Глава 1

Постоянное электрическое поле в вакууме. Закон Кулона. Электростатическая теорема Гаусса.

§1.1 Теоретический материал.

Электрический заряд – источник и объект действия электромагнитного поля.

Электромагнитное поле – материальный носитель электромагнитных взаимодействий зарядов. Понятие электромагнитного поля соответствует концепции близкодействия.

Электрический заряд частицы – присущая частице характеристика, определяющая ее электромагнитные взаимодействия.

Элементарный заряд – наименьшая неделимая часть заряда, величина которого в системе СИ равна $e \approx 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Электрон – стабильный (устойчивый к распаду) материальный носитель отрицательного элементарного электрического заряда.

Протон – стабильный (устойчивый к распаду) материальный носитель положительного элементарного электрического заряда.

Закон сохранения электрического заряда: алгебраическая сумма зарядов всех тел, составляющих электрически изолированную систему, не может изменяться со временем.

Релятивистская инвариантность заряда: величина электрического заряда не зависит от скорости движения частицы – носителя заряда и скорости движения системы отсчета.

Точечный заряд – модель заряженного тела, размерами которого можно пренебречь в условиях данной конкретной задачи ввиду малости размеров тела по сравнению с расстоянием от него до точки определения поля.

Неподвижный заряд – модель находящейся в физически бесконечно малом объеме системы тел, средняя скорость которых близка к нулю, а заряд постоянен. В строгом смысле неподвижных зарядов в природе не существует.

Электростатическое поле – электрическое поле, созданное системой неподвижных зарядов. Предполагается, что заряды удерживаются неподвижными за счет сторонних, то есть не-электростатических сил. За счет только электростатических сил равновесие невозможно (**теорема Ирншоу**).

Пробный заряд – точечный заряд, который вносится в данное электростатическое поле для измерения его характеристик. Этот заряд должен быть достаточно мал, чтобы своим воздействием не нарушить положение зарядов – источников измеряемого поля и тем самым не изменить создаваемое ими поле.

Закон Кулона: сила взаимодействия двух точечных неподвижных зарядов q_1 и q_2, расположенных в вакууме на расстоянии r друг от друга, в системе единиц СИ равна

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{1.1}$$

и направлена по прямой, соединяющей заряды. Величина

$$\varepsilon_0 \approx 8{,}85 \cdot 10^{-12}\left(\frac{\text{Ф}}{\text{м}} = \frac{\text{А} \cdot \text{с}^4}{\text{кг} \cdot \text{м}^3}\right)$$

называется электрической постоянной (точное значение этой константы $\varepsilon_0 = \dfrac{10^7}{4\pi c^2}$, где c – скорость света в вакууме).

В системе единиц СИ размерный коэффициент $1/(4\pi\varepsilon_0)$ входит во многие формулы электростатики и поэтому для краткости часто обозначается одной буквой:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9\ \frac{\text{м}}{\text{Ф}}.$$

Напряженность электростатического поля E – векторная характеристика поля, определяемая силой, действующей на внесенный в поле неподвижный точечный пробный заряд q

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}. \tag{1.2}$$

Напряженность поля точечного заряда q на расстоянии r от него равна

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \tag{1.3}$$

(полевая трактовка закона Кулона).

Силовая линия – линия, касательная к которой в каждой точке имеет направление, совпадающее с направлением напряженности поля в этой точке. Силовые линии напряженности электростатического поля всегда начинаются на положительных и заканчиваются на отрицательных зарядах (могут начинаться или заканчиваться на бесконечности, где неявно предполагается наличие зарядов противоположного знака).

Принцип суперпозиции: напряженность поля $\mathbf{E}$, создаваемая совокупностью зарядов, равна векторной сумме напряженностей полей $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$…, создаваемых каждым из зарядов в отдельности:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + ...$$

Напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ в точке с радиус-вектором $\mathbf{r}$, созданная совокупностью точечных зарядов q_i, расположенных в точках с радиус-вектором $\mathbf{r}_i$, равна

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i\right|^3} q_i \,.$$

Объемная плотность непрерывного распределения заряда ρ – отношение величины заряда dq, находящегося в физически бесконечно малом объеме dV, к величине объема dV:

$$\rho = \frac{dq}{dV}.$$

Поверхностная плотность заряда σ – отношение величины заряда dq, находящегося на физически бесконечно малой поверхности площади dS, к величине площади dS:

$$\sigma = \frac{dq}{dS}.$$

Линейная плотность заряда τ – отношение величины заряда dq, находящегося на физически бесконечно малом отрезке линии длины dl, к величине длины dl:

$$\tau = \frac{dq}{dl}.$$

Напряженность электростатического поля E в точке с радиус-вектором $\mathbf{r}$, **созданная совокупностью объемных зарядов с плотностью** $\rho(\mathbf{r})$, **поверхностных зарядов с плотностью** $\sigma(\mathbf{r})$ и **линейных зарядов с плотностью** $\tau(\mathbf{r})$, определяется соотношением

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^3} dq(\mathbf{r}') \,,$$

где $dq(\mathbf{r}') = \rho(\mathbf{r}')dV'$, $\sigma(\mathbf{r}')dS'$ или $\tau(\mathbf{r}')dl'$ соответственно для каждого из указанных случаев.

Электрический диполь – система двух разноименных по знаку и одинаковых по величине точечных зарядов, находящихся на небольшом расстоянии один от другого. Вектор $\boldsymbol{l}$, проведенный от отрицательного заряда к положительному, называется плечом диполя. Вектор

$$\mathbf{p} = q\boldsymbol{l}$$

называется электрическим моментом диполя.

Напряженность поля, создаваемого диполем в точке, заданной радиус-вектором $\mathbf{r}$, проведенным от центра диполя, (при условии $l << r$) приблизительно равна

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(\mathbf{pr})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}\right]. \qquad (1.4)$$

В пределе $\frac{l}{r} \to 0$ приведенная формула становится асимптотически точной, а диполь называется точечным.

Электрическим дипольным моментом системы *N* зарядов называется вектор

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{N} q_i \mathbf{r}_i \,, \qquad (1.5)$$

где $\mathbf{r}_i$ – радиус-вектор i-ого заряда.

Если полный заряд системы равен нулю (электрически нейтральная система), то величина дипольного момента не зависит от выбора начала системы отсчета, поэтому радиус-вектор $\mathbf{r}$ можно отсчитывать от любой точки. В таком случае на больших расстояниях от системы (намного больших ее собственных размеров), ее электрическое поле совпадает с полем точечного диполя (1.4).

Для непрерывного распределения заряда дипольный момент системы определяется интегралом

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r}\, dq(\mathbf{r}) \,, \qquad (1.6)$$

где интегрирование происходит по всему распределению заряда, а дифференциал заряда для объемных, поверхностных и линейных зарядов имеет вид $dq(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})dV$, $\sigma(\mathbf{r})dS$ и $\tau(\mathbf{r})dl$ соответственно.

Поток вектора A через поверхность S – величина поверхностного интеграла

$$\Phi = \int_S \mathbf{A} d\mathbf{S}, \tag{1.7}$$

где $d\mathbf{S}$ определяется как вектор, по модулю равный площади элементарной площадки dS на поверхности S и направленный по положительной нормали к поверхности. Если поверхность замкнутая, то интеграл обозначается символом $\oint$, а направление $d\mathbf{S}$ совпадает с направлением внешней нормали к поверхности в данной точке.

Дивергенция вектора A – предел отношения потока вектора **A** через бесконечно малую замкнутую поверхность, ограничивающую бесконечно малый объем dV, к величине этого объема:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint \mathbf{A} d\mathbf{S}}{\Delta V}.$$

Если проекции вектора **A** в декартовой системе координат равны A_x, A_y и A_z, то

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \tag{1.8}$$

где часто используемый символический оператор ∇ (набла) – вектор, проекции которого на оси декартовой системы координат равны частным производным по соответствующим координатам:

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

где **i**, **j**, **k** – орты декартовых осей.

Формула Гаусса – Остроградского связывает интеграл по объему от дивергенции вектора с потоком этого вектора через замкнутую поверхность S, ограничивающую объем V:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{A}\, dV = \oint_S \mathbf{A} d\mathbf{S}. \tag{1.9}$$

Электростатическая теорема Гаусса в интегральной форме (интегральная формулировка закона Кулона): поток вектора напряженности электростатитческого поля через любую замкнутую поверхность пропорционален суммарному заряду, находящемуся внутри объема, ограниченного этой поверхностью

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}. \tag{1.10}$$

Поверхность S часто называют поверхностью Гаусса.

Электростатическая теорема Гаусса в дифференциальной форме (дифференциальная формулировка закона Кулона)

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{1.11}$$

Градиент скалярной функции φ – вектор, проекции которого на оси декартовой системы координат равны частным производным функции φ по соответствующим координатам:

$$\operatorname{grad} \varphi = \nabla \varphi = \mathbf{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{1.12}$$

Сила, действующая на диполь в электростатическом поле

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p}\operatorname{grad})\mathbf{E} = (\mathbf{p}\nabla)\mathbf{E} = p_x\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + p_y\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} + p_z\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z}. \tag{1.13}$$

Момент сил, действующих на диполь в электрическом поле

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}, \mathbf{E}]. \tag{1.14}$$