k ; \quad (7.4)$$

для объемных токов плотностью \mathbf{j} :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{[\mathbf{j} \mathbf{r}]}{r^3} dV . \quad (7.5)$$

Принцип суперпозиции – вектор индукции магнитного поля, создаваемого несколькими источниками, равен сумме векторов магнитных индукций, создаваемых каждым из источников поля при отсутствии других:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \dots \quad (7.6)$$

Сила Лоренца: сила, действующая на точечный заряд, движущийся в электромагнитном поле со скоростью \mathbf{v}

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v}\mathbf{B}]. \quad (7.7)$$

Циркуляция вектора \mathbf{A} по замкнутому контуру L – интеграл вида

$$\oint_L \mathbf{A} d\mathbf{l}.$$

Ротор векторной функции \mathbf{A} – вектор, проекция которого на положительное направление нормали \mathbf{n} (положительное направление вектора нормали \mathbf{n} и направление обхода контура связаны правилом правого винта) равна пределу отношения циркуляции вектора \mathbf{A} по физически бесконечно малому контуру L к площади ΔS , ограниченной этим контуром

$$\text{rot}_n \mathbf{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_L \mathbf{A} d\mathbf{l}.$$

В декартовой системе координат с ортами \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} ротор вектора \mathbf{A} определяется соотношением, которое удобно записать в виде символического детерминанта:

$$\text{rot } \mathbf{A} = [\nabla \mathbf{A}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}.$$

Теорема Стокса: циркуляция вектора \mathbf{A} по произвольному контуру L равна потоку ротора вектора \mathbf{A} через любую поверхность, опирающуюся на контур L (позволяет преобразовать интеграл по контуру в поверхностный интеграл):

$$\oint_L \mathbf{A} d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{A} d\mathbf{S} \quad (7.8)$$

(см. теоретический материал главы 2, (2.7) – (2.10)).

Теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля в интегральной форме (закон полного тока):

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 I, \quad (7.9)$$

где I – полный ток, охватываемый контуром L . Направление обхода контура и знак тока связаны правилом правого винта.

Дифференциальные уравнения магнитного поля стационарного тока в вакууме:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad (7.10)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (7.11)$$

Уравнение (7.11) является дифференциальной формулировкой закона полного тока (7.9).

Уравнения (7.10) и (7.11) составляют систему уравнений Максвелла для магнитного поля стационарного тока в вакууме.

Вихревой характер магнитного поля: интегральное уравнение, соответствующее уравнению (7.10), имеет вид

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0. \quad (7.12)$$

Это означает, что не существует «магнитных зарядов», являющихся источниками этого поля. Математическим условием вихревого характера поля некоторого вектора \mathbf{A} является условие $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$. Силовые линии вихревого поля являются замкнутыми.

Так как $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, то магнитное поле является вихревым.

Векторный магнитный потенциал: поскольку $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, а $\operatorname{div} (\operatorname{rot} \mathbf{A}) \equiv 0$, то существует вектор \mathbf{A} такой, что

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}; \quad (7.13)$$

он называется векторным магнитным потенциалом. Векторный потенциал магнитного поля, создаваемого элементом тока $I d\mathbf{l}$, равен

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r} d\mathbf{l}.$$

Калибровка векторного магнитного потенциала. Векторный магнитный потенциал \mathbf{A} (так же, как и скалярный электрический потенциал φ) определен неоднозначно (с точностью до градиента произвольной функции, поскольку $\operatorname{rot} (\operatorname{grad} f) \equiv 0$). Эту неоднозначность можно устранить, наложив на потенциал дополнительное условие, называемое условием калибровки:

1) Кулоновская калибровка (для магнитоэстатических задач):

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0; \quad (7.14)$$

в этом случае \mathbf{A} удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}.$$

2) Лоренцевская калибровка (для динамических задач):

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (7.15)$$

На границах раздела сред тангенциальная компонента векторного магнитного потенциала \mathbf{A} непрерывна.

Магнитный момент плоского линейного контура площади S с током I равен

$$\mathbf{p}_m = IS \mathbf{n} \quad (7.16)$$

где \mathbf{n} – положительная нормаль к контуру, обходимому по направлению тока (рис. 7.1).

Магнитный момент электрического тока – векторная величина, определяемая соотношением:

$$\mathbf{p}_m = \frac{1}{2} \int_V [\mathbf{r} \mathbf{j}] dV \quad \text{для объемного тока плотности } \mathbf{j}, \quad (7.17)$$

$$\mathbf{p}_m = \frac{1}{2} \int_S [\mathbf{r} \mathbf{i}] dS \quad \text{для поверхностного тока плотности } \mathbf{i}, \quad (7.18)$$

$$\mathbf{p}_m = \frac{1}{2} I \int_L [\mathbf{r} d\mathbf{l}] \quad \text{для линейного тока } I, \quad (7.19)$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор, проведенный из начала отсчета к элементу тока. Магнитный момент замкнутой системы токов не зависит от выбора начала отсчета.

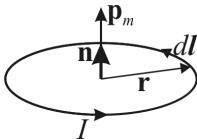


Рис. 7.1. Магнитный момент плоского кругового контура с током.

Пользуясь определением (7.19) легко получить выражение (7.16) для магнитного момента плоского линейного кругового контура радиуса R с током I (рис. 7.1):

$$\mathbf{p}_m = \frac{1}{2} I \int_L [\mathbf{r} d\mathbf{l}] = \frac{1}{2} I \int_{2\pi R} \mathbf{n} R d\mathbf{l} = I\pi R^2 \mathbf{n} = IS \mathbf{n},$$

или для произвольного плоского линейного контура:

$$\mathbf{p}_m = \frac{1}{2} I \int_L [\mathbf{r} d\mathbf{l}] = I \mathbf{n} \int_S dS = IS \mathbf{n},$$

где учтено, что $\frac{1}{2} [\mathbf{r} d\mathbf{l}] = \mathbf{n} \frac{1}{2} r dl \sin(\mathbf{r} \wedge d\mathbf{l}) = \mathbf{n} dS$ – площадь элементарного сектора, соответствующего дуге dl .

Магнитный диполь: если расстояние r от точки, где рассматривается магнитное поле, много больше линейных размеров l области, в которой существует электрический ток, то такой контур с током называют магнитным диполем. **Вектор индукции магнитного поля магнитного диполя**

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\mathbf{p}_m \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_m}{r^3} \right). \quad (7.20)$$

Эта формула совпадает по форме с выражением для напряженности электрического поля точечного электрического диполя (1.4).

В пределе $\frac{l}{r} \rightarrow 0$ приведенная формула становится асимптотически точной, а магнитный диполь называется точечным. Если вектор \mathbf{r} сонаправлен с вектором \mathbf{p}_m , то $(\mathbf{p}_m \mathbf{r}) \mathbf{r} = \mathbf{p}_m r^2$ и **индукция магнитного поля на оси диполя** выражается соотношением:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mathbf{p}_m}{r^3}. \quad (7.21)$$

§ 7.2. Основные типы задач (классификация)

7.1. Определение индукции магнитного поля, создаваемого линейным током заданной конфигурации.

7.2. Определение индукции магнитостатического поля от безграничных распределений токов, обладающих плоской или осевой симметрией.

7.3. Определение индукции магнитостатического поля, созданного заданным распределением магнитных диполей.

7.4. Определение индукции магнитного поля с использованием векторного магнитного потенциала (эквивалентные плоские электростатические и магнитостатические задачи).

§ 7.3. Методы решения и примеры решения задач

В начале решения необходимо проанализировать условие и определить тип, к которому можно отнести данную задачу.

Особое внимание следует обратить на распределение токов или диполей – существуют ли пространственные ограничения рассматриваемой системы, имеется ли симметрия в распределении токов и т.п. Исходя из принципов симметрии и суперпозиции, определить направление силовых линий результирующего магнитного поля и сил, действующих на диполи и проводники с током, фигурирующие в данной задаче.

Среди всего многообразия задач, встречающихся в задачниках, можно выделить некоторые базовые задачи. Решение других задач основывается на результатах, полученных при решении базовых задач. В данной теме к таким основным задачам можно отнести следующие – определение магнитной индукции прямого тока (7.3.1), кругового витка (7.3.3), бесконечной плоскости, по которой течет ток с постоянной плотностью (7.3.6), бесконечной полый трубки (7.3.8) и сплошного цилиндрического провода (7.3.10). При анализе условия задачи следует попробовать провести аналогию между заданной системой и системами из одной или нескольких базовых задач.

Задачи типа 7.1

Определение индукции магнитного поля линейного тока заданной конфигурации

Метод решения. Если необходимо определить индукцию магнитостатического поля линейного тока, то универсальным методом решения является использование закона Био-Савара–Лапласа (7.3)–(7.5) и принципа суперпозиции (7.6).

Задача 7.3.1. (базовая задача) Определить индукцию магнитного поля, создаваемого отрезком прямого провода длиной $2L$ в точке A , находящейся в плоскости, перпендикулярной отрезку и проходящей через его центр, на расстоянии a от провода. Сила тока, текущего в проводе, равна I .

Решение

В данной задаче ток, магнитное поле которого необходимо определить, ограничен в пространстве и расположен симметрично

относительно плоскости, указанной в условии.

Выберем правую декартову систему координат, у которой ось Z совпадает с проводом, начало – с центром провода, ось Y проходит через точку A (рис. 7.2).

Рассмотрим произвольный элемент тока длиной $dl = dz$, находящийся на расстоянии z от начала отсчета. Он создает в точке A , характеризуемой радиус-вектором \mathbf{r} , магнитное поле с индукцией $d\mathbf{B}$.

Согласно (7.3) направление вектора $d\mathbf{B}$ определяется направлением вектора $[dl \mathbf{r}]$, т.е. вектор $d\mathbf{B}$ направлен на нас перпендикулярно плоскости рисунка (так как в рассматриваемом случае ток течет против направления оси Z и вектор dl направлен в ту же сторону). Силовые линии поля, создаваемого таким прямолинейным участком тока, лежат в плоскости, перпендикулярной проводу.

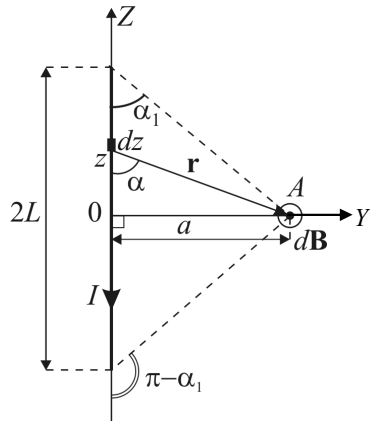


Рис. 7.2. Определение индукции магнитного поля, создаваемого отрезком прямого провода с током (задача 7.3.1)

Пусть угол, который составляет некоторый элемент тока с направлением на точку A , равен α . Тогда

$$r = \frac{a}{\sin \alpha}; \quad z = a \operatorname{ctg} \alpha; \quad dz = -\frac{a d\alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

В соответствии с законом Био-Савара–Лапласа (7.3)

$$dB = dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dz}{r^2} \sin \alpha = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{a} \sin \alpha d\alpha.$$

В силу симметрии задачи для нахождения \mathbf{B} можно проинтегрировать это выражение по половине провода и удвоить результат:

$$B = B_x = 2 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{a} \int_{\pi/2}^{\alpha_1} (-\sin \alpha) d\alpha = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{a} \cos \alpha_1.$$

Здесь α_1 – угол, который составляет с направлением на точку A крайний элемент тока. Так как $\cos \alpha_1 = \frac{L}{\sqrt{a^2 + L^2}}$, окончательно по-

лучаем

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \frac{L}{\sqrt{a^2 + L^2}}.$$

Ответ: Вектор магнитной индукции лежит в плоскости, перпендикулярной проводу, его модуль равен $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \frac{L}{\sqrt{a^2 + L^2}}$.

Замечание 1. Если плоскость, в которой лежит рассматриваемая точка, перпендикулярна проводу, но не проходит через его середину, то индукция магнитного поля может быть вычислена аналогично:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi a} I (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2),$$

где α_1 и α_2 – углы, которые составляют с направлением на точку расчета крайние элементы тока.

Замечание 2. В предельном случае $a \ll L$ (бесконечный прямой провод) получаем $B = \mu_0 I / (2\pi a)$. Это выражение проще получить из теоремы о циркуляции (7.9), что показано далее в задаче 7.3.9.

Задача 7.3.2. Найти величину и направление вектора магнитной индукции в центре плоского контура, имеющего вид прямоугольника, если длины его сторон равны соответственно b и c , а ток равен I (рис. 7.3).

Решение

Так как система проводника с током, представленная в условии задачи ограничена в пространстве и представляет собой несколько отрезков линейного тока, то данная задача относится к типу 7.2.1.

Основываясь на решении базовой задачи 7.3.1 можно сказать, что векторы индукции магнитного поля, создаваемые всеми сторонами рассматриваемого прямоугольника, в центре контура (точка O на рис. 7.3) будут направлены на нас и перпендикулярны к плоскости рисунка. Их величины равны:

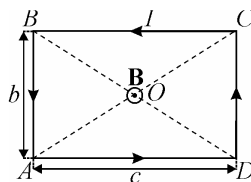


Рис. 7.3. Прямоугольный проводник с током и направление вектора магнитной индукции (задача 7.3.2)

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi \frac{c}{2}} \frac{b/2}{\sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4}}}$$

(индукция поля, создаваемого отрезками AB или CD);

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi b/2} \frac{c/2}{\sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4}}}$$

(индукция поля, создаваемого отрезками BC или DA).

По принципу суперпозиции (7.6) величина индукции магнитного поля в центре контура равна

$$B = 2(B_1 + B_2) = \frac{2\mu_0 I}{\pi bc} \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Ответ: Вектор магнитной индукции направлен перпендикулярно плоскости контура по правилу правого винта (см. рис. 7.3) и

равен по модулю $B = \frac{2\mu_0 I}{\pi bc} \sqrt{b^2 + c^2}$.

Задача 7.3.3 (базовая задача). Определить величину индукции магнитного поля на оси кругового витка радиуса R с током I в зависимости от расстояния до его плоскости.

Решение

Область существования тока ограничена, а распределение тока имеет осевую симметрию.

В силу осевой симметрии задачи и принципа суперпозиции

(7.6) вектор индукции магнитного поля кругового витка на его оси будет направлен вдоль этой оси. Направим ось X декартовой системы координат вдоль оси витка, начало координат поместим в центр витка.

Вектор $d\mathbf{B}$ индукции поля, создаваемого элементом тока $I d\mathbf{l}$, перпендикулярен к векторам $d\mathbf{l}$ и \mathbf{r} и лежит в плоскости, перпендикулярной плоскости коль-

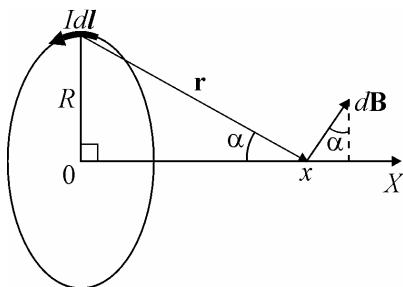


Рис. 7.4. К определению индукции магнитного поля на оси кругового витка с током (задача 7.3.3)

ца и проходящей через его диаметр, проведенный через dl (рис. 7.4). Проекция вектора $d\mathbf{B}$ на ось X по закону Био–Савара–Лапласа (7.3) равна

$$dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin \alpha}{r^2} dl.$$

Отсюда получим

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin \alpha}{r^2} 2\pi R = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Ответ: $B = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}}.$

Замечание 1. В центре кольца ($x = 0$) поле равно $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$.

Замечание 2. При $x \gg R$ выражение для индукции магнитного поля на оси витка $B \approx \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{x^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I \pi R^2}{x^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2p_m}{x^3}$ совпадает с выражением (7.21) для индукции поля магнитного диполя на его оси. В этом случае виток с током можно рассматривать как магнитный диполь и определять магнитное поле такой системы в произвольной точке по формуле (7.20).

Задача 7.3.4. Два одинаковых круговых витка, ток в каждом из которых равен I , располагаются так, что их плоскости параллельны, а центры лежат на одной оси на расстоянии L друг от друга. Радиус витков R . Предполагая, что токи в витках текут в одном направлении, определить, при каком соотношении между R и L магнитное поле в центре системы на оси витков будет максимально однородным, а также величину индукции этого поля.

Решение

Выберем систему координат так, чтобы её ось X совпадала с осью витков. Начало координат совместим с центром симметрии системы (см. рис. 7.5).

При решении данной задачи будем опираться на решение базовой задачи 7.3.3.

Используя принцип суперпозиции, получим, что величина индукции магнитного поля в произвольной точке (с координатой x) на оси равна

$$B(x) = \frac{\mu_0 IR^2}{2} \left\{ \left(R^2 + \left(\frac{L}{2} + x \right)^2 \right)^{-3/2} + \left(R^2 + \left(\frac{L}{2} - x \right)^2 \right)^{-3/2} \right\}.$$

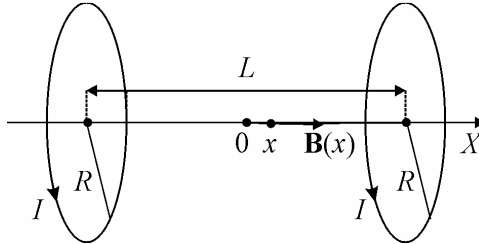


Рис. 7.5. Индукция магнитного поля на оси двух круговых витков с одинаковыми токами (задача 7.3.4)

Рассмотрим магнитное поле вблизи начала координат. При разложении функции $B(x)$ в ряд в окрестности точки $x = 0$ получим

$$B(x) = B(0) + xB'(0) + \frac{x^2}{2} B''(0) + \dots$$

Поле в окрестности точки $x = 0$ будет тем однороднее, чем больше производных будут равны нулю. Определим, при каком расстоянии между витками $B'(0) = 0$ и $B''(0) = 0$.

Введем обозначения:

$$F_1(x) \equiv \left(R^2 + \left(\frac{L}{2} + x \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}}; \quad F_2(x) = F_1(-x) = \left(R^2 + \left(\frac{L}{2} - x \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Тогда $B'(0) = 0$, если $F_1'(0) = -F_2'(0)$; $B''(0) = 0$, если $F_1''(0) = -F_2''(0)$.

Дифференцируя полученные функции, получаем:

условие $F_1'(0) = -F_2'(0)$ выполняется при любых L ;

условие $F_1''(0) = -F_2''(0)$ выполняется при $L = R$.

Таким образом, поле между витками на их оси максимально однородно, если расстояние между витками равно их радиусу. Определим значение функции $B(x)$ в точке $x = 0$ при этом условии. Получим

$$B(0)|_{L=R} = \frac{\mu_0 IR^2}{2} 2 \left(R^2 + \frac{R^2}{4} \right)^{-3/2} = \mu_0 IR^2 \left(\frac{4}{5R^2} \right)^{3/2} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{R} \left(\frac{4}{5} \right)^{3/2} \approx 0,715 \frac{\mu_0 I}{R}.$$

Ответ: Поле на оси витков в окрестности центра системы максимально однородно при $L = R$ и равно

$$B = \frac{\mu_0 I}{R} \left(\frac{4}{5} \right)^{3/2} \approx 0,715 \frac{\mu_0 I}{R}.$$

Замечание 1. Ввиду того, что $F_2(x) = F_1(-x)$, не только первая производная, но и все нечетные производные от $F_1(x) + F_2(x)$ равны нулю при любых L . Таким образом, первой не равной нулю будет производная 4 порядка.

Замечание 2. В поперечном направлении (перпендикулярно оси X) область однородности поля примерно такая же, как и в продольном, однако доказательство этого факта достаточно сложное.

Замечание 3. Если в качестве объектов, создающих магнитное поле, рассмотреть две одинаковые тонкие катушки из N витков, то можно считать их эквивалентными двум кольцам радиуса R с током NI в каждом. Если расположить такие катушки соосно друг другу на расстоянии, равном их среднему радиусу, то магнитное поле между ними можно считать однородным и равным по модулю

$$B = \frac{\mu_0 NI}{R} \left(\frac{4}{5} \right)^{3/2} \approx 0,715 \frac{\mu_0 NI}{R}.$$

Такая система называется **катушками Гельмгольца**. Наряду с соленоидом они используются для создания однородного магнитного поля.

Задача 7.3.5. Найти величину индукции магнитного поля на оси соленоида в произвольной точке (из которой края соленоида видны под углами α_1 и α_2). Радиус сечения соленоида R , плотность намотки n витков на единицу длины. Сила тока, текущего в соленоиде равна I .

Решение

Учитывая симметрию рассматриваемой системы, выберем ось X системы координат совпадающей с осью соленоида (см. рис. 7.6). Точку, в которой требуется определить индукцию магнитного поля, примем за начало отсчета.

Магнитное поле, создаваемое соленоидом на его оси, можно представить как суперпозицию полей $d\mathbf{B}$, создаваемых круговыми

витками линейного тока, причем ширина витков равна dx , а сила тока в каждом из них равна $nI dx$. Тогда, аналогично решению базовой задачи 7.3.3, получим

$$dB = \frac{\mu_0}{2} \frac{(In dx)R \sin \alpha}{r^2};$$

здесь α – угол, под которым видно рассматриваемое кольцо шириной dx из точки наблюдения. Из рисунка видно, что $r = \frac{R}{\sin \alpha}$; следовательно,

$$dx = -\frac{R}{\sin^2 \alpha} d\alpha.$$

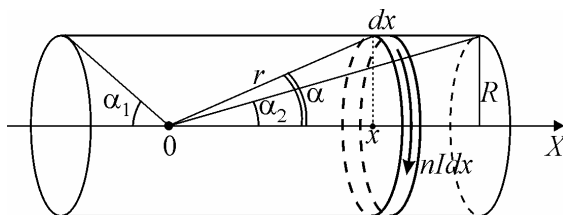


Рис. 7.6. К определению индукции магнитного поля на оси соленоида (задача 7.3.5)

Так как вклады от всех витков имеют одинаковый знак проекции на ось X , имеем:

$$B = \frac{\mu_0 In}{2} \int_{\pi-\alpha_1}^{\alpha_2} (-\sin \alpha) d\alpha = \frac{1}{2} \mu_0 In (\cos \alpha_2 + \cos \alpha_1).$$

Ответ: $B = \frac{1}{2} \mu_0 In (\cos \alpha_2 + \cos \alpha_1).$

Замечание 1. Если длина соленоида много больше его радиуса (бесконечный соленоид), то $\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2 = 1$. В этом случае поле на оси такого соленоида не зависит от точки наблюдения и равно

$$B = \mu_0 In = B_{\max}.$$

Замечание 2. Для точки, находящейся в центре торца длинного соленоида, $\alpha_1 = \pi/2$, $\alpha_2 = 0$, и индукция магнитного поля равна

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 In = \frac{1}{2} B_{\max}.$$

Замечание 3. Значения углов $\alpha_1 > \pi/2$, или $\alpha_2 > \pi/2$ соответствуют точкам, лежащим снаружи от соленоида на его оси. Решение задачи не отличается от рассмотренного. При удалении от соленоида вдоль его оси $\alpha_1 \rightarrow \pi$ и $\alpha_2 \rightarrow 0$, модуль индукции магнитного поля $B \rightarrow 0$.

Задача 7.3.6. Непроводящая сфера радиуса R , равномерно заряженная по поверхности с плотностью заряда σ , вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через её центр. Определить магнитную индукцию в центре сферы.

Решение

В силу симметрии задачи её удобно решать в сферической системе координат. Будем отсчитывать угол θ этой системы координат от оси Z , направление которой совпадает с вектором угловой скорости сферы (см. рис. 7.7).

Рассмотрим произвольное тонкое кольцо шириной $R d\theta$, вырезанное из рассматриваемой сферы. Так как оно вращается с постоянной угловой скоростью вокруг своей оси, то такая система аналогична неподвижному кольцу, по которому течет ток силы

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{\sigma dS}{T} = \frac{\sigma 2\pi R \sin \theta R d\theta}{T} = \sigma \omega R^2 \sin \theta d\theta,$$

где T – период обращения сферы вокруг своей оси.

Согласно решению базовой задачи 7.3.3, магнитное поле, создаваемое таким витком в центре сферы, направлено вдоль оси Z и его индукция равна

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dI \sin \theta}{R^2} 2\pi R \sin \theta = \frac{\mu_0 \omega \sigma R}{2} \sin^3 \theta d\theta.$$

По принципу суперпозиции интегрированием получим индук-

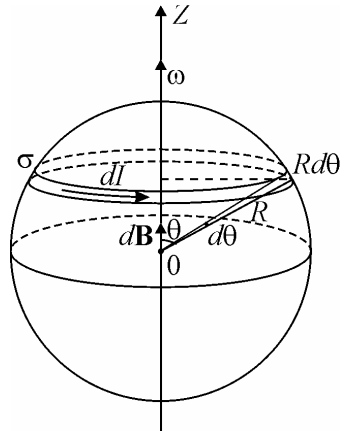


Рис. 7.7. Определение индукции магнитного поля, создаваемого вращающейся заряженной сферой в ее центре (задача 7.3.6).

цию магнитного поля в центре сферы:

$$B = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\mu_0 \omega \sigma R}{2} \sin^3 \theta d\theta = 2 \frac{\mu_0 \omega \sigma R}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \mu_0 \omega \sigma R.$$

Ответ: $\mathbf{B} = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma R \boldsymbol{\omega}.$

Задачи типа 7.2

Определение индукции магнитостатического поля безграничных распределений токов, обладающих плоской или осевой симметрией

Метод решения. При решении модельных задач, в которых рассматриваются системы токов, формально не ограниченные в пространстве (бесконечные линейные, плоские или объёмные токи), обладающие плоской или осевой симметрией, удобно опираться на закон полного тока (7.9).

Аналогично применению электростатической теоремы Гаусса (глава 1), здесь при вычислении циркуляции вектора магнитной индукции по замкнутому контуру ключевым моментом является выбор этого контура. Очевидно, что он должен проходить через точку, в которой мы хотим определить величину B , и, кроме этого, вычисление интеграла $\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l}$ должно быть максимально простым. На-

пример, величина B должна быть одинакова на всем протяжении контура L , или на одной из частей контура $B = \text{const}$, а на другой $B = 0$, и т.п.; угол α между векторами \mathbf{B} и $d\mathbf{l}$ не должен меняться при обходе контура, или на одной из частей контура $\alpha = \text{const}$, а на другой $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi/2$. Поэтому при анализе условия задачи особое внимание следует обратить на картину распределения полей в контуре проводников с током.

Задача 7.3.7 (базовая задача). Безграничная проводящая плоскость расположена горизонтально. По ней течет ток, поверхностная плотность которого равна i , а направление одинаково во всех точках. Определить индукцию магнитного поля, создаваемого такой плоскостью.

Решение

Ввиду симметрии в распределении токов рассматриваемой сис-

темы и безграничности плоскости, величина вектора индукции магнитного поля этой системы не будет зависеть от расстояния до плоскости, а сам вектор будет направлен параллельно плоскости и перпендикулярно текущему по ней току.

В качестве контура L удобно выбрать прямоугольник $ABCD$, две стороны которого параллельны плоскости и перпендикулярны току, текущему в ней (см. рис. 7.8). Полный ток, охватываемый этим контуром, равен $I = ia$, где a – длина горизонтально расположенной стороны контура.

На горизонтальных участках контура вектор \mathbf{B} не изменяется по величине и сонаправлен с вектором $d\mathbf{l}$ (участки AB и CD на рис. 7.8). На участках контура, перпендикулярных плоскости (BC и DA), вектор \mathbf{B} перпендикулярен $d\mathbf{l}$ в каждой точке. Тогда в соответствии с теоремой о циркуляции

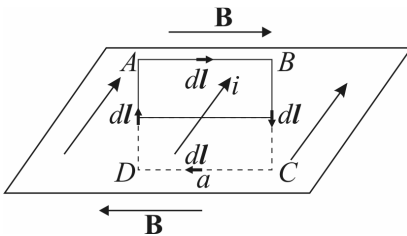


Рис. 7.8. Определение индукции магнитного поля, создаваемого безграничной проводящей плоскостью (задача 7.3.7)

имеем:

$$\left. \begin{aligned} \oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} &= 2Ba \\ I &= ia \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2Ba = \mu_0 ia .$$

Ответ: Вектор магнитной индукции направлен параллельно плоскости и перпендикулярен направлению тока, а его модуль

$$\text{равен } B = \frac{\mu_0 i}{2} .$$

Задача 7.3.8. Система состоит из двух параллельных друг другу безграничных плоскостей с токами, величины которых одинаковы. Эти токи создают в пространстве между плоскостями однородное магнитное поле с индукцией B , а снаружи поле отсутствует. Найти поверхностную плотность тока, текущего по плоскостям.

Решение

Система токов, представленная в данной задаче, эквивалентна двум системам базовой задачи 7.3.7. Используя результат этой задачи, можно утверждать, что токи по плоскостям параллельны и текут в противоположных направлениях – иначе согласно принципу суперпозиции магнитное поле снаружи от плоскостей должно быть отлично от нуля.

При такой ориентации токов в пространстве между плоскостями

ми индукция магнитного поля вдвое больше индукции магнитного поля одной плоскости, т.е. по модулю равна $B = \mu_0 i$. Отсюда находим

$$i = \frac{B}{\mu_0}.$$

Ответ: Направления токов, текущих по плоскостям взаимно противоположны, их поверхностные плотности одинаковы по модулю и равны $i = B/\mu_0$.

Задача 7.3.9 (базовая задача). Найти индукцию магнитного поля внутри бесконечного соленоида с плотностью намотки n витков на метр, по которому течет ток силой I .

Решение

В случае плотной намотки магнитное поле внутри длинного соленоида близко к однородному, за исключением точек непосредственно вблизи витков обмотки. Поле снаружи длинного соленоида вдали от его торцов можно считать близким к нулю.

Проведем через точку, в которой надо найти индукцию магнитного поля прямоугольный контур так, чтобы его сторона длины l была параллельна линии \mathbf{B} , а противоположная сторона была вне соленоида. Запишем теорему о циркуляции вектора \mathbf{B} (7.9).

Пусть ток в витках направлен из плоскости чертежа к нам. Плоскость контура пересекают nl витков, полная величина тока через выбранный контур равна Inl . При расчете циркуляции выберем направление обхода против часовой стрелки, для которого этот ток будет положительным по правилу правого винта. Поскольку вне соленоида поле можно считать равным нулю, циркуляция по данному контуру равна Bl , откуда следует $Bl = \mu_0 Inl$, или $B = \mu_0 In$.

Ответ: $B = \mu_0 In$.

Задача 7.3.10 (базовая задача). По стенке бесконечной тонкостенной цилиндрической трубы радиуса R параллельно её оси течет

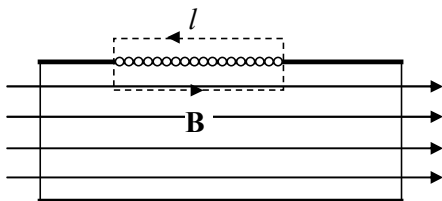


Рис. 7.9. К нахождению магнитного поля внутри длинного соленоида (задача 7.3.9)

ток I . Найти величину индукции магнитного поля внутри и вне трубы в зависимости от расстояния до её оси.

Решение

В силу симметрии рассматриваемой системы силовые линии создаваемого ей магнитного поля являются окружностями, плоскости которых перпендикулярны оси трубы. Для вычисления $B(r)$ удобно воспользоваться теоремой о циркуляции.

1) Найдем индукцию магнитного поля внутри трубы в точке, находящейся на расстоянии r от ее оси ($r < R$). Для этого выберем в качестве контура L окружность, центр которой лежит на оси трубы, а радиус равен r (рис. 7.10а). Тогда вектор \mathbf{B} в каждой точке этого контура направлен по касательной к нему, а величина индукции не изменяется вдоль всего контура. Однако выбранный нами контур не охватывает ток, т.е.

$$\left. \begin{array}{l} \oint_L \mathbf{B} \, dl = B \cdot 2\pi r \\ I = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2\pi r B = 0,$$

т.е. магнитное поле внутри цилиндра в любой точке отсутствует.

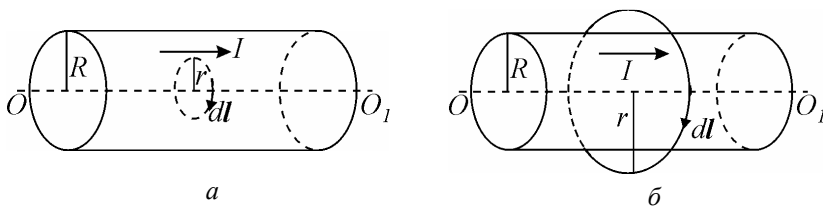


Рис. 7.10. К определению индукции магнитного поля внутри (а) и снаружи (б) тонкостенной трубы (задача 7.3.10)

2) Найдем теперь индукцию магнитного поля снаружи трубы в точке, находящейся на расстоянии r от ее оси ($r > R$). Проведя рассуждения аналогично пункту 1) получим, что выбранная нами в качестве контура окружность радиуса r охватывает весь ток I , текущий по трубе, независимо от своего радиуса (рис. 7.10б). Получим:

$$\left. \begin{array}{l} \oint_L \mathbf{B} \, dl = B \cdot 2\pi r \\ I = I \end{array} \right\} \Rightarrow 2\pi r B = \mu_0 I.$$

$$\text{Отсюда } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} B = 0, & \text{при } r < R, \\ B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, & \text{при } r > R, \end{cases}$$

Замечание 1. Этот ответ совпадает с ответом задачи 7.3.1, полученным для бесконечно длинного провода с током (замечание 2 к задаче 7.3.1), однако данное решение задачи гораздо проще, что делает этот способ решения предпочтительным.

Замечание 2. При $r = R$ (поверхность трубы) индукция магнитного поля в такой системе испытывает скачок. Величина индукции на поверхности трубы не определена (в рамках рассматриваемой модели бесконечно тонких стенок трубы ток следует рассматривать как поверхностный).

Задача 7.3.11. По однородному сплошному бесконечному цилиндрическому проводнику радиуса R течет ток I , который равномерно распределен по сечению. Найти величину индукции магнитного поля внутри и вне проводника в зависимости от расстояния до оси. Магнитные свойства материала не учитывать.

Решение

Данный проводник с током представляет собой бесконечную систему с аксиальной симметрией. Линии индукции магнитного поля такой системы являются окружностями с центром на оси проводника, лежащими в плоскостях, перпендикулярных оси проводника.

1) Найдем величину индукции магнитного поля внутри проводника с током в точке, находящейся на расстоянии r от его оси ($r < R$, рис. 7.11а). Аналогично решению базовой задачи 7.3.10, из (7.9) получаем

$$\left. \begin{array}{l} \oint_L \mathbf{B} dl = B \cdot 2\pi r \\ I = \pi r^2 j \end{array} \right\} \Rightarrow 2\pi r B = \mu_0 \pi r^2 j,$$

где $j = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi R^2}$ – модуль объёмной плотности тока, текущего через проводник. Окончательно имеем:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r.$$

Таким образом, при $r < R$ величина индукции магнитного поля сплошного проводника, плотность тока в котором постоянна, линейно зависит от расстояния от оси проводника.

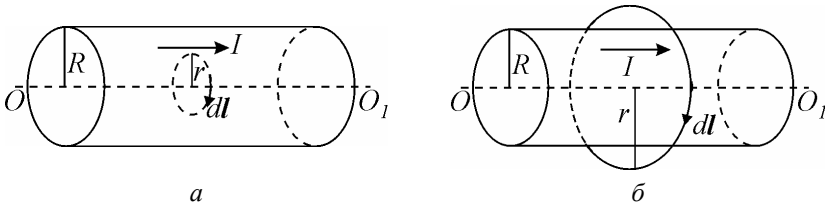


Рис. 7.11. К определению индукции магнитного поля внутри (а) и снаружи (б) сплошного цилиндрического проводника (задача 7.3.11)

2) Найдем величину индукции магнитного поля снаружи трубы в точке, находящейся на расстоянии r от ее оси ($r > R$, рис. 7.11б).

Аналогично пункту 2) базовой задачи 7.3.10 получим $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$.

$$\text{Ответ: } \begin{cases} B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r, & r < R; \\ B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, & r \geq R. \end{cases}$$

Замечание 1. В точке $r = R$ функция $B(r)$ непрерывна, её значение максимально и равно $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$.

Замечание 2. Зависимость модуля индукции магнитного поля, создаваемого объемным током постоянной плотности в цилиндрическом бесконечном проводнике, от расстояния до оси проводника аналогична зависимости напряженности электрического поля, создаваемого равномерно заряженным по объёму бесконечным цилиндром.

Задача 7.3.12. Проводник из немагнитного материала имеет в сечении сложную конфигурацию и представляет собой суперпозицию двух бесконечно длинных прямолинейных цилиндрических проводников, в области пересечения которых имеется полость Π

(см. рис. 7.12а).

В правой и левой части проводника текут в противоположных направлениях токи с одной и той же по модулю объёмной плотностью j . Найти величину и направление индукции магнитного поля в полости. Расстояние между осями цилиндрических составляющих проводника $AC = d$.

Решение

Рассмотрим систему из двух сплошных цилиндров A и C , в которых токи текут равномерно во всем объёме. Тогда в области перекрытия цилиндров (полость Π на рис. 7.12а) тока не будет – таким образом, сконструированная нами система в отношении пространственного распределения тока идентична системе, представленной в условии задачи.

Рассмотрим произвольную точку M , находящуюся внутри области перекрытия токов (см. рис. 7.11б). Согласно решению базовой задачи 7.3.11, величина индукции магнитного поля, созданного в этой точке цилиндром A , определяется соотношением $B_1 = \frac{\mu_0 j}{2} r_{AM}$ и на-

правлена перпендикулярно вектору \mathbf{r}_{AM} . Аналогично, величина индукции магнитного поля, созданного в этой точке цилиндром C , определяется соотношением $B_2 = \frac{\mu_0 j}{2} r_{CM}$ и направлена перпендикулярно вектору \mathbf{r}_{CM} . В векторном виде индукции магнитных полей цилиндров в точке M можно записать в виде

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 j}{2} [l_1 \mathbf{r}_{AM}], \quad \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 j}{2} [l_2 \mathbf{r}_{BM}],$$

где векторы l_1 и l_2 – единичные векторы, сонаправленные с токами в

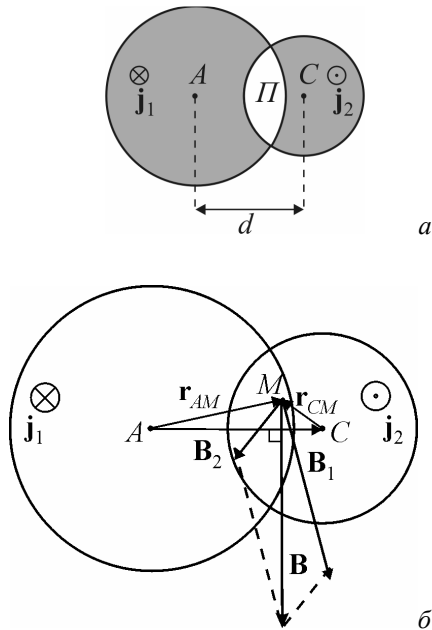


Рис. 7.12. Проводник сложной конфигурации с полостью Π и распределение в нём объёмных токов (а) и определение индукции магнитного поля в полости (б) (к задаче 7.3.12)

проводниках A и C соответственно, т. е. $I_1 = -I_2$.

Используя принцип суперпозиции, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_M &= \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 J}{2} ([I_1 \mathbf{r}_{AM}] + [I_2 \mathbf{r}_{BM}]) = \frac{\mu_0 J}{2} [I_1 (\mathbf{r}_{AM} - \mathbf{r}_{BM})] = \\ &= \frac{\mu_0 J}{2} [I_1 \mathbf{AC}]. \end{aligned}$$

Таким образом, магнитное поле в полости Π однородно. Индукция этого поля равна $B = \frac{\mu_0 J}{2} d$ и направлена в плоскости рисунка перпендикулярно линии, соединяющей оси проводников A и C .

Ответ: вектор $\mathbf{B} \perp \mathbf{AC}$ и равен по модулю $B = \frac{\mu_0 J}{2} d$.

Задачи типа 7.3

Определение индукции магнитостатического поля, созданного заданным распределением магнитных диполей.

Метод решения. Определение индукции магнитного поля, созданного заданной системой магнитных диполей, является одной из важнейших задач магнитостатики. Особое значение эта задача приобретает в разделе «Магнитостатика магнетиков», так как магнитный момент является основной величиной, характеризующей магнитные свойства вещества. Для замкнутых линейных токов на большом расстоянии от них поле аналогично полю диполя, поэтому решение задачи значительно упрощается при использовании дипольного описания.

Задача 7.3.13 (базовая задача). Точечный магнитный диполь с моментом \mathbf{p}_m , направленным вдоль оси OY , расположен в начале декартовой системы координат (рис. 7.13). Определить величину индукции магнитного поля в точке M с координатами (x, y) .

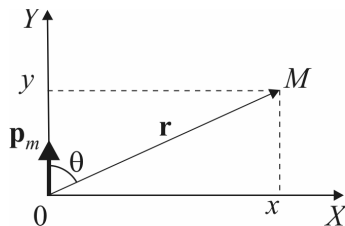


Рис. 7.13. Ориентация магнитного диполя \mathbf{p}_m относительно декартовой системы координат (задача 7.3.13)

Решение

Согласно соотношению (7.20) вектор индукции магнитного поля в точке, определяемой радиус-вектором \mathbf{r} , равен

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\mathbf{p}_m \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_m}{r^3} \right).$$

Определим проекцию вектора \mathbf{B} на ось X . Так как магнитный момент диполя перпендикулярен этой оси, то

$$\left(\frac{\mathbf{p}_m}{r^3} \right)_x = 0, \quad B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\mathbf{p}_m \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} \right)_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3p_m r \cos \vartheta r \sin \vartheta}{r^5} \right).$$

Здесь ϑ – угол между векторами \mathbf{p}_m и \mathbf{r} , поэтому

$$\cos \vartheta = \frac{y}{r}; \quad \sin \vartheta = \frac{x}{r}; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Отсюда получаем $B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3p_m xy}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$.

Аналогично имеем для компоненты магнитного поля, параллельной оси Y :

$$\begin{aligned} B_y &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\mathbf{p}_m \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_m}{r^3} \right)_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3p_m r^2 \cos^2 \vartheta}{r^5} - \frac{p_m}{r^3} \right) = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p_m (2y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^{5/2}}. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} p_m \frac{(2y^2 + x^2)^2 + x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}}.$$

Ответ: $B = \frac{\mu_0}{4\pi} p_m \frac{(2y^2 + x^2)^2 + x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}}.$

Замечание. Эту задачу удобно решать в сферической системе координат аналогично задаче 1.3.23 главы 1 (определение напряжённости поля точечного электрического диполя). В этом случае положение точки M определяется длиной радиус-вектора r и полярным углом ϑ , а величина магнитной индукции поля диполя в этой точке может быть представлена как $B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p_m}{r^3} \sqrt{3 \cos^2 \vartheta + 1}$.

Задача 7.3.14. Два точечных магнитных диполя с равными по величине моментами $|\mathbf{p}_{m_1}| = |\mathbf{p}_{m_2}| = p_m$ находятся на некотором расстоянии друг от друга. Их магнитные моменты лежат в одной плоскости и ориентированы взаимно перпендикулярно. При какой ориентации магнитных моментов относительно соединяющей их прямой индукция магнитного поля в точке O , расположенной посередине между диполями, будет минимальной и максимальной?

Решение

Пусть расстояние между диполями равно $2a$. В выбранной системе отсчета (см. рис. 7.14) компоненты индукции магнитного поля, созданного левым и правым магнитными моментами в точке O согласно соотношению (7.20) соответственно равны:

Левый диполь \mathbf{p}_{m_1} :

$$B_{1x} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3p_m a^2 \cos \theta}{a^5} - \frac{p_m \cos \theta}{a^3} \right) = \frac{\mu_0 p_m \cos \theta}{2\pi a^3};$$

$$B_{1y} = \frac{\mu_0 p_m \sin \theta}{4\pi a^3};$$

Правый диполь \mathbf{p}_{m_2} :

$$B_{2x} = \frac{\mu_0 p_m \cos(\theta + \pi/2)}{2\pi a^3} = -\frac{\mu_0 p_m \sin \theta}{2\pi a^3}; \quad B_{2y} = -\frac{\mu_0 p_m \cos \theta}{4\pi a^3}.$$

Согласно принципу суперпозиции для величины индукции магнитного поля получим:

$$B(\theta) = \frac{\mu_0 p_m}{4\pi a^3} \sqrt{(B_{1x} + B_{2x})^2 + (B_{1y} + B_{2y})^2} =$$

$$= \frac{\mu_0 p_m}{4\pi a^3} \sqrt{4(\cos \theta - \sin \theta)^2 + (\cos \theta + \sin \theta)^2} = \frac{\mu_0 p_m}{4\pi a^3} \sqrt{5 - 3 \sin 2\theta}.$$

Исследование этой функции на экстремум дает:

$$\text{Минимум: при } \theta_{\min} = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \quad B_{\min} = \frac{\mu_0 p_m \sqrt{2}}{4\pi a^3},$$

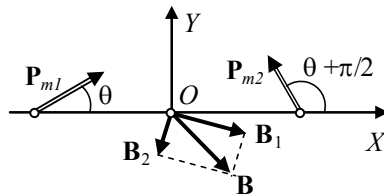


Рис. 7.14. Определение индукции магнитного поля от двух взаимно перпендикулярных магнитных диполей (задача 7.3.14)

Максимум: при $\theta_{\max} = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ $B = B_{\max} = \frac{\mu_0 p_m 2\sqrt{2}}{4\pi a^3}$.

Ответ: $B(0) = B_{\min}$ при $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$; $B(0) = B_{\max}$ при $\theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.

Замечание. В сферической системе координат аналогичная задача для электрического диполя решена в главе 1 (задача 1.3.24).

Задача 7.3.15. Непроводящая сфера радиуса R , равномерно заряженная по поверхности с плотностью заряда σ , вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через её центр. Определить магнитный момент такой системы.

Решение

Согласно определению (7.18) магнитный момент поверхностного тока можно рассчитать по формуле

$$\mathbf{p}_m = \frac{1}{2} \int_S [\mathbf{r} \mathbf{i}] dS.$$

Так как сфера вращается с постоянной угловой скоростью, то поверхностная плотность тока определяется соотношением (§6.1 глава 6)

$$\mathbf{i} = \sigma \mathbf{v} = \sigma [\boldsymbol{\omega} \mathbf{x}]$$

(см. рис. 7.15). Таким образом, вектор плотности тока направлен по касательной к поверхности сферы в каждой точке, а его величина определяется как $i = \sigma \omega R \sin \theta$. Учитывая, что в данной задаче $\mathbf{r} = \mathbf{R}$, получим

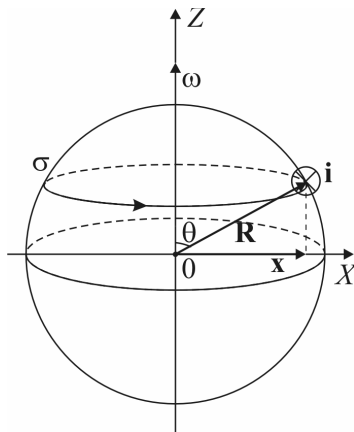


Рис. 7.15. К определению магнитного момента вращающейся заряженной сферы (задача 7.3.15)

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_m &= \frac{\sigma}{2} \int_S [\mathbf{R} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{x}]] dS = \frac{\sigma}{2} \int_S (\boldsymbol{\omega} (\mathbf{R} \mathbf{x}) - \mathbf{x} (\mathbf{R} \boldsymbol{\omega})) dS = \\ &= \frac{\sigma}{2} \int_S \boldsymbol{\omega} (\mathbf{R} \mathbf{x}) dS - \frac{\sigma}{2} \int_S \mathbf{x} (\mathbf{R} \boldsymbol{\omega}) dS. \end{aligned}$$

В силу симметрии задачи второй интеграл в этом выражении

равен 0. Угол между векторами \mathbf{R} и \mathbf{x} в любой точке сферы равен $\alpha = 90^\circ - \theta$. Учитывая, что $dS = 2\pi x R d\theta$, $x = R \sin \theta$, получим

$$(\mathbf{p}_m)_z = \frac{\sigma}{2} \int_0^\pi \omega (R \sin \theta) \sin \theta 2\pi R^2 \sin \theta d\theta = \sigma R^4 \omega \pi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3} \pi \sigma R^4 \omega,$$

или в векторной форме

$$\mathbf{p}_m = \frac{(4\pi R^2 \sigma) R^2}{3} \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{3} Q R^2 \boldsymbol{\omega},$$

где $Q = 4\pi R^2 \sigma$ – заряд сферы.

Ответ: $\mathbf{p}_m = \frac{4}{3} \pi R^4 \sigma \boldsymbol{\omega}.$

Замечание. Если рассмотреть вращающуюся заряженную сферу как суперпозицию плоских витков с током, каждый из которых имеет магнитный момент $d\mathbf{p}_m$, то магнитное поле сферы можно вычислить, как суперпозицию магнитных полей, создаваемых всеми магнитными моментами. В соответствии с формулой (7.21) магнитное поле диполя на его оси равно $B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2p_m}{r^3}$, тогда индукцию магнитного поля в центре сферы можно вычислить как

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{2dp_m}{R^3} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{p_m}{R^3} = \frac{\mu_0}{2\pi R^3} \frac{4}{3} \pi R^4 \sigma \boldsymbol{\omega} = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma R \boldsymbol{\omega},$$

что соответствует ответу задачи 7.3.6.

Задачи типа 7.4

Определение индукции магнитного поля с использованием векторного магнитного потенциала (эквивалентные плоские электростатические и магнитостатические задачи).

Метод решения. Если записать дифференциальное уравнение магнитного поля стационарного тока в вакууме (7.10) $\text{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ и учесть, что векторный магнитный потенциал связан с индукцией магнитного поля соотношением $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$, то с учетом условия калибровки векторного потенциала (7.14) получим

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}.$$

Это уравнение эквивалентно трем скалярным уравнениям:

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 j_x, \quad \nabla^2 A_y = -\mu_0 j_y, \quad \nabla^2 A_z = -\mu_0 j_z,$$

каждое из которых аналогично уравнению для скалярного потенциала φ электрического поля в пустоте от зарядов с объёмной плотностью ρ (уравнение Пуассона (2.18), глава 2):

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho,$$

решение которого известно из электростатики, и для заряда объёмной плотности ρ , сосредоточенного в ограниченной области пространства V , имеет вид:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r}.$$

Удобнее всего сопоставлять уравнения для скалярного φ и векторного \mathbf{A} потенциалов для однонаправленного (однокомпонентного) тока, когда, например, $j_x = j_y = 0$, а $j_z = j_z(x, y)$ и не зависит от z (плоские задачи). Тогда, если распределение плотности электрического заряда $\rho = \rho(x, y)$ аналогично распределению тока $j_z(x, y)$, то решения уравнений

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(x, y) \quad \text{и} \quad \nabla^2 A_z = -\mu_0 j_z(x, y)$$

дают функции $\varphi(x, y)$ и $A_z(x, y)$, имеющие одинаковые пространственные распределения. Значит, они равны с точностью до постоянных множителей. Чтобы перейти от решения электростатической задачи к магнитостатической, нужно сделать замены

$$\varphi \rightarrow A_z, \quad \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \mu_0 j_z, \quad E_x \rightarrow B_y, \quad E_y \rightarrow -B_x, \quad E_r \rightarrow B_\varphi, \quad E_\varphi \rightarrow -B_r. \quad (7.22)$$

Однако следует учесть, что в этом случае, как следует из приведенных соотношений, векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} взаимно перпендикулярны.

Таким образом, ответ многих магнитостатических задач можно записать сразу без решения задачи, используя известное решение эквивалентной задачи электростатики.

При решении обратной задачи – нахождения потенциала \mathbf{A} по известному полю индукции \mathbf{B} – в случае задач с элементами симметрии может быть полезно интегральное соотношение, следующее из теоремы Стокса (7.8):

$$\oint_L \mathbf{A} d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{A} d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}. \quad (7.23)$$

Задача 7.3.16. Найти векторный потенциал (в кулоновской калибровке) для однородного магнитного поля с индукцией \mathbf{B} .

Решение

Направим ось Z декартовой системы координат вдоль вектора \mathbf{B} . Учитывая, что \mathbf{B} имеет только одну ненулевую компоненту B_z , запишем в декартовых координатах соотношение (7.13):

$$B_z = (\text{rot } \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B.$$

$$B_x = (\text{rot } \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0,$$

$$B_y = (\text{rot } \mathbf{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0.$$

Очевидно, что с точностью до константы решениями являются следующие векторы: $\mathbf{A} = B\{-y; 0; 0\}$, $\mathbf{A} = B\{0; x; 0\}$ и любая их суперпозиция, например, сумма, которая наиболее компактно записывается в векторном виде

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}B\{-y; x; 0\} = \frac{1}{2}[\mathbf{B} \mathbf{r}];$$

Кулоновской калибровке $\text{div } \mathbf{A} = 0$ удовлетворяют все три решения.

Ответ: $\mathbf{A}(x,y) = \frac{1}{2}B\{-y; x; 0\} = \frac{1}{2}[\mathbf{B} \mathbf{r}];$

$$\mathbf{A}(x,y) = B\{-y; 0; 0\}, \mathbf{A}(x,y) = B\{0; x; 0\}.$$

Задача 7.3.17 (базовая задача). Найти векторный магнитный потенциал \mathbf{A} и индукцию магнитного поля \mathbf{B} на расстоянии r от прямолинейного бесконечного тонкого проводника, по которому течёт постоянный ток I .

Решение

Эквивалентная задача электростатики: найти потенциал φ и напряженность \mathbf{E} электростатического поля, созданного прямолинейным безграничным тонким проводником, на котором равномерно распределён электрический заряд с линейной плотностью γ . Решение данной задачи было рассмотрено выше (задача 1.3.13 главы 1 и задача 2.3.11 главы 2) и имеет следующий вид

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \gamma \ln \frac{r}{C}; \quad E_r = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\gamma}{r},$$

где r – расстояние от провода, C – произвольная константа, имеющая размерность длины. Вектор напряженности электрического поля здесь направлен перпендикулярно проводнику.

Выберем цилиндрическую систему координат, полярная ось Z которой совпадает с проводником, а её направление – с направлением тока I .

Используя эквивалентность электростатической и магнитостатической задач и производя замены (7.22), получим

$$A = A_z = -\frac{\mu_0}{2\pi} I \ln \frac{r}{C}; \quad B = B_\varphi = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}.$$

Вектор индукции магнитного поля прямого безграничного тока лежит в плоскости (XY) и касателен к окружности радиуса r , центр которой лежит на проводнике. Векторный магнитный потенциал этого поля имеет одну компоненту вдоль оси Z .

Ответ: $A = A_z = -\frac{\mu_0}{2\pi} I \ln \frac{r}{C}; \quad B = B_\varphi = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}.$

Замечание: Тот же ответ для величины магнитной индукции B был получен ранее из уравнения Био-Савара–Лапласа (задача 7.3.1, Замечание 2) и из теоремы о циркуляции вектора \mathbf{B} (задача 7.3.9).

Задача 7.3.18. По поверхности длинного кругового цилиндра радиуса R вдоль его оси течет поверхностный ток с постоянной плотностью \mathbf{i} . Определить магнитный потенциал A и индукцию магнитного поля \mathbf{B} этого тока.

Решение

Выберем цилиндрическую систему координат, ось Z которой совпадает с осью цилиндра, а направление – с вектором плотности тока.

Эквивалентная задача электростатики: длинный круговой цилиндр радиуса R заряжен по поверхности с постоянной поверхностной плотностью заряда σ . Определить φ и E для этой системы зарядов.

Данная магнитостатическая задача была решена выше (глава 1, задача 1.3.12). Используя решение этой задачи и условия (7.22), можно записать для областей внутри и снаружи цилиндра

для задачи электростатики:

для $r < R$:	$\varphi^{in} = C_1,$	$E^{in} = 0;$
для $r > R$:	$\varphi^{ex} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} R \ln \frac{r}{C_2}$	$E_r^{ex} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r};$
граничные условия: ($r = R$)	$\varphi^{ex} = \varphi^{in},$	$E_r^{ex} - E_r^{in} = \frac{\sigma}{\epsilon_0};$

для задачи магнитостатики:

для $r < R$:	$A = C_1,$	$B = 0;$
для $r > R$:	$A_z^{ex} = -\mu_0 i R \ln \frac{r}{C_2},$	$B_\phi^{ex} = \mu_0 i \frac{R}{r};$
граничные условия: ($r = R$)	$A_z^{ex} = A_z^{in},$	$B_\phi^{ex} - B_\phi^{in} = \mu_0 i.$

§ 7.4. Задачи для самостоятельного решения

Задача 7.4.1. Определить величину индукции магнитного поля в центре равностороннего треугольника со стороной a , если:

- его обтекает ток I ;
- источник ЭДС подключен к двум вершинам треугольника.

Поле подводящих проводов не учитывать, сопротивление всех сторон треугольника одинаково.

Ответ: а) $B = \frac{9\mu_0 I}{2\pi a}$; б) $B = 0$.

Задача 7.4.2. Найти величину индукции магнитного поля в центре плоской спирали, по которой течет ток силы I . Спираль заключена между окружностями радиусов R_1 и R_2 ($R_1 > R_2$, рис. 7.16). Общее число витков спирали N . Поле подводящих проводов не учитывать.

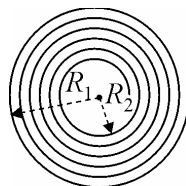


Рис. 7.16. Проводник в виде плоской спирали (задача 7.4.2)

Ответ:
$$B = \frac{\mu_0 N I \ln(R_2 / R_1)}{2(R_2 - R_1)}.$$

Задача 7.4.3. Ток I течет по тонкому замкнутому проводнику, показанному на рис. 7.17. Радиус изогнутой части проводника равен R , угол $2\varphi=90^\circ$. Найти величину индукции магнитного поля в точке O .

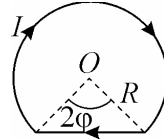


Рис. 7.17. Замкнутый проводник с током I (задача 7.4.3)

Ответ:
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \left(\frac{3\pi}{4} + 1 \right).$$

Задача 7.4.4. Найти величину индукции магнитного поля в точке O для контура с током I , который показан на рис. 7.18. Радиусы a , b и угол φ известны.

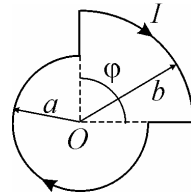


Рис. 7.18. Замкнутый проводник с током I (задача 7.4.4)

Ответ:
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(\frac{2\pi - \varphi}{a} + \frac{\varphi}{b} \right).$$

Задача 7.4.5. Найти величину индукции магнитного поля в точке O для проводника с током I , который показан на рис. 7.19. Горизонтальные части провода можно считать бесконечно длинными, радиус полукольца равен R .

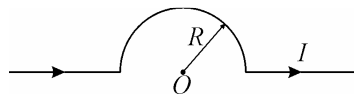


Рис. 7.19. Проводник с током (задача 7.4.5)

Ответ:
$$B = \frac{\mu_0 I}{4R}.$$

Задача 7.4.6. Найти индукцию магнитного поля в точке O , если проводник с током I имеет вид, показанный на рис. 7.20. Горизонтальные части провода можно считать бесконечно длинными, радиус полукольца равен R .

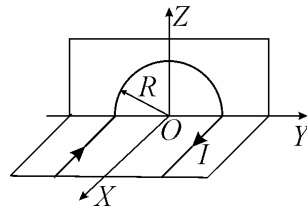


Рис. 7.20. Проводник с током I (задача 7.4.6)

Ответ:
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \sqrt{4 + \pi^2}, \text{ вектор } \mathbf{B}$$

лежит в плоскости XZ под углом α к оси OX , где $\operatorname{tg}\alpha \approx 0,63$.

Задача 7.4.7. Однородный ток плотности j течет внутри неограниченной пластины толщины $2d$ параллельно ее поверхности. Пренебрегая влиянием вещества пластины, найти зависимость величины индукции магнитного поля этого тока от расстояния x , отсчитываемого от средней плоскости пластины.

Ответ:
$$\begin{cases} B = \mu_0 jx, & x \leq d; \\ B = \mu_0 jd, & x \geq d. \end{cases}$$

Задача 7.4.8. Из куска изолированной проволоки сделан круглый виток и подключен к источнику тока с постоянной ЭДС. Как изменится индукция магнитного поля в центре круга, если из того же куска проволоки сделать два прилегающих друг к другу соосных витка?

Ответ: увеличится в 4 раза.

Задача 7.4.9. Бесконечно длинный цилиндрический провод состоит из двух коаксиальных цилиндров. Внутренний сплошной цилиндр, изготовленный из немагнитного материала, имеет радиус R_1 . Радиус внешнего пустотелого цилиндра равен R_2 . Вдоль цилиндров текут постоянные токи одинаковой величины I , но направленные противоположно. Определить зависимость величины индукции магнитного поля от расстояния до оси провода $B(r)$.

Ответ:
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1^2} r, \quad r < R_1;$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad R_1 \leq r \leq R_2;$$

$$B = 0, \quad r \geq R_2.$$

Задача 7.4.10. Внутри длинного прямого провода круглого сечения имеется длинная круглая цилиндрическая полость, ось которой параллельна оси провода и смещена относительно неё на расстояние d . По проводу течет постоянный ток плотности j , равномерно распределенный по его сечению. Пренебрегая влиянием вещества провода, определить величину индукции магнитного поля внутри полости.

Ответ: $B = \frac{\mu_0}{2} jd$.

7.4.11. Вдоль длинной тонкостенной цилиндрической трубки радиуса R течет постоянный ток I . В стенке трубки имеется тонкая щель ширины d , параллельная оси трубки. Определить величину индукции магнитного поля B в точке, лежащей внутри трубки на её радиусе, если расстояние от середины щели до рассматриваемой точки равно r ($r, R \gg d$).

Ответ: $B \approx \frac{\mu_0 Id}{4\pi^2 rR}$.

Задача 7.4.12. Непроводящий тонкий диск радиуса R , равномерно заряженный с одной стороны с поверхностной плотностью σ , вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω . Найти:

- а) величину индукции магнитного поля в центре диска;
- б) модуль магнитного момента диска.

Ответ: а) $B = \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{2}$; б) $p_m = \frac{\pi \sigma \omega R^4}{4}$.

Задача 7.4.13. Заряд Q равномерно распределен по объёму однородного шара радиуса R , который вращается вокруг оси, проходящей через его центр, с угловой скоростью ω . Найти магнитный момент такой системы.

Ответ: $p_m = \frac{QR^2}{5} \omega$.

Задача 7.4.14. В каких точках на расстоянии R от точечного магнитного момента p_m величина индукции магнитного поля будет иметь максимальное и минимальное значения?

Ответ: $B = B_{\max} = \frac{\mu_0 p_m}{2\pi R^3}$ в точках, радиус-вектор которых составляет с горизонталью углы $\theta = 0, \pi$;

$B = B_{\min} = \frac{\mu_0 p_m}{4\pi R^3}$ в точках, радиус-вектор которых

составляет с горизонталью углы $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

Задача 7.4.15. Вдоль оси длинного кругового цилиндра радиуса R течет ток с постоянной плотностью \mathbf{j} . Найти векторный магнитный потенциал \mathbf{A} магнитного поля в зависимости от расстояния r до оси цилиндра.

Ответ: Если принять $\mathbf{A}(0) = 0$, то

$$\text{для } r \leq R: \quad \mathbf{A}^{in} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \pi r^2 \mathbf{j};$$

$$\text{для } r \geq R: \quad \mathbf{A}^{ex} = -\frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi R^2 \left(\ln \frac{r}{R} + \frac{1}{2} \right) \mathbf{j};$$

Задача 7.4.16. Найти векторный магнитный потенциал \mathbf{A} внутри и вне длинного (бесконечного) соленоида радиуса a , внутри которого протекающим током создается однородное магнитное поле с индукцией \mathbf{B} . Положить $\mathbf{A} = 0$ на оси соленоида.

Ответ (в цилиндрических координатах (r, φ, z)):

$$\text{При любом } z \text{ внутри соленоида } A_\varphi = \frac{1}{2} Br; \text{ снаружи } A_\varphi = \frac{a^2 B}{2r}.$$

Линии векторного поля \mathbf{A} образуют окружности с центром на оси соленоида, лежащие в плоскости, перпендикулярной этой оси.

Указание: можно воспользоваться теоремой о циркуляции вектора \mathbf{A} (7.23).

Литература к главе 7

1. *Матвеев А.Н.* Электричество и магнетизм. – М.: Оникс 21 век, 2005, §§ 8-10, 35-37.
2. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. т.III Электричество. – М.: Физматлит, 2006, глава III.
3. *Калашиников С.Г.* Электричество. – М.: Физматлит, 2003, §§ 75-88.
4. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. – М.: Физматлит, 2003, глава IV.