

О.Н. Васильева, А.М. Салецкий

**ЭЛЕКТРИЧЕСТВО
И МАГНЕТИЗМ
СБОРНИК ЗАДАЧ**

*Рекомендовано Федеральным учебно-методическим объединением
в системе высшего образования по укрупненной группе специальностей
и направлений подготовки 03.00.00 – «Физика и астрономия» в качестве
учебного пособия для обучающихся по основным образовательным
программам высшего образования уровня бакалавриата по направлению
подготовки 03.03.02 – Физика*



Москва
Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
2019

УДК 537
ББК 22.33

Васильева О. Н. , Салецкий А. М. **Электричество и магнетизм. Сборник задач** / Учебное пособие. — М.: Физический факультет МГУ, 2019. 544 с.

ISBN 978-5-8279-0171-6

Учебное пособие написано на основе многолетнего опыта проведения занятий по общей физике на физическом факультете МГУ и является составной частью серии учебно-методических разработок кафедры общей физики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Учебное пособие является заключительной, третьей частью модуля «Семинарские занятия» серии «Университетский курс общей физики» (первая часть – «Разработка семинарских занятий», вторая – «Методика решения задач»). В пособии рассматриваются в первую очередь наиболее характерные и типичные задачи. Сборник содержит около 750 задач по разделу «Электричество и магнетизм» курса общей физики.

Содержание «Сборника задач» разделено на 17 тем с максимальной привязкой к действующему тематическому плану семинаров по электричеству и магнетизму. Каждой теме предшествуют краткие теоретические сведения, в конце сборника приведены справочные таблицы.

Пособие предназначено для студентов высших учебных заведений и имеет целью помочь им овладеть основными методами решения задач по электричеству и магнетизму.

Рецензенты: д. ф.-м. н., профессор *С.П. Вятчанин*,
д. ф.-м. н., профессор *В.Н. Прудников*.

ISBN 978-5-8279-0171-6

© Физический факультет МГУ
им. М.В. Ломоносова, 2019 г.
© Васильева О.Н., Салецкий А.М.,
2019 г.

УНИВЕРСИТЕТСКИЙ КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ
(предисловие редактора инновационного учебно-методического
комплекса)

В настоящее время физика все более глубоко проникает во все области современной науки и техники, появляются ее новые отрасли. В связи с этим возникает проблема подготовки квалифицированных кадров ученых-физиков. Существенную роль в такой подготовке играет преподавание общего курса физики. Для решения этой проблемы на физическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова создан инновационный учебно-методический комплекс (ИУМК) «Университетский курс общей физики», обеспечивающий организационную и содержательную целостность системы подготовки, методов и средств обучения общей физике.

ИУМК «Университетский курс общей физики» создан на основе многолетнего опыта преподавания физики студентам физического факультета Московского университета. Курс охватывает все разделы общей физики. Отличительной особенностью данного курса является то, что в нем в методическом отношении осуществлено единство основных форм обучения физике: лекции, лабораторные работы и семинары. В системе университетского образования теоретический материал излагается в основном в лекционных курсах, а умение решать задачи отрабатывается на семинарских занятиях. Развитие навыков эксперимента и анализа его результатов происходит в процессе занятий в общем физическом практикуме. В связи с этим, каждый раздел курса состоит из пяти пособий: «Лекции», «Лекционный эксперимент», «Лабораторный практикум», «Разработка семинарских занятий» и «Методика решения задач».

Каждая глава пособия «Лекции» содержит материал базового уровня, соответствующего программе курса, и отражает современные тенденции и технологии физического образования. Авторы данного курса пытались представить общую физику в виде, используемом активно работающими в науке физиками.

Лекции по каждой теме сопровождаются демонстрацией основных физических экспериментов. Описание классических опытов и экспериментальных установок, представленное в пособии «Лекционный эксперимент». Большая часть описанных экспериментов разработана на кафедре общей физики физического фа-

культета им. М.В. Ломоносова. В тексте пособия имеется также ряд ссылок на авторские свидетельства на изобретения в области лекционных экспериментов, полученные сотрудниками кафедры. Описание классических опытов и экспериментальных установок, представленное в пособии «Лекционный эксперимент» увеличивает ценность и привлекательность курса.

Для установления единого уровня сложности задач и широты охвата материала на семинарах служит пособие «Разработка семинарских занятий» (книга преподавателя). В данном пособии описаны основные принципы проведения семинара. Рассматривается порядок подачи учебного материала, включающий проверку теоретической подготовки студента, обсуждение метода решения задачи, анализ физического смысла результата, разбор характерных ошибок.

Все формы занятий предполагают значительную самостоятельную внеаудиторную работу студентов. Пособием, позволяющим самостоятельно развивать умение решать физические задачи, является «Методика решения задач». Весь материал пособия разбит на главы. Разбор задач всех глав проводится по единой схеме, причем каждую главу можно прорабатывать независимо от других. Пособие содержит также задачи с решениями повышенной сложности для студентов, желающих более глубоко освоить курс общей физики.

Неотъемлемой частью курса общей физики служит лабораторный практикум. Материалы пособия «Лабораторный практикум» достаточны для самостоятельной подготовки к выполнению работ. В связи с этим в пособии имеется как общее теоретическое введение, так и более подробное изложение теории к каждой лабораторной работе. Кроме того, в каждой работе сформулированы цель и идея эксперимента, дано описание установки и подробное изложение последовательности проведения эксперимента и обработки результатов. Представленные в пособии лабораторные работы являются результатом работы нескольких поколений преподавателей кафедры общей физики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Первые лабораторные работы составили содержание двухтомника «Физический практикум» под редакцией В.И. Ивероновой, вышедшей в свет в 1967 г. В последние годы созданы и изготовлены новые современные лабораторные работы с использованием современных экспериментальных методов иссле-

дования физических процессов. Более 50% лабораторных работ являются автоматизированными с управлением компьютером. В каждом семестре студент выполняет 12 лабораторных работ, причем 60-70% являются обязательными для всех студентов, а остальные распределяются с учетом их пожеланий.

Для повышения эффективности усвоения сути изучаемых физических явлений и законов в тематических лабораториях без расхода времени на ознакомление со стандартной технологией измерений в ИУМК введен раздел «Введение в технику эксперимента», состоящий из двух частей: «Лекций» и «Практикума». Лекции посвящены краткому изложению общих принципов проведения физических измерений, теории ошибок и статистической оценки достоверности полученных результатов, а также основных требований к оформлению полученной информации в виде графиков, номограмм и таблиц. В практической части представлены описания лабораторных работ начального цикла, в которых на сравнительно простых физических явлениях студент знакомится с наиболее распространенными приборами, с методами измерений и с правильной обработкой их результатов, основами анализа погрешностей измерений и правилами представления результатов с учетом его точности.

Курс предназначен не только для физиков, но и для будущих инженеров, химиков и биологов.

Все пожелания и замечания по пособиям курса будут с благодарностью приняты и рассмотрены на кафедре общей физики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

А.М. Салецкий

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие написано на основе многолетнего опыта проведения занятий по общей физике на физическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова. За многие годы на кафедре общей физики был создан значительный «архив» задач по курсу общей физики. Такая работа была начата по инициативе первого заведующего кафедрой академика С.И. Вавилова, а издание первого сборника задач было осуществлено в 1949 году под руководством другого заведующего кафедрой, С.Э. Хайкина, [1]. При подготовке следующих изданий Сборника был использован опыт других вузов, в первую очередь, МФТИ и Московского государственного педагогического института. Материал современных, многократно переизданных вариантов Сборника несколько отличается от используемого на физическом факультете Московского университета.

Предлагаемое пособие является составной частью серии учебно-методических пособий кафедры общей физики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова «Университетский курс общей физики», и является заключительной, третьей частью модуля «Семинарские занятия» этой серии (первая часть – «Разработка семинарских занятий» [2], вторая – «Методика решения задач» [3]). В пособии рассматриваются, в первую очередь, наиболее характерные и типичные задачи. Сборник содержит около 750 задач (для более 20% из них приведены решения) по разделу «Электричество и магнетизм» курса общей физики и предназначен для самостоятельной работы студентов.

Содержание «Сборника задач» разделено на 17 тем с максимальной привязкой к действующему тематическому плану семинаров по молекулярной физике и термодинамике. Каждой теме предшествуют краткие теоретические сведения, в конце сборника приведены справочные таблицы.

Авторы выражают благодарность сотрудникам кафедры А.В. Быкову, М.В. Семенову, Ю.А. Кокшарову за полезные обсуждения и ценные замечания. Особую признательность авторский коллектив выражает рецензентам пособия С.П. Вятчанину и В.Н. Прудникову. Авторы заранее признательны также всем, кто поспособствует улучшению в дальнейшем этого учебно-методического пособия.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....		
	Задачи	Ответы, решения
§ 1. Электростатическое поле в вакууме.....	8	175
§ 2. Электрический диполь	21	220
§ 3. Проводники в электростатическом поле.....	29	241
§ 4. Емкость. Простые конденсаторы и их соединения.....	38	274
§ 5. Диэлектрики в электростатическом поле. Конденсаторы с диэлектриками	46	292
§ 6. Энергия, работа и ponderomotorные силы в электрическом поле.....	58	322
§ 7. Токи в сплошных проводящих средах....	69	354
§ 8. Цепи постоянного тока.....	77	370
§ 9. Магнитные поля проводников с током...	88	388
§ 10. Сила Ампера. Момент сил, действующих на контур с током в магнитном поле.....	98	411
§ 11. Сила Лоренца. Движение частиц в электромагнитных полях.....	104	420
§ 12. Электромагнитная индукция.....	110	438
§ 13. Магнитное поле в магнетиках.....	124	460
§ 14. Энергия, работа и ponderomotorные силы и в магнитном поле.....	136	483
§ 15. Переходные процессы в электрических цепях.....	146	500
§ 16. Цепи переменного тока.....	154	516
§ 17. Колебания в электрических контурах.....	161	524
Приложения	538	

§1. Электростатическое поле в вакууме

- Закон Кулона:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} = -\mathbf{F}_{21}.$$

- Напряженность поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ точечного заряда q :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

- Сила, действующая на точечный заряд q в электрическом поле напряженностью \mathbf{E} :

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}.$$

- Линейная плотность заряда: $\tau(\mathbf{r}) \equiv \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta L} = \frac{dq}{dL}.$

- Поверхностная плотность заряда: $\sigma(\mathbf{r}) \equiv \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS}.$

- Объемная плотность заряда: $\rho(\mathbf{r}) \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}.$

- Поток $d\Phi_E$ напряженности электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ через физически бесконечно малый элемент поверхности площадью dS :

$$d\Phi_E \equiv \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS = E(\mathbf{r}) \cos \alpha dS = E_n(\mathbf{r}) dS,$$

где $d\mathbf{S} \equiv \mathbf{n} dS$, \mathbf{n} – единичный вектор, перпендикулярный к площадке.

- Электростатическая теорема Гаусса в интегральной форме: поток Φ_E напряженности электрического поля \mathbf{E} через произвольную замкнутую поверхность S равен полному заряду q , охватываемому этой поверхностью, деленному на электрическую постоянную ϵ_0 :

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0},$$

где $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

- Граничные условия для нормальной составляющей напряженности электрического поля

$$\mathbf{E}_{2n} - \mathbf{E}_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{n},$$

где $\sigma(\mathbf{r})$ – поверхностная плотность стороннего заряда на границе раздела двух сред, \mathbf{E}_{1n} и \mathbf{E}_{2n} – нормальные составляющие напряженности электрического поля \mathbf{E} по обе стороны от этой границы, при этом нормаль \mathbf{n} к поверхности раздела двух сред направлена от первой среды ко второй.

- Электростатическая теорема Гаусса в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}.$$

- Разность потенциалов электростатического поля:

$$\varphi_{12} \equiv \frac{A_{12}}{q} = \int_1^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

- Потенциал электростатического поля точечного заряда при нормировке потенциала $\varphi(\infty) = 0$:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r}.$$

- Локальная связь между потенциалом и напряженностью электростатического поля:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad}\varphi(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}),$$

где ∇ – символический дифференциальный векторный оператор «набла». В декартовых координатах он имеет вид:

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

- Уравнение Пуассона:

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0},$$

где Δ – оператор Лапласа, равный в декартовой системе координат

$$\Delta \equiv \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

- Уравнение Лапласа (частный случай уравнения Пуассона при отсутствии зарядов):

$$\Delta\varphi = 0.$$

1.1. Определить ускорение a , сообщаемое одним электроном другому, если они находятся на расстоянии $d = 1$ см друг от друга. Электроны покоятся.

1.2. Какую массу m'_p должен бы иметь протон, чтобы сила электростатического отталкивания двух протонов уравновешивалась силой их гравитационного притяжения? Сравнить m'_p с реальной массой протона.

1.3. Найти силу электростатического отталкивания между ядром атома кремния и бомбардирующим его протоном, если протон подошел к ядру на расстояние $d = 6 \cdot 10^{-11}$ мм. Заряд ядра кремния в $n = 14$ раз больше заряда протона. Влиянием электронной оболочки атома кремния пренебречь.

1.4. Две системы точечных зарядов $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_{N_1}$ и $q'_1, q'_2, \dots, q'_j, \dots, q'_{N_2}$ закреплены в точках с радиус-векторами $r_1, r_2, \dots, r_i, \dots, r_{N_1}$ и $r'_1, r'_2, \dots, r'_j, \dots, r'_{N_2}$ соответственно. С какой силой F система зарядов $\{q'\}$ действует на систему зарядов $\{q\}$.

1.5. Три одинаковых одноименных заряда q расположены в вершинах равностороннего треугольника. Какой заряд Q противоположного знака нужно поместить в плоскости треугольника в точке, равноудаленной от его вершин, чтобы сила, действующая на каждый заряд, была равна нулю?

1.6. В вершинах квадрата со стороной a расположены в перечисленном порядке точечные заряды $q, 2q, 3q$ и $4q$. Найти силу F , действующую на точечный заряд q , расположенный в центре квадрата.

1.7. В вершинах правильного шестиугольника со стороной a расположены последовательно заряды $q, 2q, 3q, 4q, 5q$ и $6q$. Какая сила F действует на точечный заряд q в центре шестиугольника?

1.8. Два маленьких проводящих шарика подвешены на длинных непроводящих нитях, закрепленных в одной точке. Шарика заряжены одинаковыми зарядами и находятся на расстоянии $a = 5$ см друг от друга. В некоторый момент времени один из шариков разряжают. Что произойдет после этого?

1.9. Два одинаково заряженных шарика массами m подвешены на нитях длиной l , закрепленных в одной точке. При этом угол между нитями прямой. Найти заряд шариков.

1.10. Два одинаковых маленьких металлических шарика, находящихся на расстоянии r друг от друга, заряжены противоположно.

ложными по знаку зарядами и притягиваются с силой F_1 . Модуль положительного заряд q_1 больше модуля отрицательного заряда $|q_2|$. После того, как шарики были приведены в соприкосновение и затем разведены на первоначальное расстояние, они отталкиваются с силой F_2 . Определить заряды q_1 и q_2 , которые были на шариках до их соприкосновения.

1.11. По горизонтальному кольцу могут без трения перемещаться три маленьких шарика с зарядами: $+q_1$ на одном шарике и $+q_2$ на каждом из двух других. Найти отношение зарядов q_1/q_2 , если при равновесии угол между радиус-векторами зарядов q_2 равен $\alpha = 60^\circ$?

1.12. Вблизи концов горизонтальной гладкой трубы длиной l закреплены положительные заряды q_1 и q_2 . Внутри трубы находится положительно заряженный шарик. Найти положение равновесия шарика. Будет ли это положение равновесия устойчивым?

1.13. Два точечных заряда $+3q$ и $-q$ располагаются на расстоянии l друг от друга. В какой точке на прямой, проходящей через эти заряды, надо поместить точечный заряд $+q$, чтобы сила, действующая на него, была равна нулю?

1.14. Положительный точечный заряд $q = 80$ мкКл находится на плоскости XOY в точке A с радиус-вектором $\mathbf{r}_0 = \mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y$, где \mathbf{e}_x и \mathbf{e}_y – орты осей X и Y . Найти модуль и вектор напряженности электрического поля \mathbf{E} в точке B с радиус-вектором $\mathbf{r} = 3\mathbf{e}_x - 4\mathbf{e}_y$. Значения координат \mathbf{r}_0 и \mathbf{r} даны в метрах.

1.15. Определить положение точки, в которой напряженность электрического поля равна нулю вблизи двух неодинаковых по модулю зарядов q_1 и q_2 , находящихся на расстоянии l друг от друга, для случаев, когда: а) знаки зарядов одинаковы; б) знаки зарядов разные.

1.16. Найти напряженность \mathbf{E} электрического поля двух точечных зарядов $+q$ и $-q$, находящихся на расстоянии d друг от друга в точках B и C , отстоящих от положительного заряда на такое же расстояние d , как и отрицательный заряд (см. рис. 1.1).

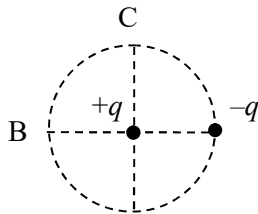


Рис. 1.1. Схема расположения зарядов $+q$ и $-q$ и точек B и C .

1.17. В вершинах квадрата со

стороной a находятся точечные заряды q_1, q_2, q_3 и q_4 (рис. 1.2). Определить напряженность E электрического поля в центре квадрата. Рассмотреть частные случаи:

- а) $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q$;
 б) $q_1 = q_3 = q, q_2 = q_4 = -q$;
 в) $q_1 = q_2 = -q, q_3 = q_4 = q$.

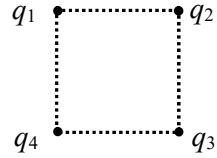


Рис. 1.2. Схема расположения точечных зарядов.

1.18. В вершинах правильного шестиугольника со стороной a расположены три положительных и три отрицательных точечных заряда, модули которых одинаковы. Найти модуль напряженности электрического поля в центре шестиугольника, если: а) знаки соседних зарядов противоположны; б) три положительных и три отрицательных заряда находятся рядом; в) последовательность расположения зарядов $(+q)-(+q)-(-q)-(-q)-(+q)-(-q)$.

1.19. В вершинах правильного треугольника со стороной a находятся точечные заряды $3q, 3q$ и $(-2q)$. Найти модуль напряженности электрического поля в точке, равноудаленной от вершин треугольника на расстояние, равное его стороне.

1.20. Определить максимальную напряженность электрического поля на оси тонкого кольца радиуса R , на котором равномерно распределен заряд q .

1.21. Маленькая бусинка массой m с отрицательным зарядом $(-q)$ может без трения скользить по тонкой спице, совпадающей с осью кольца радиуса R , на котором равномерно распределен заряд $+Q$. Определить период T малых колебаний (с амплитудой, значительно меньшей радиуса кольца) бусинки относительно положения равновесия.

1.22. По полукольцу радиуса R равномерно распределен заряд q . Найти напряженность электрического поля в центре полукольца.

1.23. Полукольцо радиуса R заряжено равномерно с линейной плотностью τ . Найти напряженность электрического поля в точке A , лежащей на оси симметрии полукольца в его плоскости и находящейся вне полукольца на расстоянии R от его центра.

1.24. Тонкий провод длиной L заряжен равномерно с линейной плотностью τ . Найти вектор E и модуль E напряженности электрического поля в произвольной точке A , находящейся на расстоянии h от провода.

1.25. По тонкому стержню длиной l равномерно распределен заряд с линейной плотностью τ . Найти напряженность электрического поля: *a)* в точке A , находящейся на расстоянии h от стержня на перпендикуляре, проведенном через его конец; *б)* в точке B , равноудаленной от концов стержня и находящейся на расстоянии h от него. Рассмотреть случай, когда $l \rightarrow \infty$.

1.26. Длинный провод, равномерно заряженный с линейной плотностью заряда τ , изогнут так, как показано на рис. 1.3. Радиус закругления R значительно меньше длины провода. Определить напряженность электрического поля в точке O .



Рис. 1.3. Конфигурация равномерно заряженного провода.

1.27. По тонкому стержню длиной L равномерно распределен заряд Q . Точечный заряд q находится на одной прямой со стержнем на расстоянии d от его середины. Какая сила действует на этот заряд?

1.28. По тонкому стержню длины $l = 10$ см равномерно распределен заряд $Q = 3 \cdot 10^{-9}$ Кл. Найти напряженность электрического поля в точке на оси стержня, если расстояние от точки до середины стержня равно $d = 20$ см. При каком минимальном значении d/l напряженность поля можно рассчитывать по формуле поля точечного заряда с относительной погрешностью менее 5%?

1.29. Прямой тонкий стержень длиной $2l$, заряженный с постоянной линейной плотностью заряда τ , согнут пополам в виде прямого угла. Определить напряженность электрического поля стержня в точке A , находящейся на диагонали прямого угла напротив концов стержня (рис. 1.4).

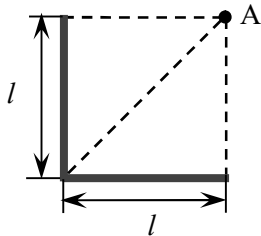


Рис. 1.4. Расположение заряженной проволоки и точки A .

1.30. Тонкая плоское кольцо с внутренним радиусом a и внешним радиусом b заряжено с поверхностной плотностью σ . Найти напряженность электрического поля на оси кольца в зависимости от расстояния z до его плоскости. Рассмотреть случай, когда $a = 0$ (сплошной диск).

1.31. Определить напряженность электрического поля в центре полусферы, равномерно заряженной с поверхностной плотностью заряда σ .

1.32. От равномерно заряженной с поверхностной плотностью заряда σ сферы радиуса R отрезан сферический сегмент

(рис. 1.5), площадь основания которого равна S . Найти напряженность электрического поля в центре кривизны сегмента т.О.

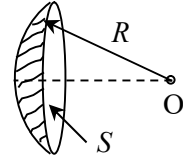


Рис. 1.5. Заряженный сферический сегмент.

1.33. Боковая поверхность вертикального цилиндра радиуса R и длины L равномерно заряжена с плотностью σ . Найти напряженность электрического поля на оси цилиндра в точке А, находящейся на высоте $L/4$ над нижним основанием цилиндра.

1.34. Кольцо радиуса R заряжено с линейной плотностью $\gamma = \gamma_0 \cos \varphi$, где φ – полярный угол. Определить напряженность электрического поля на оси кольца в зависимости от расстоянии z до плоскости кольца.

1.35. Круглый цилиндр высотой h заряжен равномерно по высоте с поверхностной плотностью заряда $\sigma = \sigma_0 \cos \varphi$, где φ – полярный угол цилиндрической системы координат с осью Z , совпадающей с осью цилиндра. Определить напряженность электрического поля в центре цилиндра.

1.36. Напряженность однородного электрического поля равна E . Определить поток вектора напряженности Φ_E через квадрат со стороной l , плоскость которого составляет угол $\alpha = \pi/3$ с направлением вектора E .

1.37. В точке, равноудаленной от всех вершин правильного тетраэдра, находится точечный заряд Q . Найти поток Φ напряженности вектора E электрического поля через одну из граней тетраэдра.

1.38. Две параллельные бесконечные тонкие пластины заряжены равномерно: одна с поверхностной плотностью

$\sigma_1 = +4 \cdot 10^{-10}$ Кл/м², другая –

$\sigma_2 = -8 \cdot 10^{-10}$ Кл/м² (рис. 1.6). Найти напряженность электрического поля E в каждой из областей 1, 2 и 3.

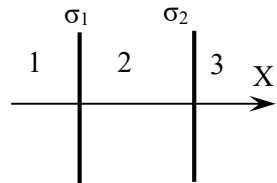


Рис. 1.6. Расположение заряженных плоскостей.

1.39. Определить модули напряженности электрического поля между тремя параллельными бесконечными плоскостями с поверхностными плотностями зарядов: а) $+\sigma, +\sigma, +\sigma$; б) $+\sigma, -\sigma, +\sigma$; в) $+\sigma, -5\sigma, +4\sigma$.

1.40. Шесть параллельных бесконечных плоскостей с поверхностными плотностями зарядов $\sigma_1 = +5\sigma$, $\sigma_2 = -6\sigma$, $\sigma_4 = +7\sigma$, $\sigma_5 = -\sigma$, $\sigma_6 = -4\sigma$ расположены так, как показано на рис. 1.7. Найти поверхностную плотность заряда σ_3 третьей плоскости, если: а) напряженность поля между второй и третьей плоскостями равна нулю; б) напряженность поля вне пластин равна нулю.

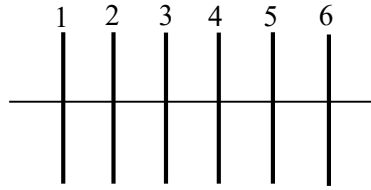


Рис. 1.7. Расположение заряженных плоскостей.

1.41. Две бесконечные плоскости, равномерно заряженные с поверхностной плотностью заряда σ , пересекаются под углом $\alpha < \pi/2$. Найти модуль напряженности создаваемого плоскостями электрического поля: а) E_1 – внутри угла α ; б) E_2 – внутри угла $(\pi - \alpha)$.

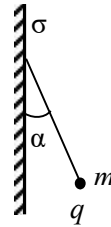


Рис. 1.8. Шарик на нити возле бесконечной заряженной плоскости.

1.42. К вертикальной бесконечной плоскости, заряженной с поверхностной плотностью заряда σ , подвешен на длинной нити маленький непроводящий шарик массой m , имеющий заряд q такого же знака, что и заряд плоскости (рис. 1.8). Какой угол α с плоскостью образует нить, на которой висит шарик?

1.43. Два бесконечных плоскопараллельных слоя имеют общую границу (рис. 1.9). Толщина левой пластины d , объемная плотность заряда внутри пластины $+\rho$. Толщина правой пластины $2d$, объемная плотность её заряда $(-\rho)$. Определить напряженность электрического поля во всем пространстве и построить график распределения напряженности вдоль оси OX , перпендикулярной поверхностям пластин.

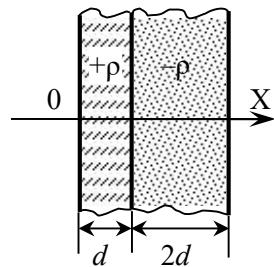


Рис. 1.9. Расположение заряженных пластин.

1.44. Две бесконечные заряженные по объему пластины расположены так же, как в задаче 1.43. Толщина левой пластины d , объемная плотность заряда внутри пластины $+\rho$. Определить максимальный модуль напряженности электрического поля, если: а) толщина правой пластины $2d$,

объемная плотность её заряда $+\rho$; б) толщина правой пластины d , объемная плотность её заряда $(-\rho)$.

1.45. Шаровой слой с радиусами R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$) заряжен с постоянной объемной плотностью ρ . Определить модуль напряжённости электрического поля во всем пространстве. Рассмотреть частный случай $R_1 = 0$ (сплошной шар радиуса R).

1.46. Шар радиуса R заряжен неоднородно с объемной плотностью $\rho = \rho_0 r^2$, где r – расстояние до центра шара, $\rho_0 = \text{const} > 0$. Определить: а) полный заряд шара Q ; б) модуль напряженности E электрического поля внутри шара и снаружи.

1.47. Шаровой слой с радиусами R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$) заряжен с объемной плотностью ρ . Определить модуль напряжённости электрического поля в любой точке пространства для случаев, когда ρ зависит от расстояния r до центра слоя как: 1) αr ; 2) α/r ; 3) $\alpha e^{\beta r^3}$ ($\alpha = \text{const} > 0$, $\beta = \text{const} > 0$).

1.48. Шар радиуса R заряжен с объемной плотностью, зависящей только от расстояния r до центра шара: $\rho = \rho_0(1 - r/R)$, где $\rho_0 = \text{const} > 0$. На каком расстоянии от центра шара значение модуля напряженности максимально? Определить эту величину E_{max} .

1.49. Бесконечная пластина конечной толщины равномерно заряжена с объемной плотностью ρ . В пластине имеется сферическая полость радиуса R , центр которой находится на средней линии пластины (рис. 1.10). Определить напряженность электрического поля в полости для точек на диаметрах АВ и CD в зависимости от расстояния r до центра.



Рис. 1.10. Заряженная пластина со сферической полостью.

1.50. Длинный цилиндр радиуса R заряжен равномерно с объемной плотностью ρ . Определить напряженность электрического поля внутри и снаружи цилиндра.

1.51. Два длинных тонких стержня одинакового радиуса r параллельны друг другу и равномерно заряжены с линейной плотностью $+\tau$ и $-\tau$. Расстояние между осями стержней $L \gg r$. Найти распределение напряженности электрического поля между стержнями вдоль оси OX, перпендикулярной стержням и лежащей в одной плоскости в ними.

1.52. Два длинных тонких провода, расположенных параллельно на расстоянии d друг от друга, равномерно заряжены с линейной плотностью $+\tau$ и $-\tau$. Определить напряженность электриче-

ского поля в плоскости симметрии системы на расстоянии h от плоскости, в которой лежат провода.

1.53. Объемная плотность заряда длинного цилиндра радиусом R зависит от расстояния r до оси цилиндра: $\rho = \rho_0 r^2$, где $\rho_0 = \text{const} > 0$. Определить напряженность электрического поля внутри и снаружи цилиндра.

1.54. Длинная цилиндрическая трубка с внутренним и внешним радиусами R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$) заряжена с объемной плотностью ρ : а) $\rho = \alpha / r$; б) $\rho = \alpha / r^2$; в) $\rho = \rho_0 e^{-\alpha r^2}$, где r – расстояние до оси трубки, $\alpha = \text{const} > 0$, $\rho_0 = \text{const}$. Определить напряженность электрического поля в зависимости от r .

1.55. Каким должно быть распределение объемной плотности заряда в бесконечно длинном цилиндре радиусом R , чтобы внутри цилиндра вектор напряженности электрического поля был направлен вдоль его радиуса и равнялся E_0 ?

1.56. Бусинка массой m , имеющая заряд q , может без трения скользить по тонкой спице, расположенной вдоль диаметра однородно заряженного зарядом Q горизонтального кольца радиусом R (знаки зарядов бусинки и кольца совпадают). Определить период T малых колебаний бусинки (с амплитудой, значительно меньшей радиуса кольца) относительно положения равновесия.

1.57. Два точечных заряда q и $(-q)$ находятся на расстоянии a друг от друга (рис. 1.11). Определить работу A сил электрического поля по перемещению заряда Q : а) из точки А в точку В; б) из точки С в точку D. Какой будет эта работа, если оба точечных заряда q будут положительными?

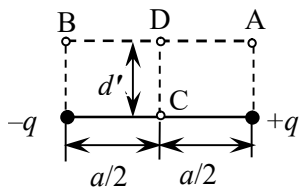


Рис. 1.11. Расположение точечных зарядов.

1.58. В вершинах правильного шестиугольника со стороной a расположены одинаковые точечные заряды q . Определить работу A сил электрического поля по перемещению заряда Q из центра шестиугольника в середину одной из его сторон.

1.59. Нарисовать схему силовых линий и эквипотенциальных поверхностей для системы двух точечных зарядов $+q$ и $+3q$, расстояние между которыми d .

1.60. Два точечных заряда q и $q' = -2q$ закреплены на расстоянии d друг от друга. Определить вид и параметры поверхности

нулевого потенциала этой системы зарядов при нормировке потенциала $\varphi_\infty = 0$.

1.61. Найти потенциал поля, создаваемого равномерно заряженной с линейной плотностью τ нитью длины $2L$ в точке, находящейся на расстоянии $d > L$ от нити, если точка расположена: а) на перпендикуляре к нити, проведенном через её середину; б) на продолжении нити.

1.62. Стержень равномерно заряжен с линейной плотностью заряда τ и симметрично изогнут так, как показано на рис. 1.12. Длины прямых участков стержня равны l , радиус закругления R . Определить потенциал электрического поля в точке O .

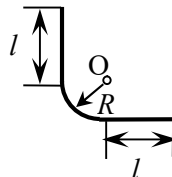


Рис. 1.12. Конфигурация равномерно заряженного провода.

1.63. Два коаксиальных кольца радиуса R_1 и R_2 из тонкой проволоки находятся на расстоянии d друг от друга и имеют заряды Q и $(-Q)$ соответственно. Найти разность потенциалов $\Delta\varphi$ между центрами колец.

1.64. Плоское кольцо с внутренним радиусом a и внешним радиусом b заряжена с поверхностной плотностью σ . Найти зависимость потенциала электрического поля на оси кольца от расстояния z до его плоскости. Рассмотреть случай $a = 0$ (сплошной диск). Считать $\varphi_\infty = 0$.

1.65. Заряд Q равномерно распределен по поверхности тонкого диска радиусом R . Найти разность потенциалов $\Delta\varphi$ между центром диска и точками на его краю.

1.66. Три параллельных бесконечных плоскости расположены на расстоянии d друг от друга. Определить разности потенциалов между соседними плоскостями, если на них находятся равномерно распределенные заряды с поверхностной плотностью: а) $+\sigma$, $+\sigma$; б) $+\sigma$, -4σ , $+3\sigma$.

1.67. Две концентрические сферы с радиусами R и $2R$ заряжены равномерно зарядами разного знака: внутренняя – зарядом q , внешняя – зарядом $(-2q)$. Определить потенциал электрического поля в точках, находящихся от центра сфер на расстояниях $r_1 = 0,5R$, $r_2 = 1,5R$ и $r_3 = 2,5R$. Считать $\varphi_\infty = 0$.

1.68. Заряды распределены равномерно по поверхности двух концентрических сфер с радиусами R и $3R$, причем поверхностные плотности электрического заряда на обеих сферах одинаковы. Найти плотность заряда σ , если потенциал в центре сфер оказался равен φ_0 при нормировке $\varphi_\infty = 0$.

1.69. Шаровой слой с радиусами R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$) заряжен с постоянной объемной плотностью ρ . Найти разность потенциалов $\Delta\varphi_{12}$ между точками, находящимися от центра слоя на расстояниях a ($R_1 < a < R_2$) и $b > R_2$.

1.70. Пространство между сферами с радиусами a и b ($a < b$) заряжено с плотностью $\rho = a/r$. Найти потенциал поля в произвольной точке при нормировке потенциала $\varphi_\infty = 0$.

1.71. Разность потенциалов между длинными coaxialными цилиндрами с радиусами R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$), заряженными равными разноименными зарядами, равна U . Определить поверхностную плотность зарядов на каждом цилиндре.

1.72. Два бесконечно длинных coaxialных цилиндра с радиусами R и $2R$ равномерно заряжены с поверхностными плотностями заряда $+2\sigma$ (внутренний) и $-\sigma$ (внешний). Вычислить потенциал электрического поля в любой точке пространства, считая, что на оси цилиндров потенциал $\varphi_0 = 0$.

1.73. Бесконечно длинный полый цилиндр с внутренним и внешним радиусами R_1 и R_2 , соответственно, заряжен между стенками с постоянной объемной плотностью ρ . Найти потенциал поля в произвольной точке, считая потенциал на внешней поверхности цилиндра равен нулю.

1.74. Бесконечно длинный цилиндр радиусом R заряжен так, что объемная плотность его заряда зависит от расстояния r до оси цилиндра: $\rho = \rho_0 r^2$, где $\rho_0 = \text{const} > 0$. Найти разность потенциалов между осью и поверхностью цилиндра.

1.75. Бесконечно длинный цилиндр радиусом R заряжен так, что объемная плотность заряда линейно убывает от оси цилиндра: $\rho = \rho_0(1 - r/R)$, где $\rho_0 = \text{const} > 0$. Найти разность потенциалов между точками, находящимися на расстояниях $R_1 < R$ и $R_2 > R$ от оси цилиндра.

1.76. Два длинных параллельных стержня одинакового радиуса $r = 1$ мм расположены на расстоянии $l = 15$ см друг от друга и заряжены разноименными зарядами с одинаковой линейной плотностью. Разность потенциалов между проводами равна $U = 1500$ В. Определить напряженность электрического поля посередине между стержнями.

1.77. Определить напряженность электрического поля, потенциал которого зависит от координат x и y : $\varphi = a(x^2 + y^2)$, где a – известная постоянная.

1.78. Потенциал электрического поля, создаваемого некоторой системой зарядов, имеет вид: $\varphi = a(x^2 + y^2) - bz^2$, где a и b – известные положительные постоянные. Какую форму имеет поверхность нулевого потенциала? Определить напряженность поля E .

1.79. Потенциал электрического поля зависит от координат x , y и z : $\varphi = axy - bz^2$, где a и b – известные положительные постоянные. Найти напряжённость электрического поля и её модуль в точке $M(1, -2, 1)$.

1.80. Потенциал некоторого электростатического поля описывается функцией: $\varphi = ar \cos \theta$, где r – расстояние от начала координат, θ – полярный угол, a – известная постоянная. Найти модуль E напряженности поля в точке с координатами (r, θ) .

1.81. Определить потенциал электрического поля, если в декартовой системе координат напряженность: а) $E = (by - ax)\mathbf{i} + bx\mathbf{j}$; б) $E = -a(y\mathbf{i} + x\mathbf{j}) + 2bz\mathbf{k}$.

1.82. Является ли электростатическим поле, напряженность которого в декартовой системе координат имеет вид: $E = a(y\mathbf{i} - x\mathbf{j})$?

1.83. В сферической системе координат напряженность электрического поля имеет вид: $E = \frac{a}{r^3}(2 \cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta)$, где a – известная постоянная. Является ли данное поле электростатическим?

1.84. Напряженность электрического поля записывается в виде: $E = a\mathbf{i} - b\mathbf{j}$, где a и b – постоянные. Является ли это поле однородным? Определить его потенциал.

1.85. Внутри заряженного шара радиусом R потенциал поля зависит только от расстояния до его центра: $\varphi = ar^3 + b$, где a и b – постоянные. Найти распределение объемного заряда $\rho(r)$ внутри шара.

1.86. В некоторой области пространства потенциал поля зависит только от координаты x : $\varphi = ax^2 + b$, где a и b – постоянные. Найти распределение объёмного заряда $\rho(x)$.

1.87. Напряженность электрического поля имеет вид: $E = ax\mathbf{i} + by^2\mathbf{j} + cz^3\mathbf{k}$. Определить распределение объемной плотности заряда $\rho(x, y, z)$ в декартовых координатах.

§2. Электрический диполь

• Электрический диполь – совокупность двух равных по величине противоположных по знаку точечных электрических зарядов, расположенных на некотором расстоянии друг от друга.

• Момент электрического диполя (электрический дипольный момент):

$$\mathbf{p} \equiv q\mathbf{l},$$

где \mathbf{l} – вектор с началом в отрицательном заряде и концом в положительном.

• Дипольный момент электрически нейтральной ($\sum_i q_i = 0$) системы точечных зарядов:

$$\mathbf{p} \equiv \sum_i q_i \mathbf{r}_i.$$

Здесь суммирование ведется по всем зарядам q_i , входящим в систему.

• Дипольный момент электрически нейтральной системы линейно распределенных зарядов ($\int_L \tau(\mathbf{r}) d\mathbf{l} = 0$):

$$\mathbf{p} = \int_L \tau(\mathbf{r}) \mathbf{r} d\mathbf{l}.$$

• Дипольный момент электрически нейтральной системы поверхностно распределенных зарядов ($\int_S \sigma(\mathbf{r}) dS = 0$):

$$\mathbf{p} = \int_S \sigma(\mathbf{r}) \mathbf{r} dS.$$

• Дипольный момент электрически нейтральной системы объемно распределенных зарядов ($\int_V \rho(\mathbf{r}) dV = 0$):

$$\mathbf{p} = \int_V \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} dV.$$

• Модуль вектора напряженности электрического поля точечного электрического диполя:

$$E = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3 \cos^2 \varphi + 1},$$

где φ – угол между дипольным моментом \mathbf{p} и радиус-вектором \mathbf{r} .

- Потенциал электрического поля точечного диполя (при нормировке потенциала $\varphi_\infty = 0$):

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}.$$

- Энергия точечного электрического диполя с постоянным дипольным моментом \mathbf{p} во внешнем электрическом поле с напряженностью \mathbf{E} в точке с радиус-вектором \mathbf{r} :

$$W(\mathbf{r}) = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}).$$

- Сила, действующая на точечный диполь в электрическом поле напряженностью \mathbf{E}_0 (в декартовой системе координат):

$$\mathbf{F} = p_x \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial x} + p_y \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial y} + p_z \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial z} = (\mathbf{p} \nabla) \mathbf{E}_0.$$

- Момент сил, действующий на точечный диполь во внешнем электрическом поле напряженностью \mathbf{E}_0 относительно любой точки пространства:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p} \mathbf{E}_0].$$

2.1. Найти потенциал φ и модуль напряженности E поля диполя с дипольным моментом \mathbf{p} как функцию расстояния r от центра диполя до данной точки и угла θ между осью диполя и радиус-вектором \mathbf{r} . Определить ориентацию вектора \mathbf{E} относительно радиус-вектора \mathbf{r} .

2.2. Электрический диполь с дипольным моментом \mathbf{p} находится в начале декартовой системы координат, причем вектор \mathbf{p} ориентирован в положительном направлении оси Y (рис. 2.1). Найти компоненты напряженности поля диполя в точке M с координатами (x_0, y_0) .

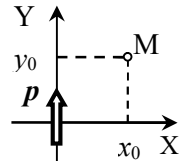


Рис. 2.1. Расположение диполя и точки M .

2.3. Точечный диполь с моментом \mathbf{p} , ориентированным в положительном направлении оси Z , находится в начале координат декартовой системы отсчета. Для точки M на расстоянии r от диполя найти проекцию E_z вектора напряженности поля диполя на ось Z и проекцию E_\perp на плоскость XY .

2.4. Точечный электрический диполь с дипольным моментом \mathbf{p} , направленным в положительном направлении оси Z , находится в

начале декартовой системы координат. Что представляет собой поверхность, во всех точках которой напряженность поля диполя \mathbf{E} перпендикулярна вектору \mathbf{p} ? Определить напряженность \mathbf{E} поля диполя в точках этой поверхности.

2.5. Маленький шарик массой m с зарядом q равномерно вращается по окружности с угловой скоростью ω в поле диполя с дипольным моментом \mathbf{p} . Как ориентирована плоскость орбиты шарика относительно \mathbf{p} и на каком расстоянии h от центра диполя она находится? Определить радиус окружности R .

2.6. Молекулу воды можно рассматривать как точечный диполь с дипольным моментом $p = 6,17 \cdot 10^{-30}$ Кл·м. Определить напряженность поля, созданного диполем на расстоянии $d = 3 \cdot 10^{-7}$ см от середины диполя в точке, находящейся: а) на оси диполя; б) на перпендикуляре к оси диполя.

2.7. Получить уравнение силовых линий электрического поля точечного диполя с дипольным моментом \mathbf{p} в полярной системе координат, начало которой находится в центре диполя, а полярный угол отсчитывается от направления вектора \mathbf{p} .

2.8. Точечный заряд q находится на малом расстоянии l от диполя с дипольным моментом \mathbf{p} . При каком расположении заряда относительно диполя модуль действующей на заряд силы: а) максимален; б) минимален? Определить максимальное и минимальное значения модуля силы, действующей на заряд.

2.9. Точечный диполь \mathbf{p} находится в начале декартовой системы координат. Вектор \mathbf{p} ориентирован в положительном направлении оси Ox . Определить модуль силы, действующей со стороны диполя на точечный заряд q , находящийся в точке с координатами $(1, 2, 0)$.

2.10. Два точечных диполя с одинаковыми по величине дипольными моментами p , ориентированными взаимно перпендикулярно, находятся на расстоянии l друг от друга (рис. 2.2). Найти напряженность поля в точке А.

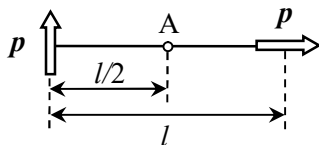


Рис. 2.2. Взаимное расположение диполей и точки А.

2.11. Четыре точечных заряда расположены вдоль одной прямой (рис. 2.3). Найти дипольный момент системы зарядов. Проверить, что

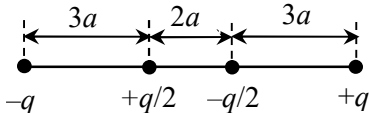


Рис. 2.3. Взаимное расположение точечных зарядов.

величина дипольного момента электрически нейтральной системы не зависит от выбора начала системы координат.

2.12. Найти дипольный момент квадруполя – системы из четырех точечных зарядов, двух положительных, а двух – отрицательных, расположенных в вершинах квадрата (см. рис. 2.4).

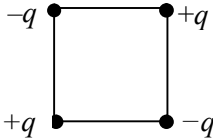


Рис. 2.4. Расположение зарядов в квадруполе.

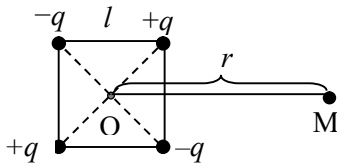


Рис. 2.5. Расположение квадруполя и точки М.

Определить модуль напряженности E поля квадруполя в точке М, находящейся на расстоянии $r \gg l$ от центра О квадруполя на линии, параллельной одной из сторон квадрата (рис. 2.5).

2.14. Система состоит из шести одинаковых по величине точечных зарядов (трех положительных и трех отрицательных), которые расположены в вершинах правильного шестиугольника, причем знаки соседних зарядов разные. Доказать, что дипольный момент такой системы равен нулю.

2.15. Найти модуль дипольного момента p тонкого стержня длины l , линейная плотность заряда которого зависит от расстояния x до одного из его концов: $\tau(x) = a(3x^2 - l^2)$, где a – положительная постоянная.

2.16. В центре полукольца радиусом R находится точечный заряд $(-q)$. Полукольцо заряжено с линейной плотностью $\tau(\vartheta) \sim \cos\vartheta$, где ϑ – угол между радиус-вектором рассматриваемой точки и осью симметрии системы Z (см. рис. 2.6). Полный заряд полукольца равен $+q$. Определить дипольный момент системы. Найти в дипольном приближении потенциал $\phi(z)$ (при нормировке потенциала $\phi_\infty = 0$) и напряженность $E(z)$ электрического поля на оси Z при $z \gg R$.

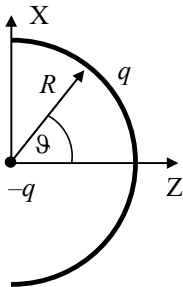


Рис. 2.6. Взаимное расположение точечного заряда и полукольца.

2.17. Какую работу нужно совершить, чтобы повернуть точечный диполь p

в электрическом поле с напряженностью E из положения, когда дипольный момент p сонаправлен с E , в положение, когда он направлен противоположно E ?

2.18. Точечный диполь с моментом $p = 1,5 \cdot 10^{-10}$ Кл·м находится в однородном электрическом поле с напряженностью $E = 6 \cdot 10^4$ В/м, причем диполь ориентирован перпендикулярно вектору напряженности E . Найти работу силы электрического поля при повороте диполя в положение, когда его момент параллелен E .

2.19. Точечный заряд $q < 0$, расположен на продолжении оси точечного диполя с дипольным моментом p на расстоянии r от положительного заряда диполя. Какую работу нужно совершить, чтобы переместить заряд в симметрично расположенную точку по другую сторону диполя?

2.20. Два диполя с одинаковыми дипольными моментами p находятся на расстоянии d друг от друга и ориентированы так, как показано на рис. 2.7. Какую работу надо совершить, чтобы удалить один из диполей на бесконечно большое расстояние от другого?

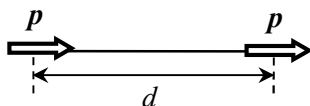


Рис. 2.7. Взаимное расположение диполей.

2.21. Молекулу воды можно считать диполем с дипольным моментом $p = 6,2 \cdot 10^{-30}$ Кл·м. Оценить работу, которую надо совершить, чтобы раздвинуть вдоль линии соединения две молекулы воды от расстояния $r_0 = 4 \cdot 10^{-10}$ м (примерно на таком расстоянии находятся молекулы воды при комнатной температуре) до расстояния, на котором силы электрического взаимодействия молекул исчезающе малы (водяной пар).

2.22. Электрический диполь с дипольным моментом p находится в однородном электрическом поле, вектор напряженности E которого перпендикулярен вектору p . Под действием сил электрического поля диполь начинает поворачиваться относительно оси, проходящей через его центр. Момент инерции диполя относительно этой оси равен J . Определить угловую скорость ω диполя в момент прохождения им положения равновесия.

2.23. Электрический диполь p находится в однородном электрическом поле, вектор напряженности E которого параллелен вектору p . Как будет двигаться диполь, если его повернуть на малый угол α_0 ? Установить закон движения диполя. Момент инерции диполя при вращении вокруг оси, проходящей через его центр и перпендикулярной оси диполя, равен J .

2.24. Диполь с моментом $p = 1 \cdot 10^{-12}$ Кл·м равномерно вращается с угловой скоростью $\omega = 10^3$ с $^{-1}$ относительно оси, проходящей через центр диполя перпендикулярно вектору дипольного момента p . Определить зависимость от времени потенциала поля диполя в точке на расстоянии $r = 1$ см от центра диполя в плоскости его вращения. В начальный момент времени принять потенциал ϕ_0 этой точки равным нулю.

2.25. Диполь с моментом p равномерно вращается с угловой скоростью ω относительно оси, проходящей через центр диполя перпендикулярно вектору дипольного момента p . Определить среднюю за половину периода вращения диполя ($t = T/2$) потенциальную энергию заряда q , находящегося в поле диполя на расстоянии r от его центра в плоскости вращения диполя. В начальный момент времени потенциал ϕ_0 точки, в которой находится заряд q , равен нулю.

2.26. Два электрических диполя с моментами p_1 и p_2 находятся в одной плоскости на расстоянии r друг от друга, причем вектор p_1 направлен вдоль линии, соединяющей центры диполей (рис. 2.8). Вычислить энергию взаимодействия диполей, соответствующую положению их устойчивого равновесия.

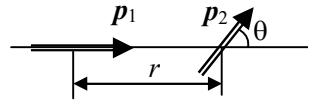


Рис. 2.8. Взаимное расположение диполей.

2.27. Определить энергию взаимодействия двух электрических диполей с моментами p_1 и p_2 , которые находятся в одной плоскости на расстоянии r друг от друга, когда ориентация диполей соответствует случаям, показанным на рис. 2.9.

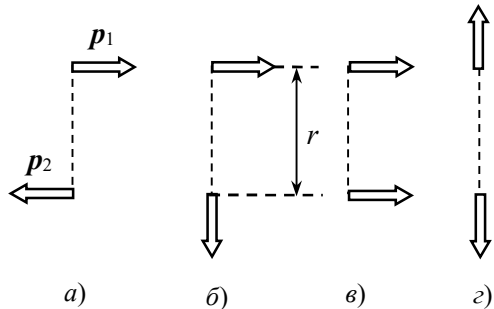


Рис. 2.9. Взаимная ориентация диполей.

2.28. Определить с точностью до 1% потенциальную энергию в расчете на один диполь с моментом \mathbf{p} в неограниченной линейной цепочке одинаковых диполей, ориентированных так, как показано на рис. 2.10. Расстояние между соседними диполями равно a .

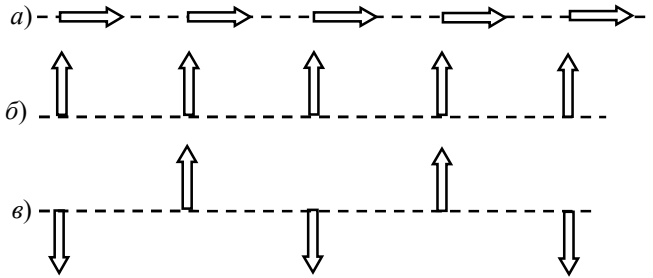


Рис. 2.10. Взаимная ориентация диполей в цепочках.

2.29. Точечный диполь с моментом \mathbf{p} находится на оси равномерно заряженного кольца радиусом R на расстоянии $2R$ от его плоскости. Полный заряд кольца q . Вектор \mathbf{p} ориентирован вдоль оси кольца. Найти действующую на диполь силу \mathbf{F} .

2.30. Диполь с моментом \mathbf{p} находится на расстоянии r от длинной нити, заряженной равномерно с линейной плотностью τ . Найти действующие на диполь силу \mathbf{F} и момент силы \mathbf{M} , если вектор \mathbf{p} ориентирован перпендикулярно нити и радиус-вектору \mathbf{r} (рис. 2.11).

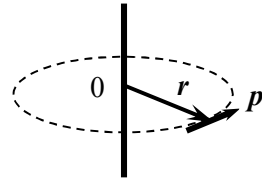


Рис. 2.11. Расположение заряженной нити и диполя.

2.31. Точечный диполь с моментом \mathbf{p} и точечный заряд q находятся на расстоянии d друг от друга. Найти силу \mathbf{F} , действующую на диполь со стороны поля заряда q , если дипольный момент \mathbf{p} направлен: а) вдоль соединяющей их прямой к заряду q ; б) вдоль соединяющей их прямой от заряда q ; в) перпендикулярно соединяющей их прямой.

2.32. Два точечных диполя с моментами \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 находятся на расстоянии d друг от друга. Их дипольные моменты направлены вдоль соединяющей их прямой в противоположных направлениях (рис. 2.12). Определить силу \mathbf{F} , действующую на каждый из диполей.

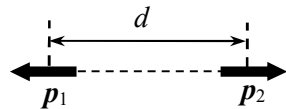


Рис. 2.12. Взаимная ориентация диполей.

2.33. Считая молекулы воды точечными диполями с моментами $p = 6,2 \cdot 10^{-30}$ Кл·м, определить силу взаимодействия молекул воды, находящихся на расстоянии $d = 1 \cdot 10^{-9}$ м друг от друга, если дипольные моменты молекул ориентированы вдоль соединяющей их прямой в одном направлении.

2.34. Два точечных диполя с одинаковыми дипольными моментами p находятся на расстоянии r друг от друга. Их дипольные моменты сонаправлены и перпендикулярны соединяющей их прямой (рис. 2.13). Определить силу, действующую на каждый из диполей.

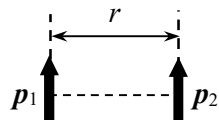


Рис. 2.13. Взаимная ориентация диполей.

2.35. По горизонтально расположенному полукольцу радиуса R равномерно распределен заряд $Q > 0$. В центре полукольца закреплен диполь с моментом p (рис. 2.14). Ось диполя совпадает с осью симметрии полукольца (прямая OA). Полукольцо поворачивают из исходного положения на угол α , при этом точка A перемещается в точку A_1 . Определить момент сил относительно центра полукольца, действующих на полукольцо со стороны диполя сразу после поворота.

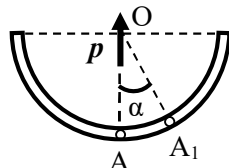


Рис. 2.14. Диполь и заряженное полукольцо.

§3. Проводники в электростатическом поле

- Напряженность электростатического поля внутри проводника (в отсутствие сторонних сил):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0.$$

- Напряженность электростатического поля в точке непосредственно у поверхности однородного проводника в вакууме:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \mathbf{n},$$

где σ – поверхностная плотность заряда и \mathbf{n} – внешняя нормаль к поверхности проводника.

- *Метод электростатических изображений (или метод зеркальных отображений)* – основан на теореме единственности в электростатике, состоит в подборе таких дополнительных фиктивных зарядов – "изображений", которые вместе с заданными зарядами создавали бы поле, одна из эквипотенциальных поверхностей которого совпала бы с поверхностью данного проводника. В области *вне проводника* поле фиктивных зарядов полностью моделирует поле, создаваемое поверхностными зарядами на проводнике, так что поле вне проводника полностью совпадает с полем исходной системы.

- Точечный заряд q и заземленная проводящая сфера (шар).

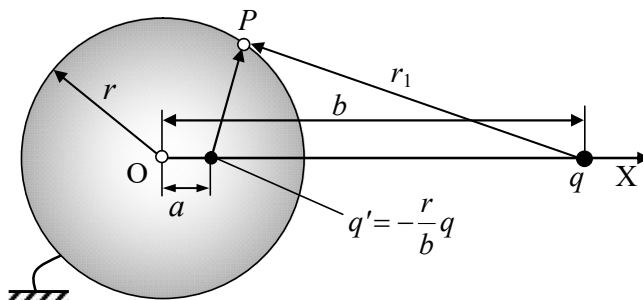


Рис. 3.1. Взаимное расположение точечного заряда q , заземленного металлического шара и заряда –"изображения" q' .

Рассмотрим проводящую заземленную сферу (или шар) радиусом r (потенциал сферы равен нулю) и заряд q на расстоянии $b > r$ от ее центра (рис. 3.1). Чтобы обеспечить совпадение эквипотенциальной поверхности $\varphi = 0$ с заданной сферой, нужно поме-

стить дополнительный фиктивный заряд - "изображение" величиной

$$q' = -qr/b$$

на расстоянии

$$a = r^2/b$$

от центра сферы на прямой, проведенной через заряд q и центр сферы O . Поле этих двух зарядов *вне сферы* полностью совпадет с исходным полем, создаваемым зарядом q и поверхностными зарядами на сфере. При этом напряженность поля внутри сферы равна нулю.

3.1. Две одинаковые металлические сферы находятся на большом расстоянии (по сравнению с их радиусами) друг от друга и имеют положительные заряды Q_1 и Q_2 . Незаряженный металлический шарик на тонкой длинной непроводящей палочке подносят к первой сфере и касаются её. Затем шарик подносят ко второй сфере и касаются её. После этого заряд шарика оказался равным q_2 . Найти заряд $Q_{2к}$ второй сферы.

3.2. Точечный заряд q находится на расстоянии d от центра проводящего заряженного шара радиусом $R < d$. Найти заряд Q шара, если его потенциал равен ϕ_0 (при нормировке $\phi_\infty = 0$).

3.3. Два металлических шарика радиусами r с зарядами q находятся на расстоянии a друг от друга. Первый шарик заземляют, затем провод убирают. После этого заземляют второй шарик и убирают провод, затем проводят этот процесс с первым шариком и т.д. Каково будет отношение зарядов шариков после n заземлений второго шарика?

3.4. Незаряженного металлического шара радиуса R_1 касаются другим металлическим шаром, имеющим радиус R_2 и заряд q_2 . Затем второй шар удаляют на достаточно большое расстояние от первого. При этом потенциал второго шара оказывается равным ϕ'_2 (при нормировке $\phi_\infty = 0$). После этого второй шар снова заряжают зарядом q_2 и вновь касаются первого. Найти потенциал первого шара ϕ_1^∞ после многократного повторения описанной процедуры.

3.5. Две концентрические тонкостенные сферы, радиусы которых R и r ($R > r$), имеют заряды Q и q соответственно. Опреде-

лить потенциалы сфер при нормировке потенциала $\varphi_\infty = 0$.

3.6. Проводящая тонкостенная сфера радиусом R имеет заряд Q . Внутри и вне сферы находятся два точечных заряда: q_1 на расстоянии $l_1 < R$ и q_2 на расстоянии $l_2 > R$ от центра сферы (рис.3.1). Определить потенциал сферы. Считать $\varphi_\infty = 0$.

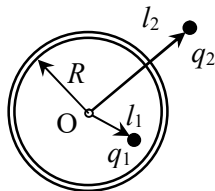


Рис. 3.1. Расположение сферы и точечных зарядов

3.7. Металлический заряженный шар радиусом R_1 окружен незаряженной concentрической сферической проводящей оболочкой радиуса R_2 . При нормировке $\varphi_\infty = 0$ потенциал шара равен φ_0 . Каким будет потенциал φ шара, если сферическую оболочку заземлить?

3.8. Две concentрические тонкостенные металлические сферы имеют радиусы R_1 и R_2 ($R_2 > R_1$). На внутренней сфере находится заряд Q_1 . Какой заряд Q_2 нужно поместить на внешнюю сферу, чтобы потенциал внутренней стал равен нулю при нормировке $\varphi_\infty = 0$?

3.9. Внутри проводящей сферы радиусом R , имеющей заряд q , concentрично с ней расположен металлический шар радиусом r . С помощью тонкого длинного изолированного провода, проходящего через малое отверстие во внешней сфере, и ключа К шар заземляют (рис. 3.2). Затем ключ К переводят в положение 2, соединив тем самым шар с землей через источник ЭДС \mathcal{E} . Определить заряд q_2 шара после установления равновесия. Какой заряд Δq протечет за это время через источник ЭДС?

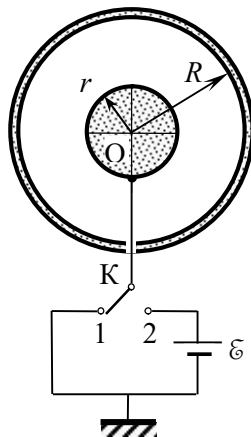


Рис. 3.2. Схема подключения металлического шара к источнику ЭДС.

3.10. Металлический шар радиусом R_1 , заряженный до потенциала φ , окружают тонкой незаряженной сферической проводящей оболочкой радиусом R_2 . Центры оболочки и шара совпадают. Определить потенциал шара φ_1 после того, как он будет соединен проводником с оболочкой.

3.11. Между двумя concentрическими сферами, радиусы которых R_1 и $R_2 > R_1$, находится точечный заряд q на расстоянии r от центра сфер. Чему равны заряды на сферах, если их заземлить?

3.12. Незаряженные концентрические проводящие сферы имеют радиусы a и $b > a$. Между сферами на расстоянии r от центра помещен точечный заряд $+q$. Найти разность потенциалов между сферами.

3.13. По поверхностям двух проводящих концентрических сфер, радиусы которых R и $2R$, равномерно распределены одинаковые заряды q . Найти разность потенциалов $\Delta\phi$ между ними. Какова напряженность поля внутри сфер и снаружи?

3.14. Три концентрические металлические сферы имеют радиусы R , $2R$ и $3R$. На внутренней сфере заряд $+Q$, на внешней $+2Q$, а средняя не заряжена. Установить распределение потенциала во всем пространстве.

3.15. Три концентрические проводящие сферы имеют радиусы R , $2R$ и $3R$. Внутренняя и внешняя сферы не заряжены, а заряд средней сферы равен Q . В ней проделано отверстие, через которое в некоторый момент изолированной проволокой соединяют внешнюю и внутреннюю сферы. Какой заряд пройдет по этой проволоке?

3.16. Три концентрические сферы радиусов R , $2R$ и $3R$ находятся в вакууме. Внутренняя сфера имеет заряд Q , средняя сфера не заряжена, а внешняя заземлена. Среднюю и внутреннюю сферы соединяют проводником. Какой заряд пройдет по проводнику?

3.17. Две одинаковые параллельные металлические пластины площадью S каждая находятся на расстоянии d друг от друга, которое, как и толщина пластин, очень мало по сравнению с их линейными размерами. Пластины заряжены: одна зарядом $+q$, а другая — зарядом $-5q$. Найти плотности зарядов на всех четырех поверхностях пластин, а также разность потенциалов U между ними.

3.18. Три одинаковые тонкие изолированные металлические пластины площадью S каждая расположены параллельно друг другу на одинаковом расстоянии d одна от другой (d много меньше линейных размеров пластин). На первой пластине равномерно распределен заряд $+Q_1$, на второй $+Q_2$ и на третьей $-Q_3$. Найти разности потенциалов между пластинами и заряды на каждой из поверхностей пластин.

3.19. Четыре незаряженные металлические пластины, площадь каждой из которых равна S , расположены на малом расстоянии d друг от друга. Внутренним пластинам сообщили заряды $+q$ и $-q$, а внеш-

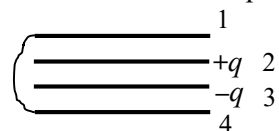


Рис. 3.3. Схема соединения металлических пластин.

ние пластины соединили между собой проводом (рис. 3.3). Определить заряды q_i на поверхностях всех пластин. Краевыми эффектами пренебречь.

3.20. Точечный заряд q находится между двумя большими параллельными проводящими пластинами А и В. Расстояния от заряда до пластин равны соответственно l_1 и l_2 . Пластины соединены проводом (рис. 3.4). Определить заряды q_1 и q_2 , индуцированные на поверхности каждой из пластин.

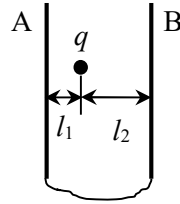


Рис. 3.4. Заряд q между проводящими соединенными пластинами.

3.21. Плоский конденсатор, у которого площадь пластин S и расстояние между обкладками $8d$, подключен к источнику постоянного напряжения \mathcal{E} . В конденсатор параллельно его обкладкам вносят заряженную проводящую пластину толщиной d и располагают её на расстоянии d от верхней обкладки (рис. 3.5). Форма и площадь пластины и обкладок конденсатора одинаковы, $d \ll \sqrt{S}$. Заряд пластины положителен и равен заряду конденсатора до внесения пластины. Затем пластину медленно передвигают и увеличивают расстояние до верхней обкладки конденсатора до $5d$. Какой заряд Δq протечет в результате через источник?

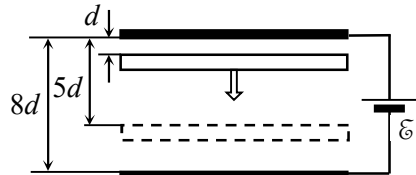


Рис. 3.5. Схема расположения металлической пластины в конденсаторе.

3.22. Две длинные тонкостенные металлические трубки, радиусы которых R и $3R$, расположены соосно. На внутреннюю трубку нанесен заряд с линейной плотностью τ , внешняя трубка заземлена. Найти зависимость потенциала $\varphi(r)$ от расстояния r до оси трубок во всем пространстве.

3.23. Тонкий длинный металлический провод радиусом a заряжен с линейной плотностью τ и окружен соосной с ним металлической трубкой, внутренний и внешний радиусы которых равны R и $2R$. Определить зависимость напряженности E и потенциала φ от расстояния r до оси трубки во всем пространстве. Считать, что потенциал провода равен нулю.

3.24. Точечный заряд $q = 2$ мкКл находится на расстоянии $h = 30$ см от проводящей бесконечной плоскости. Определить модуль вектора напряженности E электрического поля в точке А, ко-

торая находится на расстоянии h от плоскости и на расстоянии $l = 20$ см от заряда.

3.25. Найти поверхностную плотность σ заряда, индуцированного на заземленной большой металлической пластине точечным зарядом q , в точке непосредственно под зарядом. Расстояние от заряда до пластины равно d .

3.26. Два точечных заряда q находятся на одинаковом расстоянии d от бесконечной проводящей плоскости и на расстоянии $2d$ друг от друга. Определить модуль силы, действующей на каждый из зарядов.

3.27. Точечные заряды $q_1 = q$ и $q_2 = 2q$ находятся на расстоянии $d_1 = 5d$ друг от друга. Посередине между ними помещена проводящая заземленная пластина толщиной $d_2 = 2d$, размеры которой значительно больше d . Поверхность пластины перпендикулярна прямой, соединяющей заряды. Определить силу, действующую на пластину.

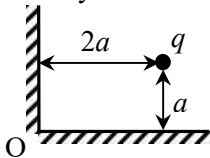


Рис. 3.6. Взаимное расположение двугранного угла и точечного заряда.

3.28. Найти силу, действующую на точечный заряд q , находящийся внутри прямого двугранного угла, образованного заземленными проводящими плоскостями, если расстояние заряда до плоскостей равно a и $2a$ (рис. 3.6).

3.29. Точечный заряд q помещен внутри двугранного угла, образованного двумя большими заземленными проводящими пластинами. Используя метод электростатических изображений, найти систему точечных зарядов, которые воссоздают электрическое поле заряда q и проводящих плоскостей, для случаев: а) $\varphi = \pi/4$; б) $\varphi = \pi/6$.

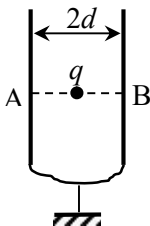


Рис. 3.7. Заряд q между проводящими заземленными пластинами.

3.30. Заряд q расположен посередине между двумя параллельными заземленными металлическими пластинами, расстояние между которыми равно $2d$. Линейные размеры пластин много больше расстояния между ними. Найти плотности индуцированных на пластинах зарядов в точках А и В, ближайших к заряду (рис. 3.7).

3.31. Заряд q расположен посередине между двумя параллельными бесконечными незаряженными металлическими пластинами,

расстояние между которыми равно a . С какой силой каждая из пластин притягивается к заряду?

3.32. Длинный горизонтальный металлический провод заряжен с линейной плотностью заряда τ и расположен параллельно безграничной вертикальной заземленной проводящей плоскости. Радиус сечения провода a , расстояние между осью провода и проводящей плоскостью b . Найти разность потенциалов между проводом и плоскостью при условии $a \ll b$.

3.33. Тонкая бесконечно длинная нить заряжена с линейной плотностью τ и расположена параллельно бесконечной проводящей плоскости на расстоянии h от неё. Найти распределение поверхностной плотности заряда $\sigma(x)$ на плоскости, где расстояние x до точки на плоскости отсчитывается от прямой с максимальным значением σ .

3.34. Тонкое проволочное кольцо радиусом R и зарядом q расположено параллельно проводящей плоскости на расстоянии d от неё. Найти: а) потенциал φ_0 электрического поля в центре кольца, считая $\varphi_\infty = 0$; б) поверхностную плотность σ заряда, индуцированного на плоскости в точке её пересечения с осью кольца.

3.35. Точечный электрический диполь находится на расстоянии d от неограниченной металлической пластины. Дипольный момент \mathbf{p} перпендикулярен пластине и направлен от неё. Найти поверхностную плотность σ_0 заряда, индуцированного на плоскости непосредственно под диполем.

3.36. Точечный электрический диполь с дипольным моментом \mathbf{p} находится на расстоянии d от бесконечной проводящей пластины. Дипольный момент \mathbf{p} перпендикулярен пластине. Определить силу, действующую на диполь со стороны пластины.

3.37. На расстоянии $3R$ от центра проводящего заземленного шара радиусом R находится точечный заряд q . Найти модуль силы притяжения заряда к шару.

3.38. Точечный заряд q находится на расстоянии l от центра заземленного металлического шара радиуса R . Определить максимальное и минимальное значения поверхностной плотности заряда, индуцированного на шаре.

3.39. Точечный заряд q находится на расстоянии $d = 2R$ от центра незаряженного проводящего шара радиусом R . Определить напряженность электрического поля в точке В, находящейся на расстоянии $l = 1,5R$ от центра шара на линии, соединяющей центр шара с точечным зарядом q .

3.40. Два точечных заряда $+q$ и $-q$ находятся на расстоянии $4L$ друг от друга. Посередине между ними поместили незаряженную металлическую сферу радиусом L так, что центр сферы совпадает с центром отрезка, соединяющего заряды. Определить силу, действующую на каждый заряд.

3.41. Точечный заряд находится на расстоянии b от центра проводящего шара с зарядом $Q > 0$. Какой должна быть величина q точечного заряда, чтобы сила взаимодействия между ним и шаром была равна нулю?

3.42. Точечный заряд q_0 находится снаружи заряженной изолированной проводящей сферы радиусом R на расстоянии a от её поверхности. Чему равен модуль силы F , действующей на точечный заряд со стороны сферы, если её потенциал равен ϕ при нормировке $\phi_\infty = 0$?

3.43. Частица с зарядом Q и массой m движется по прямой, проходящей через центр заземленной металлической сферы радиусом R . Какую работу совершат кулоновские силы электрического поля при перемещении заряда Q из бесконечности в точку на расстоянии $2R$ от центра сферы?

3.44. Точечный заряд q помещен на расстоянии $R/3$ от центра заземленной тонкостенной металлической сферы радиусом R . Определить модуль силы F , действующей на заряд q .

3.45. Точечный диполь с моментом p находится на расстоянии d от центра заземленной проводящей сферы радиусом R . Дипольный момент p направлен от центра сферы. Найти дипольный момент зарядов, индуцированных на сфере.

3.46. Металлический шар помещают во внешнее однородное электрическое поле напряженностью E_0 . Определить поверхностную плотность зарядов, индуцированных на шаре, и модуль напряженности поля у поверхности шара.

3.47. Проводящий шар радиуса R помещен во внешнее однородное электрическое поле напряженностью E_0 . Определить дипольный момент шара.

3.48. Два одинаковых незаряженных проводящих шарика радиусом r находятся на расстоянии $l \gg r$ во внешнем однородном электрическом поле с напряженностью E_0 , направленной вдоль линии, соединяющей центры шариков. Определить силу, действующую на каждый шарик.

3.49. Молекула (рис. 3.8) содержит три заряда $+q$, $+q$, $-2q$, которые расположены вдоль одной прямой на равных расстояниях a друг от друга, и находится на расстоянии r от бесконечной проводящей плоскости, много большем размеров молекулы ($r \gg 2a$). Найти в дипольном приближении силу, действующую на плоскость со стороны молекулы.

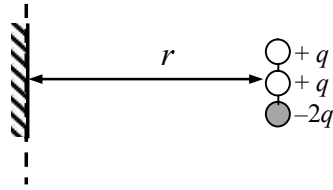


Рис. 3.8. Расположение молекулы и проводящей плоскости.

§4. Электроемкость. Простые конденсаторы и их соединения

• Потенциал ϕ уединенного проводника пропорционален находящемуся на нем заряду Q . Коэффициент пропорциональности C между зарядом проводника и его потенциалом называется емкостью:

$$C \equiv \frac{Q}{\phi}.$$

• Емкость уединенного проводника в виде шара (сферы) радиусом R :

$$C = 4\pi\epsilon_0 R.$$

• Электроемкость (емкость) простого конденсатора:

$$C \equiv \frac{q}{U},$$

где U – напряжение между пластинами конденсатора.

• Емкость плоского конденсатора:

$$C = \epsilon_0 \epsilon \frac{S}{d},$$

где ϵ – относительная диэлектрическая проницаемость материала между обкладками конденсатора (диэлектрик полностью заполняет все пространство между пластинами), S – площадь пластин, d – расстояние между пластинами конденсатора.

• Емкость сферического конденсатора:

$$C = 4\pi\epsilon_0 \epsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1},$$

где r_1 и r_2 – радиусы внутренней и внешней обкладок.

• Емкость цилиндрического конденсатора:

$$C = 2\pi\epsilon_0 \epsilon \frac{h}{\ln(r_2 / r_1)},$$

где r_1 и r_2 – радиусы внутренней и внешней обкладок, h – длина обкладок конденсатора.

• Емкость параллельно соединенных конденсаторов:

$$C = \sum_i C_i.$$

• Емкость последовательно соединенных конденсаторов:

$$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}.$$

• Энергия электрического поля в конденсаторе (энергия заряженного конденсатора):

$$W = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} QU.$$

4.1. Сфера заряжена с постоянной поверхностной плотностью заряда σ . На расстоянии a от центра сферы (вне её) потенциал электрического поля равен φ (при нормировке $\varphi_\infty = 0$). Определить емкость сферы.

4.2. Определить емкость C системы из двух одинаковых металлических шариков радиусом r , находящихся на расстоянии $l \gg r$ друг от друга.

4.3. Найти емкость C системы, состоящей из металлического шарика радиусом a и безграничной проводящей плоскости, если расстояние от центра шарика до плоскости b ($b \gg a$).

4.4. Два металлических шара с радиусами R_1 и R_2 , имеющие заряды q_1 и q_2 соответственно, находятся на достаточно большом расстоянии друг от друга. Шары соединяют тонкой длинной проволокой, которую потом убирают. Какими станут заряды шаров после этого?

4.5. Длинный прямой провод радиусом a окружен концентрической цилиндрической оболочкой радиусом b . Найти емкость такой системы в расчете единицы длины.

4.6. Два длинных провода радиусом a расположены в воздухе параллельно друг другу. Расстояние между их осями $b \gg a$. Найти относительное изменение $\Delta C/C_0$ емкости системы проводов в расчете на единицу длины, если расстояние между осями проводов уменьшить в 2 раза.

4.7. Металлический шар, радиус которого R_1 , помещают в центр тонкостенной заземленной сферической оболочки радиусом R . Насколько емкость системы "шар – сфера" отличается от емкости уединенного шара?

4.8. Два металлических шара с радиусами R_1 и R_2 , имеющие заряды q_1 и q_2 соответственно, находятся на достаточно большом расстоянии друг от друга. Шары соединяют тонкой длинной проволокой, после чего первый шар помещают в центр заземленной проводящей оболочки радиусом R . Определить заряды шаров после этого. Емкость проволоки не учитывать.

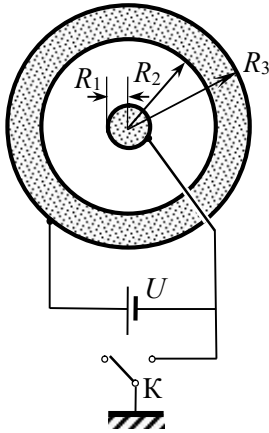


Рис. 4.1. Схема подключения сферического конденсатора к источнику ЭДС.

4.9. Обкладками сферического конденсатора служат металлический шар радиуса R_1 и концентрическая металлическая сфера с внутренним и внешним радиусами R_2 и R_3 соответственно (рис. 4.1). Обкладки подключены к источнику напряжения U . После зарядки конденсатора шар с помощью ключа K и тонкого длинного изолированного провода, проходящего через малое отверстие во внешней сфере, заземляют. Определить емкость системы.

4.10. К пластинам плоского воздушного конденсатора с площадью обкладок $S = 0,01 \text{ м}^2$ приложена разность потенциалов $U = 150 \text{ В}$. Напряженность поля в конденсаторе равна $E = 30 \text{ кВ/м}$. Определить

емкость C конденсатора и поверхностную плотность σ зарядов на его обкладках.

4.11. В плоский воздушный конденсатор с расстоянием между обкладками d вставили металлическую пластину толщиной $d/5$ такой же площади, как у обкладок конденсатора. Во сколько раз емкость такого конденсатора будет отличаться от емкости конденсатора с воздушной прослойкой?

4.12. Внутрь сферического воздушного конденсатора с радиусами внутренней и внешней обкладок R и $3R$ соответственно поместили шаровой металлический слой с радиусами поверхностей R и $2R$. Во сколько раз емкость такого конденсатора будет отличаться от емкости конденсатора с воздушной прослойкой?

4.13. Воздушный цилиндрический конденсатор имеет радиусы обкладок $R_1 = 8 \text{ см}$ и $R_2 = 10 \text{ см}$. До какой разности потенциалов U_{max} можно его зарядить, если напряжение пробоя воздуха $E_{\text{max}} = 30 \text{ кВ/см}$?

4.14. Как нужно соединить конденсаторы с $C_1 = 2 \text{ пФ}$, $C_2 = 4 \text{ пФ}$ и $C_3 = 6 \text{ пФ}$, чтобы получить систему с емкостью $C = 3 \text{ пФ}$?

4.15. Воздушный конденсатор переменной емкости состоит из параллельных неподвижных металлических пластин, имеющих форму полукруга, и находящихся в воздушных зазорах между ними параллельных им подвижных пластин такой же формы, которые

могут поворачиваться вокруг своей оси, изменяя площадь перекрытия пластин. Поворот всех подвижных пластин осуществляется одновременно. Расстояния между соседними пластинами одинаковы. Из-за повреждения такого конденсатора с четным числом воздушных зазоров между пластинами все подвижные пластины сдвинулись настолько, что отношение толщин соседних воздушных промежутков стало равным 1:2 (рис. 4.2). Определить емкость такого конденсатора по сравнению с начальной.

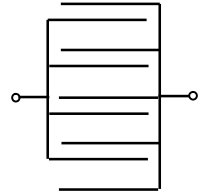


Рис 4.2. Расположение систем подвижных и неподвижных пластин поврежденного конденсатора переменной емкости.

4.16. Показать, что емкости батарей конденсаторов, изображенных на рис. 4.3 а) и б), одинаковы, если выполня-

$$\frac{C_1}{C_3} = \frac{C_2}{C_4}$$

ется условие:

4.17. Определить емкости $C_{\text{бат}}$ батарей конденсаторов, изображенных на рис. 4.4.

4.18. Определить емкость C_{AB} батареи конденсаторов между точками А и В в схеме, изображенной на рис. 4.5.

4.19. Двенадцать одинаковых конденсаторов емкостью C каждый включены в ребра проволочного каркаса, имеющего форму правильного октаэдра (рис. 4.6). Чему равна емкость системы, если её подключить к источнику напряжения вершинами октаэдра (точки А и В)?

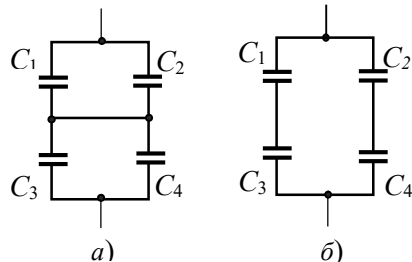


Рис. 4.3. Схема соединения конденсаторов.

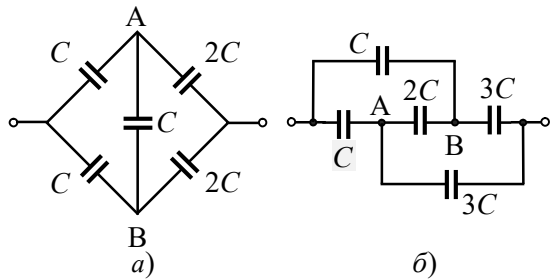


Рис. 4.4. Схемы соединения конденсаторов.

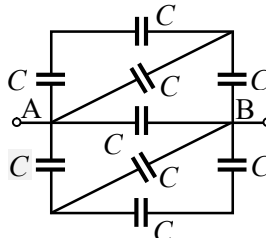


Рис. 4.5. Схема соединения конденсаторов.

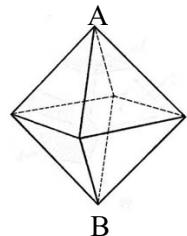


Рис. 4.6. Октаэдр.

4.20. Найти емкость C_{Σ} бесконечной цепи, образованной повторением одного и того же звена, которое состоит из двух одинаковых конденсаторов емкостью C каждый (рис. 4.7).

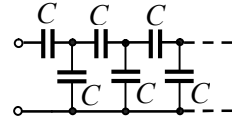


Рис. 4.7. Бесконечная цепь конденсаторов.

4.21. Определить емкость C_{AB} между точками А и В схемы соединения конденсаторов, изображенной на рис. 4.8, при $C_1 = C_3 = C_5 = C$, $C_2 = C_4 = 2C$.

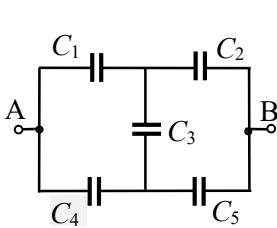


Рис. 4.8. Схема соединения конденсаторов.

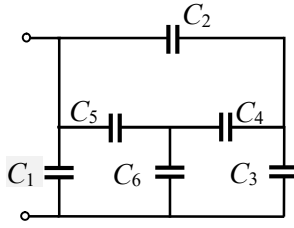


Рис. 4.9. Схема соединения конденсаторов.



Рис. 4.10. Расположение металлических пластин.

4.23. Четыре тонкие металлические пластины площадью S каждая расположены параллельно на расстоянии d между соседними пластинами так, что площадь их перекрытия равна $S/2$ (рис. 4.10). Определить емкость системы. Краевыми эффектами пренебречь.

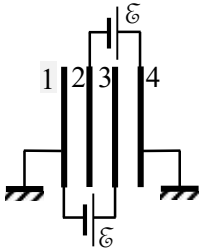


Рис. 4.11. Расположение пластин конденсаторов.

4.24. Два одинаковых воздушных конденсатора вставлены друг в друга. Расстояние между соседними пластинами равно $d = 5$ мм. Каждый конденсатор соединен с источником тока, ЭДС которого $\mathcal{E} = 100$ В. Одна из пластин каждого конденсатора заземлена (рис. 4.11). Определить напряженность электрического поля E между пластинами 2 и 3.

4.25. Найти разность потенциалов $\Delta\varphi = \varphi_b - \varphi_a$ между точками a и b в схеме, изображенной на рис. 4.12. Емкости конденсаторов $C_1 = 0,5$ мкФ, $C_2 = 1$ мкФ, ЭДС источников $\mathcal{E}_1 = 2$ В и $\mathcal{E}_2 = 3$ В.

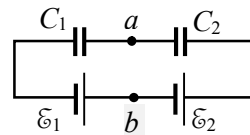


Рис. 4.12. Схема цепи.

4.26. Конденсатор емкостью C зарядили до напряжения U , а конденсатор емкостью $2C$ до напряжения $3U$. После этого соединили попарно разноименно заряженные пластины конденсаторов. Найти напряжение на каждом конденсаторе после их соединения.

4.27. Три плоских конденсатора с емкостями C , $2C$ и $3C$ зарядили до напряжения U , $2U$ и $3U$ соответственно. Затем соединили одноименно заряженные пластины всех конденсаторов, в результате чего конденсаторы оказались соединенными параллельно. Найти заряд на каждом конденсаторе после их соединения.

4.28. Три конденсатора с емкостями $C_1 = C$, $C_2 = 2C$ и $C_3 = 3C$ соединены последовательно. Напряжение пробоя каждого конденсатора $U_{кр} = 4$ кВ. Можно ли подать на такую батарею конденсаторов напряжение $U_0 = 11$ кВ?

4.29. Найти заряд каждого из конденсаторов в цепи, изображенной на рис. 4.13.

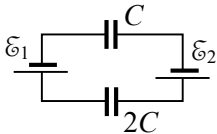


Рис. 4.13. Схема соединения конденсаторов.

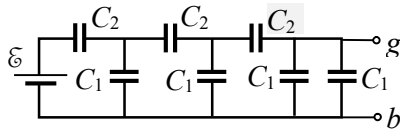


Рис. 4.14. Схема соединения конденсаторов.

4.30. В схеме, показанной на рис. 4.14, емкости конденсаторов $C_1 = C$ и $C_2 = 2C$, ЭДС источника \mathcal{E} . Определить общую емкость C_{Σ} системы конденсаторов и напряжение U_{gb} между точками g и b .

4.31. В схеме, изображенной на рис. 4.15, определить напряжение между обкладками каждого конденсатора при условии $\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2$.

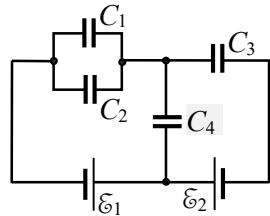


Рис. 4.15. Схема соединения конденсаторов.

4.32. Конденсаторы, соединенные по схеме, изображенной на рис. 4.16, подключаются в точках a и b к источнику с ЭДС \mathcal{E} , а затем отключаются от него при разомкнутом ключе K . После этого ключ K замыкают. Какой заряд протечет через точку a до установления состояния равновесия? Емкости конденсаторов $C_1 = C_2 = C_3 = C$, $C_4 = 3C$.

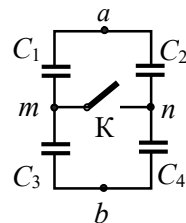


Рис. 4.16. Схема соединения конденсаторов.

4.33. Найти количество теплоты Q , вы-

делившееся при соединении одноименно заряженных обкладок конденсаторов с емкостями $C_1 = 2 \text{ мкФ}$ и $C_2 = 0,5 \text{ мкФ}$, если разности потенциалов между обкладками конденсаторов $U_1 = 100 \text{ В}$ и $U_2 = 50 \text{ В}$.

4.34. Два конденсатора с емкостями C_1 и C_2 соединены последовательно и постоянно подключены к источнику ЭДС \mathcal{E} с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением. В некоторый момент времени параллельно конденсатору C_2 подсоединили резистор. Какой заряд q пройдет по цепи в процессе перераспределения зарядов в конденсаторах, если перед подключением резистора их заряды были одинаковыми?

4.35. Какие заряды протекут через точки 1 и 2 после замыкания ключа K в цепи, показанной на рис. 4.17? Рассмотреть случай $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}$.

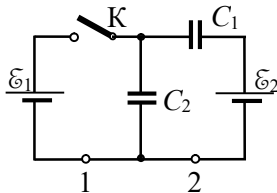


Рис. 4.17. Схема цепи.

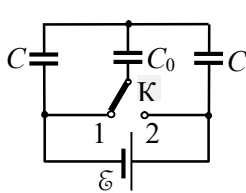


Рис. 4.18. Схема цепи.

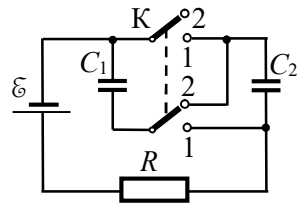


Рис. 4.19. Схема цепи.

4.36. Какой заряд Δq протечет через источник ЭДС \mathcal{E} в цепи, изображенной на рис. 4.18, при переводе ключа K из положения 1 в положение 2?

4.37. В схеме, изображенной на рис. 4.19, двойной ключ K переводят из положения 1 в положение 2. Какую работу A после этого совершат сторонние силы источника по переносу заряда?

4.38. В изображенной на рис. 4.20 схеме сначала замыкают ключ K_1 . Затем его размыкают и замыкают ключ K_2 . Какой заряд Δq протечет после этого через сечение 1?

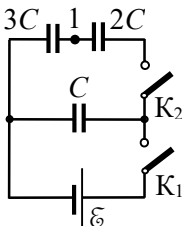


Рис. 4.20. Схема цепи.

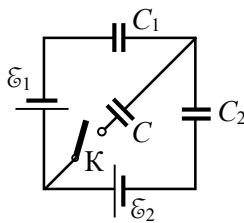


Рис. 4.21. Схема цепи.

4.39. В схеме, изображенной на рис. 4.21, $C_1 = C/3$, $C_2 = 2C/3$, $\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2$. Найти изменение зарядов Δq_1 и Δq_2 конденсаторов с емкостями C_1 и C_2 после замыкания ключа K .

4.40. Конденсатор емкостью C_3 был предварительно заряжен до напряжения U_0 , после чего его подключили в разрыв цепи, как показано на рис. 4.22. Найти заряд q , прошедший через источник, если ЭДС источника \mathcal{E} , $C_1 = C_2 = C_3 = C$.

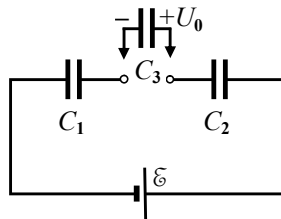


Рис. 4.22. Подключение конденсатора в разрыв цепи.

§5. Диэлектрики в электростатическом поле. Конденсаторы с диэлектриками

- Вектор (электрической) поляризации:

$$\mathbf{P} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mathbf{p}_i}{\Delta V},$$

где \mathbf{p}_i – электрические дипольные моменты молекул; суммирование ведется по молекулам, находящимся в физически бесконечно малом объеме диэлектрика ΔV .

- Теорема Гаусса для вектора поляризации в интегральной форме: поток вектора поляризации \mathbf{P} через любую замкнутую поверхность S равен связанному заряду q' внутри поверхности, взятому с обратным знаком:

$$\oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = -q'.$$

- Теорема Гаусса для вектора поляризации в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \mathbf{P} = -\rho',$$

где ρ' – объемная плотность связанных зарядов.

- Граничное условие для нормальных составляющих векторов поляризации:

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma' \quad \text{или} \quad (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot \mathbf{n} = -\sigma',$$

где σ' – поверхностная плотность связанных зарядов; нормаль \mathbf{n} к поверхности раздела двух сред направлена от среды 1 к среде 2.

- Вектор электрической индукции:

$$\mathbf{D} \equiv \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}.$$

- Теорема Гаусса для электрической индукции в интегральной форме: поток электрической индукции через любую замкнутую поверхность S равен свободному (стороннему для диэлектрика) заряду q , охватываемому этой поверхностью:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q.$$

- Теорема Гаусса для электрической индукции в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho,$$

где ρ – объемная плотность свободных зарядов.

- Граничное условие для нормальных составляющих век-

торов электрической индукции:

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \text{ или } (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = \sigma,$$

где σ – поверхностная плотность свободных или сторонних, т.е. не связанных зарядов, нормаль \mathbf{n} к поверхности раздела двух сред направлена от среды 1 к среде 2.

- Граничное условие для нормальных составляющих напряженности электрического поля:

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma + \sigma'}{\epsilon_0} \text{ или } (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \mathbf{n} = \frac{\sigma + \sigma'}{\epsilon_0},$$

(нормаль \mathbf{n} к поверхности раздела двух сред направлена от среды 1 к среде 2).

- Граничное условие для тангенциальных составляющих напряженности электрического поля:

$$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0.$$

- Материальное уравнение для вектора \mathbf{P} :

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \chi(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 (\epsilon - 1) \mathbf{E}(\mathbf{r}),$$

где $\chi(\mathbf{r})$ – диэлектрическая восприимчивость диэлектрика, $\epsilon(\mathbf{r}) = 1 + \chi(\mathbf{r})$ – диэлектрическая проницаемость диэлектрика.

- Материальное уравнение для вектора \mathbf{D} :

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \epsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}).$$

- Взаимосвязь свободных и связанных зарядов в однородном изотропном диэлектрике:

$$q' = -\frac{\epsilon - 1}{\epsilon} q, \quad \rho'(\mathbf{r}) = -\frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \rho(\mathbf{r}),$$

где q' и q – связанный и свободный заряды, $\rho'(\mathbf{r})$ и $\rho(\mathbf{r})$ – объемные плотности связанного и свободного зарядов внутри любой замкнутой поверхности.

- Напряженность электрического поля внутри однородного изотропного диэлектрика эллиптической формы во внешнем однородном поле напряженностью \mathbf{E}_0 :

$$E_x = E_{0x} - n_x \frac{P_x}{\epsilon_0}, \quad E_y = E_{0y} - n_y \frac{P_y}{\epsilon_0}, \quad E_z = E_{0z} - n_z \frac{P_z}{\epsilon_0},$$

где X, Y, Z – главные оси эллипсоида, n_x, n_y, n_z – факторы формы, \mathbf{P} – вектор поляризации диэлектрика.

- Уравнение для факторов формы:

$$n_x + n_y + n_z = 1.$$

- Факторы формы для частных случаев эллиптических тел.
Длинный тонкий цилиндр (стержень):

$$n_y = n_z = 1/2, n_x = 0,$$

где ось Z направлена вдоль оси цилиндра.

Тонкий диск:

$$n_x = n_y = 0, n_z = 1,$$

где ось Z направлена вдоль нормали к диску (по оси диска).

Шар:

$$n_x = n_y = n_z = 1/3.$$

5.1. Два точечных заряда в вакууме действуют друг на друга с такой же силой на расстоянии $l_1 = 11$ см, как в скипидаре на расстоянии $l_2 = 7,4$ см. Определить диэлектрическую проницаемость ϵ скипидара.

5.2. Два маленьких заряженных шарика, подвешенных на нитях одинаковой длины, опускают в керосин (относительная диэлектрическая проницаемость керосина $\epsilon_k = 2$). Чему должна быть равна плотность $\rho_{ш}$ материала шариков, чтобы угол расхождения нитей в воздухе и керосине был один и тот же? Плотность керосина $\rho_k = 800$ кг/м³.

5.3. Воздушный конденсатор заряжают и погружают в сосуд с диэлектрической жидкостью, проницаемость которой равна ϵ . Как меняются при этом напряженность E и электрическая индукция D поля в конденсаторе, если: *a)* во время погружения конденсатор отключен от источника ЭДС; *б)* во время погружения конденсатор подсоединен к источнику постоянного напряжения? Краевые эффекты не учитывать.

5.4. Конденсатор емкостью C подсоединен к батарее с ЭДС \mathcal{E} . Какой заряд протечет через батарею при заполнении пространства между обкладками конденсатора жидкостью с диэлектрической проницаемостью ϵ ?

5.5. Большая плоскопараллельная пластина из фарфора (диэлектрическая проницаемость фарфора $\epsilon = 6$) помещена в воздухе в однородное электрическое поле, напряженность которого E_0 перпендикулярна пластине. Определить модуль поверхностной плотности связанных зарядов, индуцированных на поверхностях пластины.

5.6. В диэлектрической жидкости с проницаемостью ε_1 находится плоскопараллельный безграничный слой диэлектрика с проницаемостью $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. В жидкости создано однородное электрическое поле, вектор напряженности E_1 которого составляет угол α с нормалью к границе раздела сред (рис. 5.1). Найти E_2 , P_2 и D_2 внутри диэлектрика.

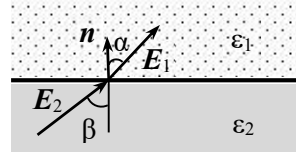


Рис. 5.1. Направление векторов напряженности на границе раздела диэлектриков.

5.7. Плоскопараллельная пластина из диэлектрика с проницаемостью ε помещена в однородное электрическое поле с напряженностью E_0 так, что нормаль к поверхности пластины составляет угол β с вектором E_0 (рис. 5.2). Толщина пластины много меньше её ширины и длины. Определить модуль поверхностной плотности σ' связанных зарядов на поверхностях пластины.

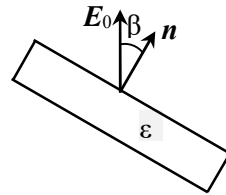


Рис. 5.2. Диэлектрическая пластина в однородном электрическом поле.

5.8. Большая плоскопараллельная пластина из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$ помещена в воздухе в однородное электрическое поле, напряженность которого E_0 перпендикулярна пластине. Во сколько раз изменится поверхностная плотность σ' связанных зарядов на поверхностях пластины, если её повернуть на угол $\alpha = \pi/6$?

5.9. Между обкладками воздушного конденсатора, площадь пластин которого S и расстояние между обкладками d , параллельно его обкладкам помещена плоскопараллельная пластина из диэлектрика с проницаемостью ε . Площадь пластины равна площади обкладок, её толщина d_1 . Показать, что емкость C конденсатора с пластиной не зависит от положения пластины относительно обкладок конденсатора. Определить эту емкость.

5.10. На двух тонких параллельных пластинах находятся заряды одного знака q_1 и $q_2 > q_1$. Площадь пластин S , расстояние между ними h . В пространстве между пластинами параллельно им расположена диэлектрическая пластинка толщиной $d < h$ с проницаемостью ε . Найти разность потенциалов U между заряженными пластинами.

5.11. До какого максимального напряжения U_{\max} можно зарядить плоский воздушный конденсатор, расстояние между обкладками которого равно $d = 2$ см, чтобы избежать его пробоя, если

в него вставлена параллельно обкладкам стеклянная пластинка (диэлектрическая проницаемость стекла $\varepsilon = 7$) толщиной $d_1 = 1$ см? Площади обкладок и пластинки одинаковы. Пробой воздуха происходит при $E_{\max 1} = 30$ кВ/см, а стекла – при $E_{\max 2} = 150$ кВ/см.

5.12. Металлический шарик радиусом R , имеющий заряд q , находится в центре сферического слоя из диэлектрика с проницаемостью ε . Радиусы внутренней и внешней поверхностей слоя равны R и $2R$. Найти объёмную и поверхностную плотности связанного заряда в слое диэлектрика, а также полный связанный заряд на каждой поверхности диэлектрического слоя.

5.13. Для системы, описанной в задаче 5.12, найти зависимости напряженности поля $E(r)$, электрической индукции $D(r)$ и потенциала $\varphi(r)$ от расстояния r до центра слоя и построить графики этих зависимостей. Считать, что потенциал на бесконечности равен нулю.

5.14. Тонкая длинная проводящая нить радиусом a с линейной плотностью заряда τ находится в безграничной однородной диэлектрической среде с проницаемостью ε . Определить вектор поляризации $P(r)$ в произвольной точке среды, а также плотности поверхностных σ' и объёмных ρ' связанных зарядов в диэлектрике.

5.15. Сторонние заряды равномерно распределены с объёмной плотностью $\rho > 0$ по шару радиусом R из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью ε . Шар находится в воздухе. Найти разность потенциалов $\Delta\varphi$ между центром шара и его поверхностью, объёмную ρ' и поверхностную σ' плотности связанных зарядов, а также полный связанный заряд внутри шара $q'_{\text{внутр}}$ и на его поверхности $q'_{\text{пов}}$.

5.16. В длинном цилиндре радиусом R из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью ε равномерно распределены сторонние заряды с объёмной плотностью $\rho > 0$. Цилиндр находится в воздухе. Определить объёмную ρ' и поверхностную σ' плотности связанных зарядов в цилиндре.

5.17. Бесконечная пластина толщиной $2d$ из однородного диэлектрика с проницаемостью ε заряжена сторонним зарядом с объёмной плотностью $\rho = \rho_0 \exp(-\alpha|x|)$, где координата x отсчитывается от середины пластины вдоль оси X , перпендикулярной поверхности пластины. Пластина находится в воздухе. Найти модуль век-

тора поляризации P , объемную ρ' и поверхностную σ' плотность связанных зарядов в пластине как функцию x .

5.18. В воздухе на высоте h над горизонтальной поверхностью керосина (относительная диэлектрическая проницаемость ϵ) находится точечный заряд q (рис. 5.3). Определить поверхностную плотность связанных зарядов на поверхности керосина: а) непосредственно под зарядом q ; б) на расстоянии $x = OA$; в) полный связанный заряд на поверхности керосина.

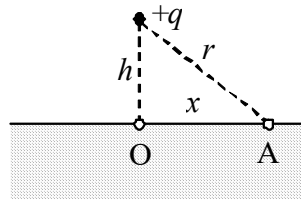


Рис. 5.3. Точечный заряд в воздухе над кероси-

5.19. Два однородных диэлектрика с проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 разделены плоской границей. Точечный заряд q находится в первом диэлектрике на расстоянии d от границы раздела. Найти напряженность и потенциал электрического поля в произвольной точке в каждом из диэлектриков.

5.20. Точечный заряд q находится в вакууме вблизи поверхности однородного диэлектрика с проницаемостью ϵ , занимающего нижнее полупространство. Построить картину силовых линий E во всем пространстве.

5.21. Для системы, описанной в задаче 5.19, найти силу, действующую на заряд q со стороны связанных зарядов на границе раздела диэлектриков.

5.22. Два однородных диэлектрика с проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 разделены плоской границей. Точечный заряд q находится в первом диэлектрике на расстоянии d от границы раздела (рис. 5.4). Найти напряженность электрического поля в точке А ($h \ll d$). Рассмотреть случаи, когда точка А находится над границей раздела и под ней.

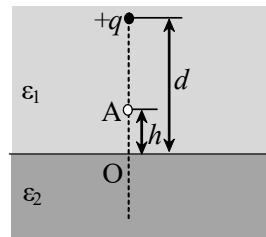


Рис. 5.4. Два диэлектрика и точечный заряд q .

5.23. Полупространство, заполненное однородным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ , ограничено бесконечной проводящей плоскостью, над которой в воздухе на расстоянии h от неё находится точечный заряд q . Определить поверхностную плотность связанных зарядов $\sigma(r)$ в диэлектрике в зависимости от расстояния r до заряда q .

5.24. В плоский конденсатор, расстояние между обкладками которого равно $d = 1$ см, вставлены две плоскопараллельные пла-

стинки: одна из стекла (относительная диэлектрическая проницаемость $\epsilon_1 = 7$) толщиной $d_1 = 0,4$ см, другая из парафина ($\epsilon_2 = 2$) толщиной $d_2 = 0,6$ см. Линейные размеры пластинок и обкладок конденсатора одинаковы, площадь обкладок $S = 100$ см². Между обкладками конденсатора поддерживается разность потенциалов $U = 300$ В. Найти: а) напряжение в каждом слое диэлектрика; б) поверхностную плотность зарядов на границе раздела диэлектриков; в) емкость конденсатора.

5.25. Между пластинами плоского конденсатора, площадь которых S , помещено n чередующихся слоёв вещества с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 и $n - 1$ с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 . Толщина слоев равна d . Найти ёмкость конденсатора C .

5.26. Два одинаковых плоских конденсатора соединены последовательно и подключены к источнику напряжения U . Площадь обкладок конденсаторов S , расстояние между обкладками d . Какой заряд Δq пройдет через источник, если один из конденсаторов заполнить диэлектриком с проницаемостью ϵ ?

5.27. Бесконечная пластина толщиной d из изотропного диэлектрика находится в воздухе в однородном внешнем электрическом поле с напряженностью E_0 , перпендикулярной пластине. Диэлектрическая проницаемость пластины $\epsilon(x)$ изменяется перпендикулярно границам пластины линейно от значения ϵ_1 на левой границе до значения $\epsilon_2 > \epsilon_1$ на правой границе (рис. 5.5). Найти объёмную плотность связанных зарядов ρ' как функцию x , а также разность потенциалов между поверхностями пластины.

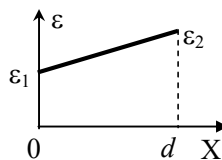


Рис. 5.5. Зависимость диэлектрической проницаемости ϵ от координаты x в пластине.

5.28. Пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено диэлектриком, проницаемость которого меняется по закону $\epsilon(x) = \alpha / (x + d)^2$, где d — расстояние между пластинами конденсатора, α — известная постоянная, x — расстояние от одной из обкладок. Площадь каждой обкладки равна S . Найти емкость C такого конденсатора.

5.29. Между обкладками сферического конденсатора, радиусы которых R и $3R$, находятся два сферических слоя изолятора: внутренний слой с радиусами R и $2R$ и диэлектрической проницаемостью ϵ_1 и внешний с радиусами $2R$ и $3R$ и диэлектрической проницаемостью ϵ_2 . Напряжение между обкладками равно U . Найти: а)

зависимости напряженности поля $E(r)$ и электрической индукции $D(r)$ от расстояния r до центра сферических поверхностей; б) напряжение на каждом слое.

5.30. Пространство между обкладками цилиндрического конденсатора (радиусы внутренней и внешней обкладок R_1 и R_2 соответственно) заполнено двумя вплотную прилегающими друг к другу и к обкладкам слоями диэлектриков. Внутренний слой толщиной d обладает диэлектрической проницаемостью ε_1 , у внешнего слоя проницаемость ε_2 . Найти отношение напряжений в слоях.

5.31. Для цилиндрического конденсатора, описанного в задаче 5.30, $d = R_1$, $\varepsilon_1 = 7$. Какой из слоев будет "пробит" первым при увеличении подаваемого на конденсатор напряжения, если: а) $\varepsilon_2 = 5$; б) $\varepsilon_2 = 3$? Считать, что диэлектрическая прочность обоих диэлектриков одинакова.

5.32. Цилиндрический конденсатор имеет два вплотную прилегающих друг к другу и к обкладкам диэлектрических слоя с проницаемостями ε_1 и ε_2 и предельными напряженностями электрического поля E_1 и E_2 . Для наиболее рационального использования материала необходимо, чтобы напряженность поля одновременно достигала значения, соответствующего пробоем, в обоих диэлектриках. При каком соотношении между радиусами слоев это возможно?

5.33. Пространство между обкладками цилиндрического конденсатора с радиусами R и $2R$ заполнено двумя цилиндрическими слоями диэлектриков. Радиусы внутреннего слоя R и $1,5R$, диэлектрическая проницаемость ε_1 , радиусы внешнего слоя $1,5R$ и $2R$, проницаемость ε_2 . Определить поверхностную плотность поляризованного заряда σ_{12} на границе раздела диэлектриков, если разность потенциалов между обкладками конденсатора равна U .

5.34. В сферическом конденсаторе пространство между обкладками заполнено диэлектриком, проницаемость которого равна $\varepsilon(r) = \alpha / r$, где α – известная постоянная, а r – расстояние до центра сфер. Радиусы обкладок равны R_1 и $R_2 > R_1$. Найти емкость C такого конденсатора.

5.35. В центре сферического слоя диэлектрика с радиусами a и b находится точечный заряд q . Проницаемость диэлектрика $\varepsilon(r) = \alpha / r^2$, где α – постоянная величина, а r – расстояние до центра сферического слоя. Найти зависимость поляризации диэлек-

трика P от расстояния r , а также поверхностную σ' и объемную ρ' плотность связанных зарядов в диэлектрическом слое.

5.36. Пространство между обкладками цилиндрического конденсатора заполнено диэлектриком, проницаемость которого меняется по закону: $\varepsilon = \alpha r$, где α – известная постоянная, а r – расстояние до оси цилиндра. Радиусы обкладок равны R_1 и $R_2 > R_1$. На внутренней обкладке находится заряд с линейной плотностью $+\tau$. Считая потенциал на оси цилиндра равным нулю, найти распределение потенциала во всем пространстве.

5.37. В цилиндрическом конденсаторе пространство между обкладками заполнено диэлектриком, проницаемость которого равна $\varepsilon(r) = \eta r^2$, где η – известная постоянная, а r – расстояние до оси конденсатора. Радиусы обкладок равны a и $b > a$. Найти емкость C_1 единицы длины такого конденсатора.

5.38. Пространство между обкладками цилиндрического конденсатора заполнено однородными диэлектриками с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 (рис. 5.6). Диэлектрики граничат между собой вдоль плоскостей, пересекающихся на оси цилиндра. Двугранные углы между этими плоскостями равны соответственно $\varphi_1 = \pi/4$ и $\varphi_2 = 7\pi/4$. Высота конденсатора равна l ,

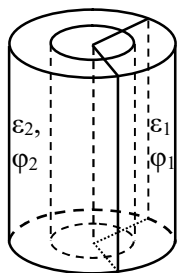


Рис. 5.6. Цилиндрический конденсатор с двумя диэлектриками.

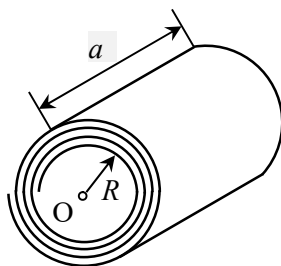


Рис. 5.7. Ленточный конденсатор, свернутый в многовитковую трубку.

радиусы обкладок R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$). Найти емкость C конденсатора.

5.39. Обкладками плоского конденсатора служат две металлические ленты шириной a и длиной l , между которыми находится лист диэлектрика толщиной d с проницаемостью ε . Ленты кладут на тонкий изолирующий материал толщиной b и сворачивают в многослойную трубку с внутренним радиусом $R \gg d$ (рис. 5.7). Определить емкость C такого конденсатора.

5.40. Большая тонкая пластина из электрета¹ имеет постоянную "замороженную" поляризацию, меняющуюся по её толщине по закону $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 [1 - (x/d)^3]$, где \mathbf{P}_0 – вектор, перпендикулярный к пластине, x – расстояние от нижней поверхности пластины, d – её толщина (рис. 5.8). Пренебрегая краевыми эффектами, найти разность потенциалов $\Delta\phi$ между поверхностями пластины и распределение объемной плотности связанных зарядов $\rho'(x)$ внутри электрета.

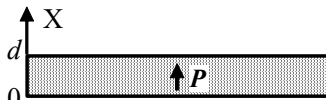


Рис. 5.8. Поляризованная диэлектрическая пластина.

5.41. На пластинах плоского изолированного конденсатора равномерно распределены заряды с поверхностными плотностями $+\sigma$ и $-\sigma$. В пространство между пластинами вносят электрет с вектором поляризации \mathbf{P} так, что он заполняет $1/n$ часть объема конденсатора. Толщина электрета d равна расстоянию между пластинами, вектор поляризации ориентирован по направлению от отрицательно заряженной пластины к положительно заряженной (рис. 5.9). Найти разность потенциалов между пластинами.

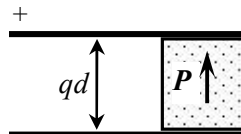


Рис. 5.9. Конденсатор с внесенным в него электретом.

5.42. На обкладках плоского конденсатора площадью S равномерно распределены заряды $+q$ и $-q$. В пространство между обкладками вносят пластину из электрета, вектор поляризации \mathbf{P} которого направлен перпендикулярно обкладкам в сторону положительного заряда (рис. 5.10). Толщина электрета равна расстоянию между обкладками. Сначала электрет занимает $2/3$ объема конденсатора. Во сколько раз изменится разность потенциалов между обкладками, если после частичного выдвигания из конденсатора электрет будет занимать половину его объема?

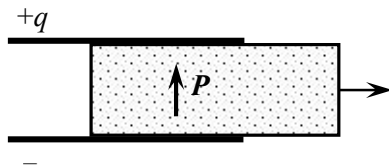


Рис. 5.10. Поляризованный электрет в конденсаторе.

¹ Электреты – поляризованные диэлектрики, состоящие из жестких электрических диполей, которые сохраняют поляризацию длительное время.

5.43. В плоский конденсатор, подключенный к источнику с напряжением U , вставили параллельно им плоскую пластину из электрета толщиной h с постоянным вектором поляризации

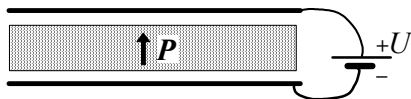


Рис. 5.11. Конденсатор с пластиной из электрета.

\mathbf{P} , направленным перпендикулярно обкладкам в сторону большего потенциала (рис. 5.11). Площади обкладок конденсатора и вставленной пластины одинаковы и равны S , расстояние между пластинами d . Найти заряд конденсатора.

5.44. Прямой круглый цилиндр длиной l с радиусом R поляризован (вектор поляризации \mathbf{P}) параллельно своей оси. Найти разность потенциалов между центрами оснований цилиндра.

5.45. Длинный прямой круглый диэлектрический цилиндр поляризован так, что вектор поляризации $\mathbf{P} = \alpha \mathbf{r}$, где α – положительная постоянная, \mathbf{r} – вектор, направленный от оси цилиндра перпендикулярно ей к точке внутри цилиндра. Найти объемную плотность ρ' связанных зарядов как функцию расстояния r от оси.

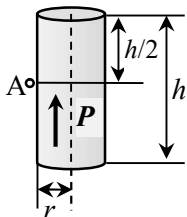


Рис. 5.12. Диэлектрический цилиндр.

5.46. Длинный прямой круглый цилиндр однородно поляризован так, что вектор поляризации \mathbf{P} параллелен его оси. Длина цилиндра h , радиус основания $r \ll h$. Найти напряженность электрического поля в точке A вне цилиндра, находящейся напротив центра цилиндра (рис. 5.12).

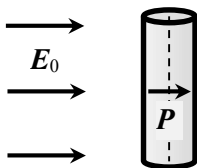


Рис. 5.13. Диэлектрический цилиндр во внешнем электрическом поле.

5.47. Длинный круглый диэлектрический цилиндр поместили в однородное электрическое поле, вектор напряженности которого \mathbf{E}_0 перпендикулярен оси цилиндра (рис. 5.13). В результате диэлектрик поляризовался однородно, а вектор поляризации \mathbf{P} сонаправлен с \mathbf{E}_0 . Найти диэлектрическую проницаемость ϵ цилиндра.

5.48. Круглый диэлектрический диск радиусом R и толщиной h однородно поляризован, вектор \mathbf{P} параллелен плоскости диска. Найти напряженность поля в центре диска.

5.49. В однородное электрическое поле с напряженностью \mathbf{E}_0 поместили однородный диэлектрический шар радиусом R с проницаемостью ϵ .

цаемостью ε . Найти дипольный момент p шара и плотность σ' связанного заряда на его поверхности. Рассмотреть случай $\varepsilon \rightarrow \infty$ (проводящий шар).

5.50. На сколько процентов отличаются индуцированные дипольные моменты сферической капельки воды ($\varepsilon = 81$) и металлического шарика такого же диаметра, находящихся в одном и том же однородном электрическом поле?

5.51. Оценить диэлектрическую проницаемость газообразного гелия при нормальных условиях (давление $p = 10^5$ Па, температура $T = 273$ К). Считать молекулы гелия проводящими шариками с радиусом $r = 10^{-10}$ м.

§6. Энергия, работа и пондеромоторные силы в электрическом поле

• Энергия парного электростатического (кулоновского) взаимодействия точечных зарядов q_i и q_j , находящихся на расстоянии r_{ij} друг от друга:

$$W_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = q_i \Phi_i = q_j \Phi_j = \frac{q_i \Phi_i + q_j \Phi_j}{2},$$

где Φ_i – потенциал электрического поля, создаваемого зарядом q_j в точке нахождения заряда q_i , а Φ_j – потенциал электрического поля, создаваемого зарядом q_i в точке нахождения заряда q_j .

• Взаимная энергия системы точечных зарядов:

$$W_{\text{вз}} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \Phi_i,$$

где q_i – i -й заряд, Φ_i – потенциал поля всех зарядов за исключением i -го в точке нахождения i -го заряда.

• Энергия системы распределенных по объему свободных зарядов:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV,$$

где $\rho(\mathbf{r})$ – объемная плотность заряда внутри объема V ; φ – потенциал поля в точке нахождения элемента заряда ρdV , созданный *всеми* зарядами системы.

• Энергия системы распределенных по поверхности свободных зарядов:

$$W = \frac{1}{2} \int_S \sigma \varphi dS,$$

где $\sigma(\mathbf{r})$ – поверхностная плотность заряда на поверхности S ; φ – потенциал поля в точке нахождения элемента заряда σdS , созданный *всеми* зарядами системы.

• Объемная плотность энергии электростатического поля:

$$w(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon E^2(\mathbf{r}).$$

• Энергия точечного заряда q во внешнем электрическом поле напряженностью $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$:

$$W(\mathbf{r}) = q \int_r^{\infty} \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = q\varphi_0(\mathbf{r}),$$

где $\varphi_0(\mathbf{r})$ – потенциал поля в точке расположения заряда.

- Энергия электрического поля конденсатора:

$$W = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} QU.$$

• *Закон изменения энергии системы заряженных тел при наличии внешних сил и ЭДС*: сумма работ внешних сил A и сторонних сил в источнике ЭДС $A_{\text{ист}}$ при изменении состояния системы заряженных тел равна сумме изменения энергии электрического поля ΔW , создаваемого зарядами этих тел, и выделившегося джоулева тепла Q :

$$A + A_{\text{ист}} = \Delta W + Q.$$

• Суммарная поверхностная плотность максвелловских сил натяжения в электрическом поле:

$$f_x^n = -(w_1^n - w_2^n) = \frac{D_n^2}{2\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right).$$

• Суммарная поверхностная плотность максвелловских сил давления в электрическом поле:

$$f_x^\tau = w_1^\tau - w_2^\tau = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_\tau^2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2).$$

• Связь пондеромоторных сил с энергией электрического поля W :

при виртуальных процессах, в которых постоянны заряды q :

$$F_{x_j} = - \left(\frac{\partial W}{\partial x_j} \right)_q;$$

при виртуальных процессах, в которых постоянны потенциалы φ :

$$F_{x_j} = \left(\frac{\partial W}{\partial x_j} \right)_\varphi.$$

6.1. Среднее расстояние между электроном и ядром в атоме водорода $r = 0,79 \cdot 10^{-10}$ м. Оценить энергию электростатического взаимодействия электрона и ядра.

6.2. Найти энергию взаимодействия W систем точечных зарядов, изображенных на рис. 6.1. Точечные заряды располагаются в вершинах квадратов со стороной a .

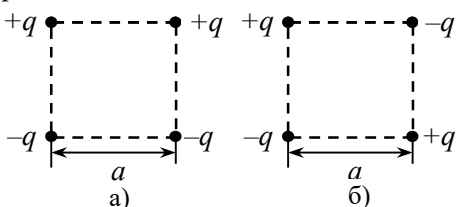


Рис. 6.1. Системы точечных зарядов.

6.3. Четыре одинаковых заряда q находятся в вершинах квадрата со стороной a . Насколько изменилась энергия их взаимодействия после выстраивания

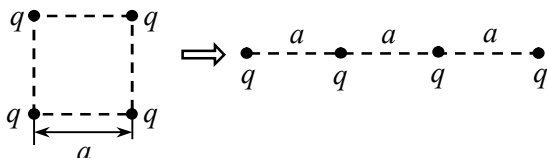


Рис. 6.2. Изменение конфигурации системы зарядов.

в одну линию (см. рис. 6.2)?

6.4. Три маленьких шарика массой m и зарядом q каждый, соединенные друг с другом тонкими непроводящими нерастяжимыми нитями длиной a , находятся на гладкой горизонтальной поверхности (рис. 6.3). Найти максимальную скорость центрального шарика после того, как одну из нитей пережигают.

6.5. Заряд q распределен равномерно по поверхности сферы радиусом a , находящейся в воздухе. Чему равен радиус R concentрической сферы, внутри которой заключена половина энергии электрического поля, созданного зарядом q ?

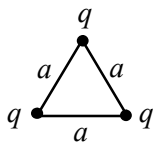


Рис. 6.3. Заряженные шарики, связанные нитями.

6.6. Две concentрические сферические поверхности с радиусами R_1 и $R_2 > R_1$ заряжены с постоянной поверхностной плотностью зарядами Q_1 и Q_2 . Найти собственную энергию W этой системы зарядов.

6.7. Металлический шар радиусом R , обладающий зарядом q , окружен concentрическим сферическим слоем диэлектрика с проницаемостью ϵ . Внутренний радиус слоя равен a , внешний – $2a$. Найти энергию W_0 этой системы.

6.8. Заряд q распределен по объему шара радиусом R с объемной плотностью $\rho \sim r$, где r – расстояние до центра шара. Шар изготовлен из материала с диэлектрической проницаемостью ϵ . Определить энергию W поля, созданного зарядом q .

6.9. Между обкладками плоского воздушного конденсатора, расположенными на расстоянии d друг от друга, находятся плоский слой диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ϵ толщиной d_1 и металлический слой толщиной d_2 (рис. 6.4). Площади обкладок и пластин одинаковы и равны S . Разность потенциалов между обкладками конденсатора V . Определить энергию электрического поля, запасенную в диэлектрике.

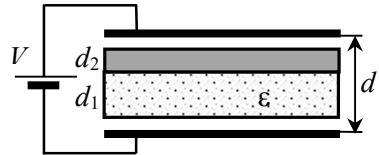


Рис. 6.4. Воздушный конденсатор с пластинами диэлектрика и металла внутри.

Разность потенциалов между обкладками конденсатора V . Определить энергию электрического поля, запасенную в диэлектрике.

6.10. Две коаксиальные длинные цилиндрические поверхности с радиусами R_1 и $R_2 > R_1$ заряжены с постоянной поверхностной плотностью так, что на единицу их длины приходятся заряды τ_1 и τ_2 соответственно. Вычислить энергию W этой системы зарядов в расчете на единицу длины цилиндров. Рассмотреть случаи: а) $\tau_1 = \tau_2 = \tau$; б) $\tau_1 = \tau$, $\tau_2 = -\tau$.

6.11. Бесконечно длинный круглый цилиндр радиусом R заряжен с постоянной объемной плотностью ρ . Диэлектрическая проницаемость цилиндра ϵ . Найти энергию электрического поля, заключенную в цилиндре, в расчете на единицу его длины.

6.12. Большая плоская пластина толщиной d заряжена с постоянной объемной плотностью заряда ρ . Диэлектрическая проницаемость пластины ϵ . Линейные размеры пластины много больше её толщины. Вычислить энергию электрического поля в пластине в расчете на единицу площади пластины.

6.13. Центр проводящей сферы радиусом R , имеющей заряд q , расположен на одном уровне с плоской границей двух изотропных диэлектриков с проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 , вплотную прилегающих к сфере и заполняющих всё пространство вне сферы (рис. 6.5). Определить полную энергию электрического поля.

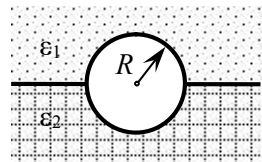


Рис. 6.5. Проводящая сфера на границе раздела диэлектриков.

6.14. Сферическая оболочка радиусом a равномерно заряжена зарядом q . Какую работу нужно совершить, чтобы уменьшить радиус оболочки до величины b ?

6.15. В вакууме находятся три concentрические проводящие сферы с радиусами R , $2R$ и $3R$. Внутренняя сфера обладает зарядом q , средняя сфера не заряжена, а внешняя заземлена. Внутреннюю сферу соединяют со средней проводником, имеющим большое сопротивление. Какое количество тепла Q выделится при этом в проводнике?

6.16. Длинный полый цилиндр радиусом R заряжен с постоянной поверхностной плотностью σ . Какую работу против сил электрического поля нужно совершить в расчете на единицу длины цилиндра, чтобы уменьшить его радиус в 2 раза?

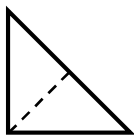


Рис. 6.6. Заряженный треугольный лист.

6.17. Равномерно заряженный лист, имеющий форму прямоугольного равнобедренного треугольника, сложили по диагонали пополам (рис. 6.6), совершив при этом работу A против сил электрического поля. Какую работу A_1 нужно совершить, чтобы ещё раз так же сложить получившийся треугольник?

6.18. Плоский конденсатор с площадью обкладок S и расстоянием между обкладками d заполнен диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ . Параллельно обкладкам расположена металлическая пластина такой же площади толщиной h . Конденсатор зарядили до разности потенциалов U и отключили от батареи. Какое количество тепла Q выделится, если обкладки замкнуть друг на друга?

6.19. Два воздушных конденсатора с емкостями C_1 и C_2 соединены последовательно и заряжены до разности потенциалов U . Затем конденсаторы, не разряжая, соединяют параллельно. Какая энергия W_p при этом выделится?

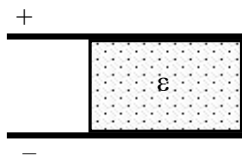


Рис. 6.7. Конденсатор с пластиной диэлектрика.

6.20. В плоском воздушном конденсаторе находится пластина из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ϵ , толщины которой равна расстоянию между обкладками, а площадь составляет часть $\alpha < 1$ от площади его обкладок (рис. 6.7). Емкость воздушного конденсатора без пластины рав-

на C . Конденсатор зарядили до напряжения U и отключили от источника. Какую работу A надо совершить, чтобы вытащить пластину из конденсатора?

6.21. Решить задачу 6.20 при условии, что при удалении пластины из конденсатора его не отключают от источника.

6.22. Батарея из n последовательно соединенных конденсаторов емкостью C каждый подключена к источнику постоянного напряжения U . Один из конденсаторов пробивается. Определить работу $A_{\text{ист}}$ источника и энергию W_p происходящего при этом разряда.

6.23. Два одинаковых воздушных конденсатора ёмкостью $C = 900$ пФ каждый заряжены до разности потенциалов $U = 900$ В и отсоединены от батареи. Один из них в заряженном состоянии погружают в диэлектрическую жидкость с проницаемостью $\epsilon = 2$, после чего конденсаторы соединяют параллельно. Определить энергию W_p происходящего при этом разряда.

6.24. Расстояние между обкладками плоского воздушного конденсатора площадью S равно d . Конденсатор заряжен до напряжения U и отсоединен от источника. Параллельно обкладкам конденсатора вводится металлическая пластина такой же площади толщиной h , изолированная от земли. Какую работу A совершают при этом силы электрического поля конденсатора? На что затрачивается эта работа?

6.25. К обкладкам плоского конденсатора, имеющим форму квадрата со стороной a , приложена постоянная разность потенциалов U . Одну из обкладок начинают сдвигать параллельно другой в направлении, перпендикулярном

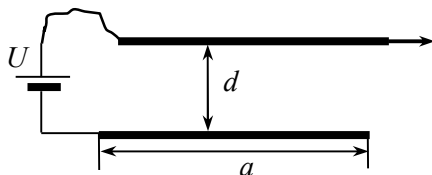


Рис. 6.8. Воздушный конденсатор с движущейся верхней обкладкой.

стороне квадрата, при неизменном расстоянии d между пластинами (рис. 6.8). Найти зависимость энергии W в конденсаторе от расстояния x , на которое передвинули обкладку. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы переместить обкладку на $a/2$ относительно исходного положения?

6.26. Воздушный конденсатор, описанный в задаче 6.25, заряжен до разности потенциалов U и отключен от источника напряжения. Какую работу нужно совершить, чтобы сдвинуть одну из обкладок параллельно другой на расстояние l при неизменном рас-

стоянии d между пластинами?

6.27. Плоский воздушный конденсатор с пластинами площадью S подключен к батарее с разностью потенциалов U . Не отключая конденсатор от батареи, с помощью специального механизма начинают увеличивать расстояние x между пластинами с постоянной малой скоростью v . Как меняется в зависимости от x потребляемая механизмом мощность N ?

6.28. Две полосы металлической фольги шириной a с находящейся между ними полосой диэлектрической пленки с проницаемостью ϵ такой же длины и толщиной d свернули в цилиндр с внутренним радиусом $R \gg d$. Получившийся конденсатор зарядили до разности потенциалов U и отключили от источника. Оценить работу, которую нужно совершить, чтобы развернуть этот конденсатор в плоский. Краевыми эффектами пренебречь.

6.29. Два конденсатора емкостями C_1 и C_2 соединены последовательно и постоянно подключены к источнику ЭДС \mathcal{E} с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением. В некоторый момент времени параллельно конденсатору C_2 подсоединили резистор. Какое количество теплоты Q выделится в этом резисторе в процессе перераспределения зарядов в конденсаторах, если перед подключением резистора заряды конденсаторов были одинаковыми?

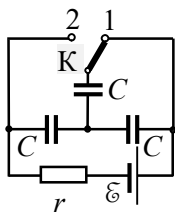


Рис. 6.9. Схема цепи.

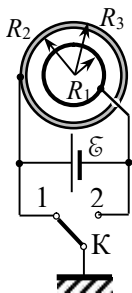


Рис. 6.10. Схема подключения сферического конденсатора.

6.30. В схеме, изображенной на рис. 6.9, емкости всех конденсаторов одинаковы и равны C , ЭДС источника \mathcal{E} . Какое количество теплоты Q выделится в цепи при переводе ключа K из положения 1 в положение 2?

6.31. Найти количество теплоты Q , выделившееся при соединении одноименно заряженных обкладок конденсаторов с емкостями $C_1 = 2$ мкФ и $C_2 = 0,5$ мкФ, которые были заряжены до разностей потенциалов $U_1 = 100$ В и $U_2 = 50$ В соответственно.

6.32. Радиус внутренней обкладки сферического конденсатора R_1 , а внешняя проводящая оболочка имеет радиусы R_2 R_3 . Конденсатор подключен к батарее с ЭДС \mathcal{E} . Первоначально ключ K находился в положении 1 и внешняя обкладка была заземлена (рис. 6.10). Найти количество теплоты Q , которое может

выделиться на внутреннем сопротивлении батареи, если перевести ключ в положение 2.

6.33. Плоский воздушный конденсатор с площадью обкладок S и расстоянием между обкладками d полностью погружен в диэлектрическую жидкость с проницаемостью ϵ . Определить силу притяжения F обкладок конденсатора друг к другу, если между ними поддерживается разность потенциалов U .

6.34. Между обкладками плоского воздушного конденсатора с площадью обкладок S и расстоянием между ними d находится диэлектрическая пластина такой же площади толщиной $d/2$ с диэлектрической проницаемостью ϵ . Разность потенциалов между обкладками поддерживается равной U . Определить силу притяжения обкладок друг к другу.

6.35. В плоский конденсатор с угольными обкладками длиной a и шириной b частично вставили диэлектрическую пластину с проницаемостью ϵ .

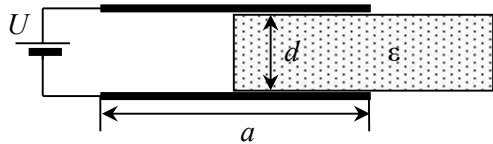


Рис. 6.11. Диэлектрическая пластина, частично вставленная в воздушный конденсатор.

Толщина пластины d практически равна расстоянию между обкладками (рис. 6.11). Конденсатор подсоединен к источнику напряжения U . Какую силу F нужно приложить к пластине, чтобы удержать её на месте?

6.36. Обкладки плоского конденсатора имеют форму квадрата со стороной a и находятся на расстоянии d друг от друга. Конденсатор подсоединен к источнику напряжения U . В пространство между обкладками частично вдвинули квадратную металлическую пластину со стороной a и толщиной $h < d$. Ребра пластины параллельны сторонам обкладок конденсатора. Найти силу, с которой пластина вытягивается в конденсатор.

6.37. Конденсатор с частично вдвинутой металлической пластиной, описанный в задаче 6.36, отключен от источника напряжения. На обкладках конденсатора находятся заряды q и $(-q)$. Какую силу F нужно приложить к пластине, чтобы удержать её на месте? Длина части конденсатора без пластины равна x

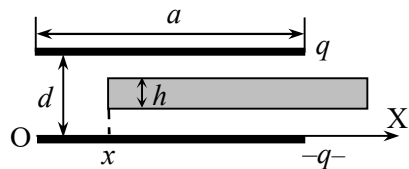


Рис. 6.12. Воздушный конденсатор с частично вдвинутой металлической пластиной.

Длина части конденсатора без пластины равна x

(рис. 6.12). Рассмотреть случай $x = a/2$.

6.38. Обкладки плоского воздушного конденсатора имеют форму прямоугольников длиной a и шириной b , расстояние между которыми d . На обкладках конденсатора находятся заряды q и $(-q)$. В конденсатор на половину его длины вдвинули диэлектрическую пластину с проницаемостью ϵ , толщина которой чуть меньше расстояния между обкладками. Чему равна сила, втягивающая пластину в конденсатор?

6.39. В плоский конденсатор с квадратными обкладками площадью $L \times L$ частично вставлена широкая диэлектрическая пластина из электрета с «замороженной» однородной поляризацией. Пластина, толщина которой d равна расстоянию между обкладками конденсатора, выступает с трех сторон за обкладки конденсатора. Вектор поляризации \mathbf{P} пластины перпендикулярен обкладкам конденсатора и направлен в сторону обкладки с большим потенциалом. Пренебрегая краевыми эффектами, найти силу, действующую на пластину, если напряжение на конденсаторе U .

6.40. В плоский конденсатор с площадью обкладок S вставили диэлектрическую пластину с проницаемостью ϵ таких же размеров, толщина которой меньше расстояния между обкладками конденсатора (рис. 6.13). На обкладках находятся заряды q и $(-q)$. С какой силой растягивается пластина силами электрического поля конденсатора?

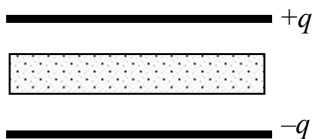


Рис. 6.13. Воздушный конденсатор с диэлектрической пластиной.

тора?

6.41. Проводящий шар радиусом R , имеющий заряд q , находится на плоской границе раздела двух изотропных полубесконечных диэлектриков с проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 . Центр шара расположен непосредственно на границе раздела. Определить силу, действующую на шар.

6.42. Заряженный проводящий шар радиусом R из материала с плотностью ρ_1 плавает в диэлектрической жидкости, плотность которой ρ_2 ($\rho_2 > 2\rho_1$) и диэлектрическая проницаемость ϵ . Шар погружен в жидкость ровно наполовину. Определить заряд шара.

6.43. По кольцу радиусом R равномерно распределен заряд q . В центре кольца находится незаряженный диэлектрический шарик радиусом $r \ll R$, изготовленный из материала с диэлектрической

проницаемостью ε . Какую работу надо совершить, чтобы переместить шарик вдоль оси кольца на расстояние h (см. рис. 6.14)?

6.44. Определить высоту подъема жидкости в расположенном вертикально плоском конденсаторе, если он подсоединен к батарее с напряжением U , расстояние между пластинами d , плотность жидкости ρ , диэлектрическая проницаемость ε .

6.45. Плоский воздушный конденсатор, расстояние между обкладками которого d , расположен вертикально и касается поверхности жидкости с диэлектрической проницаемостью ε_1 . В пространство между обкладками конденсатора параллельно им введена диэлектрическая пластина толщины $a < d$ с диэлектрической проницаемостью ε_2 . Конденсатор подключен к батарее с напряжением U . Найти высоту h подъема жидкости в зазорах между пластиной и обкладками.

6.46. Две коаксиальные трубки, радиусы которых a и b , погружаются вертикально в диэлектрическую жидкость, плотность которой ρ , а диэлектрическая проницаемость равна ε . Между трубками поддерживается разность потенциалов U . Найти высоту подъема жидкости в пространстве между трубками.

6.47. Проводящая сфера радиусом R имеет заряд Q . Определить давление на поверхность сферы, обусловленное взаимодействием зарядов.

6.48. Проводящий шар радиусом R имеет заряд Q . С какой силой любые две половинки шара действуют друг от друга?

6.49. Непроводящую равномерно заряженную сферу радиусом R мысленно делят пополам плоскостью на два неравных сферических сегмента. На одной части сферы находится заряд Q , а на другой – заряд q . Найти силу взаимодействия между этими сегментами.

6.50. Незаряженный проводящий шар радиусом R помещен во внешнее однородное поле с напряженностью E_0 . Определить силу, с которой две половинки шара отталкиваются друг от друга, если их общая граница перпендикулярна E_0 .

6.51. Тонкий цилиндрический стержень объемом V из однородного изотропного ди-

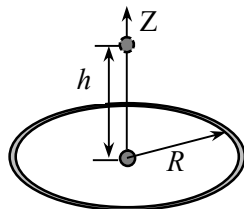


Рис. 6.14. Диэлектрический шарик в поле заряженного кольца.

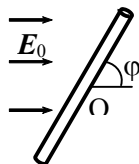


Рис. 6.15. Диэлектрический стержень в электрическом поле.

электрика с проницаемостью ϵ находится в однородном электрическом поле с напряженностью E_0 , направленной под углом φ к оси стержня (рис. 6.15). Определить момент M внешних сил, которые удерживают стержень в равновесии.

6.52. Конденсатор переменной емкости (рис. 6.15) состоит из двух неподвижных металлических пластин, расстояние между которыми d , и подвижной пластины из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ϵ . Пластина может поворачиваться и входит в зазор между обкладками конденсатора. Обкладки и все пластины имеют форму полукруга радиусом R , причем зазоры между диэлектрической пластиной и пластинами конденсатора пренебрежимо малы по сравнению с d . Когда диэлектрическая пластина находится вне металлических обкладок, конденсатор заряжается до напряжения U и отключается от источника. Затем пластина вдвигается в пространство между металлическими обкладками. Пренебрегая краевыми эффектами, найти зависимость момента сил M , действующего на диэлектрическую пластину, от угла θ .

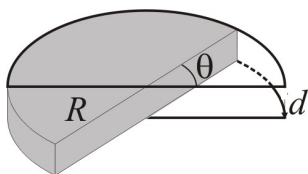


Рис. 6.16. Конденсатор переменной емкости.

тора пренебрежимо малы по сравнению с d . Когда диэлектрическая пластина находится вне металлических обкладок, конденсатор заряжается до напряжения U и отключается от источника. Затем пластина вдвигается в пространство между металлическими обкладками. Пренебрегая краевыми эффектами, найти зависимость момента сил M , действующего на диэлектрическую пластину, от угла θ .

6.53. Конденсатор переменной емкости (рис. 6.17) состоит из

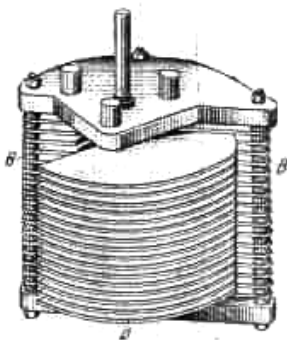


Рис. 6.17. Конденсатор переменной емкости.

($n+1$) неподвижных параллельных металлических пластин, расположенных на одинаковом расстоянии друг над другом, и n таких же подвижных пластин, которые могут вдвигаться между неподвижными пластинами, находясь посередине между ними (число "рабочих" промежутков между пластинами равно $2n$). Каждая из пластин имеет форму полукруга радиусом R , расстояние между соседними пластинами равно d . Конденсатор подключен к источнику напряжения U . Какой момент сил M действует на систему

подвижных пластин, когда они находятся в среднем положении?

§7. Токи в сплошных проводящих средах

- Сила тока I :

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S},$$

где \mathbf{j} – плотность тока.

- Уравнение непрерывности в интегральной и дифференциальной формах:

$$\oint_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial q}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial \rho(\mathbf{r})}{\partial t}.$$

- Условие стационарности в интегральной и дифференциальной формах:

$$\oint_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0.$$

- Закон Ома для участка цепи:

$$I = \frac{U}{R}.$$

- Граничные условия для нормальных и тангенциальных составляющих векторов электрического поля и плотности стационарного тока в случае поверхности раздела двух проводящих сред:

D	E	j
$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$	$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$	$\frac{1}{\lambda_2} j_{2n} - \frac{1}{\lambda_1} j_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$
$D_{2\tau} - D_{1\tau} = 0$	$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0$	$\frac{1}{\lambda_2} j_{2\tau} - \frac{1}{\lambda_1} j_{1\tau} = 0$
$\lambda_2 D_{2n} - \lambda_1 D_{1n} = 0$	$\lambda_2 E_{2n} - \lambda_1 E_{1n} = 0$	$j_{2n} - j_{1n} = 0$

- Дифференциальная форма закона Ома:

$$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E},$$

где \mathbf{E} – напряженность электрического поля, λ – удельная проводимость среды.

- Сопротивление цилиндрического проводника длиной L и площадью поперечного сечения S :

$$R = \rho \frac{L}{S} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{L}{S},$$

где $\rho = 1/\lambda$ – удельное сопротивление проводника.

- Закон Джоуля-Ленца (количество теплоты, выделяемое в проводнике с постоянным током за время Δt):

$$\delta Q = \frac{U^2}{R} dt = RI^2 dt.$$

- Сопротивление безграничной среды с удельным сопротивлением ρ , окружающей уединенную проводящую сферу радиусом a :

$$R_\infty = \frac{\rho}{4\pi a}.$$

- Дифференциальная форма закона Джоуля-Ленца (количество теплоты, выделяющееся в единице объема (м^3 в системе СИ) проводника в единицу времени):

$$q = \frac{j^2}{\lambda} = \rho j^2.$$

- Обобщенный закон Ома в интегральной форме (для участка цепи, содержащего ЭДС \mathcal{E})

$$IR_{12} = U_{12} + \mathcal{E},$$

где $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$ – разность потенциалов между точками 1 и 2, R_{12} – сопротивление рассматриваемого участка.

- Связь емкости конденсатора и сопротивления между обкладками.

Сопротивление R однородной проводящей среды, заполняющей все пространство между двумя идеально проводящими телами произвольной формы, и ёмкость C такой системы связаны с удельным сопротивлением вещества ρ и его диэлектрической проницаемостью ϵ соотношением:

$$RC = \rho \epsilon \epsilon_0.$$

7.1. В проводнике с удельным сопротивлением ρ течет ток с плотностью \mathbf{j} . Определить разность потенциалов между точками А и В, расстояние между которыми равно l , если ток течет под углом α к направлению прямой АВ (рис. 7.1).

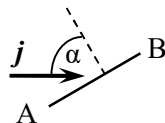


Рис. 7.1. Направление плотности тока относительно линии АВ.

7.2. Плотность тока \mathbf{j} перпендикулярна границе раздела двух сред с удельными сопротивлениями ρ_1 и ρ_2 . Найти поверхностную плотность зарядов на этой плоскости.

7.3. Вектор плотности тока \mathbf{j}_1 в первой среде составляет угол α_1 с нормалью к плоской границе раздела двух сред, удельные проводимости которых равны λ_1 и λ_2 (рис. 7.2). Найти угол α_2 между вектор плотности тока во второй среде и нормалью к границе раздела. Определить

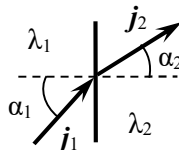


Рис. 7.2. Направление плотностей тока относительно границы раздела сред.

поверхностную плотность заряда на границе раздела сред.

7.4. К центрам противоположных торцов тонкостенной цилиндрической банки диаметром D и высотой h припаяны провода диаметром d (рис. 7.3). Банка изготовлена из металлической фольги толщиной $\delta \ll d$ с удельным сопротивлением ρ . Определить сопротивление R банки.

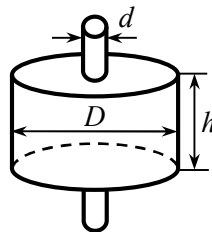


Рис. 7.3. Тонкостенная цилиндрическая банка.

7.5. Электрод имеет форму параболоида вращения длиной l со срезанной вершиной и сделан из однородного материала с удельным сопротивлением ρ . Радиусы оснований электрода равны a и b (рис. 7.4). Определить сопротивление электрода вдоль оси Z – оси параболоида между его основаниями.

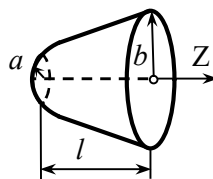


Рис. 7.4. Электрод в виде усеченного параболоида вращения.

7.6. Плоский конденсатор, между обкладками которого находится парафинированная бумага с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 2$, за время $\tau = 10$ мин сохранил заряд q , равный 0,1 сообщенного ему заряда q_0 . Считая, что утечка заряда происходит только через парафинированную бумагу, найти её удельное сопротивление ρ .

7.7. В заполняющую все пространство однородную слабо проводящую среду вносят металлический шар, имеющий заряд q_0 . Диэлектрическая проницаемость среды ϵ , её удельная проводимость λ . Через какое время t заряд шара уменьшится в $n = 2$ раза?

7.8. Пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 7$ и удельным сопротивлением $\rho = 1,0 \cdot 10^{11}$ Ом·м. Емкость конденса-

тора $C = 3000$ пФ. На обкладки конденсатора подано напряжение $U = 2000$ В. Определить ток утечки через конденсатор.

7.9. Пространство между двумя концентрическими металлическими сферами, радиусы которых r_1 и r_2 , заполнено слабо проводящей средой с удельным сопротивлением ρ и диэлектрической проницаемостью ϵ . Между обкладками конденсатора поддерживается постоянное напряжение U . Определить ток утечки I в конденсаторе.

7.10. Пространство между обкладками цилиндрического конденсатора длиной L заполнено веществом с удельной проводимостью λ и диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 1$. Радиусы обкладок равны R_1 и R_2 . Между обкладками конденсатора поддерживается постоянная разность потенциалов. Определить напряжение U на конденсаторе, если ток утечки в нем равен I . Красными эффектами пренебречь.

7.11. Пространство между обкладками плоского конденсатора (площадь обкладок S , расстояние между ними d) заполнено проводящей средой, удельное сопротивление которой изменяется в направлении от одной обкладки к другой по закону: $\rho = \rho_0 + \alpha x$. Найти сопротивление среды между обкладками.

7.12. Площадь пластин плоского конденсатора равна S , расстояние между ними d . Конденсатор заполнен слабо проводящей средой с диэлектрической проницаемостью ϵ , удельная проводимость которой изменяется от одной обкладки до другой по закону: $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_0} + \alpha x$, $\alpha = \text{const}$ (рис. 7.5).

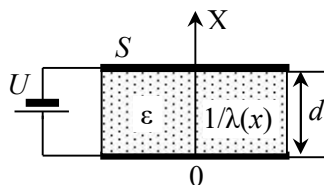


Рис. 7.5. Конденсатор со слабо проводящей диэлектрической пластиной.

Между обкладками конденсатора поддерживается постоянное напряжение U . Определить заряды на обкладках, а также объемные плотности свободных $\rho(x)$ и связанных $\rho'(x)$ зарядов в среде.

7.13. Сопротивление между внутренней и внешней поверхностями кольца толщиной d равно R . Радиусы внутренней и внешней сторон кольца равны a и b ($a < b$). Определить удельное сопротивление ρ материал, из которого сделано кольцо.

7.14. Пространство между обкладками сферического конденсатора, радиусы которого равны r_1 и $r_2 > r_1$, заполнено слабо проводящей средой, удельная проводимость которой меняется с расстоя-

нием r до центра сфер по закону $\lambda = ar$, где a – постоянная величина. Диэлектрическая проницаемость среды $\varepsilon = 1$. Найти сопротивление среды между обкладками.

7.15. Проводник имеет форму полого цилиндра с радиусами внутренней и внешней поверхностей r_1 и $r_2 > r_1$ и изготовлен из материала, удельное сопротивление которого меняется с расстоянием r до оси проводника по закону $\rho(r) = \alpha r$, где α – постоянная величина. Определить сопротивление единицы длины проводника при протекании тока вдоль оси цилиндра.

7.16. Проводник в форме цилиндрической трубки длиной l с внутренним радиусом a и внешним радиусом b изготовлен из материала, удельная проводимость которого меняется с расстоянием r до оси проводника по закону $\lambda(r) = \alpha r$, где α – постоянная величина. Найти сопротивление проводника при радиальном растекании тока.

7.17. Пространство между двумя коаксиальными цилиндрами заполнено слабо проводящим диэлектриком, удельная проводимость λ которого зависит только от расстояния r до оси цилиндров. Определить закон изменения $\lambda(r)$, если при разности потенциалов U между внутренним и внешним цилиндрами напряженность электрического поля E между цилиндрами постоянна.

7.18. По цилиндрическому стержню длиной l с площадью сечения S течет ток с плотностью j . Удельная проводимость стержня линейно изменяется от λ_1 на одном его торце до λ_2 на другом. Диэлектрическая проводимость стержня равна ε . Найти распределение вдоль стержня объемной плотности ρ свободных зарядов и полный свободный заряд q в объеме стержня. Краевыми эффектами пренебречь.

7.19. Цилиндрический конденсатор с радиусами обкладок R_1 и $R_2 > R_1$ заполнен слабо проводящей средой с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 1$ и удельной проводимостью, зависящей от расстояния до оси цилиндров по закону: $\lambda(r) = \alpha / r^2$, где $\alpha = \text{const}$. Между обкладками конденсатора поддерживается постоянное напряжение U . Определить объемную плотность ρ свободных зарядов в конденсаторе.

7.20. Между обкладками сферического конденсатора с радиусами a и $b > a$ находится слабо проводящая среда с диэлектрической проницаемостью ε , удельное сопротивление которой зависит

от расстояния до центра сфер по закону: $\rho(r) = \alpha r^3$, где $\alpha = \text{const}$. На конденсатор подано напряжение U . Определить заряды q_a и q_b на обкладках конденсатора, объемную плотность ρ свободных зарядов в среде и полный свободный заряд в среде $q_{\text{своб.}}$ после протекания постоянного электрического тока.

7.21. Зазор между обкладками плоского конденсатора толщиной d заполнен последовательно двумя диэлектрическими слоями одинаковой толщины. Удельные сопротивления слоев равны ρ_1 и ρ_2 соответственно, диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 1$. Площадь обкладок S . На конденсатор подано напряжение U . Найти тепловую мощность, выделяемую в каждом слое.

7.22. Пространство между обкладками плоского конденсатора (площадь обкладок S , расстояние между ними d) заполнено проводящей средой, удельное сопротивление которой линейно изменяется от ρ_1 у поверхности одной обкладки до $\rho_2 > \rho_1$ у поверхности другой. На конденсатор подано напряжение U . Найти тепловую мощность, выделяемую в конденсаторе.

7.23. Плоский конденсатор заполнен однородным веществом с диэлектрической проницаемостью ε и удельным сопротивлением ρ . Площадь обкладок равна S , расстояние между ними d , первоначально конденсатор не заряжен. Найти количество теплоты, которое выделится в системе после того, как на одной из обкладок конденсатора появится заряд q_0 .

7.24. Пространство между обкладками сферического конденсатора, радиусы которых равны R_1 и $R_2 > R_1$, заполнено веществом с удельным сопротивлением ρ и диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 1$. Определить выделяемую в конденсаторе тепловую мощность, если напряжение между его обкладками равно U_0 .

7.25. Пространство между двумя проводящими сферическими оболочками с радиусами r_1 и $r_3 > r_1$ заполнено двумя слоями диэлектриков с удельными сопротивлениями ρ_1 и ρ_2 , диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 1$ и радиусами r_1, r_2 и r_2, r_3 соответственно. Между оболочками поддерживается постоянная разность потенциалов U . Найти мощности тепловых потерь в каждом слое.

7.26. Пространство между двумя концентрическими проводящими сферами заполнено слабо проводящим диэлектриком, удельная проводимость λ которого зависит только от расстояния r до центра сфер. Между сферами поддерживается постоянная разность потенциалов. Найти закон изменения удельной проводимо-

сти $\lambda(r)$, при котором объемная плотность тепловых потерь при прохождении тока одинакова во всех точках.

7.27. Металлический шар радиуса R находится в среде с удельной проводимостью λ . В некоторый момент времени шару сообщают заряд q . Определить количество теплоты, которое выделится во всей среде за время полного разряда шара.

7.28. Пространство между проводящими цилиндрическими оболочками длиной L заполнено двумя цилиндрическими слоями веществ с удельными проводимостями λ_1 и λ_2 . Радиусы цилиндров равны a , $2a$ и $3a$. Между оболочками поддерживается напряжение U . Определить тепловую мощность, выделяющуюся в каждом слое.

7.29. Два одинаковых металлических шара радиусом $a = 5$ см находятся в однородной среде с удельным сопротивлением $\rho = 100$ Ом·м. Определить сопротивление R между шарами при условии, что расстояние между ними много больше их радиусов.

7.30. Два металлических шара, радиусы которых r_1 и r_2 , зарыты глубоко в землю на большом расстоянии $d \gg r_1, r_2$ друг от друга (рис. 7.6).

Шары по воздуху соединены проводом, проходящим в воздухе (телеграфная линия). Почвы в вокруг каждого из шаров можно считать однородными, а их удельные сопротивления равны ρ_1 и ρ_2 соответственно. Найти сопротивление R земли между шарами.

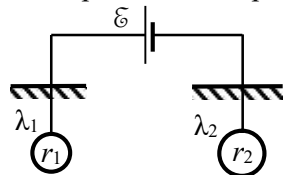


Рис. 7.6. Схема телеграфной линии.

7.31. Полусферический электрод погружен в землю вровень с её поверхностью (рис. 7.7). Сила тока, протекающего через него, равна $I = 1$ А. Найти шаговое напряжение, под которым может оказаться приближающийся к электроду человек, если длина шага $l = 0,75$ м, расстояние от электрода до ближайшей ноги человека $r_0 = 1$ м. Удельное сопротивление земли $\rho = 50$ Ом·м.

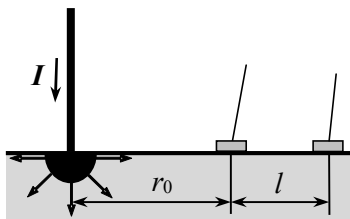


Рис. 7.7. К расчету шагового напряжения.

7.32. Электрический провод радиусом $a = 0,01$ м, находящийся под напряжением $U = 6000$ В, обрывается и падает на землю. Ток растекается равномерно по всем направлениям. Считая, что конец провода имеет форму полусферы и погружен в землю вровень с её поверхностью, определить ток растекания I . Удельная проводимость земли $\lambda = 10^{-2}$ Ом $^{-1}$ м $^{-1}$.

7.33. Провод, по которому течет ток $I = 500$ А, оборвался и упал на землю. Длина упавшего прямого участка провода $L = 50$ м. Найти шаговое напряжение на расстоянии $d_1 = 1$ м от провода, если удельная проводимость земли $\lambda = 10^{-2}$ Ом⁻¹ м⁻¹, а длина шага человека $l = 0,75$ м. Каково будет шаговое напряжение на расстоянии $d_2 = 0,5$ м от провода?

§8. Цепи постоянного тока

- Закон Ома для замкнутой неразветвленной цепи:

$$IR = \mathcal{E},$$

где I – сила тока, R – полное сопротивление и \mathcal{E} – полная ЭДС в замкнутой цепи тока.

- Сопротивление проводников, соединенных последовательно:

$$R = \sum_i R_i.$$

- Сопротивление проводников, соединенных последовательно:

$$\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i}.$$

- Простой контур: замкнутый контур цепи, на "территории" (внутри) которого нет других контуров этой цепи.

- Правила Кирхгофа.

Первое правило Кирхгофа. Алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в точке разветвления (узле) цепи, равна нулю:

$$\sum_i I_i = 0,$$

где I_i – сила тока в i -ом ветвлении. Знаки сил токов, текущих к узлу и от него, считаются противоположными.

Второе правило Кирхгофа. В любом замкнутом контуре из последовательно соединенных резисторов и источников ЭДС алгебраическая сумма падений напряжения на сопротивлениях этого контура равна алгебраической сумме всех ЭДС в этом контуре:

$$\sum_k I_k R_k = \sum_k \mathcal{E}_k.$$

- *Метод контурных токов:* метод расчета электрических цепей путем записи системы линейных алгебраических уравнений для контурных токов в простых контурах цепи.

Для каждого из простых контуров, на которые можно разложить разветвленную цепь, постоянный вдоль всего контура ток называется *контурным*. Каждому контурному току приписывается определенное положительное направление (например, по часовой стрелке в каждом контуре). На любом участке цепи сила тока равна силе контурного тока или сумме (разности) двух контурных токов соседних простых контуров.

Затем для каждого замкнутого контура с учетом знаков ЭДС и сил токов записываются уравнения в соответствии со вторым правилом Кирхгофа.

Метод узловых потенциалов: метод расчета электрических цепей путем записи системы линейных алгебраических уравнений для потенциалов узлов цепи.

Сущность метода: сначала определяются потенциалы всех N узлов схемы, а затем токи и напряжения неразветвленных участков цепи (ветвей), соединяющих узлы. Сначала потенциал одного из узлов принимается равным нулю. Затем нумеруются узлы, после чего записывается система из $(N - 1)$ уравнений: в левой части каждого из уравнений записывается потенциал заданного узла, умноженный на сумму проводимостей ветвей ($\Lambda_{ij} \equiv \frac{1}{R_{ij}}$), примыкающих к нему, вычитается сумма потенциалов узлов, примыкающих к данному, умноженных на проводимости ветвей, соединяющих их с данным узлом. В правой части записывается сумма произведений ЭДС на проводимость для всех ветвей, примыкающих к данному узлу; если ЭДС обращена положительным полюсом к рассматриваемому узлу, то записывается со знаком «+», если отрицательным, то со знаком «-»:

$$\varphi_i \sum_{j \neq i}^N \Lambda_{ij} - \sum_{j \neq i}^N \Lambda_{ij} \varphi_j = - \sum_{j \neq i}^N \Lambda_{ij} \mathcal{E}_{ij}.$$

Из полученной системы $(N - 1)$ независимых уравнений определяются потенциалы узлов (равные напряжениям между каждым из узлов и базовым), а затем (по закону Ома) токи в ветвях и напряжения на элементах цепи.

- Обобщенный закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС):

$$IR_{12} = U_{12} + \mathcal{E}_{12},$$

где $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$ – разность потенциалов между точками 1 и 2, R_{12} – сопротивление рассматриваемого участка.

- Мощность тока I , проходящего по проводнику с сопротивлением R :

$$N = IU = I^2 R = U^2 / R.$$

8.1. Вычислить сопротивление проволочных каркасов, изображенных на рис. 8.1. Сопротивление каждого элемента каркаса равно r . Каркасы включаются в цепь между точками А и В.

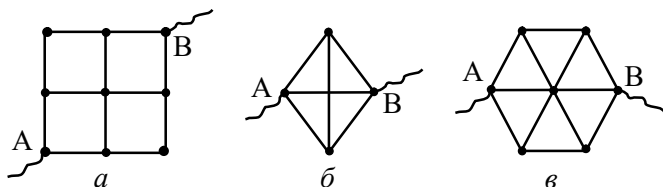


Рис. 8.1. Схемы проволочных каркасов.

8.2. Сопротивление каждого элемента проволочного каркаса, изображенного на рис. 8.2, равно r . Определить сопротивление каркаса при включении его в цепь: а) между точками А и В; б) между точками С и D.

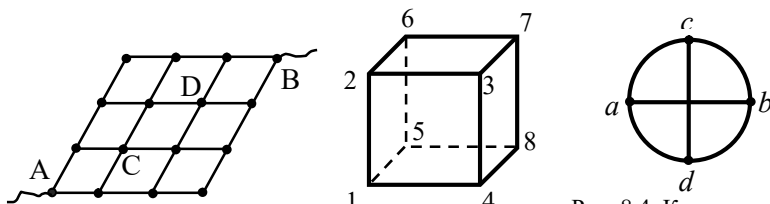


Рис. 8.2. Схема проволочного каркаса.

Рис. 8.3. Проволочный каркас в виде куба.

Рис. 8.4. Каркас в виде окружности с пересеченными диаметрами.

8.3. Проволочный каркас имеет форму куба, сопротивление каждого ребра которого равно r (рис. 8.3). Определить сопротивление каркаса при включении его в цепь между точками: а) 1 и 2; б) 1 и 3.

8.4. Из проволоки с погонным сопротивлением r изготовлен каркас в форме окружности диаметром D , пересеченной двумя взаимно перпендикулярными прямыми вдоль диаметров (рис. 8.4). Найти сопротивление каркаса при его подключении к источнику тока в точках c и d .

8.5. Ячейки бесконечной проволочной сетки имеют форму правильных шестиугольников (рис. 8.5). Сопротивление каждой стороны ячейки равно r . Определить сопротивление R сетки при подключении её к источнику тока в точках А и В.

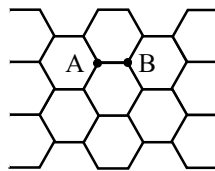


Рис. 8.5. Бесконечная проволочная сетка.

8.6. Сопротивление каждого звена проволочного каркаса, изображенного на рис. 8.6, равно r . Найти со-

противление каркаса при подключении его к источнику тока между точками: а) 1 и 2; б) 1 и 3; в) 1 и 4.

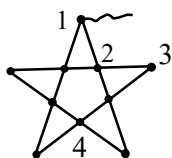


Рис. 8.6. Схема проволочного каркаса.

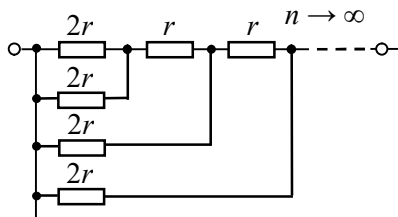


Рис. 8.7. Схема соединения резисторов.

8.7. Найти сопротивление R цепочки из $n \rightarrow \infty$ резисторов, соединенных по схеме, изображенной на рис. 8.7. Какой ток I_n потечет через каждый резистор, если контур подсоединить к источнику постоянного напряжения U ?

8.8. Какое сопротивление R_x надо включить между точками С и D в цепи, изображенной на рис. 8.8, чтобы сопротивление цепи между точками А и В не зависело от числа ячеек?

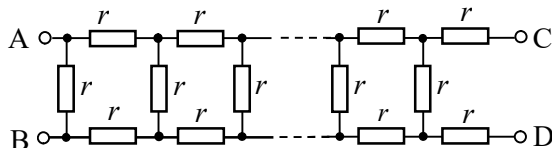


Рис. 8.8. Схема соединения резисторов.

8.9. Найти сопротивление R_{AB} между точками А и В в схеме, представленной на рис. 8.9.

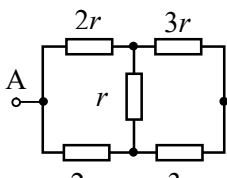


Рис. 8.9. Схема цепи.

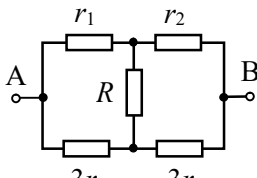


Рис. 8.10. Схема цепи.

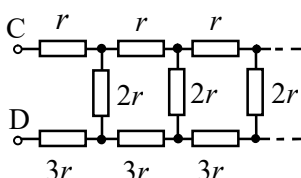


Рис. 8.11. Бесконечная цепь.

8.10. Найти ток I потечет через резистор с сопротивлением r_2 в схеме, изображенной на рис. 8.10, если между точками А и В подключить источник постоянного напряжения U .

8.11. Найти сопротивление R_{CD} между точками С и D бесконечной цепи, представленной на рис. 8.11.

8.12. Найти сопротивление R_{AB} бесконечной цепи, изображенной на рис. 8.12. Цепь состоит из одинаковых резисторов сопротивлением r каждый.

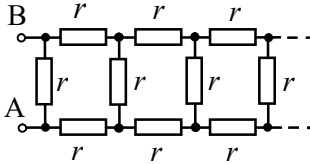


Рис. 8.12. Бесконечная цепь.

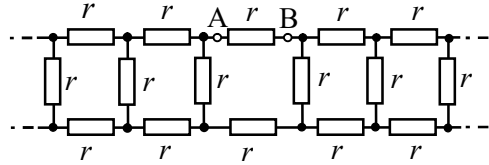


Рис. 8.13. Схема включения бесконечной цепи.

8.13. Определить сопротивление R_x между точками А и В (рис. 8.13) цепочки из одинаковых резисторов сопротивлением r .

8.14. Бесконечная цепочка из одинаковых резисторов сопротивлением r каждый, описанная в задаче 8.13, подключается к источнику напряжения в других точках С и D (рис. 8.14). Определить сопротивление R_x между точками С и D.

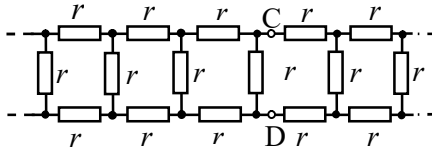


Рис. 8.14. Схема включения бесконечной цепи.

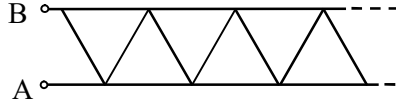


Рис. 8.15. Бесконечный проволочный каркас.

8.15. Найти сопротивление между точками А и В бесконечного проволочного каркаса, представленного на рис. 8.15. Каркас состоит из одинаковых проволочных звеньев, сопротивление каждого из которых равно r .

8.16. Бесконечный проволочный каркас, показанный на рис. 8.16, состоит из одинаковых звеньев с одинаковым сопротивлением r . Найти сопротивление R_x каркаса между точками А и В.

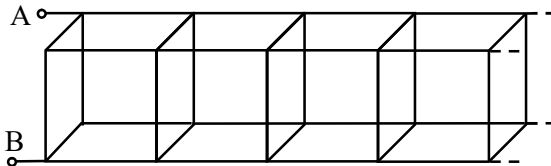


Рис. 8.16. Схема бесконечного проволочного каркаса.

8.17. Делитель напряжения устроен так, как показано на рис. 8.17. Найти отношение сопротивлений $R_1 : R_2 : R_3$, при котором напряжение на каждом последующем вертикальном сопротивлении

в k раз меньше, чем на предыдущем. Число ячеек делителя напряжения может быть любым.

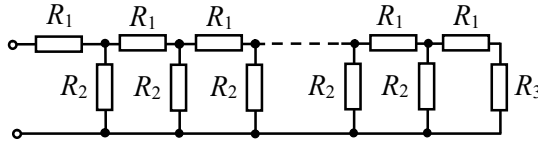


Рис. 8.17. Схема делителя напряжения.

8.18. Найти сопротивление между точками А и В в схеме на рис. 8.18.

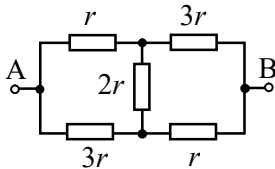


Рис. 8.18. Схема соединения резисторов.

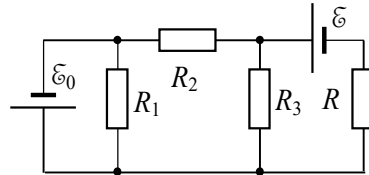


Рис. 8.19. Схема цепи.

8.19. В схеме на рис. 8.19 известны сопротивления R , R_{1-3} и ЭДС источников тока ε и ε_0 . Найти силу тока I через резистор R .

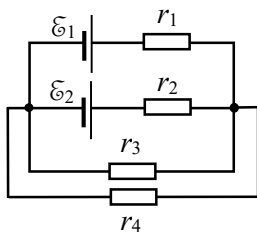


Рис. 8.20. Схема цепи.

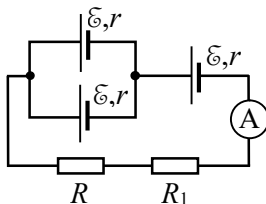


Рис. 8.21. Схема цепи.

8.20. Источники ЭДС $\varepsilon_1 = 10$ В и $\varepsilon_2 = 4$ В включены в цепь так, как показано на рис. 8.20. Сопротивления резисторов $r_1 = r_4 = 2$ Ом, $r_2 = r_3 = 4$ Ом. Пренебрегая сопротивлением источников, определить силы токов I_2 и I_3 через резисторы с сопротивлениями r_2 и r_3 .

8.21. Три одинаковых элемента с ЭДС $\varepsilon = 1,5$ В и внутренним сопротивлением $r = 0,6$ Ом включены в цепь, схема которой представлена на рис. 8.21. Миллиамперметр показывает ток $I = 100$ мА. Сопротивление резистора $R_1 = 10$ Ом, сопротивление резистора R неизвестно. Определить падение напряжения U_R на резисторе R .

8.22. Найти ЭДС ε и внутреннее сопротивление r источника, эквивалентного двум параллельно соединенным элементам с ЭДС и внутренними сопротивлениями $\varepsilon_1 = 1$ В, $r_1 = 0,6$ Ом и $\varepsilon_2 = 2$ В, $r_2 = 0,8$ Ом соответственно.

8.23. n одинаковых источников тока, ЭДС каждого из которых \mathcal{E} и внутреннее сопротивление r , соединены последовательно, причем k из них включены навстречу другим. Батарея замкнута на резистор с сопротивлением R . Какой ток протекает через резистор?

8.24. В схеме, изображенной на рис. 8.22, ЭДС $\mathcal{E}_1 = 1$ В, $\mathcal{E}_2 = 4$ В, $\mathcal{E}_3 = 3$ В, сопротивления резисторов $R_1 = 100$ Ом, $R_2 = 200$ Ом, $R_3 = 300$ Ом, $R_4 = 400$ Ом. Определить силы и направления токов, текущих через резисторы.

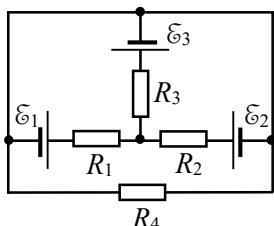


Рис. 8.22. Схема цепи.

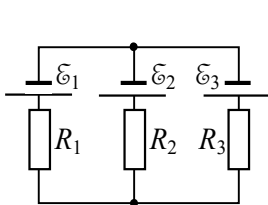


Рис. 8.23. Схема цепи.

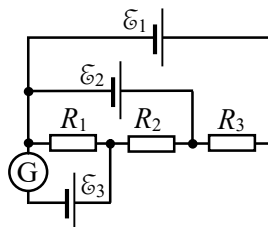


Рис. 8.24. Схема цепи.

8.25. В схеме, показанной на рис. 8.23, сопротивления R_1 и R_2 подобраны так, что ток через резистор с сопротивлением R_3 не течет. Считая известными ЭДС \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 , сопротивления R_1 и R_2 , найти ЭДС \mathcal{E}_3 третьего источника тока.

8.26. Известны сопротивления R_1 , R_2 , R_3 и ЭДС элементов \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_3 в схеме, представленной на рис. 8.24. Сопротивления резисторов подобраны так, что ток через гальванометр G равен нулю. Определить ЭДС \mathcal{E}_2 и ток I , текущий через резистор R_3 .

8.27. Генератор с ЭДС \mathcal{E}_1 и внутренним сопротивлением r_1 подключен к аккумулятору с ЭДС $\mathcal{E}_2 < \mathcal{E}_1$ и внутренним сопротивлением r_2 с помощью внешнего сопротивления R , как показано на рис. 8.25. При каком значении R аккумулятор будет находиться в режиме зарядки?

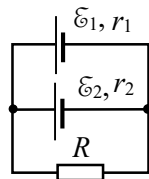


Рис. 8.25. Схема зарядки аккумулятора.

8.28. Из n одинаковых элементов с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r каждый составлено m одинаковых групп, которые соединены последовательно. Элементы каждой группы соединены между собой параллельно одноименными полюсами. Батарея подключена к резистору с сопротивлением R . При каком числе групп m ток I через резистор будет максимальным? Определить максимальную силу тока I_{\max} .

8.29. Батарея из n одинаковых элементов с ЭДС $\mathcal{E} = 1,5$ В и

внутренним сопротивлением $r = 0,5$ Ом каждый состоит из групп, соединенных последовательно. Каждая группа содержит $k = 4$ элемента, соединенных параллельно. Батарея замкнута на внешнее сопротивление $R = 2$ Ом. Какую максимальную силу тока I_{\max} через резистор R можно получить в такой цепи, меняя число n элементов в батарее?

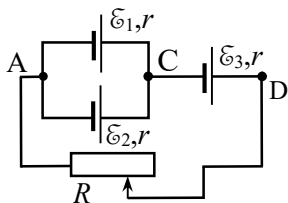


Рис. 8.26. Цепь с переменным сопротивлением.

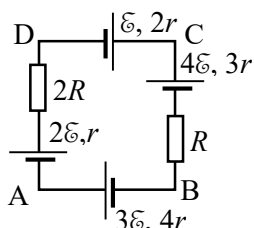


Рис. 8.27. Схема цепи.

из тех же элементов, соединенных параллельно. Чему должно быть равно сопротивление R резистора, чтобы сила тока в нем была бы одинаковой в обоих случаях?

8.33. Аккумулятор с ЭДС $\mathcal{E} = 5$ В, замкнутый на внешнюю цепь, дает ток $I = 1$ А при напряжении на его клеммах $U = 2$ В. Найти тепловую мощность N , выделяемую в аккумуляторе.

8.34. Нагреватель, имеющий сопротивление $R = 25$ Ом, питается от двух одинаковых аккумуляторов с внутренним сопротивлением $r = 10$ Ом каждый. Как нужно соединить аккумуляторы (параллельно или последовательно), чтобы получить большую мощность нагревателя?

8.35. ЭДС источника равна $\mathcal{E} = 12$ В, его внутреннее сопротивление $r = 2$ Ом. Найти мощность N , выделяющуюся во внешней цепи, состоящей из двух резисторов сопротивлением R каждый, если на резисторах выделяется одна и та же мощность как при последовательном, так и при параллельном их соединении.

8.30. Три источника с ЭДС \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 и \mathcal{E}_3 и внутренними сопротивлениями r каждый соединены так, как показано на рис. 8.26, и подсоединены к резистору с переменным сопротивлением. Определить зависимости разностей потенциалов $\Delta\varphi_{CA} = \varphi_C - \varphi_A$ и $\Delta\varphi_{DC} = \varphi_D - \varphi_C$ от сопротивления резистора R . Построить графики этих зависимостей при $\mathcal{E}_1 = 6$ В, $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3 = 4$ В, $r = 0,5$ Ом.

8.31. Найти разности потенциалов между точками А и С, В и D в схеме, представленной на рис. 8.27.

8.32. Резистор подсоединяется сначала к батарее из n последовательно соединенных одинаковых источников ЭДС с внутренним сопротивлением r каждый, а затем к батарее

8.36. При одном и том же напряжении одна лампа потребляет мощность в два раза большую, чем другая. Найти мощности N_1 и N_2 , потребляемые каждой лампой при их последовательном включении в цепь, если вместе они при этом потребляют мощность N .

8.37. Источник ЭДС с внутренним сопротивлением r замыкают поочередно двумя резисторами с различными сопротивлениями R_1 и R_2 . Как должны соотноситься R_1 , R_2 и r , чтобы за одно и то же время в меньшем сопротивлении выделялось больше теплоты, чем в большем?

8.38. Батарея состоит из $n = 5$ последовательно соединенных элементов с ЭДС $\mathcal{E} = 1,4$ В и внутренним сопротивлением $r = 0,3$ Ом каждый. При каком токе I полезная мощность батареи равна $N_1 = 8$ Вт? Какова наибольшая полезная мощность батареи?

8.39. Аккумулятор с ЭДС $\mathcal{E} = 10$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом замкнут на внешнее сопротивление R , на котором выделяется тепловая мощность $N = 9$ Вт. Определить разность потенциалов U на клеммах аккумулятора и его коэффициент полезного действия η .

8.40. При каком сопротивлении R_3 в схеме на рис. 8.28 выделяемая на этом резисторе тепловая мощность максимальна? Внутренние сопротивления источников ЭДС пренебрежимо малы.

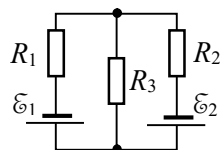


Рис. 8.28. Схема цепи.

8.41. Цепь, изображенная на рис. 8.29, состоит из двух батарей с ЭДС \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 и четырех одинаковых резисторов R_{1-4} , сопротивление каждого из которых равно R . Какая тепловая мощность N выделяется на каждом из этих резисторов?

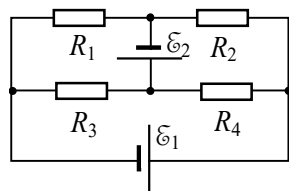


Рис. 8.29. Схема цепи.

8.42. При подключении первого аккумулятора к нагрузке его КПД оказался равным $\eta_1 = 0,5$, а при подключении второго аккумулятора к той же нагрузке его КПД равен $\eta_2 = 0,5$. Каким будет КПД батареи из этих аккумуляторов, если при работе на ту же нагрузку их включить последовательно?

8.43. Определить ток короткого замыкания I_0 батареи аккумуляторов, если при токе в нагрузке $I_1 = 5$ А полезная мощность батареи равна $N_1 = 9,5$ Вт, а при токе $I_2 = 8$ А $N_2 = 14,4$ Вт.

8.44. К источнику ЭДС \mathcal{E} с внутренним сопротивлением r подключены два параллельно соединенных резистора. Сопротив-

ление первого из них равно R_1 , а сопротивление второго таково, что на нем выделяется наибольшая полезная мощность. Найти полную мощность N источника ЭДС.

8.45. Ток через резистор сопротивлением R за время τ равномерно увеличивается от значения I_1 до значения I_2 . Определить количество теплоты, выделившееся на резисторе.

8.46. По проводу с сопротивлением $R = 6$ Ом заряд $q = 30$ Кл, причем ток равномерно уменьшился до нуля за время $\tau = 40$ с. Определить количество теплоты, выделившейся в проводе.

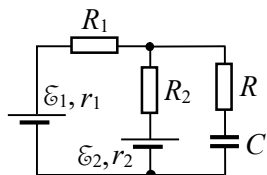


Рис. 8.30. Схема цепи.

8.47. Два элемента с ЭДС \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 и внутренними сопротивлениями r_1 и r_2 включены в схему, изображенную на рис. 8.30. Сопротивления резисторов R_1 , R_2 и емкость конденсатора C известны. Определить заряд q конденсатора.

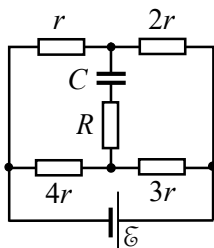


Рис. 8.31. Схема цепи.

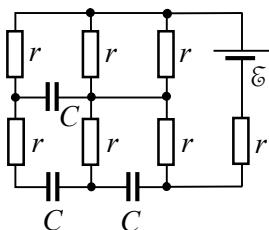


Рис. 8.32. Схема цепи.

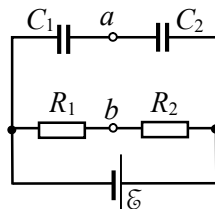


Рис. 8.33. Схема соединения элементов цепи.

8.48. Определить заряд конденсатора в схеме, изображенной на рис. 8.31.

8.49. Определить заряды всех конденсаторов в цепи, представленную на рис. 8.32. Сопротивления всех резисторов одинаковы, емкость каждого конденсатора равна C .

8.50. В схеме на рис. 8.33 сопротивление источника ЭДС пренебрежимо мало. Найти разность потенциалов между точками a и b .

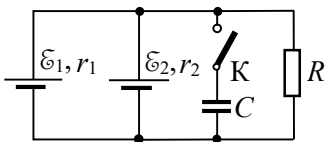


Рис. 8.34. Схема цепи.

8.51. Два источника ЭДС, резистор сопротивлением R и конденсатор емкостью C соединены так, как показано на рис. 8.34. Определить заряд q конденсатора после замыкания ключа K .

8.52. В цепи, представленной на рис. 8.35, емкости конденса-

торов $C_1 = 1 \text{ мкФ}$, $C_2 = 2 \text{ мкФ}$, сопротивление резистора $R = 6 \text{ Ом}$, ЭДС источника $\mathcal{E} = 10 \text{ В}$, его внутреннее сопротивление $r = 1 \text{ Ом}$. Ключ K сначала замкнут, а в некоторый момент его разомкнули. Какое количество теплоты Q выделится в цепи после этого?

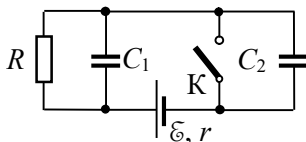


Рис. 8.35. Схема цепи.

8.53. В схеме, изображенной на рис. 8.36, сначала ключ K_1 замкнут, а ключ K_2 разомкнут, конденсатор C_1 до замыкания K_1 не заряжен. Затем размыкают ключ K_1 , после чего замыкают ключ K_2 . Какое количество теплоты Q_R выделится на резисторе R к моменту установления равновесного состояния?

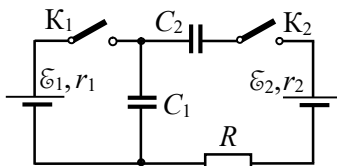


Рис. 8.36. Схема цепи.

8.54. В схеме, представленной на рис. 8.37, конденсаторы C_1 и C_2 первоначально разряжены, ключи K_1 и K_2 разомкнуты. Сначала замыкают ключ K_1 , через некоторое время замыкают ключ K_2 . Определить разность потенциалов $\Delta\phi$ между обкладками конденсатора C_3 после установления равновесного состояния.

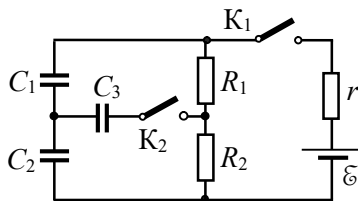


Рис. 8.37. Схема цепи.

§9. Магнитные поля проводников с током

- Закон Био–Савара–Лапласа:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I[d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3},$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор относительно линейного элемента тока $I d\mathbf{l}$ точки наблюдения, в которой вычисляется магнитная индукция поля $d\mathbf{B}$.

- Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции.

В интегральной форме: циркуляция вектора индукции постоянного магнитного поля по любому замкнутому контуру L пропорциональна силе тока I внутри этого контура:

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I.$$

В дифференциальной форме:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}).$$

- Поток $d\Phi$ вектора магнитной индукции через малый элемент поверхности $d\mathbf{S}$:

$$d\Phi \equiv \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}.$$

- Поток вектора магнитной индукции через поверхность S :

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}.$$

- Теорема Гаусса для магнитного поля в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0.$$

- Связь векторного потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ с магнитной индукцией \mathbf{B} :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}).$$

- Калибровка Кулона для векторного потенциала:

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0.$$

- Магнитный момент плоского витка с током:

$$\mathbf{p}_m = I S \mathbf{n},$$

где I – сила тока в витке, S – площадь витка, \mathbf{n} – нормаль к плоскости витка, направление которой согласовано с направлением тока по правилу буравчика.

- Индукция $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ магнитного поля, создаваемого элементарным током (плоским физически бесконечно малым по сравнению

нию с расстоянием до точки наблюдения витком с постоянным током) с магнитным моментом \mathbf{p}_m :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3(\mathbf{p}_m \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2 \mathbf{p}_m}{r^5},$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор точки наблюдения относительно места расположения элементарного тока.

• Векторный потенциал поля $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, создаваемого элементарным током (магнитным диполем) с магнитным моментом \mathbf{p}_m :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[\mathbf{p}_m \mathbf{r}]}{r^3}.$$

9.1. Два параллельных бесконечно длинных провода, по которым текут в одном и том же направлении токи $I = 60$ А, расположены на расстоянии $l = 10$ см друг от друга. Определить модуль индукции B магнитного поля в точке А, находящейся на расстоянии $r_1 = 5$ см от одного провода и $r_2 = 12$ см от другого.

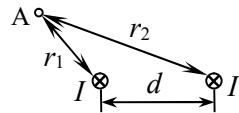


Рис. 9.1. Расположение проводов с токами и точки А.

9.2. По двум бесконечно длинным прямым проводам, находящимся на расстоянии $d = 5$ см друг от друга, текут токи силой $I = 10$ А каждый (рис. 9.2). Определить модуль индукции магнитного поля, созданного этими токами в точке, лежащей посередине между проводами, в следующих случаях: а) провода параллельны, токи текут в одном направлении; б) провода параллельны, токи текут в противоположных направлениях; в) провода скрещены и перпендикулярны друг другу.

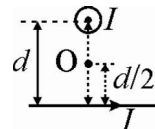


Рис. 9.2. Расположение проводов с током в случае в).

9.3. Бесконечно длинный провод, по которому течет ток I , согнут под прямым углом (рис. 9.3). Найти модуль индукцию магнитного поля на расстоянии a от вершины угла в точке, находящейся: а) на биссектрисе прямого угла (т. А); б) на продолжении одной из сторон (т. С).

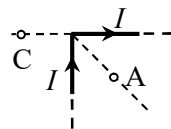


Рис. 9.3. Провод с током и точки А и С.

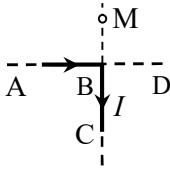


Рис. 9.4. Провод с током, изогнутый под прямым углом.

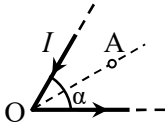


Рис. 9.5. Провод с током, изогнутый под углом α .

9.6. По замкнутому проводнику в виде правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса R , течет ток I . Найти модуль магнитной индукции B в центре многоугольника. Рассмотреть случай $n \rightarrow \infty$.

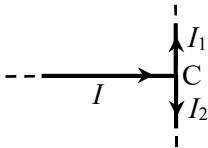


Рис. 9.6. Расположение проводов с токами.

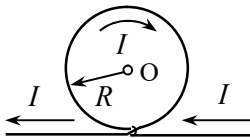


Рис. 9.7. Контур с током.

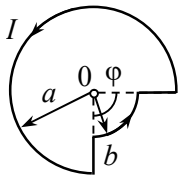


Рис. 9.8. Контур с током.

9.4. По бесконечно длинному проводу ABC, изогнутому под прямым углом, течет ток I . Во сколько раз изменится напряженность магнитного поля в точке M (см. рис. 9.4), если к точке B присоединить бесконечно длинный прямой провод BD так, что ток I будет разветвляться в точке B на две равные части, а ток в проводе AB останется прежним?

9.5. Ток I течет по бесконечно длинному проводу, изогнутому под углом α (рис. 9.5). Определить модуль индукции B магнитного поля в точке A , находящейся на биссектрисе угла на расстоянии a от его вершины.

9.7. Три прямых провода с токами I , $I_1 = I/3$ и $I_2 = 2I/3$ расположены в одной плоскости и соединены в точке C (рис. 9.6). Найти индукцию магнитного поля в точке A на прямой, проходящей через точку соединения проводов перпендикулярно их плоскости. Расстояние AC равно d .

9.8. Тонкий бесконечный провод образует плоскую петлю в форме кольца радиусом R (рис. 9.7). По проводу течет ток I . Определить модуль индукции магнитного поля B в центре O кольца.

9.9. Решить предыдущую задачу для случая, когда плоскость кольца перпендикулярна прямолинейным участкам провода.

9.10. Ток I течет по тонкому замкнутому проводнику, форма которого показана на рис. 9.8. Радиусы a и b известны, угол $\varphi = \pi/4$. Определить модуль магнитной индукции B в точке O .

9.11. Источник ЭДС подсоединен к двум противоположным вершинам А и С проволочного плоского контура, имеющего форму правильного шестиугольника. Найти индукцию магнитного поля в произвольной точке прямой линии, соединяющей вершины А и С.

9.12. Плоский замкнутый контур состоит из двух дуг радиусами R и двух прямых отрезков, находящихся на расстоянии $2a$ друг от друга (рис. 9.9). По контуру течёт ток I . Определить модуль индукции B магнитного поля в центре O контура.

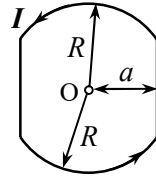


Рис. 9.9. Контур с током.

9.13. Определить модуль индукции магнитного поля в центре равностороннего треугольника со стороной a , если: а) его обтекает ток I ; б) источник ЭДС подключен к двум вершинам треугольника. Поле подводящих проводов не учитывать, сопротивление всех сторон треугольника одинаково.

9.14. Плоский контур с током I состоит из полуокружности радиуса R и двух одинаковых по длине прямых участков, расположенных под углом $\varphi = \pi/2$ друг к другу (рис. 9.10). Найти модуль индукции магнитного поля B в центре полуокружности (точка O).

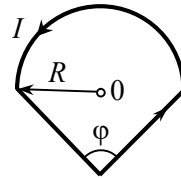


Рис. 9.10. Контур с током.

9.15. По проводнику в виде квадратной рамки со стороной $2a$ течет ток I . Найти модуль магнитной индукции B на перпендикуляре к плоскости рамки, проведенном через её центр, на расстоянии x от центра рамки.

9.16. Найти индукцию B магнитного поля в точке O , если проводник с током I имеет вид, представленный на рис. 9.11. Горизонтальные части провода считать бесконечно длинными, радиус полукольца равен R .

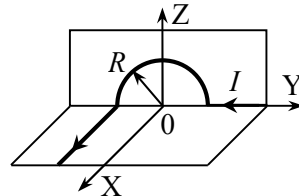


Рис. 9.11. Конфигурация контура с током.

9.17. По тонкому изолированному проводу, который скручен в плоскую спираль из N плотно уложенных витков (рис. 9.12), протекает ток I . Радиусы внешнего и внутреннего витков равны R_1 и R_2 соответственно. Найти магнитный момент p_m спирали.

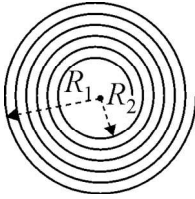


Рис. 9.12. Плоская спираль с током.

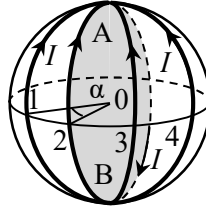


Рис. 9.13. Шар с витками проволоки с током.

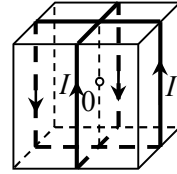


Рис. 9.14. Куб, обмотанный проволокой.

9.18. На непроводящий шар радиуса R намотано четыре витка тонкой изолированной проволоки так, что витки пересекаются в концах одного и того же диаметра AB шара (рис. 9.13, для наглядности плоскость витка 2 закрашена серым). Плоскости двух соседних витков образуют между собой угол $\alpha = \pi/4$. По каждому витку течет круговой ток I так, как показано на рис. 9.13. Определить индукцию \mathbf{B} магнитного поля в центре O шара.

9.19. На непроводящий куб со стороной a намотано два витка тонкой изолированной проволоки так, что витки пересекаются в центрах нижней и верхней грани куба (рис. 9.14). По каждому витку течет ток I . Определить индукцию \mathbf{B} магнитного поля в центре куба.

9.20. Два одинаковых проводящих кольца радиусом R каждый расположены на расстоянии $l = 4R$ друг от друга. Центры колец находятся на одной прямой, а их плоскости параллельны друг другу. По кольцам текут токи одинаковой силы I , направления которых совпадают. Определить модуль индукции B магнитного поля на оси колец на расстоянии R от центра системы.

9.21. По длинной тонкой проводящей ленте шириной b течёт ток силы I . Определить индукцию магнитного поля \mathbf{B} в плоскости ленты на расстоянии l от её края.

9.22. В условиях предыдущей задачи определить индукцию магнитного поля \mathbf{B} в точке C , находящейся на расстоянии h от середины ленты на перпендикуляре к её плоскости, проведенном от середины ленты.

9.23. Ток силой I течёт по длинному прямому проводнику, сечение которого имеет форму тонкого полукольца радиуса R (рис. 9.15). Найти индукцию магнитного поля на оси проводника в точке O .

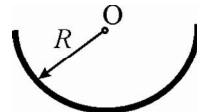


Рис. 9.15. Конфигурация проводника с током.

9.24. По прямому длинному проводнику, сечение которого имеет форму правильного треугольника со стороной a (рис. 9.16), течет ток I , равномерно распределенный по сечению проводника. Определить индукцию \mathbf{B} магнитного поля в точках, находящихся в непосредственной близости от ребер проводника.

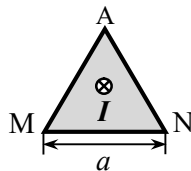


Рис. 9.16. Сечение провода с током.

9.25. По соленоиду с плотностью намотки витков $n = 50 \text{ см}^{-1}$ течет ток $I = 1 \text{ А}$. Диаметр соленоида равен его длине. Найти модуль индукции магнитного поля на оси соленоида: а) в его центре; б) в центре одного из его оснований.

9.26. На соленоид длины l и диаметром d намотано N витков провода, по которым течет ток силой I . Витки расположены вплотную друг к другу. При каком соотношении между длиной и диаметром соленоида индукция магнитного поля в его центре может быть рассчитана по приближенной формуле очень длинного соленоида с относительной погрешностью, не превышающей $\alpha = 2\%$?

9.27. Непроводящий тонкий диск радиусом R , равномерно заряженный зарядом Q , вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω . Найти: а) индукцию \mathbf{B} магнитного поля в центре диска; б) магнитный момент \mathbf{p}_m диска.

9.28. Боковая поверхность длинного непроводящего цилиндра заряжена с постоянной поверхностной плотностью так, что заряд единицы длины цилиндра равен Q . Цилиндр вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω . Найти индукцию магнитного поля \mathbf{B} на оси цилиндра вдали от его торцов.

9.29. Непроводящая сфера радиуса R , равномерно заряженная по поверхности, вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через её центр. Определить полный заряд сферы Q , если модуль магнитной индукции в центре сферы равен B .

9.30. Цилиндр из непроводящего материала высотой h с радиусом основания R вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω . Цилиндр заряжен зарядом Q . Найти магнитный момент \mathbf{p}_m цилиндра, если заряд равномерно распределен: а) по боковой поверхности; б) по боковой поверхности и торцам; в) по объёму цилиндра.

9.31. Заряд Q равномерно распределен по объёму однородного шара радиуса R , который вращается вокруг оси, проходящей через его центр, с угловой скоростью ω . Найти магнитный момент p_m шара.

9.32. По объёму шарового слоя с внутренним и внешним радиусами R_1 и R_2 соответственно равномерно распределен заряд Q . Шаровой слой вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через его центр. Найти магнитный момент p_m системы и индукцию магнитного поля B на расстояниях r от центра слоя, много больших радиуса R_2 .

9.33. Шар радиуса R заряжен по объёму с объемной плотностью $\rho(r)$, которая пропорциональна квадрату расстояния r от центра шара. Полный заряд шара Q . Шар вращается вокруг оси, проходящей через его центр, с угловой скоростью ω . Найти магнитный момент p_m шара.

9.34. Половина шара радиуса R из непроводящего материала заряжена зарядом Q , который равномерно распределен по сферической поверхности и основанию. Система вращается вокруг своей оси симметрии с угловой скоростью ω . Определить индукцию магнитного поля B на расстояниях r от центра полушара, много больших радиуса R .

9.35. Определить индукцию магнитного поля между двумя параллельными бесконечными плоскостями, по которым текут в одном направлении токи с поверхностными плотностями: а) i и $2i$; б) i и i ; в) $3i$ и $4i$. Чему равна индукция магнитного поля над и под плоскостями?

9.36. Решить задачу 9.35 для случая, когда токи по плоскостям текут в противоположных направлениях.

9.37. Однородный ток с плотностью j течет внутри неограниченной плоской пластины толщиной $2d$ параллельно ее поверхностям. Пренебрегая влиянием вещества пластины, найти зависимость величины индукции магнитного поля этого тока от расстояния x , отсчитываемого от средней плоскости пластины.

9.38. По участку плоской поверхности течет ток с поверхностной плотностью i . Показать, что в точке над поверхностью составляющая вектора индукции магнитного поля, параллельная поверхности и перпендикулярная i , может быть рассчитана по формуле: $B_{\parallel} = \mu_0 i \Omega / (4\pi)$, где Ω – телесный угол, под которым виден участок поверхности из рассматриваемой точки.

9.39. По однородному сплошному бесконечному цилиндрическому проводнику радиуса $R = 2$ см из немагнитного материала течет ток $I = 500$ А, равномерно распределенный по сечению проводника. Найти модуль индукции магнитного поля B в точках, находящихся от оси проводника на расстоянии: а) $r_1 = 1$ см; б) $r_2 = 5$ см.

9.40. Какой силы ток I_1 должен течь по бесконечному однородному цилиндрическому проводнику радиуса R , чтобы индукция магнитного поля на расстоянии $r_1 < R$ от его оси была такой же, как индукция магнитного поля тонкого бесконечного провода с током I на расстоянии r_2 от него?

9.41. Бесконечно длинный цилиндрический провод состоит из двух коаксиальных цилиндров. Внутренний сплошной цилиндр, изготовленный из немагнитного материала, имеет радиус R_1 . Радиус внешнего пустотелого цилиндра равен R_2 . Вдоль цилиндров текут постоянные токи одинаковой величины I , направленные противоположно. Найти зависимость модуля индукции магнитного поля $B(r)$ от расстояния r до оси провода.

9.42. По бесконечной полой цилиндрической трубке из проводящего материала течет ток постоянной плотности j . Внутренний и внешний радиусы трубки равны R_1 и R_2 соответственно. Определить индукцию магнитного поля $B(r)$ на расстоянии r от оси трубки.

9.43. Коаксиальный кабель большой длины состоит из проводника радиусом a и тонкостенной полой трубки радиусом b , по которым протекает ток I в противоположных направлениях (рис. 9.17). Рассчитать поток магнитной индукции, пронизывающий сечение площади S , ограниченное осью системы и одной из образующих цилиндра длиной l . Магнитным полем внутри центральной жилы пренебречь.

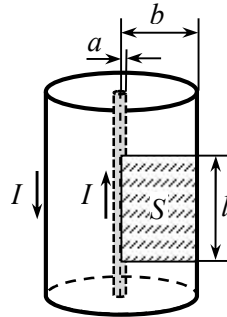


Рис. 9.17. Коаксиальный кабель.

9.44. По длинному сплошному цилиндрическому проводнику радиуса R течёт ток, объёмная плотность j которого зависит от расстояния r до оси проводника по закону: $j = \alpha r^2$, где α – известная постоянная. Определить модуль магнитной индукции на расстоянии r от оси проводника вдали от его торцов.

9.45. По бесконечной полой цилиндрической трубке с радиусами внутренней и внешней поверхностей a и b соответственно протекает ток, объемная плотность которого зависит от расстояния r до оси трубки по закону: $j = \alpha / r$, где α – известная постоянная. Определить модуль магнитной индукции на расстоянии r от оси трубки.

9.46. Вдоль длинной тонкостенной цилиндрической трубки радиусом R течет постоянный ток I . В стенке трубки имеется тонкая щель шириной d , параллельная оси трубки. Определить величину индукции магнитного поля B внутри и вне трубки на линии, перпендикулярной оси трубки и проходящей через середину щели, если расстояние от середины щели до рассматриваемой точки равно r ($r, R \gg d$).

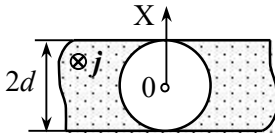


Рис. 9.18. Пластина с цилиндрической полостью.

магнитного поля системы на прямой OX , проходящей через ось полости перпендикулярно поверхностям пластины (рис. 9.18).

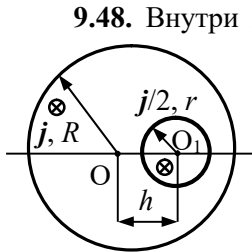


Рис. 9.19. Система цилиндрических проводов с токами

9.48. Внутри прямого длинного однородного цилиндрического проводника радиусом R из немагнитного материала находится аналогичный цилиндрический проводник с меньшим радиусом r . Оси цилиндров параллельны, расстояние между ними равно h (рис. 9.19). Вдоль оси проводника радиуса R течет ток с плотностью j , а вдоль оси проводника радиуса r – ток с плотностью $j/2$. Определить модуль индукции магнитного поля B в точках, находящихся на перпендикуляре к OO_1 , восстановленном из т. O_1 (см. рис. 9.19), на расстоянии $x < r$ от оси O_1 .

9.49. Постоянный ток I течёт по длинному прямому проводу и растекается радиально симметрично по проводящей плоскости, перпендикулярной проводу. Найти модуль индукции магнитного поля во всех точках пространства.

9.47. В бесконечной пластине толщиной $2d$ вырезали цилиндрическую полость радиусом d , ось которой параллельна поверхностям пластины. Во всем объеме пластины кроме полости течет ток с объемной плотностью j , направленный вдоль оси полости. Найти индукцию магнитного поля системы на прямой OX , проходящей через ось полости перпендикулярно поверхностям пластины (рис. 9.18).

9.50. На тор, сделанный из немагнитного материала, намотаны две обмотки, по которым текут токи в противоположных направлениях. Первая обмотка имеет $N_1 = 2000$ витков, вторая $N_2 = 1000$ витков. Средний радиус тора $R = 10$ см. Сила тока в каждой обмотке $I = 10$ А. Определить индукцию магнитного поля на средней линии тора.

9.51. Вдоль оси длинного цилиндра радиуса R течет ток с постоянной плотностью \mathbf{j} . Найти векторный магнитный потенциал A магнитного поля в зависимости от расстояния r до оси цилиндра. Считать, что в центре цилиндра $A(0) = 0$.

9.52. По бесконечному полому тонкостенному цилиндрическому проводнику радиуса R течет ток с постоянной поверхностной плотностью \mathbf{i} , параллельной оси цилиндра. Найти векторный потенциал $A(r)$ на расстоянии r от оси цилиндра. Считать, что в центре цилиндра $A(0) = 0$.

9.53. По бесконечному цилиндрическому проводнику в форме полого цилиндра с внутренним и внешним радиусами R_1 и R_2 соответственно течет ток с постоянной объемной плотностью \mathbf{j} . Вычислить векторный потенциал $A(r)$ на расстоянии r от оси цилиндра, считая, что $A(0) = 0$.

9.54. По плоскости $Z = 0$ в направлении оси X течет ток с постоянной поверхностной плотностью \mathbf{i} . Определить векторный потенциал A на расстоянии z от плоскости. Считать, что на плоскости $A = 0$.

9.55. Найти векторный магнитный потенциал A внутри и вне бесконечно длинного соленоида радиуса a , внутри которого протекающим током создается однородное магнитное поле с индукцией B . Положить $A = 0$ на оси соленоида.

§10. Сила Ампера. Момент сил, действующих на контур с током в магнитном поле

• Сила взаимодействия элементов тока $I_1 d\mathbf{l}_1$ и $I_2 d\mathbf{l}_2$ (закон Ампера):

$$dF_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[I_2 d\mathbf{l}_2 [I_1 d\mathbf{l}_1, \mathbf{r}_{12}]]}{r_{12}^3},$$

где \mathbf{r}_{12} – радиус-вектор от элемента тока 1 к элементу тока 2.

• Вектор индукции магнитного поля, создаваемого линейным током $I d\mathbf{l}$ в точке с радиус-вектором \mathbf{r} :

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I [d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3}.$$

• Сила Ампера, действующая на линейный элемент тока $I d\mathbf{l}$:

$$d\mathbf{F} = I [d\mathbf{l}, \mathbf{B}].$$

объемный элемент тока $j dV$:

$$d\mathbf{F} = [j\mathbf{B}] dV.$$

• Момент сил, действующих на элементарный ток в магнитном поле:

$$\mathbf{M} = [p_m \mathbf{B}],$$

где p_m – магнитный момент точечного диполя.

10.1. Прямой проводник длиной $l = 20$ см и массой $m = 10$ г подвешен горизонтально на двух вертикальных невесомых нерастяжимых нитях в однородном магнитном поле с индукцией $B = 50$ мТл, причем вектор индукции \mathbf{B} перпендикулярен проводнику. Какой ток I надо пропустить через проводник, чтобы одна из нитей разорвалась, если она разрывается при нагрузке $F = 40$ мН?

10.2. Определить магнитную компоненту силы, действующую на единицу длины провода двухпроводной воздушной линии электропередачи, если ток в проводах $I = 500$ А, а расстояние между проводами $d = 50$ см.

10.3. Три длинных параллельных прямых провода находятся на одинаковом расстоянии $d = 10$ см друг от друга. По двум проводам, положение которых фиксировано, в одном направлении текут

одинаковые токи $I_1 = I_2 = 10$ А. По третьему проводу течет ток $I_3 = 20$ А в противоположном направлении. Какую силу F_{ex} (в расчете на единицу длины) нужно приложить к третьему проводу, чтобы он находился в равновесии?

10.4. Прямой тонкий провод, по которому течет ток I , изогнут под углом α так, что части провода имеют длину l и L (рис. 10.1). Провод находится в поперечном магнитном поле с индукцией B . Определить модуль силы F , действующей на провод.

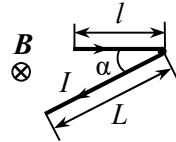


Рис. 10.1. Изогнутый провод с током в магнитном поле.

10.5. Два длинных прямых взаимно перпендикулярных провода отстоят друг от друга на расстояние a . В каждом проводе течет ток I . Найти максимальное значение силы Ампера в расчете на единицу длины провода.

10.6. По проволочному кольцу радиуса R , подвешенному на двух гибких проводниках, закрепленных на противоположных концах диаметра кольца, течет ток силой I . Кольцо помещают в однородное магнитное поле, вектор индукции B которого направлен горизонтально. С какой силой T будет растянуто кольцо?

10.7. Проволочное кольцо радиусом R находится в неоднородном магнитном поле, линии индукции которого в точках пересечения с кольцом направлены под углом α к нормали n (рис. 10.2). Модуль индукции магнитного поля, действующего на кольцо, равен B . По кольцу течет ток I . Определить силу, действующую на кольцо со стороны магнитного поля.

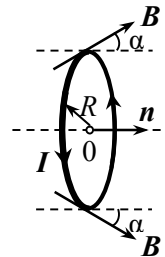


Рис. 10.2. Кольцо с током в неоднородном магнитном поле.

10.8. Проволочный контур в виде квадрата с диагональю подключен к источнику постоянного напряжения U . Сопротивление единицы длины проволоки контура равно r . Контур находится во внешнем магнитном поле, вектор индукции B которого лежит в плоскости контура и параллелен двум из его сторон (рис. 10.3). Найти силу F , действующую на контур.

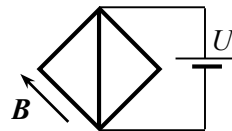


Рис. 10.3. Проволочный контур в магнитном поле.

10.9. Прямоугольная рамка с током I , длины сторон которой a и b , лежит в одной плоскости с очень длинным проводом, по

которому течет ток I_0 (сторона рамки b параллельна проводу). Определить внешнюю механическую силу, которая будет удерживать рамку в равновесии. Расстояние между проводом и осью симметрии рамки равно r_0 .

10.10. Жесткая квадратная рамка со стороной a расположена около длинного провода, по которому течет ток силой I_0 . Две стороны рамки параллельны проводу и находятся от него на одинаковом расстоянии b , а центры двух других сторон шарнирно закреплены так, что рамка может вращаться вокруг своей средней линии, параллельной длинному проводу. По рамке течет ток силой I . Какой момент внешних сил должен быть приложен к рамке, чтобы она находилась в равновесии?

10.11. Два прямых длинных параллельных провода находятся на расстоянии $d_1 = 10$ см друг от друга. По проводам в одном направлении текут токи $I_1 = 10$ А и $I_2 = 20$ А. Какую работу в расчете на единицу длины проводов нужно совершить, чтобы раздвинуть провода до расстояния $d_2 = 30$ см?

10.12. Два длинных параллельных провода, по которым в противоположных направлениях текут токи $I = 10$ А, находятся на расстоянии d друг от друга. Какую работу на единицу длины проводов совершает магнитное поле при увеличении расстояния между проводами в 2 раза?

10.13. Длинный коаксиальный кабель состоит из тонкой внутренней жилы и внешней цилиндрической оболочки радиусом R . По ним в противоположных направлениях текут одинаковые токи I . Во внешней оболочке по всей её длине имеется узкая щель, параллельная внутренней жиле. Ширина щели d значительно меньше радиуса R . Определить силу, действующую на единицу длины внутренней жилы.

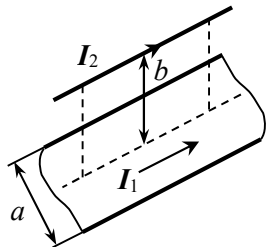


Рис. 10.4. Тонкая лента и провод с токами I_1 и I_2 .

Считая проводники бесконечно длинными, найти силу, действующую на единицу длины ленты.

10.14. По тонкой ленте шириной a и тонкому проводу, параллельному плоскости ленты и находящемуся над её серединой на расстоянии b от плоскости ленты, текут в одном направлении токи I_1 и I_2 соответственно (рис. 10.4). Считая проводники бесконечно длинными, найти силу, действующую на единицу длины ленты.

10.15. Внутри длинного цилиндрического сосуда радиусом R параллельно его оси расположен проводящий стержень радиусом r

с тонкой изоляцией. По стержню течет ток I . Расстояние между осями стержня и сосуда равно h . Сосуд заполнен электролитом, по которому пропускается ток I_1 в том же направлении, что и по стержню. Определить силу, действующую на единицу длины стержня.

10.16. В вакууме расположены две параллельные проводящие пластины, по которым перпендикулярно друг другу текут одинаковые по величине токи с линейной плотностью i . Определить поверхностную плотность силы Ампера F , действующей на каждую пластину. Линейные размеры пластин l_1, l_2 много больше расстояния между ними.

10.17. По двум параллельным проводящим пластинам, находящимся в вакууме, текут одинаковые токи с поверхностной плотностью i . Направления токов составляют друг с другом угол α . Линейные размеры сторон пластин l_1, l_2 много больше расстояния между ними. Определить силу, действующую на каждую из пластин. Краевые эффекты не учитывать.

10.18. По бесконечной плоскости течет ток с поверхностной плотностью i . Над плоскостью параллельно ей расположен бесконечный прямой провод, по которому течет ток I , сонаправленный с i . Расстояние от плоскости до провода равно d . Определить силу, действующую на участок провода длиной l со стороны магнитного поля плоскости.

10.19. По квадратной рамке массой m со стороной a течет ток силой I . Рамка находится в однородном магнитном поле, индукция B которого направлена вертикально вниз, и может свободно вращаться вокруг одной из горизонтальных сторон (рис. 10.5). Определить модуль индукции B магнитного поля, если угол отклонения плоскости рамки от вертикали равен α .

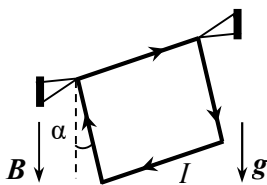


Рис. 10.5. Подвижная рамка в магнитном поле.

10.20. Проволочная рамка в виде равностороннего треугольника, по которой протекает ток I , может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через одну из вершин треугольника. Линейная плотность проволоки равна ρ . Рамка находится в поле силы тяжести и в магнитном поле, индукция которого B направлена вертикально вниз. Определить угол α отклонения плоскости треугольника от вертикали.

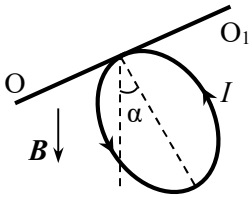


Рис. 10.6. Кольцо с током в магнитном поле.

10.22. Квадратная рамка со стороной a имеет N витков и подвешена на тонкой проволоке, коэффициент кручения которой равен D , в однородном магнитном поле, индукция которого \mathbf{B} горизонтальна и перпендикулярна плоскости рамки. После того, как по рамке пустили ток I , она повернулась на угол α относительно вектора \mathbf{B} . Определить модуль индукции магнитного поля.

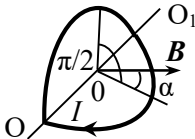


Рис. 10.7. Согнутое кольцо с током в магнитном поле.

по линии сгиба.

10.24. Катушка гальванометра, состоящая из $N = 400$ витков тонкой проволоки, намотанной на прямоугольный каркас высотой $a = 3$ см и шириной $b = 2$ см, подвешена на нити в магнитном поле, модуль индукции которого $B = 0,1$ Тл. По проволоке протекает ток $I = 10^{-5}$ А. Найти действующий на катушку гальванометра вращающий момент, если плоскость катушки: а) параллельна вектору индукции \mathbf{B} ; б) составляет с вектором \mathbf{B} угол $\alpha = 60^\circ$.

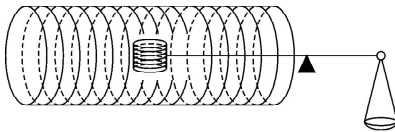


Рис. 19.16. Соленоид с катушкой.

10.21. Проволочное кольцо может вращаться вокруг горизонтальной оси, касающейся его (рис. 10.6). Линейная плотность проволоки равна ρ . Кольцо находится в магнитном поле, индукция которого \mathbf{B} направлена вертикально вниз. Какой ток I протекает по кольцу, если оно отклонено от вертикали на угол α ?

10.23. По кольцу радиусом R , согнутому под прямым углом, течет ток I . Согнутое кольцо поместили в однородное магнитное поле. Одна из плоскостей кольца оказалась под углом $\alpha = \pi/4$ к вектору индукции \mathbf{B} (рис. 10.7). Определить модуль момента сил M , действующих на кольцо относительно оси OO_1 , проходящей

10.25. В центре длинного соленоида с плотностью намотки n витков на единицу длины находится короткая катушка диаметром d , состоящая из N витков. Ось катушки перпендикулярна оси соленоида и направлена вертикально. Внутренняя катушка укреплена на коромысле весов, которое в отсутствие тока находится в равновесии (рис. 10.8). Короткое плечо коромысла имеет длину l .

При пропускании по соленоиду и катушке одинаковых токов I равновесие коромысла нарушается. Определить массу m груза, который нужно поместить на чашу весов для их уравнивания.

10.26. Укрепленную на конце коромысла весов небольшую катушку К с числом витков $N = 100$ поместили в зазор между полюсами магнита (рис. 10.9). Площадь сечения катушки $S = 1,0 \text{ см}^2$, длина плеча OA коромысла $l = 20 \text{ см}$. В отсутствие тока в катушке весы уравновешены. После того, как через катушку пустили ток $I = 50 \text{ мА}$, для восстановления равновесия пришлось изменить груз на чаше весов на $\Delta m = 100 \text{ мг}$. Найти индукцию магнитного поля B в месте нахождения катушки.

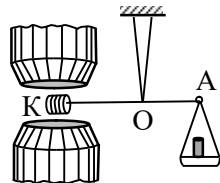


Рис. 10.9. Катушка в зазоре магнита.

§11. Сила Лоренца. Движение заряженных частиц в электромагнитных полях

• Сила Лоренца – сила, действующая на точечный заряд в электрическом и магнитном полях:

$$\mathbf{F}_L = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v}\mathbf{B}].$$

Первое слагаемое называется кулоновой, а второе – амперовой составляющей силы Лоренца.

11.1. Электрон, ускоренный разностью потенциалов $U = 400$ В, движется перпендикулярно силовым линиям магнитного поля Земли, модуль индукции которого равен $B = 0,7 \cdot 10^{-4}$ Тл. Определить радиус R окружности, по которой движется электрон.

11.2. Электрон влетает со скоростью $v = 10^7$ м/с в однородное магнитное поле с индукцией $B = 30$ мТл под углом $\alpha = 30^\circ$ к направлению вектора магнитной индукции.. Найти перемещение l электрона за время одного оборота.

11.3. Определить частоту ω вращения α -частицы в однородном магнитном поле с индукцией $B = 1$ Тл. Заряд α -частицы $q = 2e$, её масса $m = 6,65 \cdot 10^{-27}$ кг.

11.4. Винтовая линия, по которой движется электрон в однородном магнитном поле с индукцией $B = 5$ мТл, имеет радиус $R = 4$ см и шаг $h = 20$ см. Определить скорость v электрона.

11.5. Два удаленных друг от друга протона с кинетическими энергиями W_1 и W_2 движутся в магнитном поле, индукция которого перпендикулярна их скоростям. Определить отношение периодов их обращения T_1/T_2 и радиусов траекторий R_1/R_2 .

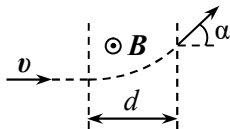


Рис. 11.1. Движение электрона в ограниченной области магнитного поля.

11.6. Электрон влетает со скоростью v в область однородного магнитного поля с индукцией B , ширина которой равна d . Скорость электрона перпендикулярна как индукции B , так и границам слоя (рис. 11.1). Найти угол α отклонения электрона от первоначального направления движения.

11.7. Пучок электронов, ускоренный разностью потенциалов $U = 500$ В, влетает в область поперечного однородного магнитного поля конечной ширины, создаваемого между полюсами электро-

магнита (рис. 11.3). Индукция магнитного поля $B = 1$ мТл. Ширина области с полем $l = 4$ см. В отсутствие магнитного поля пучок электронов формирует пятно в точке O флуоресцирующего экрана \mathcal{E} , расположенного на расстоянии $L = 10$ см от края полюсов магнита. На какое расстояние h сместится это пятно после включения магнитного поля?

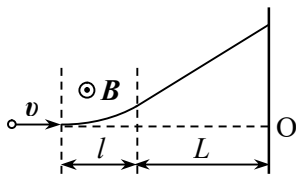


Рис. 11.3. Движение пучка электронов до экрана.

11.8. В вакууме создано однородное магнитное поле с индукцией B в области, имеющей форму цилиндра радиусом a , ось которого параллельна B . К этой области вдоль радиуса цилиндра со скоростью v подлетает электрон (рис. 11.3). Найти время τ движения электрона в магнитном поле.

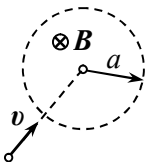


Рис. 11.3. Электрон, подлетающий к области магнитного поля.

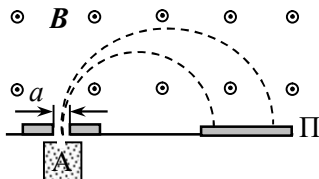


Рис. 11.4. Схема масс-спектрометра.

11.9. Схема простейшего масс-спектрометра изображена на рис. 11.4. В ионизаторе A образуются ионы, которые ускоряются разностью потенциалов $U = 10$ кВ. Индукция магнитного поля $B = 0,1$ Тл. После поворота в магнитном поле ионы попадают на фотопластинку Π и вызывают её почернение. На каком расстоянии x от щели будут находиться на фотопластинке полосы ионов водорода H_1^+ и гелия He_4^+ ? Какой должна быть ширина щели a , чтобы полосы ионов кислорода O_{16}^+ и азота N_{15}^+ были разделены?

11.10. В достаточно большой области вакуума, разделенной на две части плоскостью XOY , созданы однородные магнитные поля, векторы индукции B которых сонаправлены и параллельны оси Y , причем B_1 под границей раздела ($z < 0$) больше B_2 над ней ($z > 0$). Электрон, движущийся со скоростью v в положительном направлении оси Z , пересекает границу под прямым углом. Найти скорость дрейфа $v_{др}$ электрона вдоль границы раздела магнитных полей.

11.11. В достаточно большой области в вакууме, разделенной на две части плоскостью XOY , созданы однородные магнитные

поля. Индукция поля над плоскостью ($z > 0$) равна \mathbf{B}_1 и направлена параллельно оси X , а под ней ($z < 0$) равна \mathbf{B}_2 и направлена параллельно оси Y . Электрон, движущийся с небольшой скоростью v в положительном направлении оси Z , пересекает границу раздела в точке $x = y = 0$ (см. рис. 11.5). Определить направление и скорость дрейфа электрона

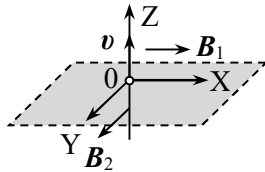


Рис. 11.5. Взаимная ориентация векторов индукции магнитных полей и скорости электрона.

одной точки вылетает слегка расходящийся пучок электронов, имеющих одинаковые скорости v . На каком наименьшем расстоянии l от места вылета происходит фокусировка пучка (т.е. пучок имеет минимальный поперечный размер)?

11.13. На концах жесткого невесомого горизонтального диэлектрического стержня закреплены два маленьких шарика, каждый массой m и с зарядом q . Стержень раскручивается вокруг вертикальной оси, проходящей через его середину, с возрастающей скоростью. Когда угловая скорость достигла величины ω , стержень разрывается. При какой угловой скорости вращения ω_1 он бы разорвался, если бы находился в магнитном поле, индукция которого \mathbf{B} направлена вертикально вверх?

11.14. Положительно заряженному маленькому шарик, подвешенному на тонкой нити к потолку, сообщили такую скорость, что он стал вращаться по окружности в горизонтальной плоскости. Если шарик сообщить такую же скорость, когда он находится в магнитном поле в индукцией \mathbf{B} , направленной вертикально вверх, и электрическом поле с напряженностью \mathbf{E} , направленной вертикально вниз, то период, направление его вращения и радиус орбиты не изменятся. Найти угловую скорость ω вращения шарика.

11.15. Электрон вращается с угловой скоростью ω_0 вокруг протона по орбите радиусом R . Какой будет угловая скорость вращения электрона по этой же орбите, если систему поместить в слабое магнитное поле, вектор индукции \mathbf{B} которого направлен вдоль оси вращения?

11.16. Узкий параллельный пучок положительных ионов проходит со скоростью $v_1 = 1 \cdot 10^6$ м/с через плоский конденсатор длиной $l = 5$ см, в котором созданы электрическое и магнитное поля ($E = 8 \cdot 10^3$ В/м, $B = 1 \cdot 10^{-2}$ Тл). Напряженность электрического поля \mathbf{E} и индукция магнитного поля \mathbf{B} сонаправлены и перпенди-

кулярны скорости ионов. За конденсатором на расстоянии $L = 20$ см от него находится фотопластинка, перпендикулярная начальной скорости ионов (рис. 11.6).

1). Определить координаты точек, в которые попадут ионы водорода H^+ и гелия He^{++} . 2). Какой след на фотопластинке оставят эти ионы, если их скорости лежат в диапазоне от v_1 до v_2 ?

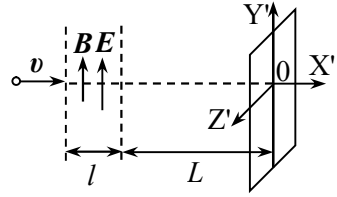


Рис. 11.6. Расположение области электрического и магнитного полей и фотопластинки.

11.17. Магнетрон представляет собой два соосных цилиндра (цилиндрический диод), помещенных в однородное магнитное поле, индукция которого направлена вдоль оси цилиндров. Между цилиндрами поддерживается напряжение U . Радиус r_0 внутреннего цилиндра (катода) значительно меньше радиуса R внешнего (анода). В отсутствие магнитного поля электроны, вылетающие с нагреваемого катода, ускоряются радиальным электрическим полем и летят к аноду по радиусам (рис. 11.7). При увеличении индукции магнитного поля анодный ток сначала не меняется. Найти критическое значение индукции $B_{кр}$, при котором анодный ток прекращается.

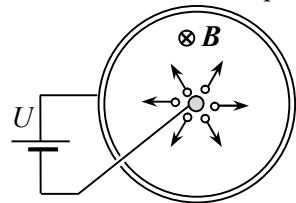


Рис. 11.7. Устройство магнетрона.

11.18. Плоский конденсатор, расстояние между пластинами которого d , помещен в однородное магнитное поле с индукцией B , параллельной пластинам конденсатора. Из точки А, находящейся на средней линии конденсатора, перпендикулярно вектору B вылетают электроны со скоростью v (рис. 11.8). Между пластинами поддерживается напряжение U , полярность которого указана на рис. 11.8. При какой индукции магнитного поля B : а) электроны пролетят конденсатор, не изменяя первоначального направления своего движения; б) электроны вылетят из конденсатора, если он будет отключен от источника напряжения и не заряжен?

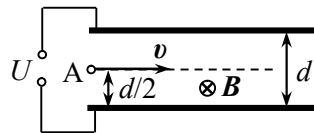


Рис. 11.8. Электрон в конденсаторе с магнитным полем.

11.19. В пространстве созданы однородные электрическое и магнитное поля, так что вектор напряжённости электрического поля E перпендикулярен вектору магнитной индукции B . Частицу массой m с положительным зарядом q помещают в эту область и

отпускают без начальной скорости. Определить траекторию частицы. Как со временем будет меняться модуль её скорости?

11.20. Какую скорость v должна иметь заряженная частица, влетев в область скрещенных электрического и магнитного полей (вектор напряжённости электрического поля E перпендикулярен вектору магнитной индукции B), чтобы её движение было равномерным и прямолинейным? Скорость частицы v перпендикулярна индукции магнитного поля B .

11.21. Положительный ион массой m с зарядом q вращается в постоянном магнитном поле с магнитной индукцией B . В этой области включается однородное электрическое поле, вектор напряжённости E которого перпендикулярен вектору B . Определить величину и направление скорости дрейфа иона в скрещенных полях.

11.22. Циклотрон состоит из двух дуантов (полых плоских металлических полуцилиндров), внутри которых постоянное маг-

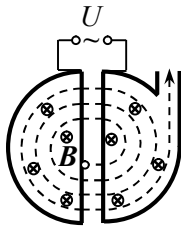


Рис. 11.9. Схема циклотрона.

нитное поле с модулем индукции $B = 0,7$ Тл направлено перпендикулярно их основаниям (рис. 11.9). В зазоре между дуантами создано электрическое поле (разность потенциалов между дуантами $U = 20$ кВ), направление которого изменяется с определенной частотой.

1). Какова должна быть частота, если циклотрон используется для ускорения: а) протонов; б) электронов? 2). Сколько полных оборотов должен совершить протон внутри циклотрона, чтобы приобрести энергию $W = 6$ МэВ? 3). Каким будет максимальный радиус траектории протона внутри дуанта при такой энергии? Начальной энергией частиц можно пренебречь.

11.23. Максимальный радиус кривизны траектории протонов в циклотроне $R = 35$ см. Частота изменения направления электрического поля $\nu = 13,8$ МГц. Найти магнитную индукцию B поля, которая обеспечивает синхронную работу циклотрона, и максимальную энергию W вылетающих протонов.

11.24. Вблизи длинного прямолинейного провода с током I поместили частицу с зарядом q и массой m на расстоянии r_0 и сообщили ей скорость v_0 в направлении, противоположном току. Найти минимальное r_{\min} и максимальное r_{\max} расстояния частицы от провода в процессе движения.

11.25. В условиях задачи 11.24 найти скорость и дрейф частицы в магнитном поле провода с током, то есть скорость смеще-

ния частицы вдоль провода, при условии: $\alpha = \frac{2\pi m v_0}{\mu_0 q I} \ll 1$.

11.26. Незаряженный металлический брусок в виде прямоугольного параллелепипеда со сторонами a , b и c движется в магнитном поле в направлении стороны a со скоростью v (рис. 11.10). Индукция магнитного поля \mathbf{B} перпендикулярна грани бруска со сторонами a и c . Определить разность потенциалов $\Delta\phi$ между гранями бруска со сторонами a и b и поверхностную плотность электрических зарядов на них.

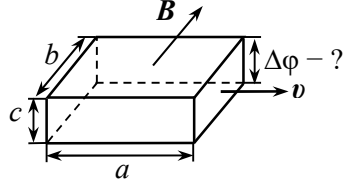


Рис. 11.10. Металлический брусок, движущийся в магнитном поле.

11.27. В однородное магнитное поле с индукцией \mathbf{B} помещена тонкая металлическая лента шириной h и толщиной d так, что плоскость ленты перпендикулярна вектору \mathbf{B} (рис. О.11.11). По ленте пропускают ток I . Концентрация свободных электронов в материале ленты равна n . Определить разность потенциалов $\Delta\phi$, возникающую между краями ленты, находящимися на расстоянии h друг от друга.

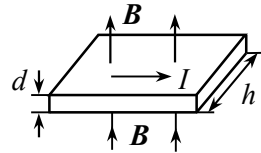


Рис. 11.11. Лента с током в магнитном поле.

11.28. Незаряженный металлический брусок в виде прямоугольного параллелепипеда со сторонами a , b и c ($a, b > c$) движется в магнитном поле в направлении стороны a со скоростью v . Индукция магнитного поля \mathbf{B} перпендикулярна основанию бруска со сторонами a и c . Определить разность потенциалов между боковыми поверхностями бруска со сторонами a и b и поверхностную плотность электрических зарядов на них.

11.29. Вдоль цилиндрической металлической трубы с внутренним и внешним радиусами R_1 и R_2 течет ток I . Концентрация свободных электронов в металле равна n . Определить разность потенциалов в поперечном сечении трубы.

11.30. Незаряженный металлический цилиндр радиусом R вращается вокруг своей оси в магнитном поле с угловой скоростью ω . Индукция магнитного поля направлена вдоль оси цилиндра. Определить индукцию магнитного поля \mathbf{B} , при которой внутри цилиндра электростатическое поле не возникает.

§12. Электромагнитная индукция

- Поток $d\Phi$ вектора магнитной индукции $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ через малый элемент поверхности площадью dS :

$$d\Phi \equiv \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S},$$

где $d\mathbf{S} \equiv n dS$, \mathbf{n} – нормаль к поверхности.

- Поток магнитной индукции через поверхность S :

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}.$$

- Закон электромагнитной индукции:

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Поскольку знак потока вектора магнитной индукции зависит от выбора направления нормали к поверхности, опирающейся на контур, а знак ЭДС – от выбора направления обхода контура, необходимо согласовать положительное направление нормали с положительным направлением обхода контура. Это согласование делается по правилу правого буравчика.

- Правило Ленца: создаваемое индукционным током магнитное поле стремится скомпенсировать то изменение магнитного потока, которое его вызвало.

- Дифференциальная форма закона электромагнитной индукции Фарадея:

$$\text{rot } \mathbf{E}_{\text{вихр}} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

где $\mathbf{E}_{\text{вихр}}$ – напряженности вихревого электрического поля.

- Поток индукции магнитного поля Φ , создаваемого током I контура, через любую поверхность, ограниченную контуром:

$$\Phi = LI,$$

где L – коэффициент самоиндукции (индуктивность) контура.

- Поток индукции магнитного поля через i -ый контур, создаваемый токами всех контуров и пронизывающий:

$$\Phi_i = \sum_j L_{ij} I_j,$$

где L_{ij} – коэффициенты взаимной индукции контуров i и j .

- Коэффициент самоиндукции последовательно соединенных катушек индуктивности:

$$L = \sum_i L_i .$$

• Коэффициент самоиндукции параллельно соединенных катушек индуктивности:

$$\frac{1}{L} = \sum_i \frac{1}{L_i} .$$

• Собственная (магнитная) энергия электрического тока в контуре:

$$W = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} I\Phi .$$

• Объемная плотность энергии магнитного поля:

$$w = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} .$$

• Энергия магнитного поля (для линейных изотропных магнетиков):

$$W = \int w dV = \frac{1}{2\mu\mu_0} \int B^2 dV .$$

• Энергия магнитного поля системы неподвижных замкнутых контуров с токами:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,j} L_{ij} I_i I_j = \frac{1}{2} \sum_i I\Phi_i .$$

• Индуктивность длинного тонкого цилиндрического соленоида:

$$L = \mu\mu_0 n^2 V ,$$

где V – объем соленоида, n – число витков на единицу длины.

12.1. Квадратная проволочная рамка со стороной $a = 2$ см ориентирована перпендикулярно линиям индукции магнитного поля. Найти ЭДС индукции \mathcal{E} в рамке, если за время $\Delta t = 0,1$ с магнитная индукция равномерно убывает от $B_1 = 0,4$ Тл до $B_2 = 0,1$ Тл.

12.2. Проволочная рамка в виде равностороннего треугольника помещена в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,1$ Тл. Плоскость рамки составляет с линиями индукции угол $\alpha = 60^\circ$. Найти длину стороны рамки a , если среднее значение ЭДС

индукции при выключении магнитного поля в течение времени $\tau = 0,02$ с равно $\mathcal{E} = 10$ мВ.

12.3. Самолет летит с горизонтальной скоростью $v = 900$ км/час. Найти разность потенциалов между концами крыльев самолета, если вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли $B_0 = 0,5$ мкТл, а размах крыльев самолета $l = 12$ м.

12.4. Прямоугольная рамка со сторонами a и b изготовлена из проволоки, имеющей сопротивление R . Рамка помещена в однородное магнитное поле, вектор индукции \mathbf{B} которого перпендикулярен плоскости рамки. Определить тепловую мощность P , выделяемую в контуре при уменьшении индукции магнитного поля со скоростью $dB/dt = \alpha$. Индуктивность контура не учитывать.

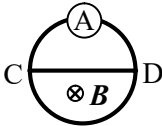


Рис. 12.1. Кольцо с перемычкой в магнитном поле.

12.5. Проволочное кольцо и перемычка длиной l сделаны из одной и той же проволоки. Сопротивление единицы длины проволоки равно r (на рис. 12.1). Какой ток I покажет амперметр, если индукция однородного магнитного поля, перпендикулярного плоскости рисунка, будет увеличиваться со временем по линейному закону: $B = \alpha t$?

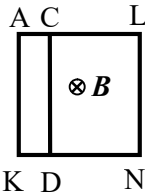


Рис. 12.6. Проволочный квадрат в магнитном поле.

12.6. Проволочный квадрат со стороной $a = 4$ см находится в однородном магнитном поле, вектор индукции которого перпендикулярен плоскости квадрата. Проволочная перемычка, параллельная двум сторонам квадрата, делит две другие его стороны в отношении 1:3 (рис. 12.2). Все проводники выполнены из одинаковой проволоки, сопротивление единицы длины которой равно $r = 1,7$ Ом/м. Найти силы токов, индуцируемых во всех проводниках при изменении индукции магнитного поля по линейному закону от $B_1 = 5$ мТл до $B_2 = 8,4$ мТл за время $\tau = 10$ с.

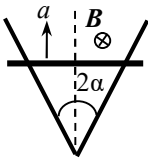


Рис. 12.3. Перемычка, движущаяся по направляющим шинам.

12.7. Две шины, угол между которыми равен 2α , находятся в однородном магнитном поле, вектор индукции \mathbf{B} которого перпендикулярен плоскости шин. Из вершины угла начинают перемещать с постоянным ускорением a без начальной скорости перемычку, перпендикулярную биссектрисе

шины угла начинают перемещать с постоянным ускорением a без начальной скорости перемычку, перпендикулярную биссектрисе

угла 2α (рис.12.3). Найти ЭДС индукции \mathcal{E} в контуре как функцию времени.

12.8. В однородном магнитном поле с индукцией \mathbf{B} находится проволочный контур в виде равностороннего треугольника со стороной b , плоскость которого перпендикулярна линиям магнитного поля. Сопротивление единицы длины проволоки равно r . По контуру с постоянной скоростью v , параллельной высоте треугольника, движется перемычка из той же проволоки (рис. 12.4). Найти силу тока I , протекающего по перемычке в момент, когда она находится на расстоянии d от параллельной ей стороны треугольника.

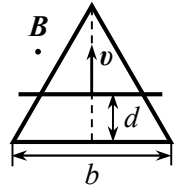


Рис. 12.4. Контур с перемычкой в магнитном поле.

12.9. По П-образному проводу может перемещаться без трения проводящая перемычка длиной l (рис. 12.5). Сопротивление перемычки R намного больше сопротивления провода. Контур находится в постоянном однородном магнитном поле, индукция которого \mathbf{B} перпендикулярна плоскости контура. Какую силу F надо приложить перпендикулярно перемычке в плоскости провода, чтобы она двигалась с постоянной скоростью v ?

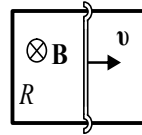


Рис. 12.5. Движущаяся перемычка.

12.10. По двум параллельным шинам в однородном магнитном поле, вектор индукции \mathbf{B} которого перпендикулярен плоскости шин, перемещают перемычку с постоянным ускорением (рис. 12.6). Шины замкнуты на сопротивление R . Расстояние между шинами b . Найти ускорение a перемычки, если количество теплоты, выделившееся на сопротивлении R за время τ , равно Q . Сопротивлением шин, перемычки и индуктивностью контура пренебречь.

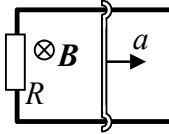


Рис. 12.6. Контур с подвижной перемычкой.

12.11. По двум параллельным шинам, установленным под углом α к горизонту, в однородном магнитном поле скользит без трения под действием силы тяжести перемычка массой m . Шины с одной стороны замкнуты на сопротивление R . Расстояние между шинами l . Вектор индукции \mathbf{B} магнитного поля направ-

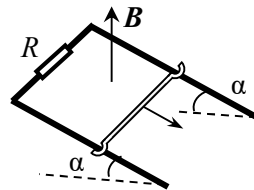


Рис. 12.7. Перемычка, скользящая в поле силы тяжести.

лен вертикально вверх (рис. 12.7). Сопротивления шин, перемычки и скользящих контактов, а также самоиндукция контура пренебрежимо малы. Найти установившуюся скорость перемычки.

12.12. Решить предыдущую задачу при условии, что перемычка перемещается по шинам с трением. Коэффициент трения между шинами и перемычкой равен μ .

12.13. Перемычка массой m может скользить без трения по двум длинным горизонтальным рельсам, расположенным на расстоянии l друг от друга в однородном магнитном поле, вектор индукции \mathbf{B} которого перпендикулярен плоскости рельсов. Слева рельсы замкнуты на резистор с сопротивлением R (рис. 12.8). После сообщения перемычке начальной скорости v_0 в направлении от сопротивления R перемычка прошла до остановки расстояние S . Найти начальную скорость перемычки v_0 . Сопротивлением рельсов и перемычки и индуктивностью контура пренебречь.

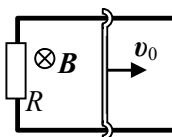


Рис. 12.8. Контур с подвижной перемычкой.

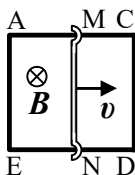


Рис. 12.9. Контур с подвижной перемычкой.

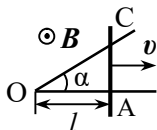


Рис. 12.10. Движение проволоки по проводникам.

12.14. Квадратная проволочная рамка со стороной l помещена в магнитное поле, вектор индукции \mathbf{B} которого перпендикулярен плоскости рамки (рис. 12.9). По рамке с постоянной скоростью v скользит перемычка MN, сделанная из той же проволоки. Найти разность потенциалов между точками C и D в момент, когда перемычка находится посередине контура. Индуктивностью контура пренебречь.

12.15. Два прямых проводника, угол между которыми равен α , находятся в однородном магнитном поле, вектор индукции \mathbf{B} которого перпендикулярен их плоскости (рис. 12.10). Металлическую перемычку начинают перемещать из вершины угла с постоянной скоростью v . Сопротивление единицы длины проволоки равно r . Найти количество теплоты, которое выделится за время перемещения проволоки на расстояние l от точки O. Сопротивление проводников много меньше сопротивления проволоки.

12.16. Две длинные параллельные хорошо проводящие шины расположены вертикально на расстоянии l друг от друга и сверху замкнуты накоротко. Однородное магнитное поле с индукцией B направлено перпендикулярно плоскости шин. По шинам скользит вниз проводящий стержень массой m и сопротивлением R . Считая, что трения нет и сопротивление контактов равно нулю, найти зависимость скорости падения стержня от времени, если в начальный момент он покоился.

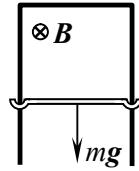


Рис. 12.11. Падение проводника в магнитном поле.

12.17. По двум параллельным металлическим направляющим, наклоненным под углом α к горизонту и расположенным на расстоянии l друг от друга, может скользить без трения металлическая перемычка массой m . Направляющие замкнуты снизу на незаряженный конденсатор емкости C . Вся конструкция находится в магнитном поле, индукция которого B направлена вертикально (рис. 12.12). В начальный момент перемычку удерживают на расстоянии b от основания "горки". За какое время перемычка достигнет основания "горки" после того, как ее отпустят? Сопротивлением проводников пренебречь.

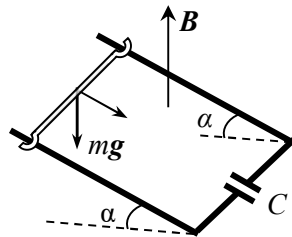


Рис. 12.12. Движение перемычки по наклонным направляющим.

12.18. Металлический стержень длиной l перемещается в магнитном поле бесконечного прямого провода, по которому течет ток I , с постоянной скоростью, направленной параллельно проводу. Стержень и провод расположены в одной плоскости перпендикулярно друг другу, причем ближайший конец стержня находится на расстоянии d от провода (рис. 12.13). Определить скорость v стержня, если разность потенциалов на его концах равна U .

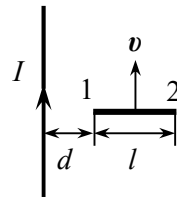


Рис. 12.13. Движение стержня в поле прямого провода с током.

12.19. Между двумя длинными параллельными проводами, по которым текут в противоположных направлениях токи одинаковой силы I , в одной плоскости с проводами симметрично относи-

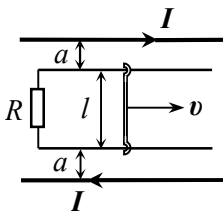


Рис. 12.14. Движение перемычки между проводами с токами.

тельно них расположены параллельные шины, замкнутые на одном конце сопротивлением R . Расстояние от каждой шины до ближайшего провода с током равно a . По шинам без трения перемещают с постоянной скоростью v стержень-перемычку длиной l (рис. 12.14). Пренебрегая сопротивлением шин, перемычки и скользящих контактов, а также индуктивностью контура, определить: а) силу и направление индукционного тока $I_{\text{инд}}$; б) силу F , необходимую для поддержания постоянной скорости движения перемычки.

12.20. П-образный проводник с перемычкой длиной l (рис. 12.15) находится в однородном магнитном поле, вектор индукции \mathbf{B} которого перпендикулярен плоскости проводника, а модуль индукции изменяется во времени по закону $B = \beta t^2$. В момент времени $t = 0$ перемычку, находившуюся в крайнем левом положении, начинают перемещать без начальной скорости с ускорением a . Найти зависимость $\mathcal{E}(t)$ ЭДС индукции в проводнике от времени.

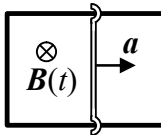


Рис. 12.15. Контур с подвижной перемычкой.

12.21. В магнитном поле, модуль индукции которого $B = 0,1$ Тл, находится катушка из $N = 200$ витков проволоки с общим сопротивлением $R = 40$ Ом. Площадь поперечного сечения одного витка $S = 10$ см². Ось катушки составляет угол $\varphi = 60^\circ$ с вектором магнитной индукции \mathbf{B} . Какое количество электричества Q протечет по катушке при выключении магнитного поля, если концы катушки соединены?

12.22. Квадратная проволочная рамка со стороной a расположена в одной плоскости с длинным прямым проводом, по которому течет постоянный ток I . Две стороны рамки параллельны проводу, сопротивление рамки R . Ближайшая к проводу сторона рамки находится от него на расстоянии b (рис. 12.16). Рамка начинает удаляться от провода с постоянной скоростью v , направленной перпендикулярно проводу в плоскости рамки. Определить количество электричества q , протекшее по рамке за

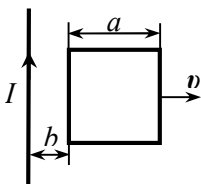


Рис. 12.16. Расположение рамки и провода с током.

время движения t .

12.23. Прямоугольная проволочная рамка со сторонами a и b находится в одной плоскости с прямым длинным проводом, по которому течет ток I (рис. 12.17). Расстояние от провода до ближайшей стороны рамки длиной b равно d . Сопротивление рамки R . Найти количество электричества q , которое протечет по рамке, если ее повернуть на 180° вокруг стороны длиной a .

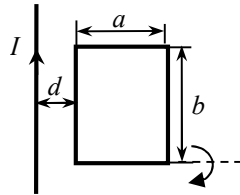


Рис. 12.17. Поворот рамки возле провода с током.

12.24. Проволочное кольцо радиусом $a = 2$ см находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 50$ мТл. Плоскость кольца перпендикулярна вектору индукции \mathbf{B} . Сопротивление кольца $R = 1$ Ом. Какое количество электричества q протечет по кольцу при его повороте вокруг диаметра на 90° ?

12.25. Два прямых проводящих стержня длиной $a = 30$ см соединены гибкими проводниками длиной $b = 50$ см и образуют прямоугольный контур (рис. 12.18). Контур помещен в однородное магнитное поле с индукцией $B = 5$ мТл, вектор индукции которого перпендикулярен плоскости контура. Сопротивление контура $R = 1$ Ом. Какой заряд q протечет по контуру, если один из стержней повернуть на 180° , оставляя гибкие проводники натянутыми и не допуская замыкания между ними?

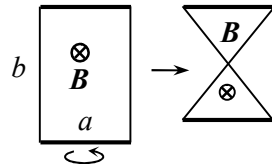


Рис. 12.18. Изменение конфигурации контура.

12.26. Прямоугольная металлическая рамка со сторонами a и b вращается с постоянной угловой скоростью ω в однородном магнитном поле с индукцией \mathbf{B} . Ось вращения перпендикулярна линиям индукции и совпадает со стороной рамки длиной a . Определить максимальную ЭДС индукции в рамке.

12.27. Маятник состоит из легкого проводящего стержня длины l , на конце которого подвешен металлический шарик массой m . Маятник может колебаться, касаясь при этом проводящей дуги окружности. Вектор индукции \mathbf{B} постоянного однородного магнитного поля перпендикулярен плоскости колебаний. Точка подвеса маятника и дуга окружности

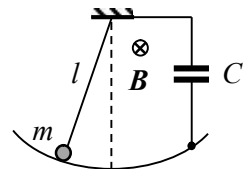


Рис. 12.19. Схема движения маятника.

соединены через конденсатор емкостью C (рис. 12.19). Пренебрегая сопротивлением цепи, определить период малых колебаний маятника.

12.28. Металлический стержень массой m и длиной a подвешен горизонтально на двух проводах

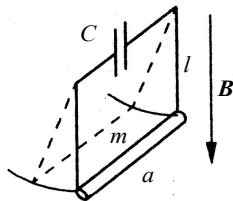


Рис. 12.20. Стержень, подвешенный в магнитном поле.

длиной l , к которым подключен конденсатор емкостью C . Система находится в магнитном поле, вектор индукции \mathbf{B} которого направлен вертикально вниз (рис. 12.20). Определить период T малых колебаний стержня. Сопротивлением проводов и стержня пренебречь.

12.29. Металлический диск радиусом $a = 5$ см вращают с постоянной частотой $\nu = 50$ 1/с в однородном постоянном магнитном поле с индукцией $B = 0,1$ Тл, вектор которой направлен вдоль оси диска. Какой ток покажет амперметр, включенный через сопротивление $R = 10$ Ом между центром и краем диска?

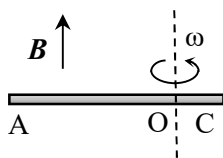


Рис. 12.21. Проводящий стержень, вращающийся в магнитном поле.

12.30. В однородном магнитном поле с индукцией \mathbf{B} вокруг оси, параллельной линиям индукции, вращается с угловой скоростью ω тонкий однородный проводящий стержень длиной l . Ось вращения перпендикулярна стержню и находится на расстоянии $l/4$ от одного из его концов (рис. 12.21). Найти разность потенциалов между концами стержня.

12.31. Металлический стержень, один конец которого шарнирно закреплен в точке O , вращают с такой постоянной угловой скоростью ω , при которой он отклонен от вертикали на угол α . Другой конец стержня касается проводящей полусферы радиусом R , центр которой совпадает с точкой O . Вся система находится в

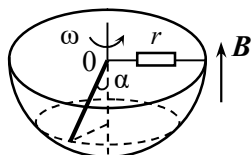


Рис. 12.22. Вращающийся стержень и полусфера в магнитном поле.

однородном магнитном поле, индукция которого \mathbf{B} направлена вертикально вверх (рис. 12.22). Между сферой и стержнем (в точке O) включен резистор с достаточно большим сопротивлением r . Найти тепловую мощность N , выделяющуюся на резисторе.

12.32. Непроводящее тонкое кольцо

массой m с невесомой ступицей, может вращаться в горизонтальной плоскости относительно вертикальную ось. По кольцу равномерно распределен заряд q . Кольцо находится в однородном магнитном поле, вектор индукции \mathbf{B} которого перпендикулярен плоскости кольца. Найти угловую скорость вращения ω , которую приобретет кольцо после выключения магнитного поля.

12.33. В середине длинного соленоида с плотностью намотки n витков на единицу длины находится коаксиальное кольцо прямоугольного сечения толщиной h с внутренним и внешним радиусами a и b соответственно. Кольцо сделано из проводящего материала с удельным сопротивлением ρ . Ток в соленоиде изменяется с постоянной скоростью $\alpha = dI_0 / dt$. Найти индукционный ток I в кольце.

12.34. Проволочное кольцо радиусом a находится в однородном магнитном поле, модуль индукции которого меняется со временем по закону: $B = B_0 \sin \omega t$, а вектор магнитной индукции \mathbf{B} направлен вдоль оси X . Кольцо вращают с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, совпадающей с её диаметром и перпендикулярной оси X . Найти ЭДС индукции \mathcal{E} в кольце, если в начальный момент времени $t = 0$ ось кольца совпадала с осью X .

12.35. Прямоугольная рамка со сторонами a и b вращается вокруг одной из своих сторон в однородном магнитном поле с индукцией \mathbf{B} , перпендикулярной к оси вращения, с переменной угловой скоростью $\omega = \omega_0 (1 + \alpha t)$. Определить величину индуцированной ЭДС, если в начальный момент плоскость рамки была перпендикулярна индукции \mathbf{B} .

12.36. Из изолированной проволоки сделан плоский контур в форме восьмерки, радиусы колец которой равны R_1 и $R_2 < R_1$ (рис. 12.23). Контур находится в магнитном поле, модуль индукции которого меняется со временем по линейному закону: $B = \beta t$, где $\beta = \text{const}$, а вектор индукции \mathbf{B} перпендикулярен плоскости контура. Определить: а) зависимость от времени силы тока I в контуре, если сопротивление единицы длины провода равно r ; б) разность потенциалов $\Delta\varphi$ между точками, расположенными друг над другом в месте скрещения проводов. Индуктивностью контура пренебречь.

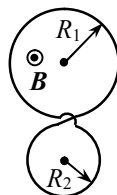


Рис. 12.23. Плоский контур в форме восьмерки в магнитном поле.

12.37. Внутри цилиндра радиусом R индукция магнитного поля возрастает со временем по закону: $B = \alpha t^2$, где $\alpha = \text{const}$. Век-

тор индукции магнитного поля направлен вдоль оси цилиндра. Вне цилиндра магнитного поля нет. Определить модуль напряженности вихревого электрического поля $E(r)$ как функцию расстояния r от оси цилиндра в момент времени t_1 .

12.38. Через длинный соленоид радиусом a с плотностью катушки n витков на метр течет переменный синусоидальный ток, сила которого меняется по закону: $I = I_0 \sin(2\pi\nu t)$. Найти зависимость модуля напряженности $E(r)$ вихревого электрического поля от расстояния до оси соленоида.

12.39. В замкнутый контур, имеющий форму окружности радиусом a включены последовательно конденсаторы с емкостью C_1 и C_2 . Контур находится в однородном переменном магнитном поле, модуль индукции которого линейно изменяется со временем по закону $B = \alpha t$, где $\alpha = \text{const}$. Найти заряды конденсаторов, если вначале они не были заряжены.

12.40. Цилиндрический соленоид длиной $l = 20$ см и диаметром $d = 3$ см имеет $N = 400$ витков. Определить индуктивность L соленоида.

12.41. Определить число витков однослойной катушки, индуктивность которой $L = 1$ мГн. Диаметр катушки $D = 4$ см, диаметр проволоки $d = 0,6$ мм. Витки намотаны вплотную друг к другу.

12.42. Два длинных коаксиальных соленоида с плотностью витков обмотки n_1 и n_2 на единицу длины вставлены вплотную один в другой. Площадь поперечного сечения внутреннего соленоида S . Найти коэффициент взаимной индукции соленоидов в расчете на единицу их длины L'_{12} .

12.43. В центре длинного соленоида с плотностью катушки n витков на единицу длины находится плоская катушка, состоящая из N витков радиусом a каждый. Плоскость витков катушки составляет угол β с осью соленоида. Определить коэффициент взаимной индукции соленоида и катушки L_{12} .

12.44. Бесконечно длинный прямой провод радиусом a охвачен проводящим кольцом, радиус которого R , а центр совпадает с осью провода. Кольцо зафиксировано в положении, при котором его плоскость составляет угол α с осью провода. Определить коэффициент взаимной индукции L_{12} кольца и провода.

12.45. Проволочный виток радиусом R согнули по диаметру под прямым углом и поместили внутрь длинного соленоида с плотностью намотки n витков на единицу длины. Одна из плоскостей

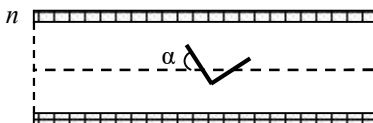


Рис. 12.24. Согнутый проволочный виток в длинном соленоиде.

витка расположена под углом α к оси соленоида (на рис. 12.24 показан разрез соленоида с витком проволоки внутри него). Определить взаимную индуктивность L_{12} согнутого витка и соленоида.

12.46. Найти приближенно коэффициент взаимной индукции L_{12} двух тонких колец с радиусами r_1 и r_2 , если оси колец совпадают, а их центры находятся друг от друга на расстоянии d , значительно превышающем их радиусы.

12.47. Два плоских замкнутых круглых витка проволоки с радиусами r_1 и r_2 лежат в одной плоскости на расстоянии d друг от друга, которое значительно превышает радиусы витков. Воспользовавшись дипольным приближением, определить взаимную индуктивность L_{12} витков проволоки.

12.48. Участок цепи состоит из двух длинных коаксиальных тонкостенных цилиндров радиусов a_1 и $a_2 > a_1$, соединенных на концах проводящими плоскими пластинами. По цилиндрам текут равные по модулю, но противоположно направленные токи. Цилиндры находятся в воздухе. Найти индуктивность L участка цилиндров длиной l , расположенного вдали от их концов.

12.49. Двухпроводная линия представляет собой два параллельных провода одинакового радиуса, по которым текут одинаковые, но противоположно направленные токи. Радиусы проводов много меньше расстояния между их осями. Индуктивность единицы длины двухпроводной линии в воздухе (без учета магнитного поля внутри проводов) равна L . Во сколько раз n радиус каждого провода меньше расстояния между их осями?

12.50. На тор квадратного сечения из немагнитного материала равномерно навито $N_1 = 400$ витков тонкой проволоки. На эту обмотку навито $N_2 = 300$ витков другой обмотки. Внутренний и внешний радиусы тора равны $a = 5$ см и $b = 8$ см (рис. 12.25). Найти коэффициент взаимной индукции L_{12} обмоток.

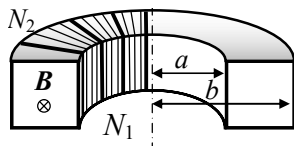


Рис. 12.25. Торонд квадратного сечения с двумя обмотками.

12.51. На деревянный тор прямоугольного сечения высотой h равномерно навиты две обмотки, соединенные последовательно. Первая содержит N_1 витков, вторая – N_2 витков. Внутренний и внешний радиусы тора равны a и b соответственно. В зависимости от направления намотки проводов токи в обмотках могут иметь одинаковое направление или противоположное. Определить индуктивность L системы в обоих случаях.

12.52. Найти индуктивность системы из двух последовательно соединенных длинных соленоидов, один из которых вставлен внутрь другого. Внутренний соленоид имеет длину l_1 , радиус r_1 и плотность намотки n_1 , внешний – l_2 , r_2 и n_2 соответственно ($l_2 > l_1$, $r_2 > r_1$). Рассмотреть два случая: направления токов в витках обоих соленоидов одинаковы или противоположны.

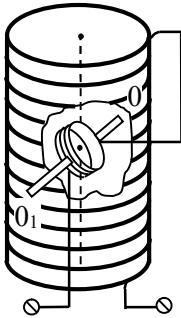


Рис. 12.26. Взаимное расположение катушки и соленоида.

12.53. Катушка радиусом a и длиной l , имеющая N витков намотки, находится в середине длинного соленоида, радиус которого b , длина L и плотность намотки n витков на единицу длины. Катушка может вращаться вокруг оси 00_1 , перпендикулярной к осям и катушки, и соленоида (рис. 12.26). Намотки катушки и соленоида соединены последовательно. Определить зависимость индуктивности L системы от угла α между осями соленоида и катушки. При каком расположении катушки и соленоида индуктивность системы: а) максимальна, б) минимальна; в) равна сумме индуктивностей катушки и соленоида? Считать, что отношение длины катушки к её радиусу достаточно велико, чтобы можно было рассчитывать её индуктивность как в случае длинного соленоида.

12.54. Однослойная достаточно длинная катушка без сердечника разделена на две последовательно расположенные секции. Индуктивность первой секции $L_1 = 0,05$ Гн, второй – $L_2 = 0,1$ Гн. Считая взаимную индуктивность катушек пренебрежимо малой,

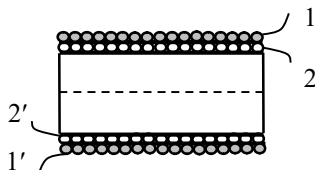


Рис. 12.27. Цилиндр с двумя обмотками.

найти индуктивность L всей катушки.

12.55. На длинный цилиндр намотаны вплотную одна над другой две обмотки 1 - 1' и 2 - 2' (рис. 12.27). Индуктивность каждой обмотки равна $L_1 = 0,05$ Гн. Чему будет равна индуктивность L всей цепи, если: 1) концы 1'

и 2' соединить, а в цепь включить концы 1 и 2; 2) 1 и 2' соединить, а в цепь включить концы 1' и 2; 3) концы 1' и 2' и 1 и 2 соединить, и обе пары концов включить в цепь?

12.56. Длинный соленоид окружен витком провода, в котором поддерживается ток $I = I_0 \cos(\omega t)$ подключенным к нему источником переменного тока (рис. 12.28). Длина соленоида l , радиус a , число витков N . Найти ЭДС индукции, наводимой в соленоиде.

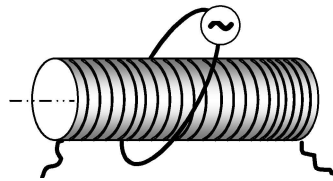


Рис. 12.28. Соленоид и виток тока вокруг него.

12.57. Короткая катушка радиусом a окружает длинный соленоид радиусом R . Число витков катушки равно N , плотность намотки соленоида n витков на единицу длины. По катушке течет синусоидальный ток $I = I_0 \sin(\omega t)$. Определить напряжение U на концах соленоида.

12.58. Прямоугольная рамка со сторонами a и b лежит в одной плоскости с прямолинейным длинным проводом (рис. 12.28). Ближайшая сторона рамки параллельна проводу и отстоит от него на расстояние d . В рамке источником переменной ЭДС создается ток $I = I_0 \sin(\omega t)$. Найти ЭДС индукции $\mathcal{E}(t)$, наводимой в проводе.

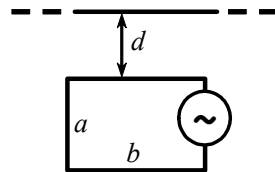


Рис. 12.28. Взаимное расположение рамки и прямолинейного провода.

12.59. На оси большого длинного соленоида с числом витков n на единицу длины находится маленькая катушка из N витков, ось которой составляет угол θ с осью соленоида. Площадь поперечного сечения катушки S значительно меньше площади поперечного сечения соленоида. Источником ЭДС в катушке создается ток I . Найти магнитный поток поля катушки через обмотку соленоида.

12.60. Перемычка массой m может скользить без трения по двум длинным горизонтальным шинам, расположенным на расстоянии l друг от друга в однородном магнитном поле с индукцией \mathbf{B} , перпендикулярной их плоскости. С одного конца шины замкнуты соленоидом с индуктивностью L (рис. 12.29). В момент времени $t = 0$ перемычке толчком сообщили скорость v_0 . Пренебрегая сопротивлением контура, найти закон движения перемычки.

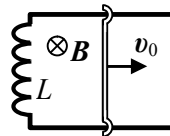


Рис. 12.29. Контур с подвижной перемычкой.

В момент времени $t = 0$ перемычке толчком сообщили скорость v_0 . Пренебрегая сопротивлением контура, найти закон движения перемычки.

§13. Магнитное поле в магнетиках

- Теорема Гаусса для индукции магнитного поля:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

- Граничное условие для нормальной составляющей индукции магнитного поля:

$$B_{2n} - B_{1n} = 0.$$

- Связь вектора намагниченности с поверхностными токами намагничивания:

$$\mathbf{i}_m = [\mathbf{M}\mathbf{n}] \text{ или } M_\tau = [n\mathbf{i}_m],$$

где \mathbf{n} – нормаль к поверхности рассматриваемого элемента магнетика, \mathbf{i}_m – линейная плотность поверхностного тока намагничивания магнетика, M_τ – тангенциальная составляющая вектора намагниченности.

- Граничное условие для тангенциальной составляющей вектора намагниченности:

$$M_{2\tau} - M_{1\tau} = -[n\mathbf{i}_m],$$

где нормаль к поверхности раздела двух сред \mathbf{n} направлена от первой среды ко второй.

- Теорема о циркуляции для вектора намагниченности.

Интегральная форма. Для любого замкнутого контура L

$$\oint_L \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = I_m,$$

где I_m – сила тока намагничивания через площадь, ограниченную контуром L .

Дифференциальная форма.

$$\text{rot } \mathbf{M} = \mathbf{j}_m,$$

где \mathbf{j}_m – объемная плотность тока намагничивания.

- Напряженность магнитного поля:

$$\mathbf{H} \equiv \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}.$$

- Теорема о циркуляции для напряженности магнитного поля.

Интегральная форма. Для любого замкнутого контура

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I,$$

где I – сила объемного тока проводимости через площадь, ограниченную контуром L .

Дифференциальная форма:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j},$$

где \mathbf{j} – объемная плотность тока проводимости.

- Граничное условие для тангенциальной составляющей напряженности магнитного поля:

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = -[ni],$$

где \mathbf{n} – нормаль к поверхности раздела двух сред, направленная от первой среды ко второй, \mathbf{i} – линейная плотность поверхностного тока проводимости.

- Материальное уравнение для индукции магнитного поля:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(1 + \chi)\mathbf{H} \equiv \mu_0\mu\mathbf{H},$$

где χ – магнитная восприимчивость вещества магнетика, $\mu = (1 + \chi)$.

- Взаимосвязь токов проводимости и намагничивания в линейном, однородном и изотропном непроводящем магнетике:

$$I_m = (\mu - 1)I, \quad \mathbf{j}_m = (\mu - 1)\mathbf{j}, \quad \mathbf{i}_m = (\mu - 1)\mathbf{i},$$

где \mathbf{j} и \mathbf{j}_m – объемные, \mathbf{i} и \mathbf{i}_m – поверхностные плотности токов проводимости и намагничивания.

- Связь между плотностью тока намагничивания и плотностью тока проводимости в линейных однородных изотропных магнетиках:

$$\mathbf{j}_m = \operatorname{rot} \mathbf{M} = \chi \operatorname{rot} \mathbf{H} = \chi \mathbf{j}.$$

- Составляющие напряженности магнитного поля \mathbf{H} в однородном и изотропном магнетике, имеющем форму эллипсоида, вдоль главных осей эллипсоида во внешнем поле напряженностью \mathbf{H}_0 :

$$\begin{aligned} H_x &= H_{0x} - N_x M_x, \\ H_y &= H_{0y} - N_y M_y, \\ H_z &= H_{0z} - N_z M_z. \end{aligned}$$

причем $N_x + N_y + N_z = 1$ и $0 \leq N_{x,y,z} \leq 1$.

- Связь компонент напряженности магнитного поля \mathbf{H} , магнитной индукции \mathbf{B} и вектора намагниченности \mathbf{M} в однородном линейном изотропном магнетике, имеющем форму эллипсоида

с компонентами напряженности \mathbf{H}_0 и индукции \mathbf{B}_0 внешнего магнитного поля вдоль главных осей эллипсоида $\alpha = x, y, z$:

$$H_\alpha = \frac{1}{1 + N_\alpha \chi} H_{0\alpha},$$

$$B_\alpha = \frac{1 + \chi}{1 + N_\alpha \chi} B_{0\alpha},$$

$$M_\alpha = \frac{\chi}{1 + N_\alpha \chi} H_{0\alpha}.$$

- Факторы формы для частных случаев эллипсоидов.

Длинный цилиндр (стержень) с осью Z:

$$N_z = 0 \text{ и } N_x = N_y = \frac{1}{2}.$$

Тонкий диск с осью Z:

$$N_z = 1, \quad N_x = N_y = 0.$$

Шар:

$$N_x = N_y = N_z = \frac{1}{3}.$$

- Метод «магнитных зарядов».

Объемная плотность "магнитных зарядов":

$$\rho_m(\mathbf{r}) = -\operatorname{div} \mathbf{M};$$

поверхностная плотность "магнитных зарядов":

$$\sigma_m = -(M_{2n} - M_{1n}) = -(\mathbf{n} \cdot (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1)).$$

Для нахождения магнитоэстатического поля можно использовать известные методы и готовые решения задач электростатики, проводя в них формальные замены:

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}, \quad \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \rightarrow \mathbf{M}, \quad \frac{\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow \rho_m, \quad \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \rightarrow \sigma_m.$$

13.1. Вблизи плоской границы магнетик – вакуум вектор индукции \mathbf{B} магнитного поля в вакууме составляет угол α с нормалью к поверхности границы. В магнетике вектор намагниченности \mathbf{M} направлен под углом β к нормали. Чему равна магнитная проницаемость μ магнетика?

13.2. Вблизи плоской границы изотропного однородного магнетика с магнитной проницаемостью μ и воздуха индукция магнитного поля \mathbf{B}_1 в воздухе составляет угол $\alpha = 30^\circ$ с нормалью \mathbf{n} к поверхности раздела сред. Под каким углом к нормали \mathbf{n} направлен вектор индукции \mathbf{B}_2 в магнетике вблизи границы раздела, если магнетиком является: а) парамагнетик алюминий ($\mu - 1 = 2,3 \cdot 10^{-5}$); б) ферромагнетик кобальт ($\mu = 150$)? Для воздуха $\mu_{\text{в}} - 1 = 0,38 \cdot 10^{-6}$.

13.3. Две изотропные однородные магнитные среды разделены плоской границей (рис. 13.1). Магнитные проницаемости материалов равны μ_1 и μ_2 ($\mu_2 > \mu_1$). В среде с проницаемостью μ_1 индукция магнитного поля равна \mathbf{B}_1 и составляет угол α с нормалью к поверхности раздела. Найти индукцию \mathbf{B}_2 , напряженность \mathbf{H}_2 и намагниченность \mathbf{M}_2 во второй среде вблизи границы.

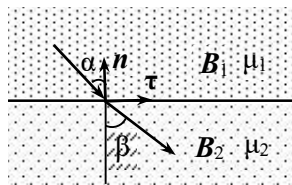


Рис. 13.1. Направление векторов индукции на границе раздела двух магнетиков.

13.4. Бесконечная пластина толщиной a из изотропного магнетика помещена во внешнее магнитное поле, вектор индукции \mathbf{B}_0 которого перпендикулярен пластине. Магнитная проницаемость пластины линейно растет от значения μ_1 на левой границе до μ_2 на правой. Найти поток $\Phi_{\mathbf{H}}$ вектора напряженности \mathbf{H} через цилиндрическую поверхность с образующими, перпендикулярными поверхности пластины, и основаниями площадью S . Левое основание цилиндра находится на расстоянии $3a/4$ от левой стороны пластины, а правое – в воздухе (рис. 13.2). Магнитная проницаемость воздуха равна $\mu_{\text{возд}}$.

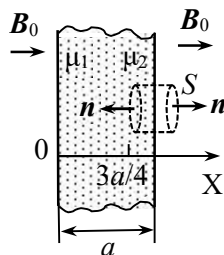


Рис. 13.2. Плоский слой магнетика и воображаемая цилиндрическая поверхность.

13.5. Две изотропные однородные магнитные среды имеют плоскую границу раздела. Магнитные проницаемости сред равны μ_1 и μ_2 . В среде с проницаемостью μ_1 вектор индукции магнитного поля \mathbf{B}_1 составляет угол α с нормалью к поверхности раздела сред. Найти циркуляцию вектора \mathbf{B} по квадратному контуру Γ со стороной l , половина которого находится в первой среде, а половина –

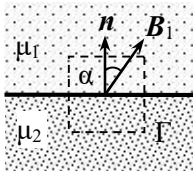


Рис. 13.3. Расположение контура Γ относительно границы раздела магнетиков.

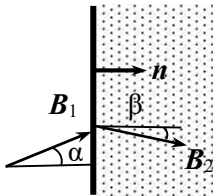


Рис. 13.4. Изменение направления вектора магнитной индукции на границе магнетика с вакуумом.

во второй (рис. 13.3). Плоскость контура перпендикулярна границе раздела сред.

13.6. По плоской поверхности большой парамагнитной пластины с магнитной проницаемостью μ течет ток с постоянной поверхностной плотностью i . Пластины поместили во внешнее однородное магнитное поле, в результате чего индукция магнитного поля в вакууме вблизи пластины стала B_1 , а в парамагнетике — B_2 (рис. 13.4). Определить направление и линейную плотность поверхностного тока i , если вектор индукции B_1 составляет с нормалью n к плоскости пластины угол α .

13.7. В однородное магнитное поле с индукцией B_0 , созданное в воздухе,

помещена бесконечная плоскопараллельная пластина конечной толщины из однородного изотропного магнетика с проницаемостью μ , расположенная перпендикулярно вектору B_0 . Определить намагниченность M и напряженность H магнитного поля в магнетике.

13.8. Длинный прямолинейный провод радиусом a из проводящего материала с магнитной проницаемостью μ находится в воздухе. По проводу течет постоянный ток I , равномерно распределенный по его сечению. Найти намагниченность M провода на расстоянии r от его оси, объемную j_m и поверхностную i_m плотность токов намагничивания.

13.9. По бесконечному цилиндрическому проводу радиусом R , находящемуся в воздухе, течет ток, плотность которого меняется в зависимости от расстояния r до оси провода по закону: $j(r) = \beta r$, где $\beta = \text{const}$. Провод сделан из парамагнетика с магнитной восприимчивостью χ . Найти объемную $j_m(r)$ и поверхностную i_m плотности токов намагничивания в магнетике и силы этих токов $I_m \text{ об}$ и $I_m \text{ пов}$.

13.10. По бесконечной тонкостенной металлической трубке радиусом a из немагнитного материала течет ток I . Трубка находится в бесконечной однородной непроводящей среде с магнитной

проницаемостью μ . Найти линейную плотность поверхностных токов намагничивания i_m на границе трубки и объемную плотность j_m токов намагничивания в среде.

13.11. По бесконечному проводу круглого сечения радиусом a , находящемуся в вакууме, течет постоянный ток I . Магнитная проницаемость материала провода меняется с расстоянием r до его оси по закону: $\mu(r) = 1 + \alpha(r/a)^2$, где $\alpha = \text{const}$. Найти напряженность поля $H(r)$, магнитную индукцию $B(r)$, намагниченность $M(r)$, объемную $j_m(r)$ и поверхностную i_m плотности токов намагничивания и силы токов $I_{\text{тоб}}$ и I_m .

13.12. Прямой бесконечно длинный провод с током I лежит в плоскости раздела двух непроводящих сред с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 (рис. 13.5). Найти намагниченность M и магнитную индукцию B как функции расстояния r до оси провода, а также токи намагничивания во всем пространстве и суммарный эффективный линейный ток I_{Σ} , протекающий по проводу.

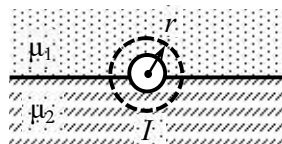


Рис. 13.5. Прямой провод на границе двух магнетиков.

13.13. Круговой тонкий виток, по которому течет ток I , лежит на плоской границе раздела вакуума и магнетика с магнитной проницаемостью μ . Найти индукцию магнитного поля на оси контура на расстоянии z от его центра.

13.14. Длинный соленоид заполнен неоднородным парамагнетиком с магнитной проницаемостью, зависящей от расстояния r до оси соленоида: $\mu(r) = 1 + \alpha r^3$, где $\alpha = \text{const}$. На оси соленоида индукция магнитного поля равна B_0 . Найти намагниченность $M(r)$, магнитную индукцию $B(r)$, а также плотности объемных $j_m(r)$ и поверхностных i_m токов намагничивания внутри соленоида.

13.15. Найти индуктивность соленоида длиной l и радиусом a ($l \gg a$), содержащего N витков, если он заполнен парамагнетиком с неоднородной магнитной восприимчивостью $\chi(r) = \alpha r^2$, где r – расстояние от оси соленоида, $\alpha = \text{const}$.

13.16. Изотропный однородный парамагнетик с проницаемостью μ занимает нижнее полупространство. В вакууме параллельно поверхности магнетика на расстоянии d от границы раздела сред находится прямолинейный длинный тонкий провод, по которому

течет постоянный ток I . Найти силу, действующую со стороны магнетика на единицу длины провода.

13.17. Бесконечная плоская пластина-магнитрамагничена так, что вектор намагниченности \mathbf{M} перпендикулярен ее плоскости. Найти магнитную индукцию \mathbf{B} и напряженность поля \mathbf{H} внутри и вне пластины.

13.18. Бесконечная плоская пластина-магнитрамагничена так, что вектор намагниченности \mathbf{M} параллелен ее плоскости. Найти магнитную индукцию \mathbf{B} и напряженность поля \mathbf{H} внутри и вне пластины.

13.19. Тонкая квадратная пластина со стороной a и толщиной $h \ll a$ однородно намагничена в направлении, перпендикулярном её плоскости. Модуль индукции магнитного поля в центре пластины равен B . Определить намагниченность M материала пластины.

13.20. Постоянный магнит имеет форму тонкого диска радиусом R и толщиной h ($h \ll R$). Вектор намагниченности \mathbf{M} диска перпендикулярен его плоскости. Предполагая, что намагниченность диска однородна, найти величину магнитной индукции в центре диска.

13.21. Какой ток I должен протекать по однослойной обмотке длинного тонкого цилиндрического соленоида без сердечника с плотностью намотки n витков на единицу длины, чтобы индукция \mathbf{B} магнитного поля соленоида была такой же, как индукция постоянного магнита тех же размеров, вектор намагниченности \mathbf{M} которого направлен вдоль оси цилиндра?

13.22. Постоянный магнит в виде цилиндра радиуса R и длиной $l \gg R$ изготовлен из материала с намагниченностью \mathbf{M} , направленной вдоль его оси. Определить модуль индукции магнитного поля магнита B в центре одного из его оснований.

13.23. Очень длинный цилиндр из однородного изотропного магнетика с магнитной проницаемостью μ поместили в однородное постоянное магнитное поле, вектор индукции \mathbf{B}_0 которого перпендикулярен оси цилиндра. Найти намагниченность \mathbf{M} магнетика, напряженность \mathbf{H} и индукцию \mathbf{B} магнитного поля внутри цилиндра.

13.24. Модуль магнитной индукции внутри однородно намагниченного шара радиусом $R = 2$ см равен $B = 0,4$ Тл. Чему равен модуль магнитного момента шара p_m ?

13.25. Шар из магнетика помещён во внешнее однородное магнитное поле, индукция которого равна \mathbf{B}_0 . Внутри шара индукция магнитного поля равна \mathbf{B} . Найти магнитную проницаемость μ

и модуль намагниченности M магнетика, из которого изготовлен шар.

13.26. Обмотка тонкой тороидальной катушки с железным сердечником состоит из $N = 500$ витков. Радиус тора по средней линии $r_0 = 8$ см. Найти индукцию B магнитного поля внутри катушки на её средней линии, намагниченность M и магнитную проницаемость μ сердечника при силах тока в обмотке $I_1 = 0,5$ А и $I_2 = 1,0$ А. Во сколько раз отличаются значения напряженности поля катушки, модуля индукции и намагниченности сердечника при указанных силах тока? Зависимость индукции магнитного поля в железе от модуля напряженности внешнего поля $B(H)$ приведена на рис. 13.6.

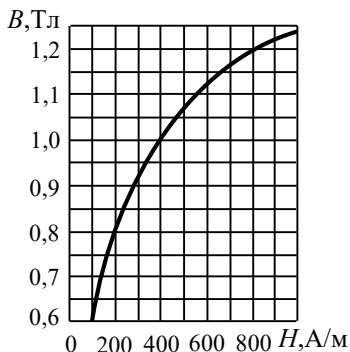


Рис. 13.6. Зависимость модуля индукции магнитного поля в железе от модуля напряженности внешнего поля $B(H)$.

13.27. В сердечнике тороидальной катушки, длина которого по средней линии l , имеется поперечный воздушный зазор толщиной $d \ll l$. Если тока в обмотке нет, то индукция магнитного поля в ней равна B . Определить направления и модули векторов намагниченности M , индукции B_c и напряженности H_c в точке А сердечника, находящейся в зазоре.

13.28. Обмотка тороида, имеющего железный сердечник с узкой прорезью, содержит $N = 1000$ витков. По обмотке течёт ток $I = 2$ А. При какой ширине d прорези модуль индукции магнитного поля в ней будет равен $B = 0,6$ Тл? Длина тороида по средней линии равна $l = 80$ см, магнитная проницаемость железа при этих условиях $\mu = 800$.

13.29. На тонкой тороидальной катушке с магнитным сердечником намотано N витков провода, по которому течет ток I . Длина сердечника по средней линии равна l . Во сколько раз η изменится индукция магнитного поля B в сердечнике, если в нём появится зазор шириной $h \ll l$? Магнитную проницаемость сердечника считать постоянной и равной $\mu \gg 1$.

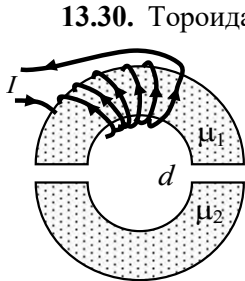


Рис. 13.7. Торoidalный сердечник из двух половин.

13.30. Торoidalный сердечник составлен из двух половинок, которые сделаны из различных ферромагнитных материалов с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 (рис. 13.7). Общая длина сердечников по средней линии, включая два небольших зазора шириной d каждый, равна l . По обмотке сердечника, имеющего N витков, течет ток I . Определить модуль индукции B магнитного поля в зазоре. Рассеянием магнитного поля в зазорах пренебречь.

13.31. На железное кольцо квадратного сечения со средним диаметром $D = 30$ см намотано $N = 600$ витков провода, по которому течет ток $I = 3,2$ А. В кольце имеется поперечный воздушный зазор шириной $d = 2$ мм. Используя график $B(H)$ модуля индукции магнитного поля в железе от модуля напряжённости внешнего поля (приведен на рис. 13.6), определить магнитную проницаемость μ железа в этих условиях.

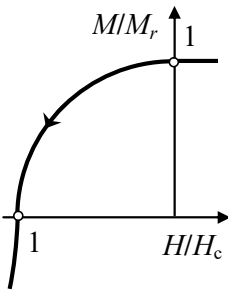


Рис. 13.8. Идеализированный участок петли гистерезиса ферромагнетика.

13.32. Ферромагнитный материал имеет остаточную намагничённость M_r и коэрцитивную силу H_c , а часть кривой размагничивания в приведенных единицах M/M_r и H/H_c можно аппроксимировать четвертью окружности (рис. 13.8). Из данного материала изготовлен постоянный магнит в виде тонкого тора среднего радиуса R и узким поперечным зазором шириной h ($h \ll R$). Найти индукцию магнитного поля в зазоре.

13.33. Электромагнит с железным сердечником длиной $l = 1,4$ м должен создавать в воздушном зазоре шириной $d = 1$ см магнитное поле с индукцией $B = 1$ Тл. Какое наименьшее число N витков должна иметь обмотка электромагнита, если по ней можно пропустить ток, не превышающий значения $I_{\max} = 3$ А? Магнитную проницаемость железа принять равной $\mu = 1000$.

13.34. Электромагнит в форме подковы из железа с магнитной проницаемостью $\mu \gg 1$ имеет площадь поперечного сечения S . Общая длина сердечника с якорем по средней линии равна l . Число витков обмотки N , по ней протекает ток I (рис. 13.9). Якорь

магнита от сердечника на расстояние $x \ll l$. Найти зависимость потока магнитной индукции $\Phi(x)$ через обмотку электромагнита от величины зазора между якорем и сердечником.

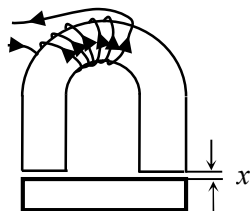


Рис. 13.9. Электромагнит с якорем.

13.35. Постоянный магнит в форме кольца со средним радиусом R имеет узкий воздушный поперечный зазор шириной h . Магнетик, из которого изготовлен магнит, характеризуется остаточной намагниченностью M_r и коэрцитивной силой H_c , а часть петли гистерезиса на участке размагничивания можно аппроксимировать отрезком прямой (рис. 13.10). Найти магнитную индукцию B внутри зазора, пренебрегая рассеянием магнитного поля на его краях.

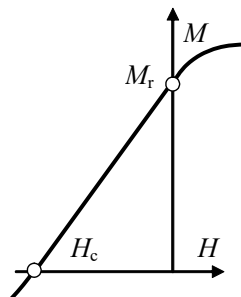


Рис. 13.10. Часть петли гистерезиса.

13.36. Сердечник тонкой тороидальной катушки из N витков изготовлен из ферромагнетика, для которого зависимость намагниченности от напряженности магнитного поля имеет вид, изображенный на рис. 13.11. Значения намагниченности M_S и напряженности H_S , соответствующие переходу в область технического насыщения, известны. Длина катушки по средней линии равна L . В сердечнике имеется узкий поперечный воздушный зазор шириной l . Определить: а) при каком токе I_0 в катушке намагниченность сердечника достигнет насыщения; б) индукцию магнитного поля в зазоре при токе в катушке $I > I_0$.

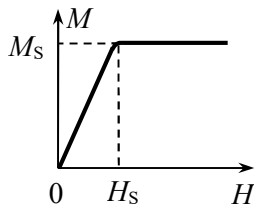


Рис. 13.11. Кривая намагничивания ферромагнетика.

13.37. Тонкий тороидальный сердечник, средний радиус которого равен R , сделан из магнетика с магнитной проницаемостью $\mu \gg 1$ и находится в воздухе. Сердечник разрезан по диаметру, а его половинки раздвинуты на небольшое расстояние $d \ll R$. Один из зазоров заполнен постоянным магнитом, вектор намагниченности которого M перпендикулярен плоскости разреза. Определить модуль индукции B магнитного поля в свободном зазоре.

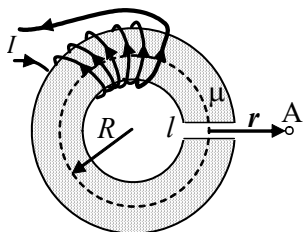


Рис. 13.12. Электромагнит с сердечником, имеющим поперечный воздушный зазор.

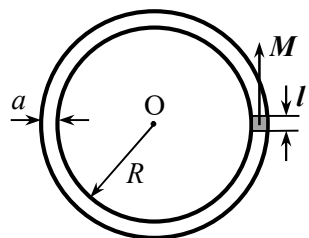


Рис. 13.13. Торoidalный сердечник с зазором, в котором находится постоянный магнит.

13.38. Электромагнит с тонким сердечником квадратного сечения со стороной a , сделанный из материала с большой магнитной проницаемостью μ , имеет тонкий узкий плоский поперечный зазор шириной l (рис. 13.12), в котором создается магнитное поле с индукцией B . Оценить в дипольном приближении индукцию магнитного поля в точке A , лежащей в плоскости зазора на большом расстоянии r от его центра ($r \gg a$, $R \gg a \gg l$, где R – средний радиус тора).

13.39. Торoidalный сердечник квадратного сечения со стороной a , изготовленный из магнетика с магнитной проницаемостью $\mu \gg 1$, имеет тонкий поперечный зазор шириной $l \ll a$. Радиус тора $R \gg a$. В зазор вставлен постоянный магнит, вектор намагниченности M которого перпендикулярен плоскости разреза (рис. 13.13). Размеры магнита совпадает с размерами зазора. Определить в дипольном приближении индукцию магнитного поля B_0 в центре O тора.

13.40. На бесконечный соленоид поперечного сечения S с плотностью намотки n витков на единицу длины намотана вплотную катушка из N витков. Соленоид заполнен веществом с магнитной проницаемостью μ . Найти коэффициент L_{12} взаимной индукции катушки и соленоида.

13.41. Вдоль оси тонкой проводящей цилиндрической трубки радиусом b расположен провод радиусом a , магнитная проницаемость которого равна μ_1 . Пространство между трубкой и проводом заполнено веществом с магнитной проницаемостью μ_2 . По проводу и цилиндрической трубке текут равные по величине, но противоположно направленные токи. Ток по сечению провода распределен равномерно. Определить индуктивность L_1 системы в расчете на единицу длины.

13.42. Найти коэффициент взаимной индукции двух катушек с индуктивностями L_1 и L_2 , надетых на замкнутый ферромагнитный сердечник с магнитной проницаемостью $\mu \gg 1$.

13.43. Однослойная достаточно длинная катушка с железным сердечником разделена на две секции, индуктивности которых равны $L_1 = 0,04$ Гн $L_2 = 0,09$ Гн. Найти коэффициент взаимной индукции катушек L_{12} , индуктивность всей катушки L и количество витков всей катушки, если в первой секции $N_1 = 100$ витков.

13.44. В первичной катушке трансформатора с железным сердечником течет ток $I = I_0 \sin \omega t$.

Магнитная проницаемость сердечника равна μ . Число витков в первичной катушке равно N_1 , а во вторичной — N_2 (рис. 13.13). Площадь сечения сердечника S , его эффективная длина l . Определить ЭДС индукции \mathcal{E} во вторичной катушке, если она разомкнута.

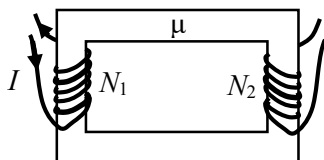


Рис. 13.13. Трансформатор с двумя обмотками.

§14. Энергия, работа и пондеромоторные силы в магнитном поле

- Пондеромоторные силы – силы, действующие на тела со стороны электромагнитного поля.

- Работа пондеромоторных сил:

$$\delta A = \sum_j F_{x_j} dx_j,$$

где F_{x_i} – обобщенные пондеромоторные силы, действующие по направлению обобщенных координат x_j (координат, однозначно определяющих положение тел системы в пространстве).

- Обобщенные пондеромоторные силы:

$$F_{x_j} = \frac{\partial A}{\partial x_j}.$$

- Закон изменения энергии системы контуров с током:

$$\delta A + dW = \sum_i I_i d\Phi_i,$$

где δA – работа пондеромоторных сил, действующих на контуры в магнитном поле, dW – изменение энергии магнитного поля, I_i – сила тока в i -ом контуре, $d\Phi_i$ – изменение магнитного потока, пронизывающего i -й контур.

- Связь работы пондеромоторных сил с энергией магнитного поля.

Для процессов, в которых сохраняются магнитные потоки $\{\Phi_i\}$, пронизывающие контуры с токами:

$$\delta A = -\delta W \Big|_{\Phi_i = \text{const}}.$$

Для процессов, в которых постоянны силы тока $\{I_i\}$ в контурах:

$$\delta A = +\delta W \Big|_{I_i = \text{const}}.$$

- Связь пондеромоторных сил с энергией магнитного поля.

Для (виртуальных) процессов, в которых сохраняются магнитные потоки $\{\Phi_i\}$, пронизывающие контуры с токами:

$$F_k = \left(\frac{\partial A}{\partial x_k} \right)_\Phi = - \left(\frac{\partial W}{\partial x_k} \right)_\Phi.$$

Для (виртуальных) процессов, в которых постоянны силы тока $\{I_i\}$ в контурах:

$$F_i = \left(\frac{\partial A}{\partial x_i} \right)_I = \left(\frac{\partial W}{\partial x_i} \right)_I.$$

- Энергия магнитного момента \mathbf{p}_m во внешнем магнитном поле:

$$W = -\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{B}.$$

- Сила, действующая на магнитный момент точечного диполя \mathbf{p}_m во внешнем магнитном поле:

$$\mathbf{F} = i \left(\mathbf{p}_m \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \right) + j \left(\mathbf{p}_m \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \right) + k \left(\mathbf{p}_m \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} \right).$$

В случае отсутствия токов в области расположения магнитного момента (в стороне от источников магнитного поля):

$$\mathbf{F} = p_{m_x} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + p_{m_y} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} + p_{m_z} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} = (\mathbf{p}_m \nabla) \mathbf{B}.$$

- Момент силы, действующий на магнитный момент точечного диполя во внешнем магнитном поле:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m \mathbf{B}].$$

- Энергия магнитного поля при наличии линейного изотропного магнетика:

$$W = \frac{1}{2} \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV.$$

- Объемная плотность энергии магнитного поля:

$$w(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mu \mu_0 H^2(\mathbf{r}) = \frac{B^2(\mathbf{r})}{2\mu\mu_0}.$$

- Объемная плотность пондеромоторных сил, действующих на магнетик с вектором намагниченности \mathbf{M} в магнитном поле:

$$\mathbf{f} = i \left(\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \right) + j \left(\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \right) + k \left(\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} \right).$$

Если магнетик линеен и изотропен и для него справедливо материальное уравнение $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H} = \frac{\mu - 1}{\mu_0 \mu} \mathbf{B}$, то:

$$\mathbf{f} = \frac{\mu - 1}{2\mu_0 \mu} \text{grad}(B^2).$$

• Поверхностная плотность максвелловских сил натяжения:

$$f_x^n = -(w_1^n - w_2^n) = \frac{B_n^2}{2\mu_0} \left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1} \right),$$

где B_n – нормальная к границе раздела магнетиков компонента индукции магнитного поля.

Сила действует в сторону магнетика с меньшей магнитной проницаемостью.

• Поверхностная плотность максвелловских сил давления:

$$f_x^\tau = w_1^\tau - w_2^\tau = \frac{1}{2} \mu_0 H_\tau^2 (\mu_1 - \mu_2),$$

где H_τ – тангенциальная компонента напряженности магнитного поля.

Сила действует в сторону магнетика с меньшей магнитной проницаемостью.

14.1. По длинному сплошному прямому цилиндрическому проводу радиусом R из немагнитного материала течет ток, плотность которого j меняется с расстоянием r до оси провода по закону: $j = \alpha r$, где $\alpha = \text{const}$. Найти энергию магнитного поля внутри провода в расчете на единицу его длины.

14.2. По длинному прямому цилиндрическому проводу радиусом R_1 из немагнитного материала течет ток I , плотность которого одинакова во всем объеме проводника. Во сколько раз изменится энергия магнитного поля внутри провода в расчете на единицу его длины, если такой же ток I пропустить по проводу радиусом $R_2 > R_1$?

14.3. Найти энергию магнитного поля W внутри тороидальной катушки прямоугольного сечения без сердечника, имеющей N витков. Внутренний радиус тороида равен a , внешний b , высота h . По катушке течет ток I .

14.4. Коаксиальный кабель состоит из сплошного внутреннего проводника радиусом a и тонкого внешнего цилиндрического проводника радиусом b . По проводникам текут токи силой I в противоположных направлениях. Найти энергию магнитного поля в расчете на единицу длины кабеля. Считать, что магнитная проницаемость материала проводников и зазора между ними $\mu = 1$, а ток распределен по проводникам равномерно.

14.5. На замкнутый сердечник с большой магнитной проницаемостью $\mu \gg 1$ намотаны вплотную две катушки (рис. 14.1). Число витков первой катушки равно N_1 , второй – N_2 . По первой катушке протекает ток силой I_1 , по второй – I_2 . Длина сердечника по средней линии равна l . Найти энергию W магнитного поля в сердечнике, объем которого равен V .

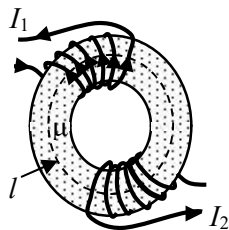


Рис. 14.1. Ферромагнитный сердечник с двумя обмотками.

14.6. На железное кольцо, площадь поперечного сечения которого равна S , намотано N витков провода, по которому течет ток I . Длина кольца по средней линии равна l . В кольце имеется поперечный зазор ширины $b \ll l$. Пренебрегая рассеянием поля на краях зазора и неоднородностью магнитного поля по поперечному сечению магнетика, найти энергию магнитного поля W в железном кольце. При заданных условиях магнитная проницаемость железа равна μ .

14.7. По большой тонкой плоской проводящей пластине течет постоянный ток. Пластины поместили во внешнее однородное магнитное поле, созданное в вакууме, в результате чего индукция магнитного поля с одной стороны пластины стала B_1 , а с другой стороны – B_2 (рис. 14.2). Найти давление p на пластину в магнитном поле.

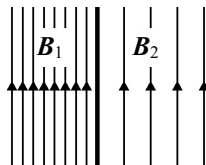


Рис. 14.2. Линии индукции магнитного поля с двух сторон от пластины с током.

14.8. По длинному однослойному соленоиду с плотностью намотки $n = 30$ витков/см течет ток $I = 2$ А. Определить давление p на боковую поверхность соленоида.

14.9. При увеличении силы тока, текущего по обмотке длинного однослойного соленоида радиусом $R = 5$ см с плотностью намотки $n = 36$ витков/см, произошел разрыв обмотки, когда сила тока достигла значения $I_0 = 1,5$ кА. Определить предельную нагрузку на разрыв $F_{\text{пред}}$ проволоки обмотки.

14.10. Вдоль длинного тонкостенного цилиндра радиусом R течет ток I . Какое давление p испытывают стенки цилиндра?

14.11. Лежащая на горизонтальном столе длинная спиральная пружина одним концом прикреплена к стене, а к другому её концу приложена горизонтально направленная сила F . Длина недеформированной пружины l , радиус витка $R \ll l$, число витков пружины N . Коэффициент упругости пружины равен k . Определить удлинение

x пружины, если по ней течет постоянный ток I . Считать, что деформации пружины малы ($x \ll l$) и подчиняются закону Гука. Рассеянием магнитного поля вблизи торцов пружины пренебречь.

14.12. Соленоид с током I и плотностью намотки n витков на единицу длины находится в аксиально-симметричном магнитном поле, ось которого совпадает с осью соленоида. Найти модуль действующей на соленоид силы F , если потоки магнитной индукции внешнего поля через торцы соленоида равны Φ_1 (входящий) и $\Phi_2 < \Phi_1$ (выходящий).

14.13. С какой силой притягиваются половинки очень длинного соленоида радиусом R с плотностью намотки n витков на единицу длины, если по соленоиду течет ток силой I ?

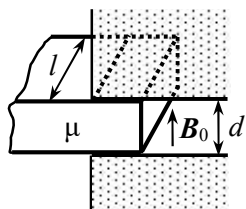


Рис. 14.3. Пластина из магнетика между полюсами магнита.

пластину, описанную в задаче 14.14, если пластина является постоянным магнитом, направление вектора намагниченности M которого совпадает с направлением вектора магнитной индукции B_0 .

14.16. В длинный соленоид, площадь поперечного сечения которого S , с плотностью намотки n витков на единицу длины

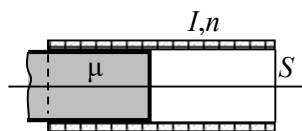


Рис. 14.4. Магнетик, частично вдвинутый в соленоид.

14.14. В пространство между полюсами постоянного магнита частично вдвинута пластина из магнетика с магнитной проницаемостью $\mu > 1$ (рис. 14.3). Ширина пластины равна l , толщина d . Индукция магнитного поля между полюсами магнита в воздушном зазоре B_0 . Определить действующую на пластину силу F .

14.15. Найти силу, действующую на пластину, описанную в задаче 14.14, если пластина является постоянным магнитом, направление вектора намагниченности M которого совпадает с направлением вектора магнитной индукции B_0 .

вдвинут сердечник с магнитной проницаемостью μ (рис. 14.4). Сердечник занимает все пространство внутри соленоида и вставлен на глубину, значительно превышающую его диаметр. По соленоиду течет ток I . Найти силу, втягивающую сердечник в соленоид.

14.17. В очень длинный соленоид, у которого площадь поперечного сечения S и плотностью намотки n витков на единицу длины, с двух сторон вдвинуты длинные стержни с магнитной проницаемостью μ , которые вплотную прилегают к внутренней поверхности соленоида. По обмотке соленоида течет ток I . Между стерж-

ными имеется маленький зазор. Определить силу, с которой стержни притягиваются друг к другу.

14.18. Равномерно намагниченный шар из магнетика с магнитной проницаемостью μ радиусом R мысленно разделяют плоскостью на две равные половинки так, что разделяющая плоскость перпендикулярна вектору намагниченности M . Найти силу взаимодействия между половинками шара, обусловленную их намагниченностью.

14.19. Полый цилиндр радиусом r_2 и коаксиальный с ним цилиндрический проводник радиусом $r_1 < r_2$ с очень большой проводимостью опущены в проводящую магнитную жидкость с магнитной проницаемостью μ и плотностью ρ . По цилиндру и центральному проводнику текут противоположно направленные одинаковые токи I . Определить высоту подъема жидкости в цилиндре.

14.20. Между полюсами сильного электромагнита помещают U – образную трубку, при этом одно колено (капиллярное) находится в магнитном поле, а другое (широкое) – вне поля. В трубку наливают диамагнитную жидкость, проницаемость которой $\mu < 1$, а плотность ρ . Насколько изменится уровень жидкости в капилляре при включении магнитного поля, индукция которого в воздухе равна B ? Магнитную проницаемость пара и воздуха над жидкостью считать равной 1.

14.21. Длинный соленоид с плотностью намотки n витков на метр, по которым протекает ток I , погружен горизонтально до середины в парамагнитную жидкость с проницаемостью μ . Найти давление, действующее на поверхность жидкости.

14.22. Тонкостенный цилиндр радиусом R заполнен проводящим жидким магнетиком с проницаемостью μ . Вдоль оси цилиндра по магнетикю течет ток I , равномерно распределенный по его сечению. Найти, как зависит давления $p(r)$ в жидком магнетике, обусловленного взаимодействием тока с созданным им магнитным полем, от расстояния r до оси цилиндра.

14.23. Найти силу притяжения двух половинок тонкого тора радиусом R , имеющего квадратное поперечное сечение площадью S ($R \gg \sqrt{S}$), если они сделаны из материалов с большой магнитной проницаемостью μ_1 и μ_2 соответственно. Обмотка тора имеет N витков, по ней течет ток I .

14.24. В сердечнике тороидального электромагнита радиусом R и круглого сечения площадью S ($R \gg \sqrt{S}$) имеется малый зазор

шириной l ($l \ll \sqrt{S}$), в который помещена пластинка из того же

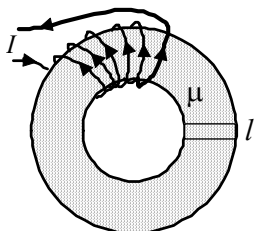


Рис. 14.5. Сердечник электромагнита с магнитной прокладкой в зазоре.

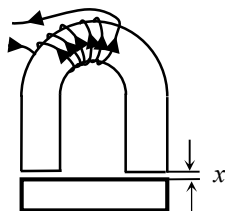


Рис. 14.6. Электромагнит с якорем.

14.26. Постоянный магнит в форме подковы с круглым сечением, диаметр которого $D = 2$ см, способен удерживать якорь с грузом, масса которых $m = 10$ кг. Чему равна индукция B магнитного поля вблизи полюсов магнита?

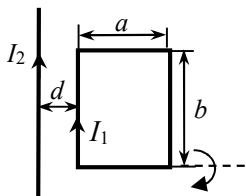


Рис. 14.7. Рамка с током I_2 возле провода с током I_1 .

14.28. В постоянное магнитном поле с индукцией B вносят рамку с током I площадью S , причем плоскость рамки составляет угол α с вектором индукции B . Найти работу A сил поля при повороте рамки в положение устойчивого равновесия.

материала (рис. 14.5). По обмотке из N витков течет ток I . Магнитная проницаемость материала μ ($\mu \gg 1$). Какую работу нужно совершить против пондеромоторных сил магнитного поля, чтобы удалить пластинку из зазора?

14.25. Электромагнит в форме подковы, изготовленный из железа, имеет площадь поперечного сечения $S = 2$ см². Общая длина сердечника с якорем по средней линии равна $l = 40$ см, толщина каждого из воздушных зазоров $x = 0,2$ мм. Число витков обмотки $N = 300$ (см. рис. 14.6). При токе $I = 3$ А электромагнит может удерживать якорь с нагрузкой общим весом $P = 20$ кг. Определить индукцию B магнитного поля в сердечнике и относительную магнитную проницаемость μ железа при этих условиях. Рассеянием магнитного поля в зазорах пренебречь.

14.27. Прямоугольная проволочная рамка со сторонами a и b , по которой протекает ток I_1 , лежит в одной плоскости с прямым длинным проводом, по которому течет ток I_2 . Ближайшая к проводу сторона рамки длиной b находится на расстоянии d от провода (рис. 14.7). Какую работу нужно совершить, чтобы повернуть рамку на 180° вокруг стороны длиной a ?

14.29. По квадратной проволочной рамке со стороной a течет ток I_1 . Рамка находится в одной плоскости с длинным прямым проводом, по которому течет постоянный ток I_2 . Две стороны рамки параллельны проводу. Расстояние от провода до ближайшей к нему стороны рамки равно b . Рамку поступательно передвинули на расстояние a и затем повернули на 180° вокруг оси OO' , проходящей через середины сторон рамки параллельно проводу (рис. 14.8). Какую работу A потребовалось для этого совершить?

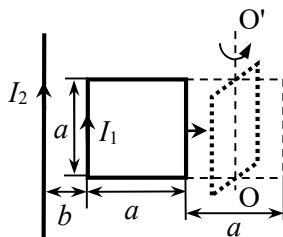


Рис. 14.8. Перемещение рамки с током I_1 в магнитном поле провода с током I_2 .

14.30. Центры двух катушек с магнитными моментами p_1 и p_2 расположены на одной прямой, а их магнитные моменты взаимно перпендикулярны. Расстояние L между катушками велико по сравнению с их размерами. Определить силу взаимодействия этих катушек.

14.31. Два одинаковых параллельных магнитных момента p_m расположены в одной плоскости и образуют одинаковые углы θ с соединяющим их отрезком. Вычислить модуль силы взаимодействия диполей. При каких углах θ эта сила максимальна?

14.32. Точечный магнитный момент p_m ориентирован перпендикулярно длинному прямому проводу, по которому течет ток I (рис. 14.9). Определить силу, действующую на диполь со стороны магнитного поля провода, если расстояние между проводом и диполем равно r .

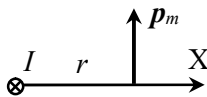


Рис. 14.9. Взаимная ориентация магнитного момента и провода с током.

14.33. Точечный магнитный момент p_m находится в одной плоскости с длинным прямым проводом, по которому течет ток I . Определить силу F и вращающий момент M , действующие на магнитный момент, если расстояние между ним и проводом равно r , а его компоненты в декартовых координатах равны соответственно p_{mx} и p_{my} (рис. 14.10).

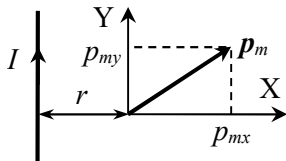


Рис. 14.10. Взаимное расположение магнитного момента p_m и провода с током I .

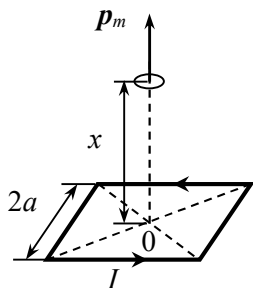


Рис. 14.11. Взаимное расположение квадратной рамки с током и катушки.

14.34. По квадратной рамке со стороной $2a$ течет ток I . На перпендикуляре к плоскости рамки, проведенном через её центр, находится небольшая катушка с током, магнитный момент которого p_m направлен вдоль перпендикуляра от рамки (рис. 14.11). Найти модуль действующей на катушку силы, если расстояние от неё до центра рамки равно x .

14.35. В однородном магнитном поле, вектор индукции которого B направлен вертикально, подвешен за конец тонкий намагниченный стержень. Магнитный момент стержня p_m направлен вдоль стержня вниз. Масса стержня m , его длина l . Найти период T малых колебаний стержня. Как изменится период колебаний стержня, если выключить магнитное поле?

14.36. Магнитный момент стрелки компаса p_m , её масса m , длина l . Горизонтальная составляющая индукции магнитного поля Земли B_T . Рассматривая магнитную стрелку как тонкий стержень, определить период T её колебаний в магнитном поле Земли.

14.37. Тонкий парамагнитный стержень с площадью сечения S из материала с магнитной проницаемостью μ ориентирован вдоль горизонтальной линии магнитной индукции B внешнего поля, которая линейно уменьшается от B_1 вблизи одного конца стержня до B_2 возле его другого конца. Какую силу надо приложить к стержню, чтобы удерживать его? Считать $\sqrt{S} \ll l$, где l – длина стержня.

14.38. Внутри немагнитного цилиндра с помощью системы катушек с током создано магнитное поле, индукция которого направлена вблизи оси цилиндра вдоль неё, а модуль индукции меняется по закону: $B = B_0 / x^2$ (x – расстояние от центра цилиндра до точки на его оси, $x > 0$). В точке с координатой $x = a$ находится маленький парамагнитный шарик объёмом V , магнитная восприимчивость материала которого равна χ . Найти силу, действующую на шарик со стороны магнитного поля.

14.39. Небольшой шарик объёмом V из парамагнитного материала с магнитной проницаемостью μ переместили из области с магнитной индукцией B в область, где магнитное поле отсутствует. Какую работу совершили при этом против сил магнитного поля?

14.40. Тонкая парамагнитная палочка объемом V с магнитной проницаемостью μ подвешена на нити за центр масс на расстоянии d от бесконечного прямого вертикального провода с током силы I , причем палочка расположена горизонтально и перпендикулярно проводу (рис 14.12). Длина палочки значительно меньше d . Какая сила будет действовать на палочку со стороны магнитного поля провода с током?

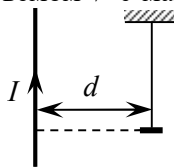


Рис. 14.12. Парамагнитная палочка, подвешенная на нити возле провода с током.

§15. Переходные процессы в электрических цепях

- Переходный процесс в электрической цепи – переход из одно-го стационарного состояния электрической цепи в другое, происходящий при изменении параметров цепи – ЭДС \mathcal{E} , емкостей C , индуктивностей L и сопротивлений R .

- Уравнение собственных затухающих колебаний в цепи с последовательным соединением R , L и C :

$$\ddot{\xi}(t) + 2\beta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = 0,$$

где $\beta = R/2L$ – коэффициент затухания, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – круговая частота собственных гармонических колебаний.

- Решение уравнения собственных колебаний с затуханием меньше критического ($\beta < \omega_0$ или $R < 2\sqrt{L/C}$):

$$\xi(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – круговая частота собственных затухающих колебаний.

- Решение уравнения собственных колебаний с затуханием больше критического ($\beta > \omega_0$ или $R > 2\sqrt{L/C}$):

$$\xi(t) = A_1 e^{-(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{-(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t},$$

где A_1 и A_2 – постоянные величины

- Решение уравнения (закон) собственных затухающих колебаний с критическим затуханием ($\beta = \omega_0$ или $R = 2\sqrt{L/C}$):

$$\xi(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\beta t}.$$

- Время затухания (релаксации) τ :

$$\tau = 1/\beta = 2L/R.$$

- Взаимосвязь между током и напряжением на отдельных участках цепи.

Резистор: $U_R = R I_R,$

где U_R – напряжение на резисторе; I_R – сила тока, протекающего через этот резистор; R – сопротивление резистора.

Конденсатор: $U_C = \frac{Q}{C}, I_C = C \frac{dU_C}{dt},$

где U_C – напряжение на конденсаторе; I_C – сила переменного тока, протекающего через конденсатор; Q – заряд конденсатора, C – емкость конденсатора.

$$U_C(t) = U_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t I_C dt,$$

где $U_C(0)$ – напряжение на конденсаторе в момент времени $t = 0$.

Катушка индуктивности: $U_L = L \frac{dI_L}{dt},$

где U_L – напряжение на катушке индуктивности, I_L – сила тока через катушку; L – индуктивность катушки.

Напряжение на катушке индуктивности U_L равно взятой с обратным знаком ЭДС самоиндукции, возникающей в катушке. Можно либо учитывать напряжение на катушке индуктивности в сумме с другими напряжениями в контуре, либо включить этот элемент в состав действующих в контуре ЭДС:

$$I_L(t) = I_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t U_L dt,$$

где $I_L(0)$ – сила тока через катушку в момент времени $t = 0$.

Реальная катушка, наряду с индуктивностью L , обладает также омическим (активным) сопротивлением r , и напряжение U_{rL} на ней равно

$$U_{rL} = rI_L + L \frac{dI_L}{dt}.$$

- Мощность, выделяемая на участке цепи:

$$P(t) = U(t)I(t),$$

где $U(t)$ и $I(t)$ – напряжение и ток черезна этом участке.

15.1. Дроссель (катушка) с индуктивностью $L = 8$ Гн и омическим сопротивлением $R_1 = 40$ Ом и лампочка с сопротивлением $R_2 = 200$ Ом соединены параллельно и подключены к источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 120$ В через ключ (рис. 15.1). Определить напряжение на дросселе через время $t_1 = 0,01$ с и $t_2 = 0,5$ с после размыкания ключа.

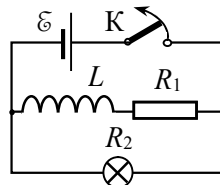


Рис. 15.1. Схема цепи.

15.2. Катушку с индуктивностью $L = 250$ мГн и сопротивлением $R = 0,3$ Ом подключили к источнику постоянного напряже-

ния. Через какое время τ сила тока в катушке достигнет $\eta = 50\%$ установившегося значения?

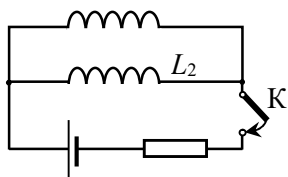


Рис. 15.2. Схема цепи.

индуктивность не учитывать. Омическим сопротивлением катушек пренебречь.

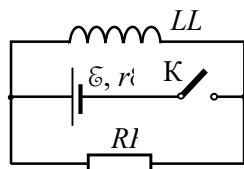


Рис. 15.3. Схема цепи. 9.

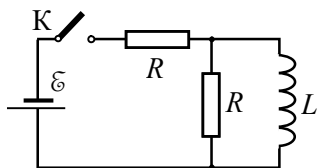


Рис. 15.4. Схема цепи.

15.5. Найти зависимости от времени силы тока $I_L(t)$ через катушку индуктивности L и напряжения $U_L(t)$ на катушке в схеме, приведенной на рис. 15.4, после замыкания ключа К.

15.6. Последовательно соединенные катушка индуктивности и резистор подключены к источнику постоянного тока с ЭДС \mathcal{E} . Полное омическое сопротивление цепи равно R . В катушку вставлен железный сердечник, при этом индуктивность катушки равна L_1 . В момент времени $t = 0$ очень быстро вынимают сердечник из катушки. Индуктивность катушки без сердечника равна L_2 . Определить зависимость силы тока в цепи от времени $I(t)$ при $t > 0$.

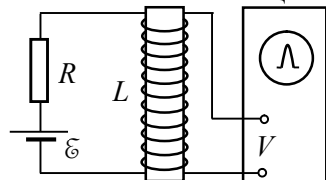


Рис. 15.5. Схема установки для измерения магнитной восприимчивости образцов.

15.3. Схема состоит из резистора сопротивлением R , двух катушек индуктивностями L_1 и L_2 и источника напряжения с ЭДС \mathcal{E} , соединенных по схеме, показанной на рис. 15.2. Найти зависимость от времени сил тока $I_1(t)$ и $I_2(t)$ в катушках после замыкания ключа К. Взаимную индуктивность не учитывать. Омическим сопротивлением катушек пренебречь.

15.4. В цепи, схема которой изображена на рис. 15.3, индуктивность катушки равна L , сопротивление резистора R , ЭДС источника \mathcal{E} , его внутреннее сопротивление r . Ключ К замыкают. Найти напряжение U на катушке в момент, когда через резистор протечет заряд q .

15.5. Найти зависимости от времени силы тока $I_L(t)$ через катушку индуктивности L и напряжения $U_L(t)$ на катушке в схеме, приведенной на рис. 15.4, после замыкания ключа К.

15.6. Последовательно соединенные катушка индуктивности и резистор

подключены к источнику постоянного тока с ЭДС \mathcal{E} . Полное омическое сопротивление цепи равно R . В катушку вставлен железный сердечник, при этом индуктивность катушки равна L_1 . В момент времени $t = 0$ очень быстро вынимают сердечник из катушки. Индуктивность катушки без сердечника равна L_2 . Определить зависимость силы тока в цепи от времени $I(t)$ при $t > 0$.

15.7. Для измерения магнитной восприимчивости длинных цилиндрических образцов применяется установка, схема которой представлена на рис. 15.5. При быстром удалении образца, заполняющего всю катушку, на ней возникает импульс напряжения, который измеряется с помощью осцилло-

графа. Индуктивность катушки без образца равна $L = 1$ Гн. Определить магнитную восприимчивость χ образца, если ЭДС источника $\mathcal{E} = 4,5$ В, сопротивление резистора $R = 10$ Ом, амплитуда импульса напряжения $V = 7$ мВ. Каким должно быть время удаления образца, чтобы от этого зависела амплитуда импульса напряжения?

15.8. В цепи, схема которой представлена на рис. 15.6, известны индуктивность катушки L_1 , сопротивление резистора R и внутреннее сопротивление r источника постоянного тока. Сначала ключ разомкнут, и по резистору R течет постоянный ток I . После замыкания ключа K за достаточно большой промежуток времени через резистор проходит заряд

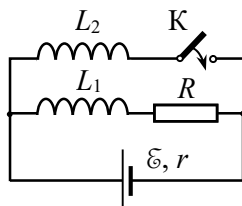


Рис. 15.6. Схема цепи.

q . Определить индуктивность L_2 второй катушки. Считать, что омические сопротивления обеих катушек пренебрежимо малы.

15.9. Обкладкам конденсатора емкостью $C = 4$ мкФ сообщили разноименные заряды величиной $q_0 = 2$ мКл. Затем обкладки замкнули через резистор сопротивлением $R = 3$ МОм. Какой заряд q прошел через этот резистор за время $\Delta t = 1$ с?

15.10. Электрическая цепь, схема которой изображена на рис. 15.7, состоит из конденсатора емкостью C , резистора сопротивлением R , источника ЭДС \mathcal{E} с внутренним сопротивлением r и ключа K . Первоначально ключ разомкнут. Как будет меняться со временем сила тока I через источник после замыкания ключа?

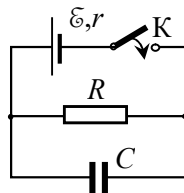


Рис. 15.7. Схема цепи.

15.11. Для электрической цепи, описанной в задаче 15.10, известны емкость конденсатора C и сопротивление резистора R . Найти ЭДС источника, если известно, что сразу после замыкания ключа ток через источник в $n = 2$ раза больше установившегося в цепи, а установившееся напряжение на конденсаторе $U = 1,75$ В.

15.12. Определить закон изменения со временем силы тока $I(t)$ через источник постоянного напряжения \mathcal{E} после замыкания ключа K в схеме, изображенной на рис. 15.8.

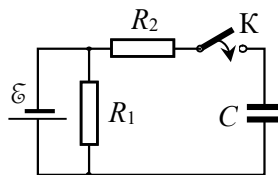


Рис. 15.8. Схема цепи.

15.13. К заряженному до напряжения

U конденсатору с емкостью C_1 через резистор с сопротивлением R подключается незаряженный конденсатор с емкостью C_2 . Как будет изменяться со временем сила тока $I(t)$ в цепи?

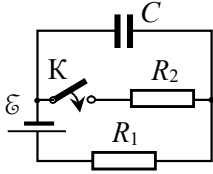


Рис. 15.9. Схема цепи.

15.14. В схеме, изображенной на рис. 15.9, ключ K сначала разомкнут. Определить изменение со временем заряда на конденсаторе $q(t)$ после замыкания ключа.

15.15. Воздушный конденсатор с емкостью C_0 , резистор с сопротивлением R и источник постоянного напряжения с ЭДС \mathcal{E} соединены последовательно. Пластины конденсатора резко сближают, при этом расстояние между пластинами уменьшается в 2 раза. Как после этого будет изменяться со временем ток $I(t)$, текущий по резистору? Какое количество теплоты Q выделится на резисторе в процессе перезарядки конденсатора?

15.16. Резистор с сопротивлением R , плоский конденсатор и источник напряжения с ЭДС \mathcal{E} соединены последовательно. В конденсаторе находится диэлектрическая пластина с проницаемостью ϵ , заполняющая весь его объем. Емкость конденсатора без пластины равна C . В некоторый момент времени пластину быстро вынимают из конденсатора. Как после этого будет изменяться со временем заряд $q(t)$ конденсатора?

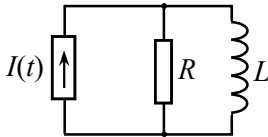


Рис. 15.10. Схема цепи.

15.17. Определить, как изменяется со временем напряжение на катушке индуктивности в схеме, представленной на рис. 15.10, для случаев, когда генератор тока формирует:

1) ступенчатый сигнал:

$$I(t) = 0 \text{ при } t < 0; I(t) = I_0 \text{ при } t > 0;$$

2) прямоугольный импульс:

$$I(t) = 0 \text{ при } t < 0, t > T; I(t) = I_0 \text{ при } 0 < t < T.$$

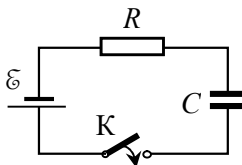


Рис. 15.11. Цепь с нелинейным сопротивлением.

15.18. Конденсатор емкостью C , источник ЭДС \mathcal{E} , нелинейное сопротивление R и ключ K соединены последовательно (рис. 15.11). Сила тока I через сопротивление связана с напряжением U на нём соотношением: $I = \alpha U^{3/2}$, где α – постоянная величина. Сначала ключ разомкнут. Найти зависимость тока в цепи от времени $I(t)$ после замыкания ключа.

15.19. К заряженному до напряжения U конденсатору с емкостью C_1 через резистор с сопротивлением R подключается незаряженный конденсатор с емкостью C_2 . Как будет изменяться со временем энергия второго конденсатора?

15.20. Изначально незаряженный конденсатор емкости C подключается к источнику ЭДС \mathcal{E}_0 с внутренним сопротивлением r . Определить количество теплоты, выделившейся в цепи за время t при зарядке конденсатора.

15.21. Катушка индуктивности L с активным сопротивлением r подключена к источнику напряжения с ЭДС \mathcal{E} (ключ в положении 1 рис. 15.12). Какое количество теплоты Q выделится в катушке за время $t < L/r$ после перевода ключа в положение 2?

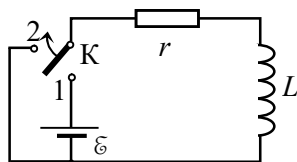


Рис. 15.12. Схема цепи.

15.22. Последовательно соединенные резистор с сопротивлением R , конденсатор с емкостью C и катушка индуктивности L подключаются к источнику постоянного напряжения с ЭДС \mathcal{E} (рис. 15.13), причем $R^2 = 4L/C$.

Определить: 1) зависимость силы тока в цепи от времени $I(t)$; 2) через какое время t_0 сила тока достигнет максимума; 3) чему равно максимальное значение силы тока I_{\max} ; 4) чему равно напряжение U на конденсаторе в момент, когда сила тока максимальна.

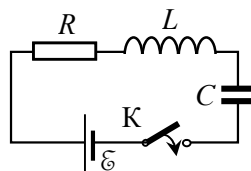


Рис. 15.13. Схема RLC цепи.

15.23. Для схемы, описанной в задаче 15.22, определить зависимость силы тока в цепи от времени $I(t)$, если параметры элементов схемы таковы, что $R^2 < 4L/C$.

15.24. Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью L и конденсатора с емкостью C . Катушка помещена в постоянное магнитное поле, создающее пронизывающий её поток магнитной индукции Φ_0 . В момент времени $t = 0$ магнитное поле выключается за время, пренебрежимо малое по сравнению с периодом собственных колебаний контура. Найти зависимость от времени тока в контуре после выключения магнитного поля. Считать, что катушка не имеет активного сопротивления.

15.25. В схеме, изображенной на рис. 15.14, при замкнутом ключе K через катушку с индуктивностью L_1 течет ток I_0 , а напряжение на конденсаторе емкостью C равно нулю. В момент времени

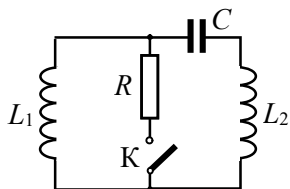


Рис. 15.14. Схема цепи.

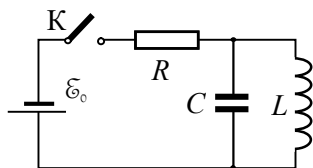


Рис. 15.15. Схема цепи.

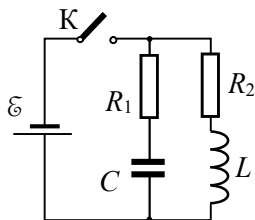


Рис. 15.16. Схема цепи.

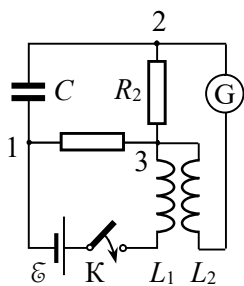


Рис. 15.17. Схема цепи.

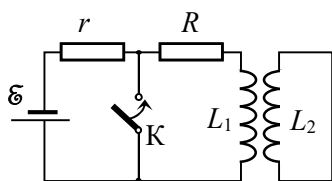


Рис. 15.18. Два контура с катушками индуктивности.

$t = 0$ ключ быстро размыкают. Найти зависимость от времени тока в цепи $I(t)$ и напряжения на конденсаторе $U_C(t)$ для $t > 0$. Активными сопротивлениями катушек индуктивности и конденсатора пренебречь.

15.26. Найти силу тока $I_L(t)$ через катушку индуктивности L после замыкания ключа K в схеме, приведенной на рис. 15.15. Параметры L , C , R удовлетворяют условию $L > 4CR^2$.

15.27. В схеме, изображенной на рис. 15.16, ключ K сначала замкнут, и цепь подсоединена к источнику постоянного напряжения с ЭДС \mathcal{E} . Как будут изменяться со временем ток $I_L(t)$ через катушку индуктивности L и напряжение $U_C(t)$ на конденсаторе с емкостью C после размыкания ключа? Параметры схемы удовлетворяют случаю слабого затухания.

15.28. В цепи, схема которой приведена на рис. 15.17, известны сопротивления резисторов R_1 и R_2 и емкость конденсатора C . При замыкании ключа K ток через гальванометр G не течет. Определить коэффициент взаимной индукции L_{12} катушек, считая, что индуктивность L_2 второй катушки пренебрежимо мала.

15.29. Электрическая цепь состоит из резистора с сопротивлением R , источника ЭДС \mathcal{E} с внутренним сопротивлением r и катушки индуктивности L_1 (рис. 15.18). К катушке L_1 издали приближают короткозамкнутую катушку с индуктивностью L_2 и пренебрежимо малым омическим сопротивлением. Первоначально ток в этой катушке отсутствует, а после сближения катушек он становится равным I_2 .

После сближения катушек ключ K замыкают. Какое количество теплоты выделится после этого на резисторе R ?

15.30. Цепь, показанная на рис. 15.19, состоит из двух конденсаторов с емкостями C_1 и C_2 , двух катушек с индуктивностями L_1 и L_2 , двух идеальных диодов D_1 и D_2 и ключа K . Первоначально конденсатор C_2 заряжен. В момент времени $t = 0$ ключ K замыкают. Найти продолжительность τ переходного процесса (то есть момент времени τ , начиная с которого процесс станет периодическим).

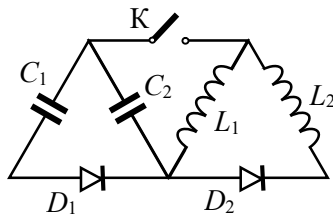


Рис. 15.19. Схема цепи с диодами.

§16. Цепи переменного тока

- Метод комплексных амплитуд.

В основе метода лежит замена гармонически меняющейся во времени вещественной физической величины $A(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi)$ комплексным представлением $\hat{A}(t)$:

$$\begin{aligned}\hat{A}(t) &= A_0 e^{i\varphi} e^{i\omega t} = \hat{A}_0 e^{i\omega t} = A_0 e^{i(\omega t + \varphi)} = \\ &= A_0 \cos(\omega t + \varphi) + i \cdot A_0 \sin(\omega t + \varphi), \\ A(t) &= \operatorname{Re}(\hat{A}(t)) = A_0 \cos(\omega t + \varphi).\end{aligned}$$

Здесь $\hat{A}_0 = A_0 e^{i\varphi}$ – комплексная амплитуда, A_0 – амплитуда и φ – (начальная) фаза гармонических колебаний.

- Комплексное сопротивление (импеданс) Z участка цепи:

$$Z \equiv \frac{\hat{U}(t)}{\hat{I}(t)} = \frac{\hat{U}_0 e^{i\omega t}}{\hat{I}_0 e^{i\omega t}} = \frac{\hat{U}_0}{\hat{I}_0} = \frac{U_0}{I_0} e^{i(\varphi_U - \varphi_I)},$$

где $\hat{U}(t)$ и $\hat{I}(t)$ – мгновенные значения напряжения и силы тока на участке цепи:

$$\hat{I}(t) = \hat{I}_0 e^{i\omega t} = I_0 e^{i(\omega t + \varphi_I)}, \quad \hat{U}(t) = \hat{U}_0 e^{i\omega t} = U_0 e^{i(\omega t + \varphi_U)}.$$

Здесь \hat{I}_0 и \hat{U}_0 – комплексные амплитуды, I_0 и U_0 – амплитуды, а φ_I и φ_U – фазы гармонически меняющихся силы тока и напряжения на участке цепи. При этом:

$$\begin{aligned}I(t) &= \operatorname{Re}(\hat{I}(t)) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_I), \\ U(t) &= \operatorname{Re}(\hat{U}(t)) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_U).\end{aligned}$$

В общем случае комплексное сопротивление участка цепи можно представить в виде:

$$Z = X + iY = |Z| e^{i\varphi} = |Z| \cos \varphi + i |Z| \sin \varphi,$$

где $X = \operatorname{Re} Z = |Z| \cos \varphi$ – активное и $Y = \operatorname{Im} Z = |Z| \sin \varphi$ – реактивное сопротивление цепи, $|Z| = \sqrt{X^2 + Y^2}$ – полное сопротивление цепи (модуль импеданса), $\varphi = \varphi_U - \varphi_I$ – аргумент комплексного сопротивления, равный фазе, на которую напряжение опережает силу тока на данном участке цепи, причем

$$\cos \varphi = \frac{X}{|Z|} \quad \text{и} \quad \sin \varphi = \frac{Y}{|Z|}.$$

- Комплексное сопротивление резистора :

$$Z_R = R, |Z_R| = R, \varphi_R = 0, X_R = R, Y_R = 0.$$

- Комплексное сопротивление катушки индуктивности:

$$Z_L = i\omega L = \omega L e^{i\frac{\pi}{2}}, |Z_L| = \omega L, \varphi_L = \frac{\pi}{2}, X_L = 0, Y_L = \omega L.$$

- Комплексное сопротивление конденсатора:

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-i\frac{\pi}{2}}, |Z_C| = \frac{1}{\omega C}, \varphi_C = -\frac{\pi}{2}, X_C = 0, Y_C = -\frac{1}{\omega C}.$$

- Аналог закона Ома для гармонических токов в комплексной форме:

$$\hat{U}(t) = Z\hat{I}(t), \hat{U}_0 = Z\hat{I}_0, U_0 = |Z|I_0.$$

- Аналог обобщенного закона Ома в комплексной форме:

$$Z_{12}\hat{J} = \hat{U}_{12} + \mathcal{E}_{12}.$$

- Векторные диаграммы силы тока и напряжения для резистора, катушки индуктивности и конденсатора:

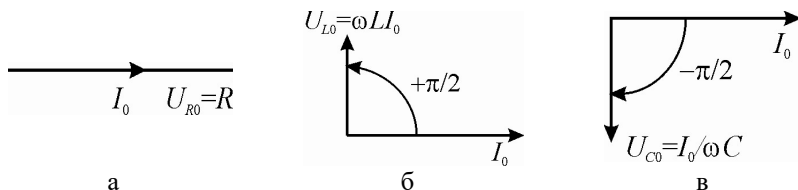


Рис. 16.1. Векторные диаграммы силы тока и напряжения: а – для резистора сопротивлением R ; б – для катушки с индуктивностью L ; в – для конденсатора емкостью C .

- Действующими (эффективными) значениями силы тока и напряжения для переменного тока называют величины силы тока и напряжения для постоянного тока, который за период производит такую же работу, что и рассматриваемый переменный ток.

$$I_{\text{eff}} \equiv \frac{I_0}{\sqrt{2}}, U_{\text{eff}} \equiv \frac{U_0}{\sqrt{2}},$$

где I_0 и U_0 – амплитуды гармонически меняющихся силы тока и напряжения на участке цепи.

- Коэффициент мощности цепи:

$$\cos \varphi = \frac{X}{|Z|} = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}.$$

- Средняя за период мощность в цепях переменного тока:

$$\langle P(t) \rangle_T = \frac{U_0 I_0}{2} \cos \varphi = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi.$$

16.1. Найти модуль импеданса $|Z|$ цепей, изображенных на рис. 16.1, если частота синусоидального напряжения источника равна ω .

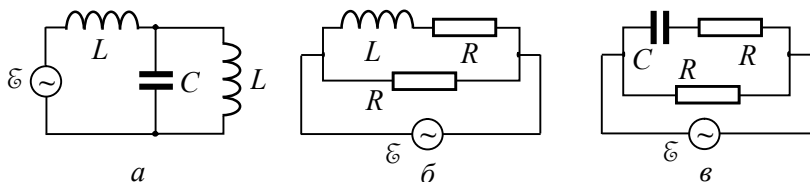


Рис. 16.1. Схемы цепей переменного тока.

16.2. Найти модуль импеданса цепи, состоящей из параллельно соединенных конденсатора емкостью $C = 100$ мкФ и активного сопротивления $R = 60$ Ом, подключенных к источнику синусоидального напряжения с частотой $\nu = 50$ Гц.

16.3. Параллельно соединенные конденсатор емкостью C и катушка с активным сопротивлением R и индуктивностью L подключены к источнику переменного напряжения с частотой ω . Найти модуль импеданса цепи.

16.4. Параллельно соединенные резистор сопротивлением $R = 20$ Ом и катушка индуктивности $L = 10$ мГн (с пренебрежимо малым активным сопротивлением) подключены к источнику переменного тока с частотой $\omega = 314$ с⁻¹. Определить модуль импеданса $|Z|$ цепи и сдвиг фаз φ между напряжением источника и током через него.

16.5. Построить примерные векторные диаграммы напряжений и токов в цепях, изображенных на рис. 16.2, если параметры цепей удовлетворяют следующим условиям: а) $R_2 = 3R_1$, модули

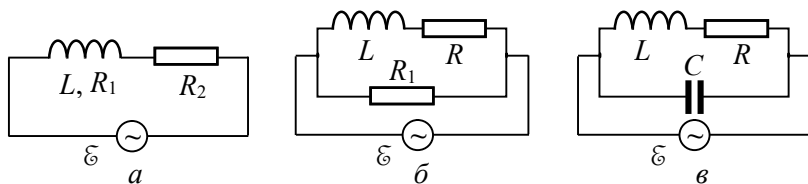


Рис. 16.2. Схемы цепей переменного тока.

реактивного и активного сопротивлений катушки индуктивности равны между собой; б) и в): модуль реактивного сопротивления катушки индуктивности L равен сопротивлению резистора R .

16.6. Источник переменного напряжения $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$ ($\mathcal{E}_0 = 200$ В), конденсатор и резистор с сопротивлением $R = 50$ Ом соединены последовательно. Определить разность фаз φ между током и напряжением источника, если амплитуда тока в цепи равна $I_0 = 2$ А.

16.7. Построить векторную диаграмму напряжений и токов для цепи, изображенной на рис. 16.3, если модуль реактивного сопротивления катушки индуктивности L равен сопротивлению резистора r , а амплитуды токов через резистор R и конденсатор емкости C одинаковы. При каком соотношении параметров схемы это возможно для переменного напряжения частотой ω ?

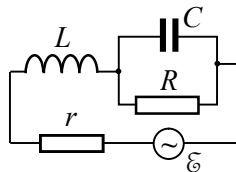


Рис. 16.3. Схема цепи.

16.8. Последовательный RLC -контур, в котором сопротивление резистора $R = 300$ Ом, индуктивность катушки $L = 1$ Гн и емкость конденсатора $C = 2$ мкФ, подключён к генератору переменного напряжения с частотой $\nu = 50$ Гц. Найти сдвиг фаз φ между током и напряжением в цепи.

16.9. Катушка с сопротивлением $r = 6$ Ом и индуктивностью L включена в цепь переменного тока с частотой $\nu = 50$ Гц. Определить индуктивность катушки, если известно, что сдвиг фаз между током и напряжением равен $\varphi = 60^\circ$.

16.10. Определить сдвиг фаз между напряжением на сопротивлении R и ЭДС \mathcal{E} источника переменного напряжения частоты ω для цепи, изображенной на рис. 16.4.,

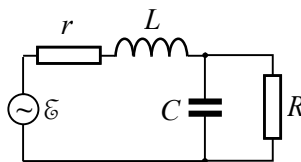


Рис. 16.4. Схема цепи.

16.11. Имеются две цепи. В одной генератор переменного напряжения, катушка с индуктивностью L и резистор с сопротивлением R соединены последовательно. В другой – источник переменного напряжения с той же частотой, конденсатор с емкостью C и резистор с сопротивлением R соединены параллельно. При каком соотношении между L , C и R сдвиг фаз между током и напряжением генератора в обоих случаях будет одинаков по абсолютной величине?

16.12. Последовательно соединенные конденсатор емкостью $C = 20$ мкФ и резистор сопротивлением $R = 150$ Ом подключены к

источнику синусоидального напряжения частотой $\nu = 50$ Гц с амплитудой $\mathcal{E}_0 = 220$ В. Определить напряжение на каждом из элементов схемы.

16.13. Через последовательно соединенные дроссель с омическим сопротивлением $r = 120$ Ом и конденсатор с емкостью $C = 10$ мкФ течет ток частотой $\nu = 50$ Гц с амплитудой $I_0 = 1$ А. Амплитуда суммарного напряжения на дросселе и конденсаторе равна $U_0 = 220$ В. Определить индуктивность L дросселя.

16.14. К сети переменного напряжения частотой $\nu = 50$ Гц с амплитудой $U_0 = 120$ В подключены параллельно соединенные конденсатор емкостью $C = 20$ мкФ и катушка индуктивности $L = 0,5$ Гн с активным сопротивлением $r = 100$ Ом. Определить амплитуды токов в конденсаторе и катушке индуктивности, а также тока в сети.

16.15. Параллельно соединенные реостат с сопротивлением R и катушка индуктивности L с омическим сопротивлением r подключены к сети переменного тока с частотой ω . По катушке течет ток с амплитудой I_{L0} . Определить амплитуду тока I_{R0} через реостат и общего тока I_0 сети. Чему равна разность фаз φ между общим током и напряжением на данном участке цепи?

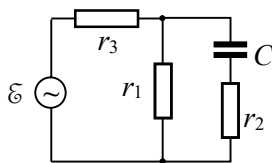


Рис. 16.5. Схема цепи.

В схеме, изображенной на рис. 16.5, сопротивления резисторов $r_1 = r_2 = r_3 = 1$ Ом, емкость конденсатора $C = 3,18$ мкФ, амплитуда ЭДС источника переменного тока $\mathcal{E}_0 = 10$ В, частота тока $\nu = 50$ кГц. Рассчитать токи через все резисторы и сдвиг по фазе $\Delta\varphi$ между токами через резисторы r_3 и r_1 . Расчет провести в численном виде.

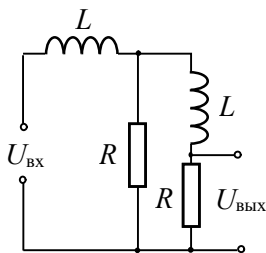


Рис. 16.6. Схема цепи.

16.16. В схеме, изображенной на рис. 16.5, сопротивления резисторов $r_1 = r_2 = r_3 = 1$ Ом, емкость конденсатора $C = 3,18$ мкФ, амплитуда ЭДС источника переменного тока $\mathcal{E}_0 = 10$ В, частота тока $\nu = 50$ кГц. Рассчитать токи через все резисторы и сдвиг по фазе $\Delta\varphi$ между токами через резисторы r_3 и r_1 . Расчет провести в численном виде.

16.17. С помощью схемы, изображенной на рис. 16.6, требуется получить сдвиг фаз на угол $\Delta\varphi = 90^\circ$ между напряжением на входе $U_{вх}$ и напряжением на выходе $U_{вых}$. При каком соотношении между R и L это возможно, если частота переменного тока равна ω ? Каким в этом случае будет отношение амплитуд входного и выходного напряжений?

16.18. В цепи, изображенной на рис. 16.7, частота генератора синусоидального напряжения равна

ω . Амплитуда напряжения на зажимах генератора равна \mathcal{E} . Найти ток I в цепи.

16.19. Амплитуда напряжения на зажимах генератора в цепи, представленной на рис. 16,8, равна U_0 , частота напряжения ω . Найти амплитуду тока I_0 в цепи и сдвиг фаз $\Delta\phi$ между током и напряжением генератора.

16.20. Последовательно соединенные дроссель, обладающий активным и индуктивным сопротивлениями, и резистор сопротивлением R подключены к сети переменного тока с эффективным напряжением U . При этом эффективное напряжение на резисторе равно U_1 , а на дросселе – U_2 . Какие мощности P_1 и P_2 выделяются на резисторе и дросселе соответственно?

16.21. Дроссель, обладающий активным и индуктивным сопротивлениями, и резистор с сопротивлением $R = 50$ Ом соединены параллельно и подключены к источнику переменного напряжения. По дросселю течет ток с эффективной силой $I_1 = 2,8$ А, через резистор – ток с эффективной силой $I_2 = 2,5$ А. Эффективное значение силы тока в цепи равно $I = 4,5$ А. Определить мощности P_1 и P_2 , потребляемые резистором и дросселем соответственно.

16.22. Резистор R и индуктивность L соединены параллельно и включены в цепь переменного тока с эффективным напряжением $\mathcal{E} = 400$ В и частотой $\nu = 50$ Гц. Найти сопротивление R и индуктивность L , если известно, что мощность, потребляемая этой цепью, $P = 400$ Вт. Сдвиг фаз между током и ЭДС источника равен $\phi = 45^\circ$.

16.23. В цепь переменного тока с эффективным напряжением $\mathcal{E} = 200$ В и частотой $\nu = 50$ Гц включена катушка, обладающая как индуктивностью, так и активным сопротивлением. Сдвиг фаз между током и напряжением равен $\phi = 15^\circ$. Определить индуктивность L катушки, если известно, что на ней рассеивается мощность $P = 400$ Вт.

16.24. Соединенные последовательно катушка индуктивности и резистор включены в цепь переменного тока с эффективным напряжением $U = 100$ В и частотой $\nu = 50$ Гц. Эффективное значение тока в цепи равно $I = 10$ А, а мощность, потребляемая из сети, $P = 600$ Вт. Найти сопротивление R резистора и индуктивность L катушки.

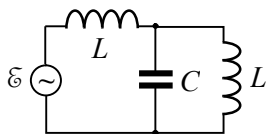


Рис. 16.7. Схема цепи.

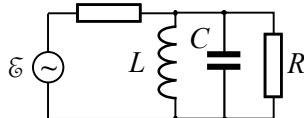


Рис. 16.8. Схема цепи.

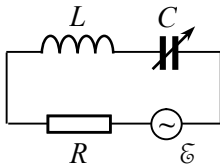


Рис. 16.9. Схема цепи.

тора можно плавно изменять в широких пределах. Определить зависимость мощности P источника от величины емкости C . При каком значении емкости эта мощность будет максимальна и чему она будет равна?

16.26. Последовательно соединенные резистор и конденсатор включены в цепь переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц с эффективным напряжением $U = 150$ В. Эффективный ток в цепи равен $I = 5$ А, а мощность, потребляемая из сети, $P = 500$ Вт. Определить емкость C конденсатора.

16.27. Найти КПД цепи, нагрузкой в которой служит дроссель с индуктивностью L и омическим сопротивлением R , а r – суммарное сопротивление проводов и внутреннего сопротивления источника гармонического напряжения частотой ω .

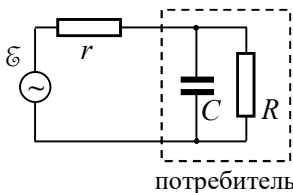


Рис. 16.10. Схема генератора с нагрузкой.

16.28. Генератор переменного тока частотой ω с эффективным напряжением \mathcal{E} соединен с нагрузкой, представляющей собой параллельно соединенные конденсатор с емкостью C и резистор с сопротивлением R (рис. 16.10). Определить мощность P_0 генератора, полезную мощность P и КПД η цепи.

16.29. К сети с эффективным напряжением U и частотой ω подключили катушку с индуктивностью L и активным сопротивлением. Модуль импеданса катушки равен Z . Найти коэффициент мощности цепи и тепловую мощность P , рассеиваемую катушкой.

16.30. Цепь, состоящая из последовательно соединенных конденсатора и катушки, подключена к сети. Изменив емкость конденсатора, добились увеличения выделяемой тепловой мощности в катушке в $n = 1,7$ раза. На сколько процентов изменилось при этом значение коэффициента мощности цепи $\cos\varphi$?

§17. Колебания в электрических контурах

- Уравнение гармонических колебаний:

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0,$$

где ξ – одна из переменных, в роли которой могут выступать заряд на конденсаторе q , сила тока I в контуре, напряжения на резисторе U_R , конденсаторе U_C или катушке индуктивности U_L ,

$\omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – круговая частота собственных гармонических колебаний в контуре.

- Общее решение уравнения гармонических колебаний:

$$\xi(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

• Временные зависимости энергии электрического поля $W_q(t)$ в конденсаторе C и энергии магнитного поля $W_I(t)$ в катушке индуктивности L при гармонических колебаниях:

$$W_q(t) = \frac{q^2(t)}{2C} = \frac{A^2}{2C} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = W_0 \frac{1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi)}{2},$$

$$W_I(t) = \frac{LI^2(t)}{2} = \frac{LA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = W_0 \frac{1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)}{2},$$

где $W_0 = \frac{A^2}{2C} = \frac{LA^2\omega_0^2}{2}$.

• Уравнение собственных затухающих колебаний в контуре:

$$\ddot{\xi}(t) + 2\beta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = 0,$$

где $\beta \equiv \frac{R}{2L}$ – коэффициент затухания.

• Решение уравнения собственных колебаний с затуханием меньше критического ($\beta < \omega_0$ или $R < 2\sqrt{L/C}$):

$$\xi(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \text{ где } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

• Средняя за период энергия колебательного контура с токком $\langle W \rangle_T$:

$$\langle W \rangle_T = \langle W_q \rangle_T + \langle W_I \rangle_T = W_0 e^{-2\beta t} \langle W \rangle_T = \langle W_q \rangle_T + \langle W_I \rangle_T = W_0 e^{-2\beta t}.$$

• Средняя за период T мощность потерь $\langle P \rangle_T$ колебательного контура:

$$\langle P \rangle_T \equiv - \left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle_T = 2\beta W_0 e^{-2\beta t}.$$

• Логарифмический декремент затухания θ :

$$\theta = \beta T \cong \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

• Добротность колебательной системы Q :

$$Q \equiv 2\pi \frac{\langle W \rangle_T}{\langle P \rangle_T T} = \frac{\pi}{\theta} = \frac{\omega}{2\beta}.$$

• Уравнение колебаний в контуре под действием гармонической вынуждающей силы $X(t) = X_0 \cos(\omega t)$:

$$\ddot{\xi}(t) + 2\delta \dot{\xi} + \omega_0^2 \xi = X_0 \cos(\omega t).$$

• Закон установившихся вынужденных колебаний:

$$\xi(t) = \xi_0(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)),$$

$$\xi_0(\omega) = \frac{X_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}}, \quad \text{tg } \varphi(\omega) = -\frac{2\omega\beta}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

где $\xi_0(\omega)$ – амплитуда установившихся вынужденных колебаний, $\varphi(\omega)$ – сдвиг по фазе обобщенной переменной $\xi(t)$ относительно обобщенной силы $X(t)$.

• Полное сопротивление (импеданс) последовательно соединенных резистора R , конденсатора C и катушки индуктивности L :

$$Z_0 = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}.$$

• Сдвиг фаз φ между напряжением генератора и силой тока в цепи последовательно соединенных резистора R , конденсатора C и катушки индуктивности L :

$$\text{tg } \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

17.1. В схеме, изображенной на рис. 17.1, ключ K сначала разомкнут, а напряжение на обкладках конденсатора емкостью C равно U_0 . Определить изменение со временем напряжения U и токов I_1 и I_2 в катушках с индуктивностями L_1 и L_2 после замыкания ключа. Взаимной индукцией катушек пренебречь.

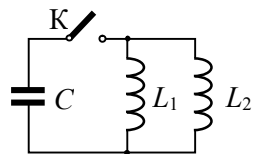


Рис. 17.1. Схема контура.

17.2. Колебательный контур содержит конденсатор емкостью C и соленоид индуктивностью L_1 . Соленоид индуктивно связан с короткозамкнутой катушкой, имеющей индуктивность L_2 и пренебрежимо малое активное сопротивление. Коэффициент взаимной индукции соленоида и катушки равен L_{12} . При разомкнутом ключе K конденсатор зарядили, после чего ключ замкнули. Определить частоту собственных колебаний контура.

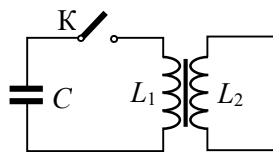


Рис. 17.2. Схема контура.

17.3. В схеме, изображенной на рис. 17.3, в начальный момент времени через катушку индуктивности L_1 и замкнутый ключ K течет ток I_0 , а напряжение на конденсаторе равно нулю. В момент времени $t = 0$ ключ размыкают. Найти зависимость от времени напряжения U на конденсаторе и тока I через него. Активным сопротивлением всех элементов цепи пренебречь.

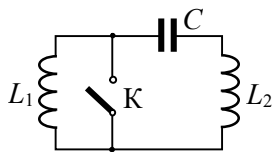


Рис. 17.3. Схема контура.

17.4. Определить отношение энергии магнитного поля колебательного контура, в котором напряжение на конденсаторе меняется по закону $U = U_0 \cos \omega_0 t$, к энергии его электрического поля в моменты времени: а) $t_1 = T/8$; б) $t_2 = T/3$.

17.5. Колебательный контур состоит из конденсатора и катушки с индуктивностью $L = 0,5$ Гн, которые соединены последовательно. Чему равно омическое сопротивление контура r , если известно, что амплитуда собственных колебаний в нём за время $\tau = 0,2$ с уменьшается в e раз?

17.6. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 5$ мкФ и катушки с индуктивностью $L = 40$ мГн и активным сопротивлением $r = 2$ Ом. Через сколько колебаний амплитуда тока в этом контуре уменьшится в e раз?

17.7. За какое время амплитуда колебаний тока в контуре с добротностью $Q = 6000$ уменьшится в $\eta = 3$ раза, если частота собственных колебаний контура $\nu_0 = 10$ кГц?

17.8. Логарифмический декремент затухания в колебательном контуре, состоящем из конденсатора и катушки индуктивности, равен $\theta = 0,2$. Во сколько раз η изменится амплитуда напряжения на конденсаторе за время одного полного колебания?

17.9. В колебательном контуре, состоящем из конденсатора емкостью $C = 100$ мкФ и катушки с индуктивностью $L = 0,6$ Гн амплитуда напряжения на конденсаторе за время $\Delta t = 2$ с уменьшилась в $n = 3$ раза. Определить добротность Q данного контура.

17.10. Определить относительную погрешность, допускаемую при расчете циклической частоты ω колебаний в контуре с добротностью $Q = 7$ по формуле для частоты собственных гармонических колебаний: $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

17.11. Колебательный контур состоит из конденсатора и длинной катушки с индуктивностью $L = 2$ Гн и активным сопротивлением $R = 500$ Ом. Чему равна емкость конденсатора C , если погрешность вычисления периода колебаний контура по формуле Томсона для периода собственных гармонических колебаний $T = 2\pi\sqrt{LC}$ равна $\delta = 1\%$?

17.12. В контуре наблюдаются свободные затухающие колебания, при которых напряжение на конденсаторе меняется во времени по закону $U = U_0 e^{-\beta t} \cos \omega t$. В какие моменты времени t_n модуль напряжения на конденсаторе достигает максимальных (экстремальных) значений?

17.13. В контуре, состоящем из конденсатора с емкостью $C = 2$ мкФ и катушки с индуктивностью $L = 5$ мГн наблюдаются затухающие колебания. За какое время Δt 90% энергии, запасенной в контуре, потеряется вследствие затухания если добротность контура $Q = 70$?

17.14. Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью $L = 5$ мГн и конденсатора емкостью $C = 0,2$ мкФ. При каких значениях логарифмического декремента θ и омического сопротивления R цепи начальная энергия контура уменьшится в $n = 10$ раз за $k = 3$ полных колебания?

17.15. Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью $L = 0,06$ мГн с активным сопротивлением $R = 2$ Ом и конденсатора с емкостью $C = 0,04$ мкФ. Какую среднюю мощность

$\langle P \rangle$ должен потреблять контур, чтобы в нем поддерживались незатухающие колебания с амплитудным значением напряжения на конденсаторе $U_0 = 1,5$ В?

17.16. Найти добротность колебательного контура из конденсатора с емкостью $C = 5,0$ мкФ и катушки с индуктивностью $L = 3,0$ мГн, если на поддержание незатухающих колебаний с амплитудой напряжения на конденсаторе $U_0 = 2,0$ В необходимо подводить среднюю мощность $\langle P \rangle = 0,20$ мВт. Считать затухание в контуре достаточно малым.

17.17. Последовательный контур подключён к генератору переменного напряжения с амплитудой $\mathcal{E}_0 = 4$ В. При резонансе амплитуда напряжения на конденсаторе равна $U_{Cp} = 120$ В. Считая затухание в контуре малым, определить добротность Q контура.

17.18. В последовательном RLC -контуре с $R = 2$ Ом и $C = 1$ мкФ резонансная частота равна $\nu_p = 800$ Гц. Определить добротность Q контура при условии, что затухание в контуре мало.

17.19. В колебательном контуре с последовательно соединенными конденсатором и катушкой индуктивности происходят вынужденные гармонические колебания. При частотах вынуждающей ЭДС ω_1 и ω_2 амплитуды тока одинаковы. Определить частоту ω_0 собственных гармонических колебаний контура.

17.20. Стандартным методом определения добротности в последовательных RLC -контурх с достаточно малым затуханием является следующий. Снимается резонансная кривая тока $I(\omega)$ в контуре, по которой определяется резонансная частота ω_p и ширина резонансной кривой (полоса пропускания контура) $\Delta\omega$, то есть диапазон частот, на границах которого сила тока уменьшается в $\sqrt{2}$ раз относительно резонансного значения I_p (мощность оказывается в 2 раза меньше мощности, расходуемой при резонансе). Определить по этим данным добротность Q контура.

17.21. Цепь, содержащая последовательно соединенные конденсатор емкостью C и катушку индуктивности L с активным сопротивлением R , подключена к источнику гармонического напряжения $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$, частоту которого можно менять, не изменяя амплитуды. Определить частоту ω_{Cp} , при которой амплитуда напряжения на конденсаторе U_{C0} максимальна. Чему равно это максимальное значение?

17.22. В колебательном контуре с последовательно соединенными конденсатором и катушкой индуктивности с активным

сопротивлением происходят вынужденные гармонические колебания. При частотах вынуждающей ЭДС $\omega_1 = 300 \text{ с}^{-1}$ и $\omega_2 = 600 \text{ с}^{-1}$ амплитуда тока равна половине его максимального значения. Определить частоту ω_{cp} , при которой амплитуда напряжения на обкладках конденсатора максимальна.

17.23. Цепь из последовательно соединенных конденсатора с емкостью C , катушки индуктивности L и активного сопротивления R подключена к источнику гармонического напряжения $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$, частоту которого можно менять, не изменяя его амплитуды. Определить частоту ω_{Lp} , при которой амплитуда напряжения на катушке U_{L0} максимальна. Чему равно это максимальное значение?

17.24. Какова должна быть индуктивность L катушки, которую надо включить последовательно с конденсатором емкостью $C = 3000 \text{ пФ}$, чтобы наблюдался резонанс в цепи на частоте $\nu_0 = 50 \text{ кГц}$? При каком активном сопротивлении R цепи добротность контура с такой катушкой равна $Q = 100$?

17.25. Колебательный контур состоит из параллельно соединенных катушки с индуктивностью L и активным сопротивлением R и конденсатора емкостью C и подключен к источнику переменной ЭДС $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$ (рис. 17.4). Определить резонансную частоту контура, при которой контур обладает чисто активным сопротивлением.

17.26. Схема цепи, в которой может наблюдаться резонанс токов, представлена на рис. 17.5. ЭДС источника $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$, $\varepsilon_0 = 100 \text{ В}$. Параметры этого параллельного контура: $r = 5 \text{ Ом}$, $L = 100 \text{ мкГн}$, $C = 100 \text{ пФ}$. Найти резонансную частоту ω_p , добротность Q и полное сопротивление контура Z_0 при резонансе.

17.27. Определить частоту ω_x , при которой контур, подсоединенный к источнику ЭДС в схеме, изображенной на рис. 17.6, об-

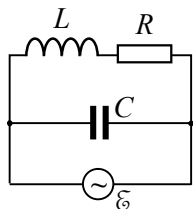


Рис. 17.4. Колебательный RLC-контур и генератор.

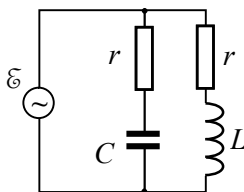


Рис. 17.5. Схема цепи.

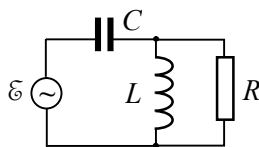


Рис. 17.6. Схема контура.

лаждает чисто активным сопротивлением.

17.28. Для схемы, изображенной на рис. 17.6, определить мощность P источника ЭДС при резонансе. Считать, что затухание в контуре мало: $\sqrt{L/C} \gg R$.

17.29. В цепи, схема которой представлена на рис. 17.7, $R = 100$ Ом, $L = 4$ Гн, $C_1 = 3$ мкФ, $C_2 = 1$ мкФ. ЭДС источника $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$, $\mathcal{E}_0 = 200$ В. Определить резонансные частоты контура и силы токов I_1 , I_2 и I_3 при резонансных частотах.

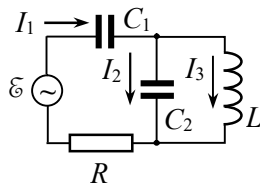


Рис. 17.7. Схема контура.

17.30. В цепи, схема которой изображена на рис. 17.8, емкость конденсатора равна C , индуктивности катушек L_1 и L_2 , а коэффициент их взаимной индукции равен L_{12} . Определить частоту ω_p , при которой в контуре будет резонанс токов. Каким должен быть коэффициент взаимной индукции катушек, чтобы контур был настроен на частоту ω_0 ?

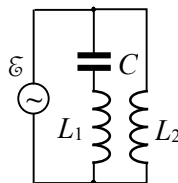


Рис. 17.8. Схема цепи.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

§1. Электростатическое поле в вакууме

$$1.1. a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{md^2} \cong 2,53 \cdot 10^6 \text{ м/с}^2.$$

$$1.2. m'_p = \frac{q_p}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 G}} = 1,86 \cdot 10^{-9} \text{ кг} \approx 1,1 \cdot 10^{18} m_p.$$

Решение. Сила кулоновского отталкивания двух протонов, находящихся на расстоянии r друг от друга, равна: $F_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_p^2}{r^2}$.

Сила их гравитационного притяжения $F_m = G \frac{m_p'^2}{r^2}$. Приравнивая эти силы, получим:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_p^2}{r^2} = G \frac{m_p'^2}{r^2},$$

откуда находим, какой должна была бы быть масса протона:

$$m'_p = \frac{q_p}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 G}} = 1,86 \cdot 10^{-9} \text{ кг} \approx 1,1 \cdot 10^{18} m_p,$$

где m_p – реальная масса протона.

$$1.3. F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{ne^2}{d^2} \cong 0,9 \text{ Н}.$$

$$1.4. \mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \frac{q_i q'_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_j|^3} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_j).$$

$$1.5. Q = q / \sqrt{3}.$$

Решение. Укажем все силы, действующие на один из зарядов q со стороны других зарядов (см. рис. О.1.5). По закону Кулона силы со стороны зарядов q равны по модулю $f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{a^2}$ (a – сторона треугольника) и направлены по линии соединения зарядов, а модуль силы со стороны заряда

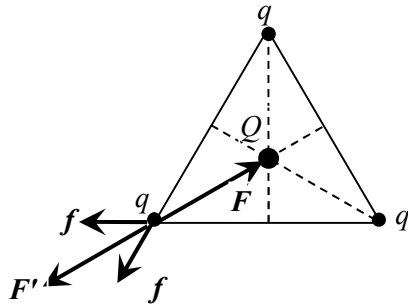


Рис. О.1.5.

Q $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{r^2}$, где расстояние между зарядами Q и q

$$r = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}. \text{ Тогда } F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3qQ}{a^2}.$$

По условию задачи сумма всех сил, действующих на заряд q , должна быть равна нулю. Для этого сумма F' двух сил f , направленных под углом $\pi/3$ друг к другу (см. рис. О.1.5), должна быть равна по модулю силе F со стороны заряда Q и противоположно ей направлена:

$$F' = 2f \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sqrt{3}q^2}{a^2}.$$

Приравнявая модули сил F' и F , определяем заряд Q :

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sqrt{3}q^2}{a^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3qQ}{a^2} \rightarrow Q = q / \sqrt{3}.$$

Расставив все силы, действующие на заряд Q со стороны зарядов q , легко убедиться, что сумма всех действующих на него сил также равна нулю.

$$1.6. f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4\sqrt{2}q^2}{a^2}. \text{ Сила направлена параллельно сто-}$$

роне квадрата, соединяющей заряды q и $4q$, к стороне, соединяющей заряды q и $2q$.

1.7. $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{6q^2}{a^2}$. Сила направлена в сторону заряда $2q$.

1.8. Шарики соприкоснутся, а затем установятся на расстоянии $a_1 = a/4^{1/3} \approx 3,14$ см.

Решение. Пусть заряд каждого шарика был q . На каждый шарик будут действовать сила тяжести mg , сила натяжения нити T и сила кулоновского отталкивания с модулем $F_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{a^2}$ (см. рис. О.1.8).

В равновесии сумма всех сил, действующих на шарик, равна нулю:

$$F_q + mg + T = 0,$$

поэтому $\operatorname{tg}\alpha = F_q / mg$.

Поскольку с учетом большой (по условию задачи) длины нити $\operatorname{tg}\alpha = (a/2)/l$ (l – длина нити), уравнение равновесия шариков имеет вид:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{a^2 mg} = \frac{a}{2l} \rightarrow a^3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2lq^2}{mg}.$$

После того, как один из шариков разрядили, он притянется к другому шарика, и заряд q разделится между ними пополам. После этого из-за кулоновского отталкивания шарики разойдутся на некоторое расстояние a_1 . Аналогично предыдущим рассуждениям, новое условие равновесия шариков будет иметь вид:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(q/2)^2}{a_1^2 mg} = \frac{a_1}{2l} \rightarrow a_1^3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2lq^2}{4mg}.$$

Сравнивая выражения для a^3 и a_1^3 , находим, что $a_1 = a/4^{1/3} \approx 3,14$ см.

1.9. $q = l\sqrt{8\pi\epsilon_0 mg}$.

1.10. $q_1 = \sqrt{4\pi\epsilon_0} r (\sqrt{F_1 + F_2} + \sqrt{F_2})$,

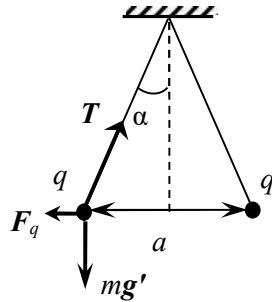


Рис. О.1.8.

$$q_2 = \sqrt{4\pi\epsilon_0 r} \left(\sqrt{F_2} - \sqrt{F_1 + F_2} \right).$$

Решение. Первоначально сила притяжения шариков была по модулю равна $F_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1|q_2|}{r^2}$. После соприкосновения заряды q

шариков оказались одинаковыми, причем по закону сохранения заряда суммарный заряд двух шариков не изменился:

$$q_1 - |q_2| = 2q > 0. \text{ Сила их отталкивания } F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{r^2}, \text{ откуда}$$

находим новый заряд шариков $q = \sqrt{4\pi\epsilon_0 F_2 r}$. Следовательно,

$$q_1 - |q_2| = 2\sqrt{4\pi\epsilon_0 F_2 r} \text{ и } q_1|q_2| = 4\pi\epsilon_0 F_1 r^2.$$

Выражая q_1 из первого уравнения и подставляя во второе, получаем квадратное уравнение относительно $|q_2|$:

$$|q_2|^2 + 2\sqrt{4\pi\epsilon_0 F_2 r}|q_2| - 4\pi\epsilon_0 F_1 r^2 = 0,$$

решая которое с учетом того, что $|q_2| > 0$, находим:

$$|q_2| = \sqrt{4\pi\epsilon_0 r} \left(\sqrt{F_1 + F_2} - \sqrt{F_2} \right).$$

Далее определяем величину положительного заряда:

$$q_1 = \sqrt{4\pi\epsilon_0 r} \left(\sqrt{F_1 + F_2} + \sqrt{F_2} \right).$$

$$1.11. \frac{q_1}{q_2} = \frac{\cos(\alpha/2)}{4\sin^3(\alpha/2)} = 12,5.$$

Решение. Для равновесия зарядов необходимо, чтобы сумма проекций всех сил, приложенных к каждому заряду, на направление касательной к кольцу равнялась нулю. В этом случае результирующая сила перпендикулярна к окружности и уравновешивается силой реакции кольца.

Так как заряды в точках B_1 и B_2 равны, то заряд q_1 равноудален от B_1 и B_2 (рис. О.1.11). При этом проекции сил f_{21} и f_{22} , действующих на за-

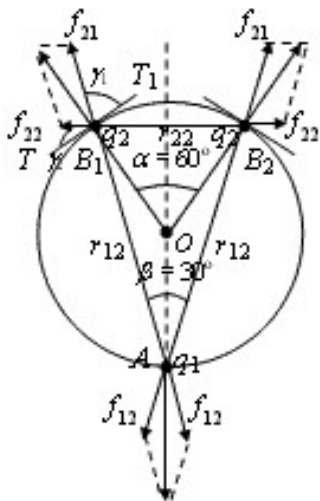


Рис. О.1.11.

ряд q_2 в точке B_1 со стороны двух других зарядов, на направление касательной к окружности TT_1 в точке B_1 , равны друг другу, т. е.

$$f_{21} \cos \gamma_1 = f_{22} \cos \gamma_2.$$

$$\text{При этом } f_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r_{12}^2},$$

где (из треугольника AB_1O) $r_{12} = 2R \cos(\beta/2)$, поэтому

$$f_{21} = \frac{q_1 q_2}{16\pi \epsilon_0 R^2 \cos^2(\beta/2)}.$$

$$\text{Далее: } f_{22} = \frac{q_2^2}{4\pi \epsilon_0 r_{22}^2},$$

где, $r_{22} = 2R \cos(\alpha/2)$ т.е.

$$f_{22} = \frac{q_2^2}{16\pi \epsilon_0 R^2 \sin^2(\alpha/2)}.$$

Углы при вершине B_1 связаны следующим образом:

$$\beta/2 + \gamma_1 = \pi/2;$$

$$\pi/2 - \alpha/2 + \gamma_1 + \gamma_2 + \beta/2 = \pi.$$

Учитывая, что $\beta = (\alpha/2)$, из представленных выше уравнений получаем:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{\cos(\alpha/2) \cos^2(\beta/2)}{\sin^2(\alpha/2) \sin(\beta/2)} = \frac{\cos(\alpha/2)}{4 \sin^3(\alpha/2)} = 12,5.$$

1.12. На расстоянии $x = \frac{\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}} l$ от заряда q_1 . Положение

равновесия устойчиво.

Решение. Будем отсчитывать расстояние вдоль трубки от заряда q_1 . Пусть шарик находится в равновесии, когда это расстояние равно x . На шарик со стороны зарядов q_1 и q_2 действуют силы отталкивания

$$F_1 = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q}{x^2} \text{ и } F_2 = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{q_2 q}{(l-x)^2},$$

которые в состоянии равновесия шарика должны быть равны друг другу:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2 q}{(l-x)^2},$$

откуда получаем квадратное уравнение для x :

$$(q_1 - q_2)x^2 - 2q_1 x + q_1 l^2 = 0.$$

Решая уравнение, находим:

$$x = \frac{\sqrt{q_1}(\sqrt{q_1} - \sqrt{q_2})}{q_1 - q_2} l = \frac{\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}} l.$$

Второй корень уравнения не подходит, т.к. при этом получается $x > l$.

1.13. Справа от $-q$ на расстоянии $a = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} l$.

Решение. Равенство нулю силы, действующей на заряд $+q$, возможно только при его расположении, показанном на рис. О.1.13, т.е. по одну сторону от зарядов $+3q$ и $-q$ ближе к меньшему по величине заряду; обозначим это расстояние a .

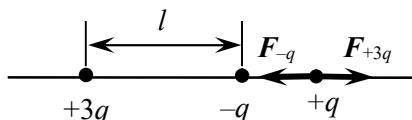


Рис. О.1.13.

Тогда условие равенства нулю силы, действующей на заряд $+q$, запишется в виде:

$$\frac{3q \cdot q}{4\pi\epsilon_0 (l+a)^2} + \frac{(-q) \cdot q}{4\pi\epsilon_0 a^2} = 0, \rightarrow 2a^2 - 2la - l^2 = 0,$$

откуда $a = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} l$. Второй корень квадратного уравнения отбрасываем, т.к. расстояние $a > 0$.

1.14. $E = 18,0$ кВ/м,

$$\mathbf{E} \approx (5,7\mathbf{e}_x - 17,0\mathbf{e}_y) \cdot 10^3 \text{ В/м}.$$

Решение. Используя численные данные задачи, изобразим изучаемую систему (рис. О.1.14). Расстояние d между точками А и В равно:

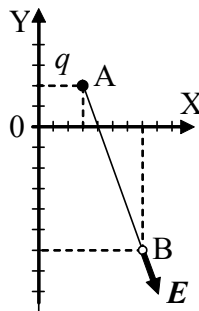


Рис. О.1.14.

$$d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Модуль напряженности поля составляет:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{d^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Так как направление вектора \mathbf{E} совпадает с направлением от т. А к т. В, то вектор \mathbf{E} запишется в виде:

$$\mathbf{E} = E \cos \alpha \cdot \mathbf{e}_x + E \sin \alpha \cdot \mathbf{e}_y = E \frac{x - x_0}{d} \mathbf{e}_x + E \frac{y - y_0}{d} \mathbf{e}_y.$$

Окончательно для напряженности \mathbf{E} получаем:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(x - x_0)\mathbf{e}_x + (y - y_0)\mathbf{e}_y}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{3/2}}.$$

Подстановка численных данных дает:

$$d = 2\sqrt{10} \text{ м}, \quad E = 18,0 \text{ кВ/м},$$

$$\mathbf{E} = \left(\frac{18}{\sqrt{10}} \mathbf{e}_x - \frac{54}{\sqrt{10}} \mathbf{e}_y \right) \cdot 10^3 \approx (5,7 \mathbf{e}_x - 17,0 \mathbf{e}_y) \cdot 10^3 \text{ В/м}.$$

1.15. Расстояние x от заряда q_1 равно: а) $x = \frac{\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}} l$;

$$\text{б) } x = \frac{\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1} - \sqrt{q_2}} l.$$

$$1.16. \quad E_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3q}{4d^2}, \quad E_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q(5 - \sqrt{2})}{2d^2}.$$

Решение. Векторы напряженностей полей, созданных зарядами $+q$ и $-q$ в точках В и С, показаны на рис. О.1.16. В точке В эти векторы коллинеарны, поэтому суммарная напряженность электрического поля в точке В направлена от зарядов и по модулю равна:

$$E_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{d^2} - \frac{q}{(2d)^2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3q}{4d^2}.$$

Чтобы вычислить модуль напряженности в т.С, можно сложить векторы напряженностей от зарядов $+q$ и $-q$ в т.С, используя теорему косинусов:

$$E_C^2 = E_{+qC}^2 + E_{-qC}^2 - 2E_{+qC}E_{-qC} \cos(\pi/4),$$

где $E_{+qC} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{d^2}$,

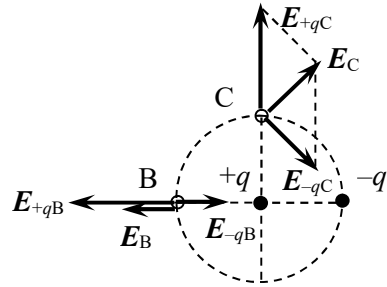


Рис. О.1.16.

$$E_{+qC} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{(\sqrt{2}d)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{2d^2}.$$

Окончательно для модуля напряженности поля в т.С получаем:

$$E_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q(5-\sqrt{2})}{2d^2}.$$

Направление вектора E_C показано на рис. О.1.16.

1.17. Компоненты напряженности вдоль сторон квадрата

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sqrt{2}}{a^2} (q_1 - q_2 - q_3 + q_4);$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sqrt{2}}{a^2} (-q_1 - q_2 + q_3 + q_4).$$

Для частных случаев: а) $E = 0$; б) $E = 0$; в)

$$E = \frac{4\sqrt{2}q}{4\pi\epsilon_0 a^2} e_y.$$

Решение. Введем декартову систему координат, направив оси X и Y параллельно сторонам квадрата, а начало отсчета совместим с его центром (рис. О.1.17). Напряженность поля системы точечных зарядов равна:

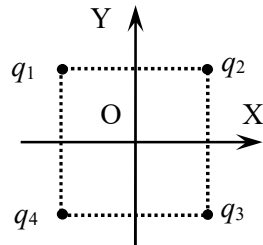


Рис. О.1.17.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i|}.$$

При отсчете расстояний от центра квадрата $\mathbf{r}_0 = 0$, а $|\mathbf{r}_i| = \frac{\sqrt{2}}{2} a$. Проекции векторов \mathbf{r}_i на оси X и Y для зарядов равны:

$$r_{1x} = r_{4x} = -a/2, \quad r_{1y} = r_{2y} = a/2,$$

$$r_{2x} = r_{3x} = a/2, \quad r_{3y} = r_{4y} = -a/2.$$

Для компонент напряженности по осям X и Y получаем:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sqrt{2}}{a^2} (q_1 - q_2 - q_3 + q_4);$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sqrt{2}}{a^2} (-q_1 - q_2 + q_3 + q_4).$$

В частных случаях напряженность в центре квадрата:

а) $E_x = E_y = 0$; б) $E_x = E_y = 0$; в) $E_x = 0, \quad E_y = \frac{4\sqrt{2}q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$.

1.18. а) $E = 0$;

б) $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4q}{a^2}$;

в) $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2q}{a^2}$.

1.19. $E_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q\sqrt{19}}{a^2}$.

Решение. Точка А и вершины треугольника находятся в вершинах пирамиды, грани которой, как и основание, являются правильными треугольниками. Напряженности полей точечных зарядов в т.А направлены по линии соединения т.А с зарядом; они показаны на рис. О.1.19. С учетом знака зарядов в силу принципа суперпозиции

$$\mathbf{E}_A = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3.$$

Векторы напряженностей E_1 и E_2 направлены под углом $\pi/3$ друг к другу, а их модули равны, поэтому модуль их векторной суммы равен

$$E_{1,3} = 2E_1 \cos(\pi/6) = E_1 \sqrt{3}.$$

Вектор $E_{1,3}$ направлен вдоль высоты треугольника ADC.

Определим величину вектора E_A :

$$E_A^2 = E_{1,3}^2 + E_2^2 - 2E_{1,3}E_2 \cos\beta, \quad (1)$$

где β – угол между ребром AB пирамиды и гранью ACD, т.к. треугольник ABF – равнобедренный

($AF = BF = a \frac{\sqrt{3}}{2}$), значит,

$$\angle FAB = \angle FBA. \text{ Следовательно, } \cos\beta = \frac{a/2}{a\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Напряженности полей $E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3q}{a^2}$, $E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2q}{a^2}$, Под-

ставляя эти величины в уравнение (1) находим: $E_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q\sqrt{19}}{a^2}$.

$$1.20. E_{\max} = \frac{q}{6\sqrt{3}\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Решение. Совместим начало координат с центром кольца и направим ось Z вдоль его оси (рис. О.1.20.). Найдем напряженность электрического поля E в произвольной точке A с координатой z на оси кольца.

Выделяем на кольце бесконечно малый элемент длиной $dl = R d\phi$, заряд которого $dq = \tau dl$, где $\tau = \frac{q}{2\pi R}$ – ли-

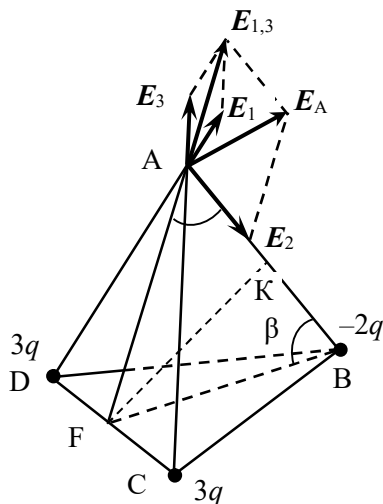


Рис. О.1.19.

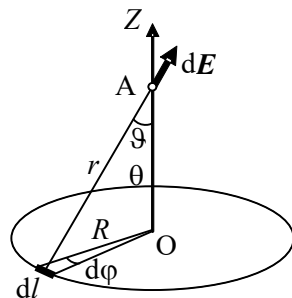


Рис. О.1.20.

нейная плотность заряда на кольце. Рассматривая заряд dq как точечный, можем найти его вклад $d\mathbf{E}$ в напряженность поля в точке А:

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r},$$

где $r = \sqrt{R^2 + z^2}$ – расстояние от заряда до точки А.

В силу симметрии распределения заряда относительно точки А интерес представляет лишь z -компонента dE_z , модуль которой

$$dE_z = dE \cos \vartheta, \text{ где } \cos \vartheta = \frac{z}{r}, \text{ т.е.}$$

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qRz}{2\pi Rr^3} d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qz}{2\pi(R^2 + z^2)^{3/2}} d\varphi.$$

Интегрируя по φ от 0 до 2π , получаем:

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}; \mathbf{E} = E_z \mathbf{e}_z.$$

Чтобы найти $(E_z)_{\max}$, используем условие экстремума $\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial z} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(R^2 + z^2)^{3/2} - (3/2)(R^2 + z^2)^{1/2} \cdot 2z^2}{(R^2 + z^2)^3} = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{R^2 - 2z^2}{(R^2 + z^2)^{5/2}} = 0, \end{aligned}$$

из которого находим

$$z_{\max} = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Максимальное значение напряженности равно:

$$E_{\max} = E_z(z_{\max}) = \frac{q}{6\sqrt{3}\pi\epsilon_0 R^2}.$$

$$1.21. T = 4\pi R \sqrt{\frac{\pi\epsilon_0 mR}{qQ}}.$$

Решение. Направим ось X вдоль оси кольца, совместив начало отсчета с его центром. Бусинка будет совершать малые колебания около центра кольца, где напряженность электрического поля меняется вдоль оси кольца по закону (см. решение задачи 1.20):

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Qx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Сила, действующая на заряд $(-q)$ со стороны поля кольца,

$$F = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

и всегда направлена к центру кольца. Так как $x \ll R$, то:

$$F = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{R^3} x.$$

Уравнение движения бусинки вдоль оси X имеет вид:

$$m\ddot{x} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{R^3} x, \text{ т.е. } \ddot{x} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{mR^3} x = 0.$$

Следовательно, бусинка будет совершать колебания с угловой частотой:

$$\omega = \sqrt{\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 mR^3}},$$

а их период равен $T = \frac{2\pi}{\omega} = 4\pi R \sqrt{\frac{\pi\epsilon_0 mR}{qQ}}$.

1.22. $E = \frac{q}{2\pi^2\epsilon_0 R^2}$. Вектор \mathbf{E} направлен от полукольца перпендикулярно его диаметру.

Решение. Направим оси X и Y в плоскости полукольца, как показано на рис. О.1.22. Рассмотрим достаточно малый элемент полукольца длиной $dl = R d\alpha$, на котором находится заряд $dq = \tau dl$, где $\tau = \frac{q}{\pi R}$ – линейная плотность заряда на полукольце. Вклад заряда dq в напряженность электрического поля в центре полукольца

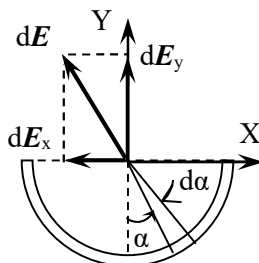


Рис. О.1.22.

равен:

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{R^2} \cdot \frac{\mathbf{R}}{R}.$$

В силу симметрии распределения заряда интерес представляет лишь y -компонента $d\mathbf{E}$:

$$dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau dl}{R^2} \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{\pi R^2} \cos \alpha d\alpha.$$

Суммируя вклады от всех элементов, находим:

$$E = E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{\pi R^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha = \frac{q}{2\pi^2 \epsilon_0 R^2}.$$

1.23. $E = -\frac{\tau \ln(\sqrt{2}-1)}{4\pi\epsilon_0 R}$; вектор \mathbf{E} направлен от кольца вдоль

его оси симметрии.

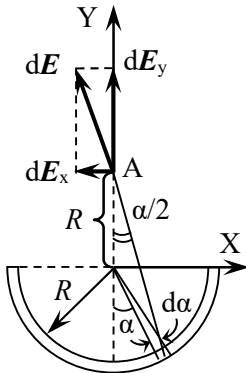


Рис. О.1.23.

Решение. Направим оси X и Y , как показано на рис. О.1.23. На полукольце выделяем участок малой длины $dl = R d\alpha$, направление на который составляет угол α с отрицательным направлением оси Y . На этом участке находится заряд $dq = \tau dl$. Так как т. А находится на расстоянии R от центра полукольца, то направление от выделенного участка на т. А составляет с отрицательным направлением оси Y угол $\alpha/2$ (см. рис. О.1.23), а расстояние от него до т. А равно

$$r = 2R \cos(\alpha/2).$$

Напряженность электрического поля, создаваемого элементом dq заряженного полукольца в т. А, равна:

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

В силу симметрии задачи в т. А компонента напряженности поля $E_x = 0$, а y -компоненту E_y находим интегрированием:

$$E_y = \int dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\tau R}{r^2} \cos \frac{\alpha}{2} d\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{2R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)}.$$

Обозначим $\alpha/2 = x$. Интеграл $\int \frac{dx}{\cos x}$ берем, делая замену переменной: $\operatorname{tg}(x/2) = t$.

$$\text{Тогда } \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

$$dt = \frac{1}{2 \cos^2(x/2)} dx = \frac{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)}{2} dx = \frac{1 + t^2}{2} dx,$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = 2 \int \frac{dt}{1 - t^2} = \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| = \ln \left| \frac{1 + \operatorname{tg}(x/2)}{1 - \operatorname{tg}(x/2)} \right|.$$

Для модуля напряженности поля в точке А получим:

$$E = E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{2R} \ln \frac{1 + \operatorname{tg}(\alpha/4)}{1 - \operatorname{tg}(\alpha/4)} \Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 R} \ln \frac{1 + \operatorname{tg}(\pi/8)}{1 - \operatorname{tg}(\pi/8)},$$

$$\text{где } \operatorname{tg}(\pi/8) = \frac{\sin(\pi/8)}{\cos(\pi/8)} = \sqrt{\frac{1 - \cos(\pi/4)}{1 + \cos(\pi/4)}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{2} - 1.$$

Окончательно

$$E = -\frac{\tau \ln(\sqrt{2} - 1)}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

$$\mathbf{1.24.} \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{h} \{(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2)\mathbf{e}_x + (\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)\mathbf{e}_y\},$$

где ось X перпендикулярна проводу, а ось Y параллельна ему;

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} \sin\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right), \text{ где } \alpha_1 \text{ и } \alpha_2 - \text{ углы, под которыми}$$

из точки А видны концы провода.

$$1.25. \quad a) \quad E_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} \left[\frac{l}{\sqrt{l^2 + h^2}} \mathbf{e}_x + \left(\frac{h}{\sqrt{l^2 + h^2}} - 1 \right) \mathbf{e}_y \right],$$

$$E_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau\sqrt{2}}{h} \sqrt{\left(1 - \frac{h}{\sqrt{l^2 + h^2}} \right)^2};$$

$$\text{при } l \rightarrow \infty \quad E_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} (\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y), \quad E_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau\sqrt{2}}{h},$$

где ось X направлена перпендикулярно стержню, ось Y вдоль стержня, начало координат совмещено с концом стержня, напротив которого находится точка A.

$$б) \quad E_B = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau l}{h \sqrt{l^2 + h^2}} \mathbf{e}_x, \quad \text{при } l \rightarrow \infty \quad E_B = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 h} \mathbf{e}_x.$$

Указание. Воспользоваться решением задачи 1.24.

1.26. $E = 0$.

Решение. Напряженность поля в т.О складывается из напряженностей, создаваемых тремя участками заряженной проволоки: двух полубесконечных прямолинейных участков 1 и 2 и полуокружности 3. Вектор напряженности от полубесконечной проволоки направлена под углом 45° к ней и в точке О его модуль равен (см. решение задачи 1.25, случай а):

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau\sqrt{2}}{R}.$$

Напряженность поля заряженного полукольца в его центре (см. решение задачи

1.22) по модулю равна $E_3 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 R}$ и направлена перпендикулярно

диаметру полукольца от него.

Векторы напряженностей от двух прямолинейных участков проволоки E_1 и E_2 и от полукольца E_3 изображены на рис. О.1.26. Модуль вектора суммы E_1 и E_2 (вектора E_{1+2}) равен:

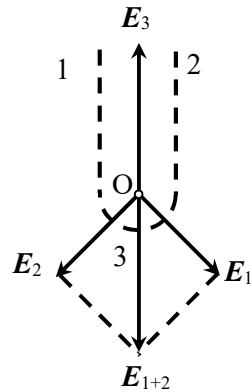


Рис. О.1.26.

$$E_{1+2} = 2E_{10} \cos \frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau\sqrt{2}}{R} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{R} = E_3.$$

Вектор E_{1+2} направлен противоположно вектору E_3 . В итоге напряженность электрического поля проволоки в т.О равна нулю.

$$1.27. F = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{d^2 - (L/2)^2}.$$

Решение. Направим ось X вдоль стержня, совмещив начало координат с зарядом q (рис. О.1.27).

Заряд распределен по стержню равномерно с линейной плотностью $\tau = Q/L$. Выделим на стержне участок длиной dx , на котором находится заряд $dQ = \tau dx = (Q/L)dx$. Этот заряд создает в точке нахождения заряда q электрическое поле с напряженностью

$$dE = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 x^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L} \frac{dx}{x^2}.$$

Напряженность поля всего стержня в этой же точке находим интегрированием: $E = \int_{d-L/2}^{d+L/2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L} \cdot \frac{dx}{x^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{d^2 - (L/2)^2}$.

Сила, действующая на заряд q , равна:

$$F = qE = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{d^2 - (L/2)^2}$$

и направлена от стержня.

$$1.28. E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{d^2 - (l/2)^2} = 720 \text{ В/м.}$$

Рассчитывать напряженность поля стержня на расстоянии d от его середины по формуле поля точечного заряда с относительной погрешностью менее 5% можно при $(d/l)_{\min} = \sqrt{5} \approx 2,2$.

Решение. Напряженность поля стержня вычислена в решении задачи 1.27. Подставляя численные данные, получаем:

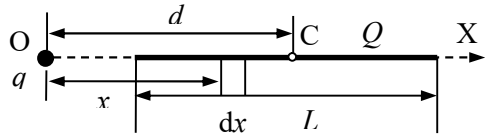


Рис. О.1.27.

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{d^2 - (l/2)^2} = 720 \text{ В/м.}$$

Формулу для напряженности поля стержня на расстоянии d от его середины получим, считая параметр d/l малым:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{d^2 - (l/2)^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{d^2(1 - l^2/4d^2)} \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 d^2} \left(1 + \frac{l^2}{4d^2}\right).$$

Если вычислять напряженность на расстоянии d от середины стержня по формуле точечного заряда, получим: $E_{\text{прибл.}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 d^2}$.

При этом относительная погрешность составит:

$$\frac{\delta E}{E} = \frac{E - E_{\text{прибл.}}}{E_{\text{прибл.}}} \approx \frac{l^2}{4d^2}.$$

Чтобы $\frac{\delta E}{E} \approx \frac{l^2}{4d^2} < 0,05$, должно выполняться условие:

$$\frac{d}{l} > \sqrt{5} \approx 2,2, \text{ т.е. } (d/l)_{\text{min}} = \sqrt{5} \approx 2,2.$$

1.29. $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau\sqrt{2}}{l}$. Вектор напряженности E направлен

вдоль диагонали прямого угла от проволоки.

1.30. $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (a/z)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + (b/z)^2}} \right) e_z$.

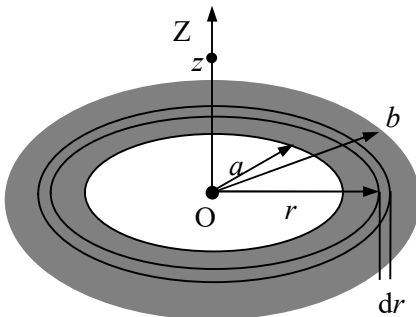


Рис. О.1.30.

Для сплошного диска

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) e_z.$$

Решение. Совместим ось Z с осью кольца, а начало координат — с его центром. Выделим в плоскости кольца колечко радиусом r шириной dr , заряд на котором равен

$dq = \sigma \cdot 2\pi r dr$ (см. рис. О.1.30). Вклад этого колечка в напряженность поля в точке с координатой z равен (см. решение задачи 1.20):

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{z dq}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \frac{z r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Интегрируя по r от a до b , получим:

$$E_z = \int_a^b dE_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{1+(a/z)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+(b/z)^2}} \right).$$

Вектор \mathbf{E} направлен вдоль оси Z от кольца.

В случае сплошного диска $a = 0$, и напряженность на оси

равна: $\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \mathbf{e}_z$.

1.31. $E = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}$.

Решение. В силу симметрии задачи воспользуемся сферической системой координат, отсчитывая угол θ от оси Z (см. рис. О.1.30). Выделим на полусфере тонкое кольцо радиусом $r = R \sin \theta$ и шириной $dr = R d\theta$. Заряд на этом кольце равен

$$dq = \sigma dS = \sigma \cdot 2\pi r dr = 2\pi R^2 \sigma \sin \theta d\theta.$$

Вклад этого заряда в напряженность в точке O равен (см. решение задачи 1.20):

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq \cdot z}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{R \cos \theta \cdot 2\pi R^2 \sigma \sin \theta d\theta}{R^3} = \frac{\sigma \sin 2\theta}{4\epsilon_0} d\theta.$$

В результате интегрирования по углу θ получим:

$$E = \int_0^{\pi/2} \frac{\sigma \sin 2\theta}{4\epsilon_0} d\theta = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}.$$

Направление \mathbf{E} показано на рис. О.1.31.

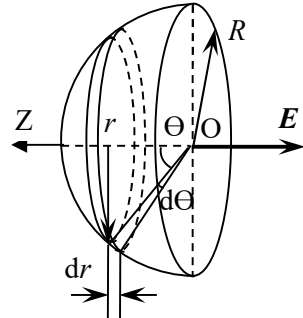


Рис. О.1.31.

$$1.32. E = \frac{\sigma S}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Решение. По аналогии с решением задачи 1.31, разбиваем сегмент на колечки и суммируем вклады от них в напряженность поля в центре кривизны сегмента точке О:

$$E = \int_0^{\theta_{\max}} \frac{\sigma \sin 2\theta}{4\epsilon_0} d\theta = -\frac{\sigma}{8\epsilon_0} (\cos 2\theta_{\max} - 1).$$

Угол θ_{\max} находится из условия: $\sin \theta_{\max} = r/R$ (r – радиус основания сегмента).

Учитывая, что $1 - \cos 2\theta_{\max} = 2 \sin^2 \theta_{\max}$, а площадь основания сегмента $S = \pi r^2$, получаем:

$$E = \frac{\sigma}{8\epsilon_0} \cdot 2 \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{\sigma S}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

$$1.33. E = -\frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \left(\frac{2}{\sqrt{(L/4)^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{L^2 + R^2}} - \frac{1}{R} \right) e_z.$$

Решение. Направим ось Z вдоль оси цилиндра, совместив начало отсчета с точкой О центра его нижнего основания (рис. О.1.33). В сечении цилиндра с координатой z выделим кольцо шириной dz , заряд на котором равен $dq = 2\pi R\sigma dz$. Кольца, находящиеся выше т.А, создают в т.А с координатой $z = L/4$ поле с напряженностью (см. решение задачи 1.20)

$$dE_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2\pi R\sigma z dz}{(z^2 + R^2)^{3/2}}.$$

Интегрируя это выражение по z от $L/4$ до L , получаем проекцию напряженности электрического поля в т.А на ось Z от части цилиндра, находящейся над т.А:

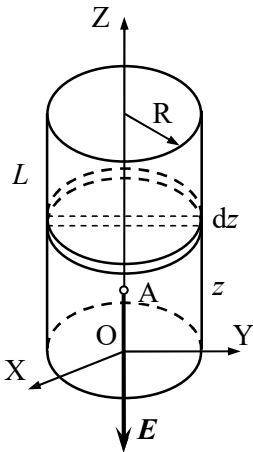


Рис. О.1.33.

$$E_{z1} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{L/4}^L \frac{2\pi R\sigma z dz}{(z^2 + R^2)^{3/2}} =$$

$$= -\frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{(L/4)^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{L^2 + R^2}} \right).$$

Она направлена против оси Z .

Кольца, находящиеся ниже т.А, создают в т.А поле с суммарной напряженностью

$$E_{z2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{L/4} \frac{2\pi R\sigma z dz}{(z^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{(L/4)^2 + R^2}} \right),$$

направленной по оси Z .

Окончательно напряженность поля цилиндра в т.А равна

$$E = E_{z1} + E_{z2} = -\frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \left(\frac{2}{\sqrt{(L/4)^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{L^2 + R^2}} - \frac{1}{R} \right).$$

В векторном виде напряженность в т.А запишется в виде:

$$\mathbf{E} = -\frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \left(\frac{2}{\sqrt{(L/4)^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{L^2 + R^2}} - \frac{1}{R} \right) \mathbf{e}_z.$$

1.34. $E = \frac{1}{4\epsilon_0} \cdot \frac{\gamma_0 R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$. Вектор \mathbf{E} направлен против оси

X (см. рис. О.1.34а).

Решение. Направим ось Z по оси кольца, а ось X – в плоскости кольца. Угол φ будем отсчитывать от оси X против часовой стрелки (рис. О.1.34а).

Так как линейная плотность заряда на кольце пропорциональна $\cos\varphi$, то половина кольца будет иметь положительный заряд (при $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$), а другая его половина – отрицательный (при $\pi/2 < \varphi < 3/2\pi$). Выберем пару диаметрально противоположных элементов кольца длиной dl . За-

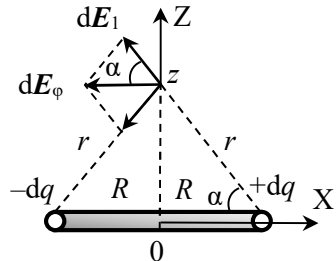


Рис. О.1.34а.

ряды на них равны $+dq = \gamma dl$ и $-dq$. Напряженность поля, создаваемого точечным зарядом dq , равна

$$dE_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{z^2 + R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\gamma_0 \cos \varphi}{z^2 + R^2} dl.$$

Суммарная напряженность поля dE_φ , создаваемого рассматриваемыми участками с зарядами $+dq$ и $-dq$, будет направлена горизонтально, т.е. параллельно плоскости кольца. Величина этой напряженности равна

$$dE_\varphi = -2dE_1 \cos \alpha = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\gamma_0 \cos \varphi}{z^2 + R^2} \cos \alpha dl.$$

Учитывая, что $dl = R d\varphi$ и $\cos \alpha = \frac{R}{(z^2 + R^2)^{1/2}}$, получаем:

$$dE_\varphi = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\gamma_0 R^2 \cos \varphi}{(z^2 + R^2)^{3/2}} d\varphi.$$

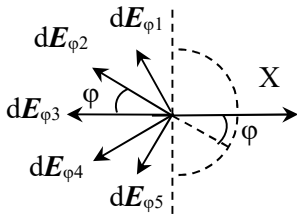


Рис. О.1.34б.

Для других пар участков кольца на противоположных концах его диаметров, расположенных под разными углами φ к оси X , векторы напряженности dE_φ располагаются в плоскости, параллельной плоскости кольца, как показано на рис. О.1.34б. Напряженность поля на оси кольца E_k имеет только x -компоненту.

Модуль напряженности кольца E_k в рассматриваемой точке находим интегрированием по углу φ в пределах от $(-\pi/2)$ до $\pi/2$:

$$E_k = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dE_\varphi \cos \varphi = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\gamma_0 R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi =$$

Направление вектора E противоположно направлению оси X .

$$1.35. E = \frac{\sigma_0 h}{2\epsilon_0 \sqrt{h^2 + 4R^2}}.$$

Решение. Представим боковую поверхность цилиндра в виде последо-

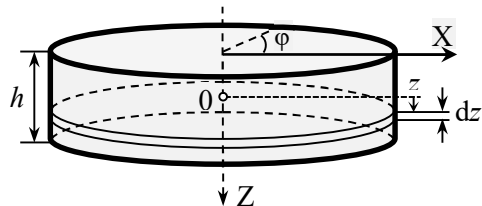


Рис. О.1.35.

вательности бесконечно узких колец, заряд которых распределен с линейной плотностью

$$d\tau = \sigma dz = \sigma_0 \cos\varphi dz$$

(см. рис. О.1.35).

На оси такого кольца напряженность имеет только x -компоненту, которая равна (см. решение задачи 1.34)

$$E = E_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma_0 R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} dz.$$

Суммарную напряженность поля в центре цилиндра от всех колец находим интегрированием по z от $-h/2$ до $+h/2$:

$$\begin{aligned} E = E_x &= -\frac{1}{4\epsilon_0} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\sigma_0 R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} dz = -\frac{\sigma_0}{4\epsilon_0} \cdot \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \Big|_{-h/2}^{h/2} = \\ &= -\frac{\sigma_0 h}{2\epsilon_0 \sqrt{h^2 + 4R^2}}. \end{aligned}$$

Знак "минус" показывает, что напряженность направлена под углом $\varphi = \pi$.

$$1.36. \Phi = El^2 \cos(\pi/3) = El^2 / 2.$$

$$1.37. \Phi = \frac{Q}{4\epsilon_0}.$$

Решение. По теореме Гаусса поток электрического поля \mathbf{E} , создаваемого точечным зарядом Q через поверхность тетраэдра, равен $\Phi_Q = \frac{Q}{\epsilon_0}$. В силу симметрии поток через одну грань тетраэдра

приходится 1/4 от всего потока, т.е. $\Phi = \frac{Q}{4\epsilon_0}$.

$$1.38. \mathbf{E}_1 = 22,6 \mathbf{e}_x \text{ В/м}; \mathbf{E}_2 = 67,8 \mathbf{e}_x \text{ В/м}; \mathbf{E}_3 = -22,6 \mathbf{e}_x \text{ В/м}.$$

$$1.39. a) E_{1n} = \frac{3\sigma}{2\epsilon_0}; \frac{\sigma}{2\epsilon_0}; \frac{\sigma}{2\epsilon_0}; \frac{3\sigma}{2\epsilon_0};$$

$$\text{б) } E_{2n} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}; \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}; \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}; \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}; \text{в) } E_{3n} = 0; \frac{\sigma}{\varepsilon_0}; \frac{4\sigma}{\varepsilon_0}; 0.$$

Области пространства перечисляются слева направо.

$$1.40. \text{ а) } \sigma_3 = -3\sigma; \text{ б) } \sigma_3 = -\sigma.$$

$$1.41. \text{ а) } E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \sin \frac{\alpha}{2}; \text{ б) } E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$1.42. \alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sigma q}{2\varepsilon_0 mg}.$$

1.43. См. рис. О.1.43б, сплошная линия 3.

При $x \leq 0$ $E(x) = \rho d / (2\varepsilon_0) = \operatorname{const}$;

$$\text{при } 0 \leq x \leq d \quad E(x) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \left(x + \frac{d}{2} \right);$$

$$\text{при } d \leq x \leq 3d \quad E(x) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \left(-x + \frac{5}{2}d \right);$$

при $x \geq 3d$ $E(x) = -\rho d / (2\varepsilon_0) = \operatorname{const}$.

Решение. В силу симметрии конфигурации зарядов вектор напряжённости электрического поля в каждой точке направлен перпендикулярно плоскостям пластин.

Определим вначале напряженность поля левой пластины. Поместим начало координат O_1 посередине пластины. Применим электростатическую теорему Гаусса, выбрав в качестве поверхности расположенный симметрично относительно центральной плоскости пластины цилиндр с площадью основания S и длиной $2x_1$ (см. рис. О.1.43а).

При $x_1 < d/2$ для напряженности электрического поля $E(x_1)$ получим:

$$2E(x_1)S = \rho S \cdot 2x_1 / \varepsilon_0,$$

откуда $E(x_1) = \rho x_1 / \varepsilon_0$.

При $x_1 > d/2$ для потока напряженности электрического поля $E(x_1)$ имеем:

$$2E(x_1)S = \rho Sd / \varepsilon_0,$$

откуда

$$E(x_1) = \rho d / (2\varepsilon_0) = \text{const}.$$

График зависимости $E(x)$ для левой пластины (с учетом направления вектора \mathbf{E}) представлен на рис.О.1.43б пунктирной линией 1.

Аналогично для второй пластины, отсчитывая расстояние x_2 от её середины т. O_2 , получаем:

$$E(x_2) = -\rho x_2 / \varepsilon_0 \text{ при } x_2 < d,$$

$$E(x_2) = -\rho d / \varepsilon_0 = \text{const} \text{ при } x_2 > d.$$

График зависимости $E(x)$ для правой пластины также с учетом направления вектора \mathbf{E} представлен на рис.О.1.43б штрихпунктирной линией 2.

С учетом принципа суперпозиции получаем график зависимости $E(x)$ для системы двух пластин (сплошная линия 3 на рис.О.1.43б).

Аналитически зависимость $E(x)$ (точка O на рис. 1.9 – начало отсчета) имеет вид:

$$E(x) = \rho d / (2\varepsilon_0) = \text{const} \text{ при } x \leq 0;$$

$$E(x) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \left(x + \frac{d}{2} \right) \text{ при } 0 \leq x \leq d;$$

$$E(x) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \left(-x + \frac{5}{2}d \right) \text{ при } d \leq x \leq 3d;$$

$$E(x) = -\rho d / (2\varepsilon_0) = \text{const} \text{ при } x \geq 3d.$$

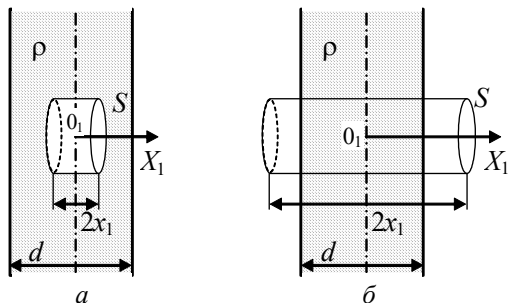


Рис. О.1.43а. К определению напряженности поля, создаваемого равномерно заряженной плоской пластиной: а) внутри пластины; б) вне пластины.

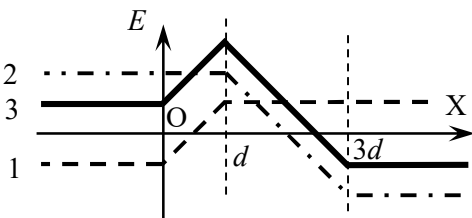


Рис. О.1.43б.

$$1.44. a) E_{\max} = 3\rho d / (2\varepsilon_0); \quad б) E_{\max} = \rho d / \varepsilon_0.$$

Указание. См. решение задачи 1.43.

$$1.45. \text{ При } r \leq R_1 \quad E = 0; \quad \text{при } R_1 \leq r \leq R_2 \quad E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left(r - \frac{R_1^3}{r^2} \right), \quad \text{при}$$

$$r \geq R_2 \quad E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0 r^2} (R_2^3 - R_1^3).$$

Для сплошного шара радиусом R при $r \leq R \quad E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$, при

$$r \geq R \quad E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}.$$

Решение. Применим электростатическую теорему Гаусса, записав поток напряженности электрического поля через концентрическую сферу радиусом r . При $r \leq R_1 \quad 4\pi r^2 E = 0$, т.к. внутри шаровой полости $\rho = 0$, т.е. $E = 0$. Так как объемная плотность заряда $\rho = \text{const}$, заряд внутри сферического слоя $q = \rho V_{\text{сфер. слоя}}$, поэтому согласно теореме Гаусса получаем:

при $R_1 \leq r \leq R_2$

$$4\pi r^2 E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \cdot \frac{4\pi}{3} (r^3 - R_1^3), \quad \rightarrow \quad E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left(r - \frac{R_1^3}{r^2} \right);$$

при $r \geq R_2$

$$4\pi r^2 E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \cdot \frac{4\pi}{3} (R_2^3 - R_1^3), \quad \rightarrow \quad E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0 r^2} (R_2^3 - R_1^3).$$

В частном случае $R_1 = 0$ (заряженный с объемной плотностью ρ шар радиуса R) внутри шара $E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$, вне шара

$$E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2},$$

где q – полный заряд шара.

При $r \geq R$ поле снаружи равномерно заряженного шара не отличается от поля точечного заряда в центре шара с таким же, как у шара зарядом. Функция $E(r)$ непрерывна.

$$1.46. \text{ а) } Q = \frac{4}{5} \pi \rho_0 R^5; \text{ б) при } r \leq R \quad E(r) = \frac{\rho_0}{5\epsilon_0} r^3; \text{ при } r \geq R$$

$$E(r) = \frac{\rho_0 R^5}{5\epsilon_0 r^2}.$$

Решение. а). Чтобы найти полный заряд Q шара, выделим внутри него шаровой слой радиусом r и малой толщиной dr . Его объем равен $dV = 4\pi r^2 dr$. Внутри этого слоя находится заряд $dq = \rho(r)dV = \rho_0 r^2 \cdot 4\pi r^2 dr = 4\pi \rho_0 r^4 dr$. Заряда шара Q найдем, интегрируя по r от 0 до R :

$$Q = \int_{V_{\text{шара}}} dq = 4\pi \rho_0 \int_0^R r^4 dr = 4\pi \rho_0 \frac{R^5}{5}.$$

б). Напряженность электрического поля находим по теореме Гаусса. В качестве гауссовой поверхности возьмем концентрическую сферу радиусом r . В силу симметрии задачи ясно, что модуль напряженности E будет одинаков во всех точках этой сферы. При $r \leq R$ заряд внутри сферы находим аналогично пункту а):

$$q = \int_0^r \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr = 4\pi \rho_0 \int_0^r r^4 dr = \frac{4}{5} \pi \rho_0 r^5.$$

Запишем поток напряженности электрического поля через сферу при $r \leq R$:

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{4}{5} \pi \rho_0 r^5, \text{ откуда } E(r) = \frac{\rho_0}{5\epsilon_0} r^3.$$

При $r \geq R$

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{4}{5} \pi \rho_0 R^5, \text{ откуда } E(r) = \frac{\rho_0 R^5}{5\epsilon_0 r^2}.$$

$$1.47. \text{ При } r \leq R_1 \quad E = 0. \text{ При } R_1 \leq r \leq R_2: \text{ 1) } E = \frac{\alpha}{4\epsilon_0} \frac{(r^4 - R_1^4)}{r^2};$$

$$\text{2) } E = \frac{\alpha}{2\epsilon_0} \frac{(r^2 - R_1^2)}{r^2}; \text{ 3) } E = \frac{\alpha}{3\epsilon_0 \beta r^2} \left(e^{\beta r^3} - e^{\beta R_1^3} \right)$$

$$\text{При } r \geq R_2 \text{ 1) } E = \frac{\alpha}{4\varepsilon_0} \frac{(R_2^4 - R_1^4)}{r^2}; \text{ 2) } E = \frac{\alpha}{2\varepsilon_0} \frac{(R_2^2 - R_1^2)}{r^2};$$

$$3) E = \frac{\alpha}{3\varepsilon_0 \beta r^2} \left(e^{\beta R_2^3} - e^{\beta R_1^3} \right).$$

Указание. См. решение задачи 1.46.

При $R_1 \leq r \leq R_2$ заряд внутри сферы вычисляется по формуле:

$$q = \int_{R_1}^r \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr; \text{ при } r \geq R_2 - \text{ по формуле } Q = \int_{R_1}^{R_2} \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr.$$

$$1.48. E_{\max} = \frac{\rho_0 R}{9\varepsilon_0} \text{ при } r_m = 2R/3.$$

Решение. Применяя теорему Гаусса, находим модуль напряженности электрического поля. При $r \leq R$:

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^r \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr,$$

где заряд q внутри сферической поверхности радиусом r равен:

$$q = \int_0^r \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr = 4\pi \rho_0 \int_0^r \left(1 - \frac{r}{R}\right) r^2 dr = 4\pi \rho_0 \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R} \right).$$

$$\text{Следовательно, внутри шара } E = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{r}{3} - \frac{r^2}{4R} \right).$$

При $r \geq R$ аналогично находим:

$$E = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 r^2} \left(\frac{R^3}{3} - \frac{R^4}{4R} \right) = \frac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 r^2}.$$

Эта функция достигает максимума ($E = \frac{\rho_0 R}{12\varepsilon_0}$) при $r = R$.

Исследуем модуль напряженности внутри шара на максимум, для чего приравняем нулю производную $\left. \frac{dE}{dr} \right|_{r_m} = 0$ (r_m – расстояние от центра шара, соответствующее максимуму E):

$$\left. \frac{dE}{dr} \right|_{r_m} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{1}{3} - \frac{r}{2R} \right) \Big|_{r_m} = 0,$$

откуда $r_m = 2R/3$.

Используя найденное значение, получаем:

$$E_{\max} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{2R/3}{3} - \frac{(2R/3)^2}{4R} \right) = \frac{\rho_0 R}{9\varepsilon_0} > \frac{\rho_0 R}{12\varepsilon_0}.$$

1.49. На диаметре АВ $E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$, вектор E направлен к центру полости; на диаметре CD $E(r) = \frac{2\rho}{3\varepsilon_0} r$, вектор E направлен от центра.

Решение. Представим шаровую полость как шар, равномерно заполненный зарядом с объемной плотностью $(-\rho)$, вставленный в пластину с объемной плотностью ρ . Тогда электрическое поле в любой точке пространства можно определить как суперпозицию полей заряженного шара и пластины.

Напряженность E_1 внутри пластины направлена перпендикулярно её плоскостям. Зависимость модуля напряженности от расстояния x до средней линии пластины имеет вид (см. решение задачи 1.43): $E_1(x) = \rho x / \varepsilon_0$, причем на средней линии пластины $E_1(x) = 0$.

Напряженность E_2 заряженного с объемной плотностью $(-\rho)$ шара внутри него равна (см. решение задачи 1.45 для шара):

$$E_2 = \frac{(-\rho)}{3\varepsilon_0} r, \text{ где } r \text{ — радиус-вектор точки внутри шара.}$$

Направления векторов E_1 и E_2 в точках диаметров АВ и CD показаны на рис. О.1.49. Таким образом, на диаметре АВ в полости напряженность $E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$. На диаметре CD напряженность

$$E(r) = \frac{\rho r}{\varepsilon_0} - \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} = \frac{2\rho}{3\varepsilon_0} r,$$

а вектор E направлен от центра полости.

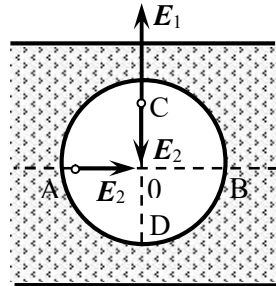


Рис. О.1.49.

1.50. При $r \leq R$ $E(r) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r$; при $r \geq R$ $E(r) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}$, где r – радиус-вектор (рис. О.1.50).

Решение. В силу симметрии задачи вектор напряжённости E направлен по нормали к боковой поверхности цилиндра.

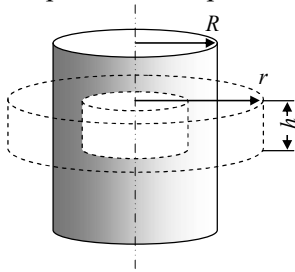


Рис. О.1.50.

Применяем электростатическую теорему Гаусса, выбрав в качестве поверхности коаксиальный цилиндр произвольного радиуса r и конечной высоты h (рис. О.1.50). На торцах цилиндра вектор E параллелен поверхности, поэтому его поток равен нулю. Во всех точках боковой поверхности вектор E перпендикулярен поверхности, поток вектора E через боковую поверхность цилиндра радиусом

r равен $2\pi r h E$.

Если расстояние от оси цилиндра до точки наблюдения $r \leq R$, то заряд внутри цилиндра $q = \rho V_{\text{цил.}} = \rho \cdot \pi r^2 h$ и по теореме Гаусса

$$2\pi r h E = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \pi r^2 h, \text{ откуда } E(r) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r.$$

$$\text{Если } r \geq R, \text{ то } 2\pi r h E = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \pi R^2 h, \text{ откуда } E(r) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}.$$

1.51. $E(x) = \frac{\tau L}{2\pi\epsilon_0 x(L-x)}$ для $r \leq x \leq (L-r)$.

Решение. Пусть ось X перпендикулярно проводам, а ее начало находится на оси левого провода (рис. О.1.51). В силу симметрии вектор E во всех точках направлен вдоль оси X .

Напряженность поля E на расстоянии $x \geq r$ от оси первого провода находим по теореме Гаусса, посчитав поток вектора E через поверхность в виде соосного с проводом цилиндра радиусом x произвольной длины h :

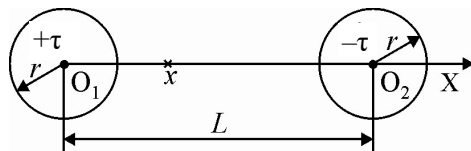


Рис. О.1.51.

$$2\pi x h E = \frac{1}{\varepsilon_0} \tau h, \text{ откуда } E(x) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 x}.$$

В любой точке прямой O_1X между проводами напряженности полей левого и правого проводов сонаправлены, поэтому они складываются. Используя принцип суперпозиции, находим для $r \leq x \leq (L - r)$:

$$E(x) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 x} + \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0(L-x)} = \frac{\tau L}{2\pi\varepsilon_0 x(L-x)}.$$

$$1.52. E(x) = \frac{2\tau d}{\pi\varepsilon_0(d^2 + 4h^2)}.$$

$$1.53. \text{ При } r \leq R \ E(r) = \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0} r^3, \text{ при } r \geq R \ E = \frac{\rho_0 R^4}{4\varepsilon_0 r}.$$

Решение. Применим теорему Гаусса, выбрав в качестве поверхности коаксиальный цилиндр произвольного радиуса r и конечной высоты h . При $r \leq R$ для нахождения заряда q внутри цилиндра выделим цилиндрическую трубку радиусом r малой толщиной dr , объем которой равен $dV = 2\pi r h dr$. Внутри этой трубки заряд равен $dq = \rho(r)dV = \rho_0 r^2 \cdot 2\pi r h dr = 2\pi\rho_0 h r^3 dr$. Суммарный заряд внутри цилиндра определим интегрированием:

$$q = \int_{V_{\text{цил}}} dq = 2\pi\rho_0 h \int_0^r r^3 dr = \pi\rho_0 h \frac{r^4}{2}.$$

Поток напряженности поля через поверхность цилиндра по теореме Гаусса равен:

$$2\pi r h E = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\pi\rho_0 h}{2\varepsilon_0} r^4,$$

$$\text{откуда } E(r) = \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0} r^3.$$

При $r \geq R$ заряд внутри цилиндрической гауссовой поверхности равен:

$$Q = 2\pi\rho_0 h \int_0^R r^3 dr = \pi\rho_0 h \frac{R^4}{2}.$$

По теореме Гаусса

$$2\pi hrE = \pi\rho_0 h \frac{R^4}{2\varepsilon_0}, \text{ откуда } E = \frac{\rho_0 R^4}{4\varepsilon_0 r}.$$

1.54. При $r \leq R_1$ $E=0$. При $R_1 \leq r \leq R_2$: а) $E(r) = \frac{\alpha}{\varepsilon_0} \left(1 - \frac{R_1}{r}\right)$;

б) $E(r) = \frac{\alpha}{\varepsilon_0 r} \ln \frac{r}{R_1}$; в) $E(r) = \frac{\rho_0}{2\alpha\varepsilon_0 r} \left(e^{-\alpha R_1^2} - e^{-\alpha r^2}\right)$.

При $r \geq R_2$: а) $E(r) = \alpha \frac{R_2 - R_1}{\varepsilon_0 r}$; б) $E(r) = \frac{\alpha}{\varepsilon_0 r} \ln \frac{R_2}{R_1}$; в)

$$E(r) = \frac{\rho_0}{2\alpha\varepsilon_0 r} \left(e^{-\alpha R_1^2} - e^{-\alpha R_2^2}\right).$$

1.55. $E(r) = \frac{\varepsilon_0 E_0}{r}$.

Решение. Выбрав в качестве гауссовой поверхности коаксиальный цилиндр произвольного радиуса r и конечной высоты h , запишем по теореме Гаусса поток напряженности поля через поверхность цилиндра:

$$2\pi rhE_0 = \frac{2\pi h}{\varepsilon_0} \int_0^r \rho(r) r dr \rightarrow rE_0 = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^r \rho(r) r dr.$$

Продифференцировав обе части последнего уравнения по r , получаем:

$$E_0 = \frac{r\rho(r)}{\varepsilon_0}, \text{ откуда } E(r) = \frac{\varepsilon_0 E_0}{r}.$$

1.56. $T = 4\pi \sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0 m R^3}{qQ}}$.

Решение. Для определения зависимости $E(r)$ вблизи центра кольца воспользуемся теоремой Гаусса: поток вектора \mathbf{E} через поверхность соосного с кольцом цилиндра (радиус основания r , высота h ($r, h \ll R$)) равен нулю, поскольку внутри цилиндра заряд равен нулю. Так как $r \ll R$, можно считать, что напряженность поля

кольца везде одинакова и равна напряженности на оси цилиндра (см. задачу 1.20):

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot h/2}{(R^2 + h^2/4)^{3/2}}.$$

Найдем потоки через основания и боковую поверхность цилиндра:

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{два основания}} &= 2 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Qh/2}{(R^2 + h^2/4)^{3/2}} \cdot \pi r^2 \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2Q}{R^2} \cdot \frac{h}{2R} \pi r^2 = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^3} \pi r^2 h; \end{aligned}$$

$$\Phi_{\text{бок}} = -2\pi r h E(r) \quad (Q, q > 0).$$

Эти потоки равны по модулю. Поэтому в плоскости кольца при малом смещении из центра модуль вектора напряженности E пропорционален смещению:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{2R^3} r.$$

Уравнение движения бусинки:

$$m\ddot{r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{2R^3} r,$$

откуда частота гармонических колебаний равна $\omega = \sqrt{\frac{qQ}{8\pi\epsilon_0 m R^3}}$, а

период малых колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega} = 4\pi \sqrt{\frac{2\pi\epsilon_0 m R^3}{qQ}}$.

$$1.57. \quad a) \quad A_{A \rightarrow B} = Q(\varphi_A - \varphi_B) = \frac{Qq}{2\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\sqrt{d^2 + a^2}} \right);$$

б) $A_{C \rightarrow D} = 0$. В случае двух положительных зарядов а) $A_{A \rightarrow B} = 0$;

$$б) \quad A_{C \rightarrow D} = \frac{Qq}{\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{4d^2 + a^2}} \right).$$

$$1.58. \quad A = \frac{qQ}{\pi\epsilon_0} \left(\sqrt{3} - 1 - \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{13}} \right).$$

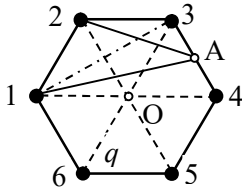


Рис. О.1.58.

Решение. Конфигурация зарядов показана на рис. О.1.58. Работа по перемещению заряда Q из точки O в точку A (середина стороны 3-4) равна:

$$A_{O \rightarrow A} = Q(\varphi_O - \varphi_A).$$

Будем считать $\varphi_\infty = 0$. Вклады в потенциал поля всех шести зарядов в точке O одинаков, поэтому

$$\varphi_O = \frac{6q}{4\pi\epsilon_0 a(\sqrt{3}/2)} = \frac{\sqrt{3}q}{\pi\epsilon_0 a}.$$

Вклад в потенциал в точке A от зарядов 3 и 4 равен

$$\varphi_{A_{3+4}} = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 a/2} = \frac{q}{\pi\epsilon_0 a}.$$

Расстояние x_1 от точки A до зарядов 2 и 5 находим по теореме косинусов из треугольника 2-3- A :

$$x_1^2 = a^2 + (a/2)^2 - 2a \cdot (a/2) \cos 120^\circ = (7/4)a^2, \text{ откуда } x_1 = a\sqrt{7}/2.$$

Вклад в потенциал в точке A от зарядов 2 и 5 равен:

$$\varphi_{A_{2+5}} = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 a\sqrt{7}/2} = \frac{q}{\pi\epsilon_0 a\sqrt{7}}.$$

Расстояние x_2 от т.А до зарядов 1 и 6 находим из прямоугольного треугольника 1-3- A по теореме Пифагора:

$$x_2^2 = (a\sqrt{3})^2 + (a/2)^2 = (13/4)a^2, \text{ откуда } x_1 = a\sqrt{13}/2,$$

поэтому вклад потенциал в точке A зарядов 1 и 6 равен:

$$\varphi_{A_{1+6}} = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 a\sqrt{13}/2} = \frac{q}{\pi\epsilon_0 a\sqrt{13}}.$$

В итоге потенциал поля, создаваемого всеми зарядами в точке A равен:

$$\varphi_A = \frac{q}{\pi\epsilon_0 a} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{13}} \right).$$

Работа сил электрического поля по перемещению заряда Q из точки O в точку A равна:

$$A_{O \rightarrow A} = Q(\varphi_O - \varphi_A) = \frac{qQ}{\pi\epsilon_0} \left(\sqrt{3} - 1 - \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{13}} \right).$$

1.59. См. рис. О.1.59.

Решение. Ввиду цилиндрической симметрии системы достаточно рассмотреть картину силовых линий для плоскости, в которой находятся заряды. Поскольку оба заряда положительные, все силовые линии начинаются на зарядах и «уходят» на бесконечность. Следовательно, на рассматриваемой плоскости должна быть линия, которую силовые линии не пересекают.

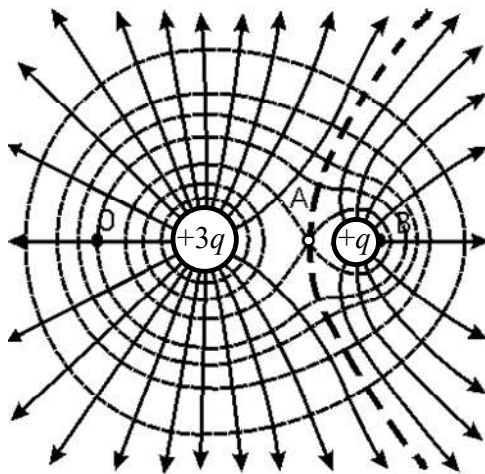


Рис. О.1.59.

Силовые линии от каждого заряда на подходе к этой разграничительной линии изгибаются и уходят на бесконечность, асимптотически приближаясь к ней. На отрезке, соединяющем заряды $+q$ и $+3q$ разграничительная линия проходит через точку А, находящуюся на расстоянии a от заряда q , в которой напряженность поля равна нулю:

$$E(a) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{3}{(d-a)^2} \right) = 0 \rightarrow a = \frac{\sqrt{3}-1}{2} d.$$

Около каждого заряда картина близка к картине силовых линий положительного заряда: силовые линии выходят из каждого заряда симметрично, а эквипотенциальные поверхности на выделенной плоскости – почти окружности. На очень больших расстояниях от зарядов эквипотенциальные линии вновь становятся почти окружностями.

Внутренняя часть должна отделяться от внешней некоторой эквипотенциальной линией, проходящей через точку A . Потенциал поля в точке A равен

$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{a} + \frac{3q}{d-a} \right).$$

На линии, соединяющей заряды $+q$ и $+3q$, находим точки B и O , потенциал которых равен потенциалу точки A . Разграничительная эквипотенциальная линия проходит через точки A , B , и O . Общая картина изображена на рис. О.1.59.

1.60. Поверхность нулевого потенциала – сфера радиусом $R = \frac{2}{3}d$, центр которой находится на линии зарядов на расстоянии $b = -\frac{d}{3}$ от заряда q' (см. рис. О.1.60).

Решение. Поместим начало координат O в точку, где находится заряд q' , а ось X направим по линии, проходящей через заряды. Пусть заряд q находится в точке A (см. рис. О.1.60). Ввиду осевой симметрии системы достаточно рассмотреть картину в какой-либо плоскости, содержащей отрезок OA .

Пусть точка $M(x,y)$ принадлежит поверхности нулевого потенциала. Потенциал поля зарядов в этой точке:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q'}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{q}{\sqrt{(d-x)^2 + y^2}} \right) = 0,$$

откуда находим:

$$q^2(x^2 + y^2) = q'^2(d^2 + x^2 + y^2 - 2xd);$$

$$(q^2 - q'^2)x^2 + (q^2 - q'^2)y^2 + 2q'^2xd - q'^2d^2$$

;

$$y^2 + \left(x + \frac{q'^2d}{q^2 - q'^2} \right)^2 = \frac{q'^2q^2d^2}{(q^2 - q'^2)^2}$$

.

Получившееся уравнение кривой в плоскости XU является уравнением окружности,

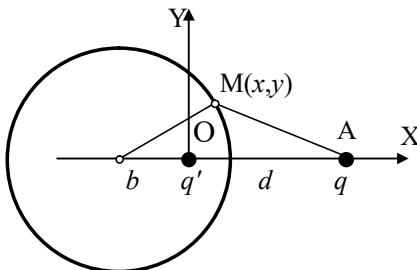


Рис. О.1.60.

центр которой находится в точке с координатой

$$b = -\frac{q'^2 d}{q^2 - q'^2} = -\frac{d}{2^2 - 1} = -\frac{d}{3},$$

а радиус равен $R = \left| \frac{q'q}{q^2 - q'^2} \right| d = \frac{2d}{3}$.

$$1.61. a) \varphi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \left| \frac{L + \sqrt{d^2 + L^2}}{\sqrt{d^2 + L^2} - L} \right|; \quad б) \varphi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{d + L}{d - L}.$$

Решение. а). Поместим начало координат в центре нити и направим ось Z вдоль нити. Выделяем на нити на расстоянии z от центра малый элемент длиной dz (см. рис. О.1.61) с зарядом $dq = \tau dz$, который можно считать точечным. Его расстояние до точки $M(d, 0)$ равно $\sqrt{d^2 + z^2}$, а создаваемый им потенциал равен:

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau dz}{\sqrt{d^2 + z^2}}.$$

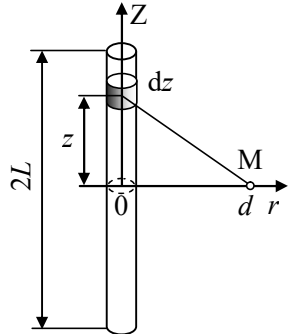


Рис. О.1.61.

Потенциал всей нити находим интегрированием:

$$\varphi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{dz}{\sqrt{d^2 + z^2}} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{L + \sqrt{d^2 + L^2}}{\sqrt{d^2 + L^2} - L}.$$

б). Поместим начало координат в центре нити и направим ось X вдоль нити. Выделим на нити малый кусок длиной dx , заряд которого $dq = \tau dx$ создает в точке M , находящейся от него на расстоянии $(d - x)$, потенциал

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau dx}{d - x}.$$

Интегрируя по всей длине нити, получим:

$$\varphi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{dx}{d - x} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{d + L}{d - L}.$$

$$1.62. \varphi_0 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{l + \sqrt{l^2 + R^2}}{R} + \frac{\pi}{4} \right).$$

Решение. Действуя, как в задаче 1.61 а), находим потенциал поля, созданного прямолинейным участком провода в т.О:

$$\varphi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \int_0^l \frac{dz}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{l + \sqrt{R^2 + l^2}}{l + R}.$$

Потенциал поля, созданного куском провода в виде четверти окружности, в точке О равен:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau \cdot \pi R / 2}{R} = \frac{\tau}{8\epsilon_0}.$$

Согласно принципу суперпозиции получаем:

$$\varphi_0 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{l + \sqrt{l^2 + R^2}}{R} + \frac{\pi}{4} \right).$$

$$1.63. \Delta\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \left(\frac{1}{\sqrt{R_1^2 + d^2}} + \frac{1}{\sqrt{R_2^2 + d^2}} \right) \right].$$

$$1.64. \varphi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{b^2 + z^2} - \sqrt{a^2 + z^2}). \text{ В случае сплошного}$$

$$\text{диска } \varphi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{b^2 + z^2} - z).$$

Указание. Разбить кольцо на колечки радиусом r малой толщиной dr , использовать формулу для потенциала поля заряженного кольца на его оси $d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{\sqrt{r^2 + z^2}}$ и принцип суперпозиции.

$$1.65. \Delta\varphi = \frac{Q}{\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right).$$

Решение. Потенциал в центре диска (при нормировке $\varphi_\infty = 0$) равен (см. решение задачи 1.64): $\varphi_0 = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R}$.

Для вычисления потенциала на крае диска используем полярную систему координат (r, α) , начало которой расположено в точке А края диска, а угол α отсчитывается от диаметра, проходящего через точку А (рис. О.1.65). Площадь элемента диска $dS = r dr d\alpha$, заряд на нем $dq = \sigma dS = \frac{Q}{\pi R^2} r dr d\alpha$, его вклад в потенциал

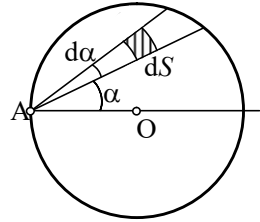


Рис. О.1.65.

в точке А равен

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{\pi R^2} dr d\alpha.$$

Интегрируя по r в пределах от нуля до $r = 2R \cos \alpha$, находим вклад в потенциал от всех точек диска внутри угла $d\alpha$:

$$d\varphi_\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{\pi R^2} \cdot 2R \cos \alpha d\alpha.$$

Интегрируя затем по углу α в пределах от $-\pi/2$ до $\pi/2$, находим потенциал точки А: $\varphi_A = \frac{Q}{\pi^2 \epsilon_0 R}$.

Искомая разность потенциалов равна:

$$\Delta\varphi = \varphi_O - \varphi_A = \frac{Q}{\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \right).$$

$$1.66. a) \Delta\varphi_{12} = \frac{\sigma d}{2\epsilon_0}, \Delta\varphi_{23} = \frac{\sigma d}{2\epsilon_0}; б) \Delta\varphi_{12} = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}, \Delta\varphi_{23} = \frac{3\sigma d}{\epsilon_0};$$

нумерация плоскостей – слева направо.

$$1.67. \varphi(r_1) = 0, \varphi(r_2) = -\frac{q}{12\pi\epsilon_0 R}, \varphi(r_3) = -\frac{q}{10\pi\epsilon_0 R}.$$

Решение. Поскольку точки, где нужно определить потенциал электрического поля, находятся в разных областях, на которые сферы делят пространство, определим зависимость потенциала от расстояния r до центра сфер, учитывая непрерывность потенциала при переходе из одной области в другую. Ввиду сферической симметрии системы удобно сначала определить напряженность элек-

трического поля, используя теорему Гаусса, а потом – потенциал, исходя из его связи с напряженностью $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad}\varphi(r)$. В качестве вспомогательных поверхностей выберем сферы разного радиуса r , центры которых совпадают с центром системы.

При $r \leq R$ $4\pi r^2 \cdot E_1(r) = 0$, откуда $E_1(r) = 0$, $\varphi_1 = C_1 = \text{const}$.

При $R \leq r \leq 2R$ $4\pi r^2 E_2(r) = \frac{q}{\varepsilon_0}$, откуда

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \text{ и } \varphi_2(r) = -\int E(r)dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_2.$$

При $r \geq 2R$ $4\pi r^2 E_3(r) = \frac{q-2q}{\varepsilon_0} = -\frac{q}{\varepsilon_0}$, откуда

$$E = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \text{ и } \varphi_3(r) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_3.$$

Уточнение вида $\varphi(r)$ удобно начинать с области $r \geq 2R$, т.к. $\varphi_\infty = 0$. Подставляя $r \rightarrow \infty$ в $\varphi_3(r)$, получаем $C_3 = 0$.

Используя условие непрерывности потенциала при $r = 2R$, находим:

$$\varphi_2(2R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 2R} + C_2 = \varphi_3(2R) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 2R},$$

откуда $C_2 = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ и $\varphi_2(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$.

При $r \leq R$ $\varphi_3 = \varphi_2(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R} \right) = 0$.

Для точек с координатами r_1 , r_2 и r_3 получаем:

$$\varphi(r_1) = 0, \quad \varphi(r_2) = -\frac{q}{12\pi\varepsilon_0 R}, \quad \varphi(r_3) = -\frac{q}{10\pi\varepsilon_0 R}.$$

1.68. $\sigma = \frac{\varepsilon_0 \Phi_0}{4R}$.

1.69. $\Delta\varphi_{12} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left[\frac{3}{2} R_2^2 - \frac{a^2}{2} - R_1^3 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) - \frac{R_2^3}{b} \right]$.

Решение. Напряженность электрического поля внутри и вне слоя была найдена в задаче **1.45**:

$$\text{при } R_1 \leq r \leq R_2 \quad E_1 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left(r - \frac{R_1^3}{r^2} \right);$$

$$\text{при } r \geq R_2 \quad E_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0 r^2} (R_2^3 - R_1^3).$$

Найдем разность потенциалов между указанными в условии задачи точками:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{12} &= \int_a^b E(r) dr = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \int_a^{R_2} \left(r - \frac{R_1^3}{r^2} \right) dr + \frac{\rho}{3\varepsilon_0} (R_2^3 - R_1^3) \int_{R_2}^b \frac{dr}{r^2} = \\ &= \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left[\frac{3}{2} R_2^2 - \frac{a^2}{2} - R_1^3 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) - \frac{R_2^3}{b} \right]. \end{aligned}$$

$$\mathbf{1.70.} \quad \text{При } r \leq a \quad \varphi(r) = \frac{\alpha}{\varepsilon_0} (b - a); \quad \text{при } a \leq r \leq b$$

$$\varphi(r) = \frac{\alpha}{2\varepsilon_0} \left(2b - r - \frac{a^2}{r} \right); \quad \text{при } r \geq b \quad \varphi(r) = \frac{\alpha(b^2 - a^2)}{2\varepsilon_0 r}.$$

$$\mathbf{1.71.} \quad \sigma_1 = \frac{\varepsilon_0 U}{R_1 \ln(R_2 / R_1)}; \quad \sigma_2 = -\frac{\varepsilon_0 U}{R_2 \ln(R_2 / R_1)}.$$

$$\mathbf{1.72.} \quad \text{При } r \leq R \quad \varphi = 0; \quad \text{при } R \leq r \leq 2R \quad \varphi(r) = -\frac{2\sigma R}{\varepsilon_0} \ln \frac{r}{R}; \quad \text{при}$$

$$r \geq 2R \quad \varphi(r) = -\frac{2\sigma R}{\varepsilon_0} \ln 2.$$

$$\mathbf{1.73.} \quad \text{При } r \leq R_1 \quad \varphi_0 = \frac{\rho}{4\varepsilon_0} \left[(R_2^2 - R_1^2) - R_1^2 \ln \frac{R_2}{R_1} \right] = \text{const},$$

$$\text{при } R_1 \leq r \leq R_2 \quad \varphi_1(r) = \frac{\rho}{4\varepsilon_0} \left[(R_2^2 - r^2) - R_1^2 \ln \frac{R_2}{r} \right],$$

$$\text{при } r \geq R_2 \quad \varphi_2(r) = -\frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0} \ln \frac{r}{R_2}.$$

Решение. Решаем задачу в цилиндрической системе координат (r, φ, z) , совместив ось Z с осью цилиндра, а начало координат разместив в произвольной точке его оси.

Внутри полости $(r \leq R_1)$ $\rho = 0$, поэтому $E = 0$ и $\varphi_0 = \text{const}$.

Так как по условию задачи потенциал на внешней поверхности цилиндра равен нулю, можно применить формулу связи разности потенциалов двух точек электростатического поля с потенциалами этих точек:

$$\varphi_{12} = \int_1^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_1^{r_0} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{r_0}^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \varphi_1 - \varphi_2,$$

которая примет вид:

$$\varphi(r) - \varphi(R) = \varphi(r) = - \int_R^r E dr = \int_r^R E dr.$$

При $R_1 \leq r \leq R_2$ по теореме Гаусса получаем:

$$E_1(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left(r - \frac{R_1^2}{r} \right),$$

а потенциал

$$\varphi_1(r) = \int_r^{R_2} \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left(r - \frac{R_1^2}{r} \right) dr = \frac{\rho}{4\varepsilon_0} \left[(R_2^2 - r^2) - R_1^2 \ln \frac{R_2}{r} \right].$$

Из условия непрерывности потенциала при $r = R_1$ находим

$$\varphi_0 = \frac{\rho}{4\varepsilon_0} \left[(R_2^2 - R_1^2) - R_1^2 \ln \frac{R_2}{R_1} \right].$$

При $r \geq R_2$ $E = \frac{\rho}{2\varepsilon_0 r} (R_2^2 - R_1^2)$, откуда

$$\varphi_2(r) = \frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0} \int_r^{R_2} \frac{dr}{r} = - \frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{2\varepsilon_0} \ln \frac{r}{R_2}.$$

$$1.74. \Delta\varphi = \frac{\rho R^4}{16\varepsilon_0}.$$

Решение. Находим напряженность электрического поля внутри цилиндра по теореме Гаусса (см. решение задачи 1.53):

$$E(r) = \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0} r^3.$$

Разность потенциалов между осью цилиндра и его поверхностью равна:

$$\Delta\varphi = \int_0^R \frac{\rho}{4\varepsilon_0} r^3 dr = \frac{\rho R^4}{16\varepsilon_0}.$$

$$1.75. \Delta\varphi = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{5R^2}{36} - \frac{R_1^2}{4} + \frac{R_1^3}{9R} \right) + \frac{\rho_0 R^2}{6\varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R}.$$

Решение. Используя теорему Гаусса, находим напряжённость поля внутри и вне цилиндра.

$$\text{При } r < R \quad E_1 \cdot 2\pi r h = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Так как заряд внутри поверхности равен:

$$q = \int_0^r \rho \cdot 2\pi r h dr = 2\pi h \rho_0 \int_0^r \left(r - \frac{r^2}{R} \right) dr = 2\pi h \rho_0 \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3R} \right),$$

получаем: $E_1 = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{r}{2} - \frac{r^2}{3R} \right).$

$$\text{При } r > R: E_2 = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 r} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{3} \right) = \frac{\rho_0 R^2}{6\varepsilon_0 r}.$$

Разность потенциалов между указанными точками равна:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \int_{R_1}^R E_1 dr + \int_R^{R_2} E_2 dr = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \int_{R_1}^R r dr - \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0 R} \int_{R_1}^R r^2 dr + \frac{\rho_0 R^2}{6\varepsilon_0} \int_R^{R_2} \frac{dr}{r} = \\ &= \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{5R^2}{36} - \frac{R_1^2}{4} + \frac{R_1^3}{9R} \right) + \frac{\rho_0 R^2}{6\varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R}. \end{aligned}$$

$$1.76. E(l/2) = \frac{2U}{l \ln \frac{l-r}{r}} = 4000 \text{ В/м.}$$

Решение. Пусть модуль линейной плотности заряда проводов τ . Тогда напряженность электрического поля между проводами на расстоянии x от оси одного из них равна (см. решение задачи 1.51):

$$E(x) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 x} + \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0(l-x)}.$$

Разность потенциалов между проводами:

$$U = \int_r^{L-r} E(x) dx = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \left\{ \ln\left(\frac{l-r}{r}\right) + \ln\left(\frac{l-r}{r}\right) \right\} = \frac{\tau}{\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{l-r}{r}\right),$$

откуда $\frac{\tau}{\pi\epsilon_0} = U / \ln\left(\frac{l-r}{r}\right)$.

Посередине между проводами $r = l/2$ и напряженность поля

$$E(l/2) = \frac{\tau}{\pi\epsilon_0 l/2} = \frac{2U}{l \ln \frac{l-r}{r}} = 4000 \text{ В/м}.$$

1.77. $\mathbf{E} = -2ax\mathbf{i} - 2ay\mathbf{j}$.

Решение. Так как $\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi$, то:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -2ax; \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -2ay.$$

Окончательно получим:

$$\mathbf{E} = E_x\mathbf{i} + E_y\mathbf{j} = -2ax\mathbf{i} - 2ay\mathbf{j}.$$

1.78. $\mathbf{E} = -2a(xi + yj) + 2bzk$; $E = 2\sqrt{a^2(x^2 + y^2) + b^2z^2}$. Поверхность нулевого потенциала – прямой круговой конус.

1.79. $\mathbf{E}(M) = 2ai - aj + 2bk$; $E(M) = \sqrt{5a^2 + 4b^2}$.

1.80. $E = \alpha$.

Решение. Воспользовавшись выражением для $\text{grad}\varphi$ в цилиндрических координатах

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{e}_z,$$

получим: $E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\alpha \cos\theta$, $E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \alpha \sin\theta$.

Следовательно

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \alpha \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \alpha.$$

1.81. а) $\varphi = x(ax/2 - by) + \text{const}$; б) $\varphi = axy - bz^2 + \text{const}$.

Решение. а). Поскольку $\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi$, для компонент напряженности имеем: $E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -ax + by$, $E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = bx$. После интегрирования находим:

$$\varphi(x, y) = -\int(-ax + by) dx = ax^2/2 - bxy + \psi_1(y) + \text{const}.$$

$$\varphi(x, y) = -\int bx dy = -bxy + \psi_2(x) + \text{const}.$$

Объединяя полученные зависимости, получаем выражение для потенциала: $\varphi = x(ax/2 - by) + \text{const}$.

б). Действуя аналогично, проводим интегрирование компонент напряженности E_x , E_y и E_z по x , y и z соответственно. Объединяя полученные выражения, получаем ответ:

$$\varphi = axy - bz^2 + \text{const}.$$

1.82. Не является.

Решение. В любой точке пространства ротор напряженности электростатического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ равен нулю: $\text{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$, что является следствием потенциальности электростатического поля.

Для заданного поля:

$$\text{rot}\mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ay & -ax & 0 \end{vmatrix} = -2ak \neq 0,$$

следовательно, поле не является электростатическим.

1.83. Является.

Решение. Проверим, выполняется ли условие $\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$. Используя выражение для $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ в сферической системе координат и учитывая, что компоненты напряженности E_r и E_θ не зависят от φ , получаем:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & r \sin \theta \mathbf{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ E_r & rE_\theta & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (rE_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_\varphi = \\ &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{a}{r^2} \right) \sin \theta - \frac{2a}{r^3} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta) \right] \mathbf{e}_\varphi = 0, \end{aligned}$$

следовательно, поле является электростатическим.

1.84. $\varphi = -ax - by + \text{const}$. Электрическое поле однородно.

Решение. Модуль напряженности поля равен $E = \sqrt{a^2 + b^2} = \text{const}$, а вектор напряженности направлен под углом $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} = \text{const}$ к оси ОХ системы координат, следовательно, электрическое поле является однородным.

Найдем потенциал поля.

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -a, \text{ откуда } \varphi(x, y) = -\int a \, dx = -ax + \psi_1(y) + \text{const}.$$

$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -b, \rightarrow \varphi(x, y) = -\int b \, dy = -by + \psi_2(x) + \text{const}.$$

Объединяя выражения, получаем: $\varphi = -ax - by + \text{const}$.

1.85. $\rho(r) = -12a\epsilon_0 r$.

Решение. Запишем уравнение Пуассона: $\Delta \varphi = -\rho/\epsilon_0$. В силу симметрии задачи ее решение будем искать в сферических координатах с учетом того, что лапласиан зависит только от одной переменной r :

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right).$$

Из уравнения Пуассона получаем:

$$\rho(r) = -\frac{\varepsilon_0}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial (ar^3 + b)}{\partial r} \right) = -12a\varepsilon_0 r.$$

1.86. $\rho(x) = -2\varepsilon_0 a.$

1.87. $\rho = \varepsilon_0 (a + 2by + 3cz^2).$

Решение. Согласно электростатической теореме Гаусса $\operatorname{div} \mathbf{E} = (\nabla \mathbf{E}) = \rho / \varepsilon_0$, откуда находим:

$$\rho = \varepsilon_0 (\nabla \mathbf{E}) = \varepsilon_0 (a + 2by + 3cz^2).$$

§2. Электрический диполь

2.1. $\varphi(r, \theta) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$; $E(r, \theta) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1}$. Угол α

между векторами \mathbf{E} и \mathbf{r} связан с углом θ соотношением:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta.$$

Решение. Поместим начало координат в точку нахождения диполя и направим полярную ось $\theta = 0$ вдоль вектора \mathbf{p} (рис. О.2.1). Используем формулу для потенциала (при нормировке потенциала на бесконечности $\varphi(\infty) = 0$) и напряженности поля диполя, отсчитывая угол θ от направления вектора \mathbf{p} :

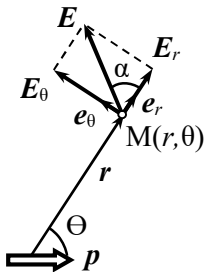


Рис. О.2.1.

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3},$$

$$\mathbf{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{p}\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right].$$

Поскольку в выбранной системе координат $\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = pr \cos \theta$, для потенциала получаем:

$$\varphi(r, \theta) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Модуль напряженности находим, используя значения проекций вектора напряжённости $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ на оси координат, учитывая, что

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r = p \cos \theta, \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_\theta = -p \sin \theta, \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_\theta = 0:$$

$$E_r = \frac{p \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}, \quad E_\theta = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3},$$

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1}.$$

Вектор \mathbf{E} составляет с направлением \mathbf{r} угол α такой, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta.$$

$$2.2. \quad E_x = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3x_0 y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^{5/2}}, \quad E_y = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2y_0^2 - x_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^{5/2}}.$$

Решение. Напряженность поля диполя

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{p}\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right].$$

Подставляя в эту формулу

$\mathbf{p}\mathbf{r} = pr \cos \theta = py_0$ и учтя, что $\mathbf{r} = x_0 \mathbf{i} + y_0 \mathbf{j}$,

$\mathbf{p} = p\mathbf{j}$, $r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ (см. рис. О.2.1), для проекций напряженности на оси координат получаем:

$$E_x = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3x_0 y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^{5/2}}, \quad E_y = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2y_0^2 - x_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^{5/2}}.$$

$$2.3. \quad E_z = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{r^3}, \quad E_\perp = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3 \sin \theta \cos \theta}{r^3}.$$

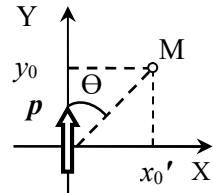


Рис. О.2.1.

Решение. Спроектируем точку М на плоскость ХУ и введем угол φ между осью Х и направлением на эту проекцию в плоскости ХУ, а также угол Θ между дипольным моментом \mathbf{p} и радиус-вектором \mathbf{r} точки М (см. рис. О.2.3).

Напряженность поля диполя равна

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{pr})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right].$$

Для указанной в задаче ориентации вектора \mathbf{p}

$$\mathbf{pr} = pr \cos \theta, \quad \mathbf{p} = pk, \quad \mathbf{r} = xi + yj + zk,$$

где $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$.

По формуле для напряженности поля диполя получаем:

$$E_x = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot (3 \cos \theta \sin \theta \cos \varphi), \quad E_y = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot (3 \cos \theta \sin \theta \sin \varphi),$$

$$E_z = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{r^3}.$$

Проекция вектора \mathbf{E} на плоскость ХУ равна:

$$E_{\perp} = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3 \cos \theta \sin \theta}{r^3}.$$

В векторной форме:

$$\mathbf{E} = E_{\perp} (\cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3 \cos \theta \sin \theta}{r^3} \mathbf{e}_r,$$

где \mathbf{e}_r – орт полярной системы координат в плоскости ХУ, начало координат которой лежит на оси Z. Таким образом, проекция вектора \mathbf{E} на плоскость ХУ направлена от оси диполя к точке на этой плоскости.

2.4. $\mathbf{E} \perp \mathbf{p}$ в точках поверхности двух прямых конусов с вершиной в начале координат и осью, направленной по оси Z, угол полураствора которых равен $\theta = \arccos(1/\sqrt{3}) \approx 54,7^\circ$. Эти два конуса являются зеркальным отражением друг друга относительно

плоскости ХУ. В этих точках $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p\sqrt{2}}{r^3}$. При $Z > 0$

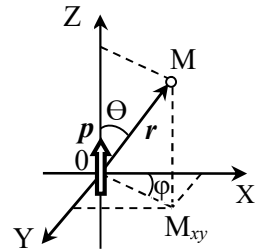


Рис. О.2.3.

$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p\sqrt{2}}{r^3} \mathbf{e}_r$, при т.е. $Z < 0$ $\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p\sqrt{2}}{r^3} \mathbf{e}_r$, где \mathbf{e}_r – орт полярной системы координат с началом отсчета на оси Z в плоскости, параллельной плоскости XY и отстоящей от неё на расстояние $h = r \cos \theta = r / \sqrt{3}$.

Решение. Поскольку вектор \mathbf{p} направлен вдоль оси Z , вектор \mathbf{E} должен лежать в плоскости, перпендикулярной оси Z , т.е. компонента вектора $E_z = 0$, а вектор \mathbf{E} лежит в плоскости XY . В решении задачи 2.3 было установлено, что

$$E_z = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{r^3}.$$

Приравняв $E_z = 0$, получаем: $\cos \theta = \pm 1/\sqrt{3}$, откуда

$$\theta_1 = \arccos(1/\sqrt{3}) \approx 54,7^\circ, \quad \theta_2 = \arccos(-1/\sqrt{3}) \approx 125,3^\circ.$$

Следовательно, точки, в которых $\mathbf{E} \perp \mathbf{p}$, лежат на поверхности двух конусов с вершиной в начале координат и общей осью, направленной по оси Z ; угол полураствора равен θ_1 . Эти конусы являются зеркальным отражением друг друга относительно плоскости XY .

В точках поверхностей этих конусов (см. решение задачи 2.3)

$$E = E_\perp = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3 \cos \theta \sin \theta}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3p}{r^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p\sqrt{2}}{r^3}.$$

Определим направление вектора \mathbf{E} . При $\cos \theta = +1/\sqrt{3}$ ($Z > 0$) $E = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3 \cos \theta \sin \theta}{r^3} > 0$, т.е. вектор \mathbf{E} направлен от оси диполя (см. решение задачи 2.3), в векторной форме можно записать: $\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p\sqrt{2}}{r^3} \mathbf{e}_r$, где \mathbf{e}_r – орт полярной системы координат с началом отсчета на оси Z в плоскости, параллельной плоскости XY и отстоящей от неё на расстояние $h = r \cos \theta = r / \sqrt{3}$.

При $\cos \theta = -1/\sqrt{3}$ ($Z < 0$) $E = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3 \cos \theta \sin \theta}{r^3} < 0$, т.е.

вектор \mathbf{E} направлен к оси диполя, и в векторной форме

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p\sqrt{2}}{r^3} \mathbf{e}_r.$$

2.5. $R = \left[\frac{|q|p}{3\sqrt{3}\pi\epsilon_0 m \omega^2} \right]^{1/4}$, плоскость орбиты шарика перпен-

дикулярна \mathbf{p} и находится на расстоянии $h = R/\sqrt{2}$ от центра диполя.

Решение. Будем считать маленький шарик материальной точкой. Чтобы заряженная материальная точка двигалась по окружности, на неё должна действовать постоянная по модулю сила, перпендикулярная скорости движения точки и направленная к центру окружности.

Направим ось Z в направлении вектора \mathbf{p} , совместив начало отсчета с центром диполя. Поскольку на заряд в электрическом поле действует сила $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, вектор напряженности поля диполя должен лежать в плоскости орбиты заряда. Из решения задачи 2.4 следует, что когда угол θ между осью Z и радиус-вектором \mathbf{r} движущегося заряда q удовлетворяет условию: $\cos \theta = \pm 1/\sqrt{3}$, напряженность поля диполя имеет только одну компоненту E_{\perp} , лежащую в плоскости, перпендикулярной дипольному моменту \mathbf{p} . Эта компонента E_{\perp} может создать центростремительную силу, обеспечивающую вращение шарика. Следовательно, плоскость орбиты шарика перпендикулярна \mathbf{p} .

При $\cos \theta = +1/\sqrt{3}$ вектор \mathbf{E} направлен от оси Z :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p\sqrt{2}}{r^3} \mathbf{e}_r, \text{ где } \mathbf{e}_r \text{ — орт полярной системы координат с}$$

началом отсчета на оси Z в плоскости, параллельной плоскости XY и отстоящей от неё на расстояние $r \cos \theta = r/\sqrt{3}$. Сила $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ будет направлена к оси Z при $q < 0$ и создаст центростремительное ускорение $a = \omega^2 R$, где R — радиус окружности, по которой движется заряженная материальная точка.

При $\cos \theta = -1/\sqrt{3}$ вектор \mathbf{E} направлен к оси Z :
 $\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p\sqrt{2}}{r^3} \mathbf{e}_r$, и сила $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ будет направлена к оси Z при $q > 0$.

Запишем уравнение движения материальной точки в проекции на направление \mathbf{e}_r :

$$m \omega^2 R = |q| \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p\sqrt{2}}{r^3},$$

где $R = r \sin \theta = \sqrt{\frac{2}{3}} r$, откуда $r = \sqrt{\frac{3}{2}} R$.

Подставляя r в уравнение движения материальной точки, получаем:

$$m \omega^2 R = |q| \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p\sqrt{2}}{R^3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2},$$

откуда определяем радиус орбиты шарика:

$$R = \left[\frac{|q|p}{3\sqrt{3}\pi\epsilon_0 m \omega^2} \right]^{1/4}.$$

Плоскость окружности отстоит от центра диполя на $h = R \operatorname{ctg} \theta = R/\sqrt{2}$.

$$2.6. \text{ а) } E = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 d^3} = 4,11 \cdot 10^6 \text{ В/м;}$$

$$\text{б) } E = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 d^3} \cong 2,06 \cdot 10^6 \text{ В/м.}$$

$$2.7. \quad r = r_0 \sin^2 \theta.$$

Решение. Выберем полярную систему координат с началом отсчета в центре диполя, а полярный угол θ отсчитывается от направления дипольного момента \mathbf{p} . Разложим вектор \mathbf{p} на две

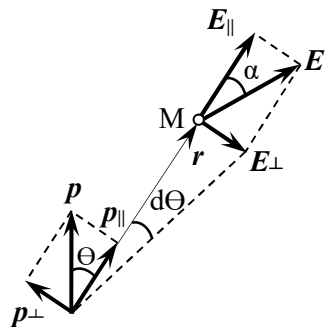


Рис. О.2.7.

составляющие: p_{\parallel} – вдоль радиус-вектора \mathbf{r} , проведенного из центра диполя к произвольной точке М, и p_{\perp} – перпендикулярную \mathbf{r} (см. рис. О.2.7). Напряженности полей, создаваемых этими составляющими, равны:

$$E_{\parallel} = \frac{2p_{\parallel}}{4\pi\epsilon_0 r^3}; \quad E_{\perp} = \frac{p_{\perp}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

и направлены так, как показано на рис. О.2.7.

Поскольку вектор \mathbf{E} направлен по касательной к силовой линии, то угол α между радиус-вектором \mathbf{r} и силовой линией в точке М определяется из условия:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}} = \frac{p_{\perp}}{2p_{\parallel}} = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\theta.$$

Проекция бесконечно малого участка силовой линии длины ds на направление вектора p_{\perp} равна: $ds = dr \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\theta \cdot dr$. В то же

время, $ds = r d\theta$, откуда получаем: $\frac{1}{2} \operatorname{tg}\theta \cdot dr = r d\theta$.

Разделяя переменные и интегрируя, находим уравнение силовой линии поля диполя:

$$\frac{1}{2} \int \frac{dr}{r} = \int \frac{d\theta}{\operatorname{tg}\theta}; \quad \frac{1}{2} \ln r = \ln(\sin\theta) + \operatorname{const}; \quad r = r_0 \sin^2 \theta,$$

где r_0 – модуль радиус-вектора \mathbf{r} при $\sin\theta = \pi/2$.

$$2.8. \quad F_{\max} = \frac{2pq}{4\pi\epsilon_0 l^3} \quad \text{при } \theta = 0; \pi; \quad F_{\min} = \frac{pq}{4\pi\epsilon_0 l^3} \quad \text{при}$$

$\theta = \pi/2; 3\pi/2$ (θ – угол между осью диполя и радиус-вектором \mathbf{r} , проведенным из центра диполя к точке).

Решение. Действующая на заряд сила $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. Модуль напряженности поля диполя равен (см. решение задачи 2.1):

$$E = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1}.$$

Следовательно, модуль силы максимален при $\theta = 0; \pi$ и составляет $F_{\max} = \frac{2pq}{4\pi\epsilon_0 l^3}$, а минимален при $\theta = \pi/2; 3\pi/2$ и равен

$$F_{\min} = \frac{pq}{4\pi\epsilon_0 l^3}.$$

$$2.9. F = \frac{qp\sqrt{2}}{50\pi\epsilon_0}.$$

Решение. Модуль силы, действующей на точечный заряд q в электрическом поле, равен: $F = qE$. Модуль напряжённости поля точечного диполя в точке с координатами (r, θ) , где угол θ в данном случае надо отсчитывать от оси ОХ, равен (см. задачу 2.1):

$$E(r, \theta) = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1}.$$

Поскольку по условию

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

то:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p}{5^{3/2}} \sqrt{3 \cdot \frac{1}{5} + 1} = \frac{p\sqrt{2}}{50\pi\epsilon_0},$$

Искомый модуль силы равен: $F = \frac{qp\sqrt{2}}{50\pi\epsilon_0}$.

$$2.10. E = \frac{2p\sqrt{5}}{\pi\epsilon_0 l^3}; \quad \operatorname{tg} \varphi = 1/2;$$

ориентация вектора E показана на рис. О.2.10 (E_1 и E_2 – напряженности полей, созданных диполями с дипольными моментами p_1 и p_2).

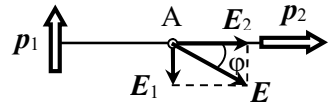


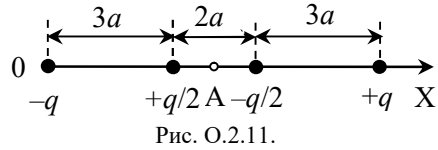
Рис. О.2.10.

2.11. $p = 7qa$, вектор p направлен в сторону заряда $(+q)$.

Решение. Дипольный момент системы точечных зарядов, находящихся в точках с радиус-векторами \mathbf{r}_i , равен

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{r}_i.$$

Направим ось X по линии, на которой находятся заряды, от заряда $(-q)$ к заряду $(+q)$ (см. рис. О.2.11). Начало отсчета совместим с зарядом $(-q)$. Тогда:



$$p = q \cdot 8a + \left(-\frac{q}{2}\right) \cdot 5a + \frac{q}{2} \cdot 3a = 7qa.$$

Вектор \mathbf{p} направлен в сторону заряда $(+q)$.

Данная система зарядов электрически нейтральна ($\sum_i q_i = 0$).

Покажем, что величина дипольного момента не зависит от выбора начала отсчета. Пусть начало отсчета находится в точке симметрии системы (т.А). Тогда дипольный момент равен:

$$p = q \cdot 4a + \left(-\frac{q}{2}\right) \cdot a + \frac{q}{2} \cdot (-a) + (-q) \cdot (-4a) = 7qa,$$

что совпадает с полученным ранее значением.

2.12. $p = 0$.

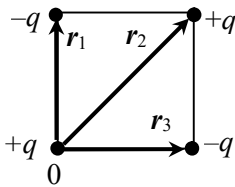


Рис. О.2.12.

Решение. Система является электрически нейтральной, поэтому величина дипольного момента не зависит от выбора начала отсчета. Совместим начало координат с зарядом $(+q)$ (см. рис. О.2.12). Согласно определению дипольного момента системы точечных

зарядов $\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{r}_i$, или

$$\mathbf{p} = (-q) \cdot \mathbf{r}_1 + q \cdot \mathbf{r}_2 + (-q) \cdot \mathbf{r}_3 = q(-\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_2) = 0,$$

так как в соответствии с рис. О.2.12 $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_2$.

$$2.13. E_{\text{квадр}}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3ql^2}{r^4} \sim \frac{1}{r^4}.$$

Решение. Квадруполь можно рассматривать как систему двух диполей с одинаковыми по модулю дипольными моментами $p = ql$, находящимися на малом расстоянии l друг от друга. Векторы \mathbf{p} диполей антипараллельны и направлены перпендикулярно линии ОМ. Напряженности полей диполей равны

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{p}\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right].$$

В точке М $\mathbf{r} \perp \mathbf{p}$, а модуль напряженности поля каждого диполя

$$E_{\text{дип}}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p}{r^3},$$

причем напряженности правого $E_1(r)$ и левого $E_2(r)$ диполей направлены в разные стороны. Следовательно, для нахождения модуля напряженности поля квадруполя надо вычесть модули напряженностей полей двух диполей, расположенных на малом расстоянии l друг от друга, то есть параметр r , от которого зависит модуль напряженности $E_{\text{дип}}$, изменяется на малую величину l . При этом можно воспользоваться формулой для приращения функции $f(x)$ при малом изменении δx аргумента x :

$$f(x + \delta x) - f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \Big|_{x_{\text{ср}}} \delta x.$$

Тогда для напряженности поля квадруполя получаем:

$$E_{\text{квадр}}(r) = E_{\text{дип}}(r - l/2) - E_{\text{дип}}(r + l/2) = \left| \frac{\partial E_{\text{дип}}}{\partial r} \right| \cdot l = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3ql^2}{r^4}.$$

Отметим общую закономерность: для точечного заряда $E \sim \frac{1}{r^2}$, для диполя $E \sim \frac{1}{r^3}$, для квадруполя $E \sim \frac{1}{r^4}$.

2.14. $\mathbf{p} = 0$.

Указание. Использовать определение дипольного момента

электрически нейтральной системы $\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{r}_i$.

$$2.15. \quad p = \frac{al^4}{4}.$$

Решение. Направим ось ОХ вдоль стержня, совместив начало отсчета с концом стержня. Система электрически нейтральна, так как $\int_0^l \tau(x) dx = a \int_0^l (3x^2 - l^2) dx = a (x^3 - l^2x) \Big|_0^l = 0$.

Дипольный момент такой системы равен:

$$p = \int_0^l \tau(x) x dx = a \int_0^l (3x^2 - l^2) x dx = a \left(\frac{3}{4} x^4 - \frac{x^2 l^2}{2} \right) \Big|_0^l = \frac{al^4}{4}.$$

$$2.16. \quad \mathbf{p} = \frac{qR\pi}{4} \mathbf{e}_z; \quad \varphi(z) = \frac{qR}{16 \epsilon_0 z^2}; \quad \mathbf{E}(z) = \frac{1}{8} \cdot \frac{qR}{\epsilon_0 z^3} \mathbf{e}_z.$$

Решение. По условию задачи $\tau(\vartheta) = \tau_0 \cos \vartheta$. Константу τ_0 найдем из условия, что полный заряд полукольца равен $+q$:

$$q = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tau_0 \cos \vartheta \cdot R d\vartheta = 2R\tau_0, \text{ откуда } \tau_0 = \frac{q}{2R}.$$

Определим дипольный момент системы. Так как система электрически нейтральна, ее дипольный момент может быть найден по формуле: $\mathbf{p} = \int_L \tau(\mathbf{r}) \mathbf{r} dl$. В силу симметрии системы ясно,

что проекция дипольного момента на ось Х равна нулю, и дипольный момент системы направлен вдоль оси Z. Выделим на полукольце небольшой участок длиной $Rd\vartheta$ с зарядом $\tau(\vartheta) Rd\vartheta$, находящийся на расстоянии R от точечного заряда $(-q)$. Проекция радиус-вектора \mathbf{r} этого участка на ось Z равна $R \cos \vartheta$. Проведем интегрирование по углу ϑ в пределах от $(-\pi/2)$ до $\pi/2$,

$$\begin{aligned}
 p = p_z &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tau(\vartheta) \cdot R^2 d\vartheta = \tau_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \vartheta R^2 \cos \vartheta d\vartheta = \\
 &= \frac{qR}{4} \left(\vartheta + \frac{\sin \vartheta}{2} \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{qR\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

$\frac{B^2}{\mu_0} \cdot S = P$ Потенциал системы на оси Z в дипольном при-

ближении равен:

$$\varphi(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(\mathbf{pr})}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p_z}{z^2} = \frac{qR}{16\epsilon_0 z^2}.$$

Напряженность поля на оси Z определяем по формуле:

$$\mathbf{E}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{3(\mathbf{pr})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2\mathbf{p}}{z^3} = \frac{qR}{8\epsilon_0 z^3} \mathbf{e}_z.$$

2.17. $A = W_2 - W_1 = 2pE$, где W – энергия диполя.

2.18. $A = pE = 9 \cdot 10^{-6}$ Дж.

Решение. На диполь в электрическом поле действует момент сил $\mathbf{M} = [\mathbf{pE}]$, который будет поворачивать диполь до того положения, в котором этот момент сил окажется равным нулю, т.е. будет $\mathbf{p} \parallel \mathbf{E}$. Энергия диполя во внешнем электрическом поле $W = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$. Совершаемая при повороте диполя силами электрического поля работа

$$A = W_1 - W_2 = pE = 9 \cdot 10^{-6} \text{ Дж}.$$

2.19. $A = -\frac{qP}{2\pi\epsilon_0 r^2} > 0.$

Решение. Потенциал поля точечного диполя на расстоянии r от него определяется формулой: $\varphi(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(\mathbf{pr})}{r^3}$. В начальном положении точечный заряд находится в точке с потенциалом

$\varphi_1(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p}{r^2}$, в конечном положении – в точке с потенциалом

$\varphi_2(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p}{r^2}$. Работа внешних сил по перемещению заряда

$q < 0$ равна:

$$A = q(\varphi_2 - \varphi_1) = -\frac{qp}{2\pi\epsilon_0 r^2} > 0.$$

$$2.20. A = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p^2}{d^3}.$$

Решение. Направим ось Z вдоль линии, соединяющей диполи, совместив начало отсчета с левым диполем. Напряженность поля левого диполя $\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{p}r)r}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2\mathbf{p}}{d^3}$ в точке нахождения правого диполя направлена в положительном направлении оси Z .

В электрическом поле левого диполя правый диполь обладает энергией

$$W_1 = -(\mathbf{p}\mathbf{E}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2p^2}{d^3}.$$

После удаления правого диполя на бесконечно большое расстояние от левого его потенциальная энергия станет равна нулю: $W_2 = 0$. Работа внешних сил по удалению диполя на бесконечность равна:

$$A = W_2 - W_1 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p^2}{d^3}.$$

$$2.21. A \cong \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p^2}{r_0^3} \approx 1,1 \cdot 10^{-20} \text{ Дж}.$$

$$2.22. \omega = \sqrt{\frac{2pE}{J}}.$$

Решение. На диполь в электрическом поле действует вращающий момент сил $\mathbf{M} = [\mathbf{pE}]$, который поворачивает диполь вокруг оси, перпендикулярной вектору \mathbf{p} , до положения равновесия, в котором $\mathbf{M} = 0$, т.е. векторы \mathbf{p} и \mathbf{E} параллельны. При этом потенциальная энергия диполя $W_{\text{пот}} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$ изменяется на величину

$$\Delta W_{\text{пот}} = -pE \cos \theta + pE \cos(\pi/2) = -pE.$$

В результате вращения диполь приобретет кинетическую энергию $W_{\text{кин}} = J\omega^2/2$. По закону сохранения энергии можно записать:

$$J\omega^2/2 - pE = 0, \text{ откуда находим: } \omega = \sqrt{\frac{2pE}{J}}.$$

2.23. $\alpha = \alpha_0 \cos\left(\sqrt{\frac{pE}{J}}t\right)$, где α – угол отклонения оси диполя

от направления напряженности электрического поля \mathbf{E} ; диполь совершает малые колебания с периодом $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{pE}}$.

Решение. Направим ось X декартовой системы отсчета с началом в центре диполя вдоль направления вектора \mathbf{E} , а ось Z – перпендикулярно \mathbf{E} . Угол поворота диполя будем отсчитывать относительно оси X .

На диполь со стороны электрического поля будет действовать вращающий момент $\mathbf{M} = [\mathbf{pE}]$, направленный по оси Z . Запишем уравнение моментов для диполя в проекции на ось Z :

$$J\ddot{\alpha} = M = -pE \sin \alpha.$$

С учетом малости угла α это уравнение перепишем в виде:

$$\ddot{\alpha} + \frac{pE}{J}\alpha = 0.$$

Это уравнение гармонических колебаний с частотой $\omega = \sqrt{\frac{pE}{J}}$. С учетом начальных условий закон движения диполя

имеет вид: $\alpha = \alpha_0 \cos\left(\sqrt{\frac{pE}{J}}t\right)$, где α – угол отклонения оси диполя

от направления напряженности электрического поля \mathbf{E} , т.е. диполь

совершает малые колебания вокруг оси X с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{pE}}.$$

$$2.24. \varphi(t) = \pm \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \omega t = \pm 90 \sin(10^3 t) [\text{В}].$$

Решение. Потенциал поля диполя в точке, лежащей в плоскости его вращения, равен $\varphi(\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(\mathbf{pr})}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p \cos \theta}{r^2}$, где θ –

угол между дипольным моментом \mathbf{p} и радиус-вектором \mathbf{r} точки при выборе начала отсчета в центре диполя.

При вращении диполя $\theta = \omega t + \theta_0$, следовательно,

$$\varphi(t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p}{r^2} \cos(\omega t + \theta_0).$$

Из начальных условий определяем θ_0 :

$$\varphi(0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p}{r^2} \cos \theta_0 = 0 \rightarrow \theta_0 = \pm \pi/2.$$

Таким образом, зависимость $\varphi(t)$ в исследуемой точке представима в виде:

$$\varphi(t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p}{r^2} \cos(\omega t \pm \pi/2) = \pm \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \omega t = \pm 90 \sin(10^3 t) [\text{В}].$$

$$2.25. \langle W \rangle_{T/2} = \frac{qp}{2\pi^2 \epsilon_0 r^2}.$$

Решение. Потенциальная энергия точечного заряда в точке с потенциалом поля φ равна $W = q\varphi$. Потенциал вращающегося диполя в точке нахождения заряда меняется по закону (см. решение задачи 2.24):

$$\varphi(t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p}{r^2} \sin \omega t.$$

Средняя за время $t = T/2$ потенциальная энергия заряда q равна:

$$\langle W \rangle_{T/2} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \frac{qp}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \omega t \, dt = \frac{qp}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{qp}{2\pi^2 \epsilon_0 r^2}.$$

$$2.26. \quad W = -\frac{p_1 p_2}{2\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Решение. Энергия взаимодействия диполей – это энергия точечного диполя с дипольным моментом \mathbf{p}_2 во внешнем электрическом поле с напряженностью \mathbf{E}_1 , создаваемой первым диполем в точке расположения второго:

$$W = -\mathbf{p}_2 \mathbf{E}_1,$$

где

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{3(\mathbf{p}_1 \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_1}{r^3} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2\mathbf{p}_1}{r^3}.$$

На второй диполь действует вращающий момент сил $\mathbf{M} = [\mathbf{p}_2 \mathbf{E}_1]$ со стороны поля первого диполя, поэтому он будет поворачиваться вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно дипольному моменту \mathbf{p} . Устойчивое положение достигается, когда $\mathbf{M} = 0$, т.е. угол между векторами \mathbf{p}_2 и \mathbf{E}_1 равен нулю, значит, векторы дипольных моментов \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 будут сонаправлены. При этом энергия взаимодействия диполей равна:

$$W = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2p_1 p_2}{r^3} = -\frac{p_1 p_2}{2\pi\epsilon_0 r^3}.$$

$$2.27. \text{ а) } W = -\frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3}; \text{ б) } W = 0; \text{ в) } W = \frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3};$$

$$\text{г) } W = \frac{p_1 p_2}{2\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Указание. См. решение задачи 2.26.

$$2.28. \text{ а) } W \approx -\frac{4,8p^2}{\pi\epsilon_0 a^3}; \text{ б) } W = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p^2}{a^3} \left(1 + \frac{1}{2^3} + \dots \right) \approx \frac{2,4p^2}{\pi\epsilon_0 a^3};$$

$$\text{в) } W = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p^2}{a^3} \left(-1 + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} - \frac{1}{5^3} + \dots \right) \approx -\frac{0,45p^2}{\pi\epsilon_0 a^3}.$$

Решение. а). Энергия взаимодействия какого-либо диполя с дипольным моментом p с ближайшим соседом справа равна (см. решение задачи 2.26):

$$W_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2p_1 p_2}{a^3} = -\frac{p^2}{2\pi\epsilon_0 a^3},$$

а со следующими диполями – соответственно:

$$W_2 = -\frac{p^2}{2\pi\epsilon_0 (2a)^3}, \quad W_3 = -\frac{p^2}{2\pi\epsilon_0 (3a)^3}, \quad W_4 = -\frac{p^2}{2\pi\epsilon_0 (4a)^3} \text{ и т. д.}$$

Поскольку диполь находится в неограниченной цепочке, соседние диполи располагаются симметрично слева и справа от выбранного. Полная энергия взаимодействия одного диполя со всеми остальными определяется суммой:

$$W = 2(W_1 + W_2 + \dots) = -\frac{1}{\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p^2}{a^3} \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots \right) \approx -\frac{4,8p^2}{\pi\epsilon_0 a^3}.$$

б), в). Задачи решаются аналогично, причем для выбранного диполя следует рассматривать симметрично расположенные относительно него соседние диполи как слева, так и справа.

$$2.29. \quad \mathbf{F} = -\frac{7q}{100\sqrt{5\pi\epsilon_0} R^3} \mathbf{p}.$$

Решение. Совместим начало координат с центром кольца и направим ось Z вдоль его оси в направлении дипольного момента \mathbf{p} , а оси X и Y – в плоскости кольца. Напряженность поля на оси равномерно заряженного кольца равна (см. решение задачи 1.20):

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}; \quad \mathbf{E} = E_z \mathbf{e}_z.$$

Сила, действующая на дипольный момент \mathbf{p} в электростатическом поле напряженностью \mathbf{E} , определяется по формуле:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \text{grad}) \mathbf{E} = p_x \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + p_y \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} + p_z \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z}.$$

Поскольку E_z зависит только от переменной z , а вектор \mathbf{p} направлен вдоль оси Z , имеем: $F_z = p \frac{\partial E}{\partial z}$.

Найдем производную $\frac{\partial E}{\partial z}$:

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(R^2 + z^2)^{3/2} - 3z^2(R^2 + z^2)^{1/2}}{(R^2 + z^2)^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{R^2 - 2z^2}{(R^2 + z^2)^{5/2}}.$$

Тогда сила, действующая на диполь, равна:

$$F = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{R^2 - 2z^2}{(R^2 + z^2)^{5/2}} p.$$

Подставляя $z = 2R$, окончательно получаем:

$$F = -\frac{7q}{100\sqrt{5}\pi\epsilon_0 R^3} p.$$

Знак "минус" указывает на то, что диполь притягивается к кольцу.

2.30. $F = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r^2} p$; $M = \frac{p\tau}{2\pi\epsilon_0 r}$, момент сил M направлен

вдоль заряженной нити и стремится установить дипольный момент p вдоль радиус-вектора r .

Решение. Диполь состоит из двух точечных зарядов ($+q$) и ($-q$), находящихся на малом расстоянии l друг от друга (дипольный момент p направлен от отрицательного заряда к положительному).

Напряженность поля заряженной нити на расстоянии r от неё равна по модулю

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}$$

и направлена вдоль радиус-вектора r . Со стороны поля заряженной нити на заряды, образующие диполь, действуют силы $F_+ = qE_+$ и $F_- = qE_-$ (E_+ и E_- — напряженности поля нити в местах нахождения соответствующих зарядов), направленные так, как показано на рис. О.2.30. Разложим эти силы на две составляющие: параллельные дипольному моменту p и перпендикулярные ему (см. рис. О.2.30). Видно, что компоненты сил $F_{+\perp}$ и $F_{-\perp}$ компенсируют друг друга, а компоненты $F_{+\parallel}$ и $F_{-\parallel}$

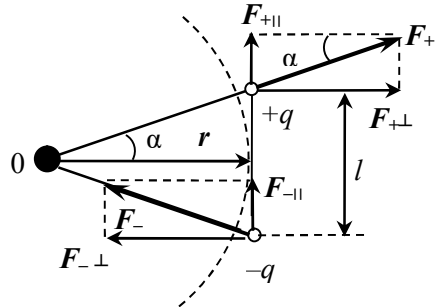


Рис. О.2.30.

направлены в одну сторону, совпадающую с направлением дипольного момента \mathbf{p} . Суммарная сила, действующая на диполь, равна:

$$F = 2F_{\parallel} = 2F_{+} \sin \alpha \cong 2 \frac{q\tau}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot \frac{l/2}{r} = \frac{(ql)\tau}{2\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p\tau}{2\pi\epsilon_0 r^2}$$

(ввиду того, что $l \ll r$, считаем $\sin \alpha \cong \frac{l/2}{r}$ и расстояния от нити до каждого из зарядов берем равными r).

С учетом направления силы \mathbf{F} и вектора \mathbf{p} в векторном виде можно записать:

$$\mathbf{F} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{p}.$$

Действующий на диполь момент силы \mathbf{M} равен $\mathbf{M} = [\mathbf{p}\mathbf{E}]$.

Так как вектор \mathbf{E} направлен вдоль радиус-вектора \mathbf{r} , $\mathbf{p} \perp \mathbf{E}$, следовательно,

$$M = \frac{p\tau}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Момент сил стремится установить дипольный момент \mathbf{p} вдоль радиус-вектора \mathbf{r} .

$$2.31. \text{ а) } \mathbf{F} = -\frac{q\mathbf{p}}{2\pi\epsilon_0 d^3}; \text{ б) } \mathbf{F} = -\frac{q\mathbf{p}}{2\pi\epsilon_0 d^3}; \text{ в) } \mathbf{F} = \frac{q\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 d^3}.$$

Указание. В случае в) решение задачи аналогично решению задачи 2.30.

$$2.32. F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{6p_1 p_2}{d^4}; \text{ диполи будут отталкиваться.}$$

Решение. Направим ось X по линии соединения диполей, от диполя \mathbf{p}_1 к диполю \mathbf{p}_2 . Начало координат совместим с расположением диполя 1. Сила, действующая на дипольный момент \mathbf{p} в электростатическом поле напряженностью \mathbf{E} , определяется по формуле:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \text{grad})\mathbf{E} = p_x \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + p_y \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} + p_z \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z}.$$

Определим силу, действующую на диполь p_2 со стороны поля диполя p_1 . Напряженность этого поля на расстоянии r от диполя равна

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{3(p_1 r) r}{r^5} - \frac{p_1}{r^3} \right] = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2p_1}{r^3}.$$

Так как дипольный момент p_2 имеет только компоненту p_x , при $r = d$ получаем силу, действующую на диполь p_2 :

$$F_2 = p_2 \frac{\partial E_1}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{6p_1 p_2}{d^4}.$$

При заданной в задаче ориентации диполей сила, действующая на диполь p_2 , будет направлена от диполя p_1 .

Сила, действующая на диполь p_1 в поле диполя p_2 будет такая же по величине и направлена от диполя p_2 , т.е. диполи будут отталкиваться.

2.33. $F = 3p^2/(2\pi\epsilon_0 d^4) = 2,1 \cdot 10^{-12}$ Н. Молекулы притягиваются друг к другу.

2.34. $F = \frac{3p^2}{4\pi\epsilon_0 r^4}$; диполи отталкиваются друг от друга.

Решение. Для наглядности данную задачу будем решать, рассматривая диполь как систему из двух точечных зарядов $(+q)$ и $(-q)$, находящихся на малом расстоянии l друг от друга (дипольный момент p направлен от отрицательного заряда к положительному).

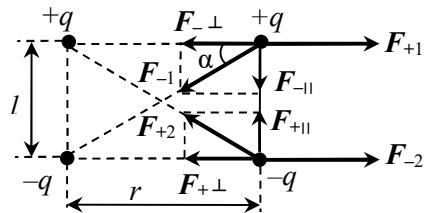


Рис. О.2.34.

Определим силу, действующую на правый диполь (обозначим его цифрой II) со стороны левого диполя (диполь I). Со стороны каждого заряда диполя I на заряды диполя II действуют силы $F_+ = \pm qE_+$ и $F_- = \pm qE_-$ (E_+ и E_- – напряженности полей зарядов диполя I в местах нахождения соответствующих зарядов диполя II), изображенные на рис. О.2.34. Разложим эти силы на две составляющие: параллельные дипольному моменту p и перпендикулярные ему (см. рис. О.2.34). Видно, что компоненты сил $F_{+||}$ и $F_{-||}$ компенсируют друг друга. Компоненты $F_{+⊥}$, $F_{-⊥}$ и силы $F_{+⊥}$,

F_{-2} направлены перпендикулярно дипольному моменту \mathbf{p} и определяют силу, действующую на диполь II. Из-за различия расстояний от, например, заряда $+q$ диполя I до зарядов $(+q)$ и $(-q)$ диполя II результирующая сила, действующая на диполь II, направлена от диполя I, т.е. диполи отталкиваются друг от друга.

Напряженность поля точечного заряда Q на расстоянии x от него равна по модулю $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$. Суммируя силы, действующие

на диполь II, получаем:

$$F = F_{+1} + F_{-2} - F_{-1} - F_{+2} = 2(F_{+1} - F_{-1}) = 2(F_{+1} - F_{-1} \cos \alpha),$$

где $F_{+1} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, $F_{-1} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + l^2)}$, $\cos \alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2 + l^2}}$, т.е.

$$F = \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r^2} - \frac{r}{(r^2 + l^2)^{3/2}} \right] = \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 r^2} \left[1 - \frac{1}{(1 + (l/r)^2)^{3/2}} \right].$$

Так как $l/r \ll 1$, применим разложение по малому параметру:

$(1+x)^{-3/2} \approx 1 - \frac{3}{2}x$. В итоге модуль искомой силы равен:

$$F = \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 r^2} \left(1 - 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{l^2}{r^2} \right) = \frac{3(ql)^2}{4\pi\epsilon_0 r^4} = \frac{3p^2}{4\pi\epsilon_0 r^4}.$$

2.35. $M = \frac{Qps \sin \alpha}{2\pi^2 \epsilon_0 R^2}.$

Решение. Электрическое поле диполя при $r = R$ характеризуется напряженностью

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3(\mathbf{pr})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right\} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3p \cos \varphi}{R^4} \mathbf{R} - \frac{\mathbf{p}}{R^3} \right\},$$

где \mathbf{R} – радиус-вектор точек на полукольце (см. рис. О.2.35).

На элемент полукольца длиной $dl = R d\varphi$ с зарядом $dq = \tau dl$ ($\tau = \frac{Q}{\pi R}$ – линейная плотность заряда) со стороны поля диполя действует сила $d\mathbf{F} = \mathbf{E} dq$,

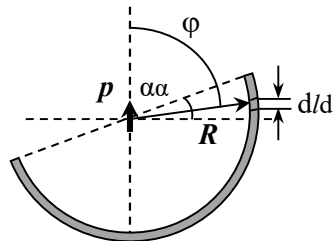


Рис. О.2.35.

момент которой относительно оси, проходящей через точку O , равен

$$\begin{aligned} d\mathbf{M} &= [\mathbf{R} \times d\mathbf{F}] = \frac{\tau R}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3\rho\cos\varphi}{R^4} [\mathbf{R} \times \mathbf{R}] - \frac{1}{R^3} [\mathbf{R} \times \mathbf{p}] \right\} d\varphi = \\ &= -\frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 R^2} [\mathbf{R} \times \mathbf{p}] d\varphi. \end{aligned}$$

Суммарный момент направлен перпендикулярно его плоскости полукольца и его модуль равен:

$$\begin{aligned} M &= \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 R^2} R\rho\sin\varphi = \frac{Q\rho}{4\pi^2\epsilon_0 R^2} \int_{\pi/2-\alpha}^{3\pi/2-\alpha} \sin\varphi d\varphi = \\ &= \frac{Q\rho}{4\pi^2\epsilon_0 R^2} (-\cos\varphi) \Big|_{\pi/2-\alpha}^{3\pi/2-\alpha} = \frac{Q\rho\sin\alpha}{2\pi^2\epsilon_0 R^2}. \end{aligned}$$

§3. Проводники в электростатическом поле

3.1. $Q_{2к} = Q_2 - q_2 + \left(-Q_2 + \sqrt{Q_2^2 + 4Q_1q_2} \right) / 2.$

Решение. Пусть заряд шарика перед касанием второй сферы равен q_1 . После касания пропорция распределения заряда по частям составного тела определяется только размерами соприкасающихся тел. Так как радиусы сфер одинаковы, то после касания отношения оставшихся на первой и второй сферах зарядов к заряду шарика должны быть равны, т.е.

$$\frac{Q_1 - q_1}{q_1} = \frac{Q_{2к}}{q_2}.$$

По закону сохранения заряда

$$Q_2 + q_1 = Q_{2к} + q_2.$$

Исключая из полученной системы уравнений $Q_{2к}$, получаем уравнение относительно q_1 :

$$q_1^2 + Q_2q_1 - Q_1q_2 = 0,$$

из которого находим q_1 :

$$q_1 = \left(-Q_2 + \sqrt{Q_2^2 + 4Q_1q_2} \right) / 2.$$

Искомый заряд второй сферы равен:

$$Q_{2к} = Q_2 + q_1 - q_2 = Q_2 - q_2 + \left(-Q_2 + \sqrt{Q_2^2 + 4Q_1q_2} \right) / 2.$$

$$3.2. Q = R(4\pi\varepsilon_0\varphi_0 - q/d).$$

Решение. Поле создается точечным зарядом q , зарядом самого шара Q и индуцированными на поверхности шара зарядами.

Вклад заряда q в потенциал в центре шара равен $\varphi_q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{d}$.

Вклад заряда Q — $\varphi_Q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{R}$, а вклад индуцированных зарядов

равен нулю, т.к. все эти заряды находятся на одинаковом расстоянии R от центра шара, а их сумма равна нулю. Так как шар металлический, потенциал шара равен потенциалу любой его точки,

например, центра, т.е. $\varphi_0 = \varphi_q + \varphi_Q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{q}{d} + \frac{Q}{R} \right)$.

Отсюда находим заряд шара:

$$Q = R(4\pi\varepsilon_0\varphi_0 - q/d).$$

$$3.3. \left. \frac{q_2}{q_1} \right|_{2n} = \frac{r}{a}.$$

Решение. Изначально потенциал первого шара, заряд которого q , и который находится на расстоянии a от второго шара, при нормировке $\varphi_\infty = 0$ равен (см. решение задачи 3.2):

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{q}{r} + \frac{q}{a} \right).$$

При выбранной нормировке потенциал Земли равен нулю. В результате заземления шарика его потенциал тоже становится равным нулю, а часть его заряда "уходит" на Землю, являющуюся практически бесконечной проводящей средой. На шарике остается заряд q_1 , поэтому

$$\varphi = 0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{q_1}{r} + \frac{q}{a} \right), \text{ откуда } q_1 = -q \cdot \frac{r}{a}.$$

После заземления второго шарика его потенциал также станет равен нулю, а заряд — q_2 :

$$\varphi = 0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{q_2}{r} + \frac{q_1}{a} \right), \text{ откуда } q_2 = -q_1 \cdot \frac{r}{a} = q \cdot \left(\frac{r}{a} \right)^2.$$

Далее аналогично получим, что после n заземлений заряд первого шарика будет равен по модулю:

$$|q_{1n}| = q \cdot \left(\frac{r}{a} \right)^{2n-1}, \text{ а второго } q_{2n} = q \cdot \left(\frac{r}{a} \right)^{2n}$$

При этом отношение зарядов шаров $\left. \frac{q_2}{q_1} \right|_{2n} = \frac{r}{a}$.

$$3.4. \quad \varphi_1^\infty = \frac{q_2(q_2 - 4\pi\epsilon_0 R_2 \varphi_2')}{16\pi^2 \epsilon_0^2 R_1 R_2 \varphi_2'}.$$

Решение. Потенциал шара, удаленного на большое расстояние от других тел, когда влиянием электрических полей на шар можно пренебречь, определяется только зарядом самого шара. Поскольку все участки шара с зарядом Δq_i находятся на одинаковом расстоянии R от его центра и дают в центре шара вклад в потенциал $\Delta\varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\Delta q_i}{R}$, полный потенциал в центре шара равен:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{\Delta q_i}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \sum_i \Delta q_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R}.$$

У металлического шара потенциал всех его точек одинаков и равен потенциалу в центре шара.

Пусть после первого соприкосновения шаров они приобрели заряды q'_1 и q'_2 . После касания и удаления второго шара на большое расстояние от первого его потенциал стал φ'_2 , заряд $q'_2 = 4\pi\epsilon_0 R_2 \varphi'_2$. По закону сохранения заряда $q'_1 + q'_2 = q_2$, поэтому:

$$\frac{q'_2}{q'_1} = \frac{q'_2}{q_2 - q'_2}.$$

При соприкосновении металлических шаров их заряд распределяется пропорционально площади их поверхности, поэтому отношение зарядов шаров после любого их соприкосновения будет равно $\frac{q'_2}{q_2 - q'_2}$. После бесконечно большого числа соприкоснове-

ний переход заряда от первого шара ко второму прекратится, следовательно:

$$\frac{q_2}{q_1^\infty} = \frac{q_2'}{q_2 - q_2'}, \text{ откуда находим } q_1^\infty = q_2 \left(\frac{q_2}{q_2'} - 1 \right).$$

Учитывая что $q_2' = 4\pi\epsilon_0 R_2 \varphi_2'$ для потенциала первого шара получаем:

$$\varphi_1^\infty = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1^\infty}{R_1} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_1} \left(\frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2 \varphi_2'} - 1 \right) = \frac{q_2 (q_2 - 4\pi\epsilon_0 R_2 \varphi_2')}{16\pi^2 \epsilon_0^2 R_1 R_2 \varphi_2'}.$$

$$3.5. \varphi_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q + Q}{R}, \quad \varphi_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{q}{r} + \frac{Q}{R} \right).$$

$$3.6. \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{Q + q_1}{R} + \frac{q_2}{l_2} \right).$$

Решение. Разобьем задачу на две части. Сначала рассмотрим точечный заряд q_1 внутри сферы с зарядом Q_1 , а затем заряд q_2 вне сферы с зарядом Q_2 , причем $Q_1 + Q_2 = Q$.

При наличии внутри сферы точечного заряда вне сферы поле такое же, как поле точечного заряда $(Q_1 + q_1)$, расположенного в центре сферы. При этом на внутренней поверхности сферы будет находиться заряд $(-q_1)$, а на внешней - $Q_1 + q_1$. Электрическое поле внутри нее неоднородно. Потенциал такой сферы равен

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 + Q_1}{R}.$$

Когда точечный заряд находится вне сферы, её потенциал создается зарядом Q_2 и индуцированными на поверхности сферы зарядами, сумма которых равна нулю. Потенциал сферы равен потенциалу её центра:

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{Q_2}{R} + \frac{q_2}{l_2} \right).$$

Теперь совместим две сферы. Получим сферу с зарядом Q , потенциал которой равен сумме потенциалов:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{Q + q_1}{R} + \frac{q_2}{l_2} \right).$$

$$3.7. \varphi = \varphi_0 (1 - R_1 / R_2).$$

Решение. Пусть заряд шара равен q . На сферической оболочке возникнут индуцированные заряды: $(-q)$ на внутренней поверхности, $(+q)$ – на внешней. Так как шар металлический, его потенциал одинаков во всем его объеме, поэтому достаточно найти потенциал, например, в центре шара, который определяется только зарядом шара q , так как сумма индуцированных зарядов оболочки равна нулю. При этом $\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R_1}$, откуда

$$q = 4\pi\epsilon_0\varphi_0 R_1.$$

После заземления потенциал оболочки станет равен потенциалу Земли, который принимается равным нулю. При этом заряд с внешней стороны оболочки "уходит" на Землю, а вся оболочка будет иметь заряд $(-q)$.

Потенциал φ шара равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{q}{R_1} - \frac{q}{R_2} \right) = \varphi_0 R_1 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \varphi_0 \left(1 - \frac{R_1}{R_2} \right).$$

$$3.8. Q_2 = -Q_1 \frac{R_2}{R_1}.$$

Решение. Потенциал электрического поля заряда Q_1 на расстоянии $r \geq R_1$ до центра сфер равен: $\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{r}$. Потенциал

поля заряда Q_2 при $r \geq R_2$ до центра сфер: $\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_2}{r}$. При

$$r \leq R_2: \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_2}{R_2}.$$

Используя принцип суперпозиции определим потенциал внутренней сферы, равный по условию задачи нулю:

$$\varphi(R_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2} \right) = 0, \text{ откуда } Q_2 = -Q_1 \frac{R_2}{R_1}.$$

$$3.9. q_2 = -q \frac{r}{R} + 4\pi\epsilon_0 r \mathcal{E}; \Delta q = 4\pi\epsilon_0 r \mathcal{E}.$$

Решение. Потенциал земли принимается равным нулю. Поскольку в положении 1 ключа К потенциал шара равен нулю, его установившийся заряд q_1 определяется из условия (см. решение задачи 3.7):

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{q}{R} + \frac{q_1}{r} \right) = 0,$$

откуда $q_1 = -q \frac{r}{R}$.

В положении ключа 2 потенциал шара равен

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{q}{R} + \frac{q_2}{r} \right) = \mathcal{E}, \text{ откуда находим } q_2 = -q \frac{r}{R} + 4\pi\epsilon_0 r \mathcal{E}.$$

Через источник протечет заряд

$$\Delta q = q_2 - q_1 = -q \frac{r}{R} + 4\pi\epsilon_0 r \mathcal{E} + q \frac{r}{R} = 4\pi\epsilon_0 r \mathcal{E}.$$

$$3.10. \varphi_1 = \varphi R_1 / R_2.$$

Решение. До соединения сфер проводником заряд первой был равен: $q = 4\pi\epsilon_0 \varphi R_1$. После соединения заряд с шара перетечет на внешнюю оболочку, и потенциалы шара и оболочки сравняются. Поэтому удобно искать не потенциал шара φ_1 , а равный ему потенциал внешней оболочки:

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 + q_2}{R_2},$$

где q_1 и q_2 – заряды шара и оболочки после соединения. По закону сохранения заряда $q = q_1 + q_2$.

В результате получаем:

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R_2} = \varphi \frac{R_1}{R_2}.$$

$$3.11. q_1 = -q \cdot \frac{(R_2 / r - 1)}{R / R_1 - 1}; q_2 = -q \cdot \frac{(1 - R_1 / r)}{1 - R_1 / R_2}.$$

Решение. Обозначим заряды, появившиеся на сферах, как q_1 (на внутренней) и q_2 (на внешней). Потенциал внутренней сферы равен потенциалу её центра:

$$\varphi(R_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{q_1}{R_1} + \frac{q_2}{R_2} + \frac{q}{r} \right).$$

Поле во внешнем пространстве такое же, как поле точечного заряда ($q_1 + q + q_2$), поэтому потенциал внешней сферы равен:

$$\varphi(R_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 + q + q_2}{R_2}.$$

Так как сферы заземлены, их потенциал равен нулю, поэтому:

$$\left(\frac{q_1}{R_1} + \frac{q_2}{R_2} + \frac{q}{r} \right) = 0 \text{ и } q_1 + q + q_2 = 0.$$

Решая систему, находим:

$$q_1 = -q \cdot \frac{(R_2/r - 1)}{R/R_1 - 1}; \quad q_2 = -q \cdot \frac{(1 - R_1/r)}{1 - R_1/R_2}.$$

$$3.12. \Delta\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right).$$

$$3.13. \Delta\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

$$3.14. \text{ При } r \leq R \quad \varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{2}{3R} + \frac{1}{R} \right) = \frac{5Q}{12\pi\epsilon_0 R}; \text{ при } R \leq r \leq 3R$$

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{2}{3R} + \frac{1}{r} \right); \text{ при } r \geq 3R \quad \varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3Q}{r}.$$

$$3.15. q_1 = Q/4.$$

Решение. Пусть заряд внешней сферы после её соединения с внутренней равен q_1 . Тогда заряд внутренней сферы равен $-q_1$, по-

сколько сферы не были заряжены. Потенциал каждой из сфер находим как суперпозицию потенциалов трех сфер:

$$\varphi(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{q_1}{R} + \frac{Q}{2R} + \frac{q_1}{R} \right), \quad \varphi(3R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{3R}.$$

Поскольку потенциалы соединенных сфер одинаковы, приходим к уравнению:

$$-\frac{q_1}{R} + \frac{Q}{2R} + \frac{q_1}{3R} = \frac{Q}{3R}, \text{ откуда } q_1 = Q/4.$$

Именно такой заряд перейдет по проволоке с внутренней сферы на внешнюю.

$$\mathbf{3.16.} \quad \Delta q = Q/2.$$

Решение. Считаем, что потенциал Земли равен нулю. Пусть после соединения сфер заряд на внутренней сфере равен q_1 , а на средней q_2 , причем по закону сохранения заряда $q_1 + q_2 = Q$.

Поскольку потенциал внешней сферы равен

$$\varphi_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 + q_2 + q_3}{R_2} = 0,$$

заряд $q_3 = -(q_1 + q_2) = -Q$.

Потенциалы внутренней φ_1 и средней φ_2 сфер равны:

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{q_1}{R} + \frac{q_2}{2R} + \frac{q_3}{3R} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \cdot (q_1 + 2Q/3);$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{q_1}{2R} + \frac{q_2}{2R} + \frac{q_3}{3R} \right) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0 R} \cdot (q_1 + q_2 - 2Q/3) = \frac{Q}{24\pi\epsilon_0 R}.$$

Так как после соединения потенциалы сфер одинаковы, $\varphi_1 = \varphi_2$, откуда

$$q_1 + 2Q/3 = Q/6, \text{ т.е. } q_1 = Q/2 \text{ и } q_2 = Q - Q/2 = Q/2.$$

Значит, по проводу протечет заряд $\Delta q = Q - q_1 = Q/2$.

$$\mathbf{3.17.} \quad \sigma_1 = \sigma_4 = -2q/S, \quad \sigma_2 = 3q/S, \quad \sigma_3 = -3q/S; \quad U = \frac{3qd}{S\epsilon_0}.$$

Решение. Пусть заряды пластин равны Q_1 и Q_2 . Так как внутри металлических пластин $E = 0$, то заряды Q_1 и Q_2 и индуцирован-

ные заряды равномерно распределятся на четырех плоскостях с поверхностными плотностями σ_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Напряженности электрических полей, создаваемых этими зарядами, направлены

перпендикулярно поверхностям пластин и равны: $E_i = \frac{\sigma_i}{2\varepsilon_0}$, где

σ_i – суммарная поверхностная плотность зарядов Q_1, Q_2 и индуцированных зарядов на i -той поверхности пластин.

По принципу суперпозиции в любой точке пространства напряженности полей четырех заряженных поверхностей суммируются. Так как сумма индуцированных зарядов в каждой из пластин равна нулю, можно записать:

$$(\sigma_1 + \sigma_2)S = Q_1, \quad (\sigma_3 + \sigma_4)S = Q_2.$$

Выделим прямой цилиндр, основания которого находятся внутри первой и второй пластин (на рис. О.3.17 цилиндр показан штриховой линией). По теореме Гаусса:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sigma_2 S_0 + \sigma_3 S_0. \text{ Здесь } S_0 \text{ – площадь оснований цилиндра.}$$

Так как внутри металлической пластины $\mathbf{E} = 0$, то

$$\sigma_2 S_0 + \sigma_3 S_0 = 0, \text{ откуда } \sigma_2 = -\sigma_3.$$

Следовательно, внутри каждой пластины поля, создаваемые поверхностями 2 и 3, взаимно скомпенсированы. Так как в толще пластин $\mathbf{E} = 0$, то поля от поверхностей 1 и 4 тоже должны быть скомпенсированы, что возможно, если $\sigma_1 = \sigma_4$.

Между пластинами векторы \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_4 направлены в противоположные стороны, поэтому $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_4 = 0$, а \mathbf{E}_2 и \mathbf{E}_3 сонаправлены и равны по модулю (рис. О.3.17). В итоге модуль

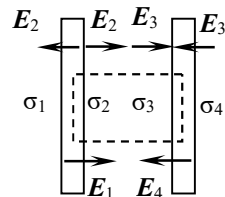


Рис. О.3.17.

напряженности поля между пластинами равен: $E = 2E_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}$.

Из полученных соотношений находим:

$$\sigma_1 = \sigma_4 = \frac{Q_1 + Q_2}{2S} = \frac{q - 5q}{2S} = -2q/S,$$

$$\sigma_2 = \frac{Q_1 - Q_2}{2S} = \frac{q + 5q}{2S} = 3q/S, \quad \sigma_3 = -\sigma_2 = -3q/S.$$

Разность потенциалов между пластинами равна:

$$U = Ed = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} d = \frac{3q}{S\varepsilon_0} d.$$

$$3.18. q_1 = \frac{1}{2}(Q_1 + Q_2 - Q_3) = q_6, \quad q_2 = \frac{1}{2}(Q_1 - Q_2 + Q_3) = -q_3,$$

$$q_4 = \frac{1}{2}(Q_1 + Q_2 + Q_3) = -q_5.$$

$$U_{12} = \frac{Q_1 - Q_2 + Q_3}{2\varepsilon_0 S} d, \quad U_{23} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{2\varepsilon_0 S} d.$$

Решение. Пронумеруем поверхности пластин слева направо (рис.О.3.18). Поверхностные плотности зарядов для соседних поверхностей пластин, разделенных воздушным зазором, равны по величине, но разного знака (см. решение задачи 3.17). Поскольку площади S всех пластин одинаковы:

$$q_2 = -q_3, \quad q_4 = -q_5$$

(буквой q_i обозначен заряд на i -й пластине).

Так как сумма индуцированных зарядов на любой изолированной пластине равна нулю, то:

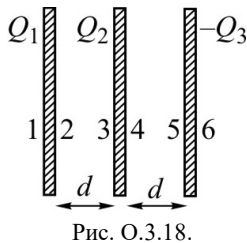


Рис. О.3.18.

$$\begin{cases} q_1 + q_2 = Q_1, \\ q_3 + q_4 = Q_2, \\ q_5 + q_6 = -Q_3. \end{cases}$$

Каждая заряженная поверхность пластины создает электрическое поле напряженностью

$$E_i = \frac{\sigma_i}{2\varepsilon_0} = \frac{q_i}{2\varepsilon_0 S}, \quad \text{напряженности}$$

всех полей в любой точке пространства суммируются. Чтобы внутри любой пластины $E = 0$, сумма зарядов слева от мысленно выделенной в пластине плоскости, параллельной поверхностям, должна быть равна сумме зарядов справа:

$$\begin{cases} q_1 = q_2 + Q_2 - Q_3, \\ Q_1 + q_3 = q_4 - Q_3, \\ Q_1 + Q_2 + q_5 = q_6. \end{cases}$$

Объединяя попарно первые, вторые и третьи уравнения, находим заряды на поверхностях пластин:

$$q_1 = \frac{1}{2}(Q_1 + Q_2 - Q_3) = q_6, \quad q_2 = \frac{1}{2}(Q_1 - Q_2 + Q_3) = -q_3,$$

$$q_4 = \frac{1}{2}(Q_1 + Q_2 + Q_3) = -q_5.$$

Рассчитывая E_i от каждой поверхности и учитывая направления E_i (см. решение задачи 3.17), с учетом соотношений $\sigma_3 = -\sigma_2$, $\sigma_5 = -\sigma_4$, $\sigma_1 = \sigma_6$ находим напряженности полей в левом E_{12} и в правом E_{23} зазоре между пластинами:

$$E_{12} = \frac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_2 - \sigma_4 + \sigma_4 - \sigma_6) = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0},$$

$$E_{23} = \frac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_2 + \sigma_4 + \sigma_4 - \sigma_6) = \frac{\sigma_4}{\varepsilon_0}.$$

Как видно из полученных формул, напряженности полей в зазорах между пластинами определяется только плотностями зарядов на ограничивающих зазор поверхностях.

Разности потенциалов между пластинами U_{12} и U_{23} находим по формуле $U = Ed$:

$$U_{12} = \frac{Q_1 - Q_2 + Q_3}{2\varepsilon_0 S} d, \quad U_{23} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{2\varepsilon_0 S} d.$$

3.19. $q_1 = q/3$, $q_2 = -q/3$, $q_3 = q/3$, $q_4 = 2q/3$, $q_5 = -2q/3$, $q_6 = -q/3$, $q_7 = q/3$, $q_8 = -q/3$. Поверхности пластин пронумерованы сверху вниз.

Решение. После соединения внешних пластин разность потенциалов U_{14} между ними равна нулю. Она равна сумме трех разностей потенциалов: U_{12} между пластинами 1 и 2, U_{23} между пластинами 2 и 3 и U_{34} между пластинами 3 и 4. Кроме того, $U_{12} = U_{34}$, поэтому можно записать:

$$U_{14} = 2U_{12} + U_{23} = 0.$$

Поскольку расстояния между пластинами одинаковы, переходим от напряжений к напряженностям полей в зазорах по формуле $U = Ed$. Напряженности полей в зазорах между пластинами определяются только плотностями зарядов на ограничивающих

зазор поверхностях (равными по модулю, но противоположными по знаку) (см. решение задачи 3.18). Так как напряженность поля,

создаваемого поверхностью с зарядом q_i , равна $E_i = \frac{\sigma_i}{2\epsilon_0} = \frac{q_i}{2\epsilon_0 S}$,

для зарядов поверхностей пластин получаем, учитывая направления векторов \mathbf{E}_i , (поверхности пластин будем нумеровать сверху вниз, у каждой пластины 2 поверхности):

$$2q_2 = -q_4.$$

Полный заряд второй пластины равен q , т.е. $q_3 + q_4 = q$, но $q_3 = -q_2$. В результате получаем:

$$-q_2 + q_4 = q.$$

Используя полученное выше соотношение $2q_2 = -q_4$, имеем:

$$-q_2 - 2q_2 = q, \text{ откуда находим: } q_2 = -q/3.$$

Далее, используя найденные ранее соотношения, находим заряды всех поверхностей:

$$q_1 = -q_2 = q_3 = q/3, \quad q_4 = -2q_2 = 2q/3, \quad q_5 = -q_4 = -2q/3,$$

$$q_6 = -q_7 = q_8 = -q/3.$$

$$3.20. \quad q_1 = -q \frac{l_2}{l_1 + l_2}, \quad q_2 = -q \frac{l_1}{l_1 + l_2}.$$

Решение. В присутствии заряда поле между пластинами неоднородно, поэтому искать распределение зарядов по пластинам сложно. Однако полный индуцированный на поверхности пластины заряд останется неизменным при перемещении заряда q в плоскости Р, параллельной пластинам (рис. О.3.20), изменится только распределение плотности индуцированного заряда на пластинах, а сам он будет просто перемещаться вместе с зарядом q .

Если в плоскости Р будет несколько зарядов q_i , то каждый из них будет индуцировать на поверхности пластины заряды, которые затем можно сложить (принцип суперпозиции). Поэтому, если требуется узнать только полный индуцированный на поверхности пластины заряд, а не его распределение, можно "размазать" заряд q по пластине в плоскости Р с некоторой суммарной (учитывая две сто-

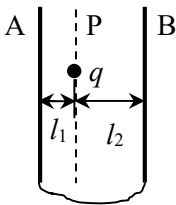


Рис. О.3.20.

роны пластины Р) поверхностной плотностью заряда σ . От этого индуцированные заряды не изменятся, а задача сведется к задаче об однородных полях между параллельными пластинами.

Так как силовые линии электрического поля начинаются на заряде q и заканчиваются на внутренних поверхностях пластин, сразу можно записать:

$$q_1 + q_2 = -q,$$

откуда следует, что

$$\sigma_1 + \sigma_2 = -\sigma,$$

где σ_1 и σ_2 – поверхностные плотности заряда на внутренних поверхностях пластин.

Напряженности полей в зазорах между пластинами определяются только плотностями зарядов на ограничивающих зазор поверхностях (равными по модулю, но противоположными по знаку),

поэтому они по модулю равны: $E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}$ и $E_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}$. Поскольку

пластины соединены, разность потенциалов между ними равна нулю, откуда

$$E_1 l_1 = E_2 l_2, \text{ и } \sigma_1 l_1 = \sigma_2 l_2.$$

Учитывая, что $\sigma_1 + \sigma_2 = -\sigma$, окончательно получаем:

$$\sigma_1 = -\sigma \frac{l_2}{l_1 + l_2}, \quad \sigma_2 = -\sigma \frac{l_1}{l_1 + l_2}.$$

Аналогичные соотношения справедливы и для зарядов:

$$q_1 = -q \frac{l_2}{l_1 + l_2}, \quad q_2 = -q \frac{l_1}{l_1 + l_2}.$$

$$\mathbf{3.21.} \quad \Delta q = \frac{\varepsilon_0 S \xi}{56d}.$$

Решение. Напряженность электрического поля в конденсаторе до внесения в него пластины была равна $E_0 = \frac{\xi}{8d}$, следовательно, поверхностная плотность заряда на обкладках конденсатора $\sigma = \varepsilon_0 E_0 = \varepsilon_0 \xi / (8d)$, а полный заряд конденсатора

$$q_0 = \sigma S = \frac{\varepsilon_0 S \xi}{8d}.$$

Такой же заряд имеет пластина. После внесения пластины заряд на обкладках конденсатора стал равен q_1 , заряд на верхней стороне пластины q_2 , на нижней q_3 , причем $q_2 + q_3 = q_0$. Напряжённость электрического поля над пластиной равна:

$$E_1 = \frac{q_1}{\varepsilon_0 S} + \frac{q_2}{2\varepsilon_0 S} + \frac{q_3}{2\varepsilon_0 S} = \frac{2q_1 + q_0}{2\varepsilon_0 S},$$

а под пластиной:

$$E_2 = \frac{q_1}{\varepsilon_0 S} - \frac{q_2}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q_3}{2\varepsilon_0 S} = \frac{2q_1 - q_0}{2\varepsilon_0 S}.$$

В начальном положении толщина воздушного слоя над пластиной равна d , а под пластиной $6d$. Так как в металлической пластине $E = 0$, можно записать:

$$\varepsilon = E_1 d + E_2 \cdot 6d = \frac{1}{2\varepsilon_0 S} [(2q_1 + q_0)d + (2q_1 - q_0) \cdot 6d] = \frac{14q_1 - 5q_0}{2\varepsilon_0 S} d,$$

откуда находим заряд на обкладках конденсатора после внесения пластины:

$$14q_1 = \frac{2\varepsilon_0 S \varepsilon}{d} + 5q_0 = 21q_0, \text{ т.е. } q_1 = \frac{3}{2} q_0.$$

Аналогично, когда пластина находится в конечном положении, новый заряд q'_1 на обкладках конденсатора найдем из условия:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= E'_1 \cdot 5d + E'_2 \cdot 2d = \frac{1}{2\varepsilon_0 S} [(2q'_1 + q_0) \cdot 5d + (2q'_1 - q_0) \cdot 2d] = \\ &= \frac{14q'_1 - 3q_0}{2\varepsilon_0 S} d, \end{aligned}$$

и новый заряд конденсатора равен: $q'_1 = \frac{19}{14} q_0$.

Через источник ЭДС пройдет заряд

$$\Delta q = q_1 - q'_1 = \frac{1}{7} q_0 = \frac{\varepsilon_0 S \varepsilon}{56d}.$$

$$3.22. \quad \varphi(r) = \frac{\tau \ln 3}{2\pi\varepsilon_0} \quad \text{при } 0 \leq r \leq R; \quad \varphi(r) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{3R}{r} \quad \text{при}$$

$R \leq r \leq 3R; \quad \varphi = 0 \quad \text{при } r \geq 3R.$

Решение. Так как цилиндр радиусом $3R$ заземлен, потенциал на его внешней поверхности и плотность зарядов равна нулю. Поэтому сумма зарядов внутреннего цилиндра и индуцированного на внутренней поверхности цилиндра радиусом $3R$ будет равна нулю. При этом потенциал вне цилиндров равен потенциалу внешнего цилиндра, т.е.: $\varphi|_{r \geq 3R} = \varphi_1(3R) = 0$.

Вклад в потенциал от заряда внутренней трубки при $r \geq R$:

$$\varphi_1(r) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{C}{r},$$

где C – постоянная, которую определяем из условия непрерывности потенциала при $r = 3R$:

$$\varphi_1(3R) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{C}{3R} = 0, \text{ откуда } C = 3R \text{ и } \varphi_1(r) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{3R}{r}.$$

$$\text{При } r \leq R \quad \varphi(r) = \varphi_1(R) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln 3.$$

3.23. При $0 \leq r \leq a$: $E = 0$, $\varphi = 0$;

$$\text{при } a \leq r \leq R_1: E(r) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}; \quad \varphi(r) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{r};$$

$$\text{при } R \leq r \leq 2R: E = 0; \quad \varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{R};$$

$$\text{при } r \geq 2R: E(r) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}; \quad \varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2a}{r}.$$

$$\mathbf{3.24.} \quad E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l^2} \sqrt{1 + \frac{1}{1 + (2h/l)^2} - \frac{2}{(1 + (2h/l)^2)^{3/2}}} = 4,6 \cdot 10^5 \text{ В/м.}$$

Решение. Построим зеркальное изображение заряда q – заряд $(-q)$ (рис. О.3.24). Напряженность поля в точке А есть векторная сумма \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 от зарядов q и $-q$. Из геометрии задачи:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{l^2}, \quad E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{4h^2 + l^2}.$$

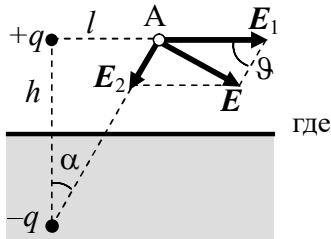


Рис. О.3.24.

По теореме косинусов:

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2 \cos\vartheta,$$

где

$$\cos\vartheta = \sin\alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4h^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Отсюда получаем:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{l^2} \sqrt{1 + \frac{1}{1 + (2h/l)^2} - \frac{2}{(1 + (2h/l)^2)^{3/2}}} = 4,6 \cdot 10^5 \text{ В/м}.$$

$$3.25. \quad \sigma = -\frac{q}{2\pi d^2}.$$

Решение. Применяя метод электростатических изображений, заменим заземленную металлическую пластину точечным зарядом "изображением" $-q$. Заряды находятся от исследуемой точки на одинаковом расстоянии d , напряженности их полей в этой точке сонаправлены. Поэтому напряженность E электрического поля в точке, находящейся под зарядом, равна

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2q}{d^2} \mathbf{n},$$

где \mathbf{n} – единичный вектор нормали к проводящей плоскости.

Так как вблизи проводника $\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{n}$, поверхностная плот-

ность σ индуцированных зарядов в исследуемой точке: $\sigma = -\frac{q}{2\pi d^2}$.

$$3.26. \quad F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3q^2}{8d^2}.$$

$$3.27. \quad F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2^2 - q_1^2}{(d_1 - d_2)^2} = \frac{q^2}{12\pi\epsilon_0 d^2}; \text{ сила направлена в}$$

сторону заряда q_2 .

$$3.28. F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \cdot \frac{\sqrt{63-10\sqrt{5}}}{80}; \text{ сила } F \text{ направлена в сторону}$$

ребра двугранного угла под углом $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{5\sqrt{5}-1}{5\sqrt{5}-8}$ к оси X.

Решение. Применяя метод электростатических изображений, найдем систему точечных зарядов, моделирующую электрическое поле в области $x, y > 0$. Для этого будем последовательно отражать заряд q относительно поверхностей двугранного угла, меняя каждый раз знак заряда. Вся совокупность точечных зарядов должна обеспечивать равенство нулю потенциала поверхности проводника.

Получаем систему из четырех точечных зарядов, расположенных, как показано на рис. О.3.28. Задача сводится к нахождению силы взаимодействия заряда q с тремя зарядами, изображенными в вершинах прямоугольника со сторонами $2a$ и $4a$.

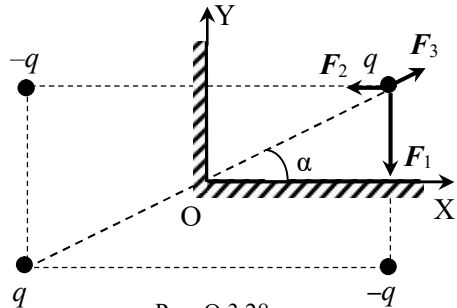


Рис. О.3.28.

Модули этих сил равны:

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{4a^2}; F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{16a^2}; F_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{20a^2}.$$

Введем оси X и Y вдоль плоскостей, поместив начало координат на ребре двугранного угла (см. рис. О.3.28). Проекции силы F_3 на эти оси равны:

$$F_{3x} = F_3 \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{10\sqrt{5}a^2}; F_{3y} = F_3 \sin \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{20\sqrt{5}a^2}.$$

Теперь находим компоненты силы $F = F_1 + F_2 + F_3$, действующей на заряд q :

$$F_x = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \cdot \left(\frac{1}{10\sqrt{5}} - \frac{1}{16} \right) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \cdot \frac{8\sqrt{5}-25}{400};$$

$$F_y = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \cdot \left(\frac{1}{20\sqrt{5}} - \frac{1}{4} \right) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \cdot \frac{\sqrt{5} - 25}{400}.$$

Модуль силы равен:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \cdot \frac{\sqrt{63 - 10\sqrt{5}}}{80}.$$

Сила F направлена в сторону ребра двугранного угла под углом $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{5\sqrt{5} - 1}{5\sqrt{5} - 8}$ к оси X.

3.29. См. рис. О.3.29.

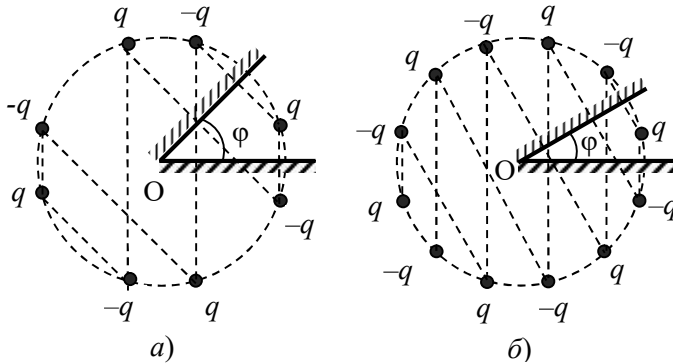


Рис. О.3.29. а) $\varphi = \pi/4$; б) $\varphi = \pi/6$.

$$3.30. \sigma_A = \sigma_B = -\frac{q}{2\pi d^2} \left(1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots \right) \approx -0,145 \cdot \frac{q}{d^2}.$$

Решение. Воспользуемся методом электростатических изображений. Отразим заряд q в плоскостях 1 и 2, поменяв при этом его знак. Заряды q и $-q$, обеспечивающие на первой плоскости нулевой потенциал, создают на ней в т.А индуцированный заряд с поверхностной плотностью (см. задачу 3.25) $\sigma = -\frac{q}{2\pi d^2}$.

Однако заряд-“изображение” ($-q$) слева от плоскости 1 даст ненулевой вклад в потенциал плоскости 2 (рис. О.3.30). Чтобы обеспечить для этой плоскости $\varphi = 0$, отразим теперь заряд ($-q$) в плоскости 2 и поменяем его знак; этот заряд q будет находиться от плоскости 2 на расстоянии $3d$. Очевидно, что этот процесс следует

продолжить, последовательно отражая заряды в плоскостях 1 и 2 и меняя при этом их знак. Таким образом, картина расположения отраженных зарядов при наличии двух заземленных плоскостей будет выглядеть так, как показано на рис. О.3.30.

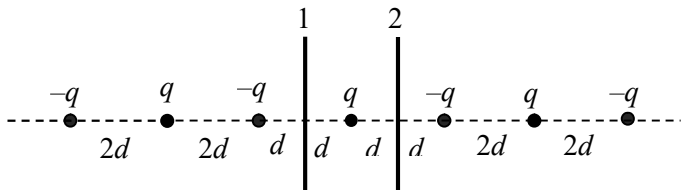


Рис. О.3.30.

Согласно принципу суперпозиции полная поверхностная плотность индуцированных на каждой плоскости зарядов в точках А и В описывается бесконечным знакопеременным рядом:

$$\sigma_A = \sigma_B = -\frac{q}{2\pi d^2} \left(1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots \right).$$

Данный ряд довольно быстро сходится, и отбрасывая члены с 13^2 , получаем $\sigma_A = \sigma_B \approx -0,145 \cdot \frac{q}{d^2}$.

$$\mathbf{3.31.} \quad F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} \dots \right) \approx \frac{0,822q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}.$$

Решение. Воспользовавшись методом зеркальных изображений, получим систему точечных зарядов, аналогичную системе заряда q и двух бесконечных плоскостей (см. решение задачи 3.30), которая представляет собой бесконечную цепочку знакопеременных зарядов q и $-q$, расстояние между которыми равно a (аналогична изображенной на рис. О.3.30).

Силу, с которой каждая пластина, например, левая, притягивается к заряду, определим, рассматривая систему точечных зарядов, получившихся после первого зеркального отражения заряда q в пластине 1 и последующих отражений заряда-"изображения" ($-q$) в пластинах 1 и 2 (см. рис. О.3.31).

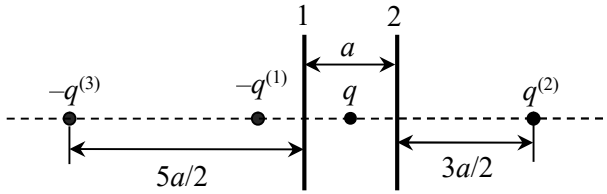


Рис. О.3.31.

Модуль искомой силы притяжения равен:

$$F_1 = F_2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \dots \right) \approx \frac{0,822q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}.$$

$$3.32. \Delta\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln \frac{2b-a}{a} \approx \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2b}{a}.$$

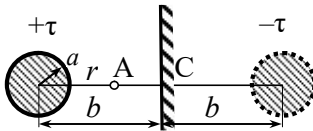


Рис. О.3.32.

Решение. Построим по методу электростатических изображений "изображение" провода относительно проводящей плоскости. Полученный провод-"изображение" будет параллелен реальному проводу и заряжен с линейной плотностью $(-\tau)$ (рис. О.3.32). Создаваемое этими проводами электрическое поле будет моделировать реально существующее слева от плоскости.

В точке А (на расстоянии $r \geq a$ от оси первого провода) напряженности полей левого и правого проводов сонаправлены, поэтому они суммируются:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} + \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 (2b-r)}.$$

Потенциал в точке А равен:

$$\varphi(r) = -\int E dr = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{(2b-r)} + \text{const.}$$

Разность потенциалов между поверхностью первого провода (реального) и плоскостью составляет:

$$\Delta\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \cdot \left(\ln \frac{b}{2b-b} - \ln \frac{a}{2b-a} \right) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \cdot \ln \frac{2b-a}{a} \approx \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2b}{a}.$$

$$3.33. \sigma(x) = -\frac{\tau h}{\pi(h^2 + x^2)}.$$

Решение. Наибольшее значение поверхностной плотности индуцированных на плоскости зарядов будет на линии, проходящей параллельно проводу через основание перпендикуляра, опущенного от провода на плоскость.

Воспользуемся методом электростатических изображений и построим "изображение" провода относительно проводящей плоскости. Полученный провод-"изображение" будет параллелен реальному проводу и заряжен с линейной плотностью $(-\tau)$ (рис. О.3.33).

Расстояние от точки А плоскости, находящейся на расстоянии x от основания перпендикуляра, проведенного от провода на плоскость, до провода равно $\sqrt{x^2 + h^2}$, а модуль напряженности поля реального провода

$$E_1 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\sqrt{h^2 + x^2}}.$$

Модуль напряженности поля провода-"изображения" $E_2 = E_1$, направление вектора E_2 показано на рис. О.3.33. Напряженность E в точке А находим, суммируя векторы E_1 и E_2 :

$$E = 2E_1 \cos \alpha = \frac{\tau}{\pi\epsilon_0\sqrt{h^2 + x^2}} \cdot \frac{h}{\sqrt{h^2 + x^2}} = \frac{\tau h}{\pi\epsilon_0(h^2 + x^2)},$$

$$E = -\frac{\tau h}{\pi\epsilon_0(h^2 + x^2)} \mathbf{n},$$

где \mathbf{n} – единичный вектор нормали к проводящей плоскости (см. рис. О.3.33).

Вблизи проводящей плоскости $E = E_n = \sigma / \epsilon_0$, откуда

$$\sigma(x) = -\frac{\tau h}{\pi(h^2 + x^2)}.$$

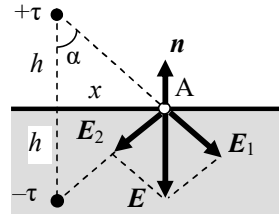


Рис. О.3.33.

$$3.34. \varphi_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + 4d^2}} \right); \quad \sigma = -\frac{qd}{2\pi(d^2 + R^2)^{3/2}}.$$

$$3.35. \sigma_0 = \frac{p}{\pi d^3}.$$

Решение. Применяя метод электростатических изображений, заменим пластину фиктивным диполем - "изображением", который вместе с реальным точечным диполем обеспечивает равенство нулю потенциала пластины. Отражая заряды диполя относительно проводящей плоскости и меняя при этом их знак, получим, что дипольный момент диполя-"изображения" направлен так же, как у реального диполя (рис. О.3.35).

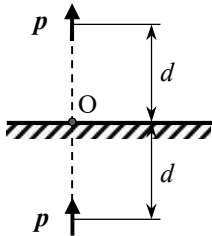


Рис. О.3.35.

Напряженность поля точечного диполя выражается формулой:

$$E(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{p}\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right].$$

Для реального диполя в точке О \mathbf{p} и \mathbf{r} направлены противоположно, напряженность поля в т.О под диполем равна:

$$E_1(d) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{3p}{d^3} \cdot \frac{r}{r} - \frac{p}{d^3} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3p}{d^3} - \frac{p}{d^3} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{d^3}.$$

Для диполя-"изображения" \mathbf{p} и \mathbf{r} в точке О сонаправлены, напряженность поля, создаваемого диполем-"изображением" в точке О, равна:

$$E_2(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3p}{d^3} - \frac{p}{d^3} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2p}{d^3}.$$

Напряженности полей обоих диполей в т. О сонаправлены, поэтому напряженность электрического поля равна: $E_0 = \frac{p}{\pi\epsilon_0 d^3}$.

Вектор E_0 направлен от металлической пластины по нормали к ней. Вблизи проводящей плоскости $E = E_n = \sigma / \epsilon_0$, откуда

$$\sigma_0 = \frac{p}{\pi d^3}.$$

$$3.36. F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{6p_1p_2}{(2d)^4}.$$

Решение. Изобразим диполь -"изображение", как в решении задачи 3.35. Теперь система двух диполей моделирует над пластиной поле диполя и индуцированных на поверхности пластины зарядов. Искомую силу, действующую на реальный диполь, находим как силу со стороны поля диполя -"изображения" (см. решение задачи 2.32). Напряженность этого поля на расстоянии r от диполя -"изображения" равна

$$E_2(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{3(\mathbf{pr})r}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2\mathbf{p}}{r^3}.$$

Учитывая, что расстояние между диполями равно $2d$, получаем: $E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2\mathbf{p}}{(2d)^3}$.

Так как дипольный момент реального диполя \mathbf{p} имеет только компоненту вдоль линии соединения диполей, при $r = 2d$ получаем силу, действующую на диполь \mathbf{p} :

$$F = p \frac{\partial E_2}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{6p^2}{(2d)^4}.$$

При одинаковой ориентации диполей сила, действующая на диполь \mathbf{p} , будет направлена в сторону диполя-"изображения", т.е. диполь будет притягиваться к пластине.

$$3.37. F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3}{64} \left(\frac{q}{R} \right)^2.$$

Решение. Применяя метод электростатических изображений, заменим проводящий заземленный шар точечным зарядом $q' = -q/b$, находящимся от центра шара на расстоянии

$$a = r^2/b.$$

В данной задаче $r = R$, $b = 3R$, поэтому

$$q' = -q \frac{R}{3R} = -\frac{q}{3}; \quad a = \frac{R^2}{3R} = \frac{R}{3}.$$

Искомая сила притяжения заряда q к шару равна силе притяжения зарядов q и q' . Следовательно, модуль этой силы F равен:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|qq'|}{(3R - a)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2/3}{(3R - R/3)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3}{64} \left(\frac{q}{R} \right)^2.$$

$$3.38. \sigma_{\max} = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{q}{(l-R)^2} \left(1 + \frac{l}{R}\right); \quad \sigma_{\min} = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{q}{(l+R)^2} \left(\frac{l}{R} - 1\right).$$

Решение. Применяя метод электростатических изображений, заменим проводящий заземленный шар точечным зарядом $q' = -q \frac{R}{l}$, находящимся от центра шара на расстоянии $a = \frac{R^2}{l}$ (см. рис. О.3.38).

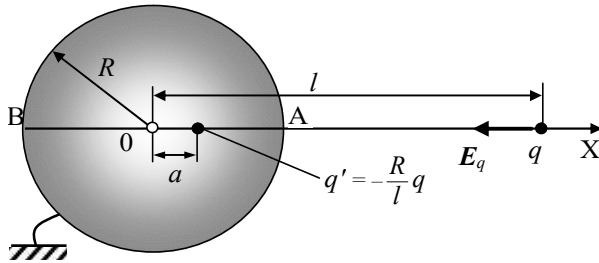


Рис. О.3.38.

Максимальная поверхностная плотность индуцированных на шаре зарядов – в точке А, а минимальная – в точке В. Напряженности полей зарядов q и q' в этих точках равны:

$$E_A = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{q}{(l-R)^2} + \frac{|q'|}{(R-a)^2} \right] e_x = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0(l-R)^2} \left(1 + \frac{l}{R}\right) e_x;$$

$$E_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[-\frac{q}{(l+R)^2} + \frac{|q'|}{(R+a)^2} \right] e_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(l+R)^2} \left(\frac{l}{R} - 1\right) e_x,$$

где e_x – орт оси X.

Вблизи проводящей поверхности $E = E_n = \sigma / \epsilon_0$. Нормаль к поверхности шара в точке А направлена в положительном направлении оси X, а в точке В – в отрицательном, поэтому для поверхностных плотностей заряда в этих точках получаем:

$$\sigma_{\max} = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{q}{(l-R)^2} \left(1 + \frac{l}{R}\right);$$

$$\sigma_{\min} = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{q}{(l+R)^2} \left(\frac{l}{R} - 1\right).$$

3.39. $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{41q}{18R^2}$; вектор \mathbf{E} направлен к центру шара.

Решение. Если шар изолирован, то его потенциал равен $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{d}$ (см. решение задачи 3.2). Поскольку заряд-

"изображение" $q' = -\frac{qR}{d}$ обеспечивает равенство потенциала сферы нулю, то для увеличения ее потенциала до нужного значения надо добавить в центр шара такой точечный заряд q'' такой, чтобы потенциал шара стал равен $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{d}$.

Величина заряда q'' должна удовлетворять соотношению:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q''}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{d}, \text{ откуда } q'' = q \frac{R}{d}.$$

Вне шара электростатическое поле будет в точности совпадать с полем, созданным тремя точечными зарядами: q , q'' и зарядом-"изображением" $q' = -\frac{qR}{d}$.

Расстояние от заряда q' до центра шара равно (см. рис. О.3.38):

$$a = \frac{R^2}{d} = \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2}$$

Напряженность электрического поля в точке на расстоянии l от центра шара равна $\mathbf{E} = \mathbf{E}_q + \mathbf{E}_{q'} + \mathbf{E}_{q''}$. Направим ось X из центра шара к заряду q (как на рис. О.3.38). С учетом направления векторов напряженностей для $d = 2R$ и $l = 1,5R$ напряженность в искомой точке равна:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(-\frac{q}{(d-l)^2} - \frac{q'}{(l-a)^2} + \frac{q''}{l^2} \right) \mathbf{e}_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{41q}{18R^2} \mathbf{e}_x.$$

Вектор \mathbf{E} направлен к центру шара.

3.40. $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{737q^2}{3600L^2}$; заряды притягиваются друг к другу.

Решение. Потенциал проводящей сферы в присутствии двух симметрично расположенных зарядов $(+q)$ и $(-q)$ равен нулю при нормировке потенциала $\varphi_\infty = 0$. Строим заряды-"изображения" $q'_{1,2}$ заданных зарядов $(+q)$ и $(-q)$ относительно поверхности сферы. Их величина равна:

$$q'_{1,2} = \mp \frac{qR}{b} = \mp \frac{qL}{2L} = \mp \frac{L}{2}.$$

Эти заряды "изображения" находятся от центра сферы на расстоянии

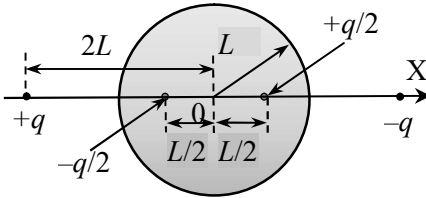


Рис. О.3.40.

$$a = \frac{R^2}{b} = \frac{L^2}{2L} = \frac{L}{2}.$$

Таким образом, вместо системы двух точечных зарядов и проводящей сферы получена система четырех точечных зарядов (рис. О.3.40).

Направим ось X, как показано на рис. О.3.40. Сила, действующая на заряд $+q$, равна сумме сил, действующих на него со стороны зарядов $-q/2$ $+q/2$ и $-q$:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{q^2}{(3L/2)^2} - \frac{q^2/2}{(5L/2)^2} + \frac{q^2}{(4L)^2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{737}{3600} \left(\frac{q}{L} \right)^2 e_x.$$

Равная по величине, но противоположно направленная сила действует на заряд $-q$. Заряды, симметрично расположенные относительно незаряженной металлической сферы, притягиваются друг к другу.

3.41. $q = Q \cdot \frac{(1 - \eta^2)^2}{\eta [1 - (1 - \eta^2)^2]}$, где $\eta = R/b$.

Решение. В данном случае потенциал шара будет равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{b} + \frac{Q}{R} \right) \quad (\text{см. решение задачи 3.2}).$$

Поскольку заряд-"изображение" $q' = -\frac{qR}{b}$ обеспечивает равенство нулю потенциала шара, то для обеспечения нужного потенциала шара надо добавить в его *центр* такой точечный заряд q''' , чтобы потенциал шара стал равен $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{b} + \frac{Q}{R} \right)$. Следовательно,

но, величина заряда q''' должна удовлетворять соотношению:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q'''}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{b} + \frac{Q}{R} \right), \text{ откуда } q''' = Q + \frac{qR}{b}.$$

Таким образом, в области вне металлического шара электростатическое поле системы "точечный заряд – шар" будет в точности совпадать с полем, созданным тремя точечными зарядами: q , q''' и зарядом-"изображением" $q' = -\frac{qR}{b}$, находящимся на расстоянии

$$a = \frac{R^2}{b} \text{ от центра шара.}$$

Направим ось X от центра шара к точечному заряду q , начало отсчета выберем в центре шара. Сила F , действующая на заряд q , равна сумме сил его взаимодействия с точечными зарядами q' и q''' . Эти силы равны:

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qq'}{(b-a)^2} \mathbf{e}_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{bRq^2}{(b^2 - R^2)^2} \mathbf{e}_x,$$

$$F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'''}{b^2} \mathbf{e}_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{b^2} \left(Q + q \frac{R}{b} \right) \mathbf{e}_x.$$

Тогда окончательно получаем:

$$F = F_1 + F_2 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[Rq^2 \left(\frac{b}{(b^2 - R^2)^2} - \frac{1}{b^3} \right) - \frac{qQ}{b^2} \right] \mathbf{e}_x.$$

Чтобы сила F была равна нулю, величина точечного заряда должна быть равна:

$$q = \frac{Qb(b^2 - R^2)^2}{R[b^4 - (b^2 - R^2)^2]} = Q \cdot \frac{(1 - \eta^2)^2}{\eta[1 - (1 - \eta^2)^2]}, \text{ где } \eta = R/b.$$

$$3.42. F = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{4\pi\epsilon_0\phi R}{(a+R)^2} - \frac{q_0 R(a+R)}{a^2(a+2R)^2} \right].$$

$$3.43. A = \frac{Q^2}{24\pi\epsilon_0 R}.$$

Решение. Заменяем сферу с наведенным на ней индуцированным зарядом эквивалентным точечным зарядом-"изображением" $q = -\frac{QR}{x}$, где x – расстояние от заряда Q до центра сферы.

Расстояние точечного заряда-"изображения" от центра сферы равно: $r = \frac{R^2}{x}$. Расстояние между зарядом Q и эквивалентным точечным зарядом в момент, когда заряд Q находится на расстоянии x от центра сферы, составляет:

$$x - r = x - \frac{R^2}{x}.$$

Работа кулоновских сил поля эквивалентного заряда q при перемещении заряда Q из бесконечности в точку на расстоянии $2R$ от центра сферы равна:

$$\begin{aligned} A &= \int_{2R}^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q^2 R}{x} \cdot \frac{1}{(x - R^2/x)^2} dx = \frac{Q^2 R}{4\pi\epsilon_0} \int_{2R}^{\infty} \frac{xdx}{(x^2 - R^2)^2} = \\ &= \frac{Q^2 R}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 - R^2} \Big|_{\infty}^{2R} = \frac{Q^2}{24\pi\epsilon_0 R}. \end{aligned}$$

$$3.44. F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{27q^2}{64R^2}; \text{ сила направлена от центра сферы.}$$

Решение. Задача о заземленной проводящей сфере и точечном заряде вне её может быть обращена. Если внутри заземленной сферы на расстоянии a от центра находится заряд q , то поле *внутри* сферы совпадает с полем системы двух зарядов: q и заряда-"изображения"

$$q' = -\frac{bq}{R} = -\frac{R^2 q}{aR} = -\frac{Rq}{a},$$

расположенного на расстоянии $b = R^2 / a$ от центра сферы (рис. О.3.44).

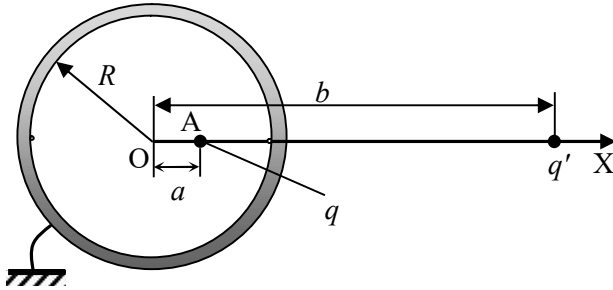


Рис. О.3.44.

Сила, действующая на точечный заряд q со стороны индуцированных на внутренней поверхности сферы зарядов равна силе, действующей на этот заряд со стороны заряда-"изображения" q' . Её модуль равен:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|qq'|}{(b-a)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{aRq^2}{(R^2 - a^2)^2}.$$

Подставляя $a = R/3$, окончательно получаем:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{27q^2}{64R^2}. \text{ Сила направлена от центра сферы.}$$

3.45. $p_{\text{инд}} = p \frac{R^3}{d^3}.$

Решение. Будем рассматривать диполь как систему двух зарядов $(+q)$ и $(-q)$, находящихся на малом расстоянии l друг от друга. Пусть дипольный момент направлен от центра сферы. По методу зеркальных отображений найдем заряды-"изображения" каждого из зарядов $(+q)$ и $(-q)$, учитывая, что $l \ll d$:

$$q'_+ = -\frac{qR}{d+l/2} \approx -\frac{qR}{d}, \quad q'_- = +\frac{qR}{d-l/2} \approx +\frac{qR}{d}.$$

Заряд-"изображение" q'_+ будет находиться на расстоянии $a_1 = \frac{R^2}{d+l/2}$ от центра сферы, а заряд-"изображение" q'_- – на расстоянии $a_2 = \frac{R^2}{d-l/2}$. Эти два заряда будем рассматривать как диполь с плечом

$$l_1 = a_2 - a_1 = R^2 \left(\frac{1}{d-l/2} - \frac{1}{d+l/2} \right) = R^2 \frac{l}{d^2 - l^2/4} \approx \frac{lR^2}{d^2}.$$

Дипольный момент этого диполя по модулю равен

$$p_{\text{инд}} = q'_- l_1 = \frac{qR}{d} \cdot \frac{lR^2}{d^2} = \frac{pR^3}{d^3}$$

а его направление такое же, как у дипольного момента \mathbf{p} , поэтому в векторном виде $\mathbf{p}_{\text{инд}} = \mathbf{p} \frac{R^3}{d^3}$.

$$3.46. \quad \sigma = 3\varepsilon_0 E_0 \cos \theta; \quad E = 3E_0 |\cos \theta|.$$

Решение. Поверхностную плотность индуцированных на шаре зарядов можно рассчитать в рамках простой модели (рис. О.3.46).

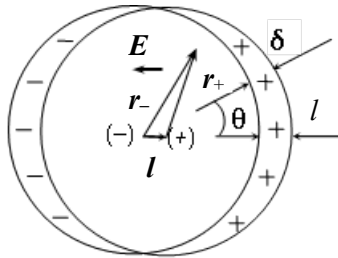


Рис. О.3.46.

Рассмотрим непроводящий однородно заряженный шар радиусом R , объемная плотность заряда которого ρ . На расстоянии $r < R$ от его центра напряженность поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \mathbf{r}$,

где \mathbf{r} – радиус-вектор.

Рассмотрим теперь два одинаковых шара с зарядами разных знаков. Пусть положительно заряженный шар сдвинут вправо на l относительно отрицательно заряженного. Вектор \mathbf{l} направим из центра отрицательно заряженного шара в центр положительно заряженного. В области пересечения шаров напряженности их полей суммируются, и суммарная напряженность равна:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} (\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0} \mathbf{l} = \text{const},$$

где $\mathbf{r}_- = \mathbf{l} + \mathbf{r}_+$ (см. рис. О.3.46).

В области пересечения шаров плотность заряда равна нулю. Заряженными остаются лишь соответствующие периферийные части шаров

Теперь рассмотрим проводящий шар в однородном электрическом поле с напряженностью \mathbf{E}_0 . На его поверхности индуцируются заряды разных знаков, распределение которых подобно распределению зарядов при наложении двух разноименно заряженных шаров. Внутри проводящего шара $\rho = 0$. Следовательно, проводящий шар в электрическом поле можно рассматривать как совокупность двух (отрицательно и положительно заряженного) шаров, центры которых сдвинуты друг относительно друга по линии напряженности внешнего поля на малую величину l . Т.к. внутри проводника $\mathbf{E} = 0$, то поле внутри шаров должно компенсировать внешнее:

$$\frac{\rho}{3\varepsilon_0} \mathbf{l} = \mathbf{E}_0.$$

Сдвиг центров шаров весьма мал, поэтому возникающие заряды можно считать поверхностными. Найдем распределение заряда в зависимости от угла θ , отсчитываемого против часовой стрелки от направления вектора \mathbf{l} (см. рис. О.3.46). С учетом малости расстояния Δl между поверхностями шаров толщина заряженного слоя в направлении θ равна:

$$\Delta l = l \cos \theta.$$

Заменяя объемный заряд между поверхностями шаров поверхностным с плотностью σ , получим: $\sigma \Delta S = \rho \Delta S \Delta l$, где ΔS – площадь поверхности, откуда

$$\sigma = \rho \Delta l = \rho l \cos \theta = 3\varepsilon_0 E_0 \cos \theta.$$

Модуль напряженности электрического поля у поверхности проводящего шара равен:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = 3E_0 |\cos \theta|.$$

3.47. $p = 4\pi\varepsilon_0 R^3 E_0.$

Решение. Как было показано в решении задачи 3.46, поверхностная плотность зарядов, индуцированных на проводящем шаре в однородном электрическом поле с напряженностью E_0 , равна

$$\sigma = 3\varepsilon_0 E_0 \cos \theta,$$

где угол θ отсчитывается от диаметра шара OA , параллельного вектору E_0 .

Полный индуцированный на поверхности шара заряд равен нулю, т.е. шар электрически нейтрален: $\int_S \sigma(r) dS = 0$. Диполь-

ный момент шара равен:

$$p = \int_S \sigma(r) r dS.$$

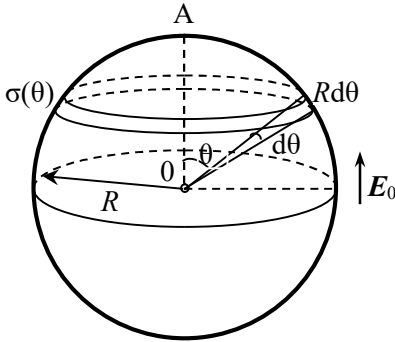


Рис. О. 3.47.

Так как величина дипольного момента электрически нейтральной системы зарядов не зависит от выбора начала отсчета системы координат, будем вычислять дипольный момент относительно центра шара.

Разобьем поверхность шара на тонкие кольца радиусом $R \sin \theta$ и толщиной $dl = R d\theta$ (см. рис. О.3.47). Заряд такого кольца

$$dq = \sigma(\theta) \cdot 2\pi R \sin \theta \cdot R d\theta = 3\varepsilon_0 E_0 \cdot 2\pi R^2 \sin \theta \cos \theta d\theta.$$

В силу симметрии ясно, что проекция дипольного момента кольца на направление, перпендикулярное оси OA , равна нулю, поэтому дипольный момент всего кольцу будет иметь компоненту только вдоль линии OA , т.е. будет параллелен вектору напряженности E_0 . Модуль дипольного момента кольца равен:

$$dp = dq \cdot R \cos \theta = 3\varepsilon_0 E_0 \cdot 2\pi R^3 \sin \theta \cos^2 \theta d\theta.$$

Дипольный момент всего шара получим интегрированием по углу θ в пределах от $(-\pi/2)$ до $\pi/2$:

$$p = 3\varepsilon_0 E_0 \cdot 2\pi R^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta = 4\pi\varepsilon_0 R^3 E_0.$$

С учетом направления дипольного момента получаем:

$$\mathbf{p} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \mathbf{E}_0.$$

3.48. $F = \frac{24\pi\epsilon_0 R^6 E_0^2}{l^4}$; шарики будут притягиваться друг к другу.

Решение. Внесение проводящего шарика в однородное электрическое поле приведет к искажению силовых линий поля вблизи шарика. Однако, поскольку расстояние между шариками $l \gg r$, можно пренебречь изменением напряженности внешнего поля в месте нахождения второго шарика, связанным с нахождением в поле первого шарика. Поэтому будем считать, что оба шарика находятся в однородном электрическом поле с напряженностью \mathbf{E}_0 .

Проводящий шарик в однородном поле приобретает дипольный момент $\mathbf{p} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \mathbf{E}_0$ (см. решение задачи 3.47). Поэтому задача сводится к расчету сил взаимодействия двух одинаковых диполей, моменты которых направлены вдоль линии их соединения. Сила, действующая на каждый диполь, равна (см. решение задач 2.32, 2.33):

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{6p_1 p_2}{l^4} = \frac{3p^2}{2\pi\epsilon_0 l^4}.$$

Подставляя $\mathbf{p} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \mathbf{E}_0$, окончательно получаем:

$$F = \frac{24\pi\epsilon_0 R^6 E_0^2}{l^4}.$$

Шарики будут притягиваться друг к другу.

3.49. $F = \frac{27a^2 q^2}{64\pi\epsilon_0 r^4}.$

Указание. Рассчитать дипольный момент молекулы и воспользоваться методом электростатических изображений.

§4. Емкость. Простые конденсаторы и их соединения

$$4.1. C = 4\pi\epsilon_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0 \varphi a}{\sigma}}.$$

Решение. Заряд сферы радиусом R равен $q = 4\pi R^2 \sigma$. При $\varphi_\infty = 0$ на расстоянии a от центра сферы потенциал электрического поля равен:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{R^2 \sigma}{\epsilon_0 a}, \text{ откуда } R = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \varphi a}{\sigma}},$$

а емкость уединенной сферы

$$C = 4\pi\epsilon_0 R = 4\pi\epsilon_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0 \varphi a}{\sigma}}.$$

$$4.2. C \cong 2\pi\epsilon_0 r \left(1 + \frac{r}{l}\right) \approx 2\pi\epsilon_0 r.$$

Решение. Пусть заряды шариков одинаковы по модулю, но противоположны по знаку: $(+q)$ и $(-q)$. Поскольку шарики находятся на большом расстоянии друг от друга, можно пренебречь перераспределением зарядов на шариках из-за электростатической индукции и считать, что заряд распределен равномерно по поверхности.

Направим ось X вдоль линии соединения центров шариков, совместив начало отсчета с центром одного из них. В силу принципа суперпозиции напряженность электрического поля вдоль оси X :

$$E(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{q}{x^2} + \frac{q}{(l-x)^2} \right),$$

а разность потенциалов между поверхностями шариков:

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^{l-r} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(l-x)^2} \right) dx = \frac{q(l-2r)}{2\pi\epsilon_0 r(l-r)}.$$

Тогда емкость системы двух шариков равна:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0 r(l-r)}{l-2r} = 2\pi\epsilon_0 r \cdot \frac{1-r/l}{1-2r/l} \approx 2\pi\epsilon_0 r \left(1 + \frac{r}{l}\right).$$

При вычислениях использовалось разложение функции $E(x)$ в ряд Тейлора по малому параметру $x = 2r/l \ll 1$:

$$(1-x)^{-1} \approx 1+x.$$

При $l \gg r$ емкость $C \approx 2\pi\epsilon_0 r$.

4.3. $C \approx 4\pi\epsilon_0 a$.

Решение. Пусть заряд шарика q . Воспользуемся методом электростатических изображений и введем в рассмотрение шарик-"изображение" с зарядом $(-q)$. Электрическое поле этих двух шариков *слева от плоскости* будет таким же, как и реально существующее (на рис. О.4.3).

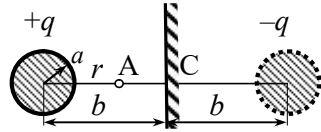


Рис. О.4.3.

Разность потенциалов между поверхностью реального шарика и плоскостью (см. решение задачи 4.2) равна:

$$\Delta\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2(b-a)}{a(2b-a)}.$$

Для искомой емкости системы получаем:

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = 4\pi\epsilon_0 \frac{a(2b-a)}{2(b-a)} \approx 4\pi\epsilon_0 a.$$

4.4. $q'_1 = \frac{(q_1 + q_2)R_1}{R_1 + R_2}$; $q'_2 = \frac{(q_1 + q_2)R_2}{R_1 + R_2}$.

Решение. После соединения шаров проволокой их потенциалы станут одинаковыми ($\varphi'_1 = \varphi'_2$), а заряды перераспределятся между шарами и станут равны q'_1 и q'_2 соответственно. По закону сохранения зарядов

$$q_1 + q_2 = q'_1 + q'_2. \quad (1)$$

Так как шары значительно удалены друг от друга, их емкости можно считать равными

$$C_1 = 4\pi\epsilon_0 R_1, \quad C_2 = 4\pi\epsilon_0 R_2.$$

По определению $\varphi = q/C$. Учитывая, что $\varphi'_1 = \varphi'_2$, получаем уравнение:

$$\frac{q'_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{q'_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}, \text{ откуда } R_2 q'_1 = R_1 q'_2. \quad (2)$$

Из (1) и (2) находим:

$$q'_1 = \frac{(q_1 + q_2)R_1}{R_1 + R_2}; \quad q'_2 = \frac{(q_1 + q_2)R_2}{R_1 + R_2}.$$

$$4.5. \quad C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)}.$$

$$4.6. \quad \frac{\Delta C}{C_0} = \frac{\ln 2}{\ln(b/2a)}.$$

Решение. Пусть один провод заряжен с линейной плотностью заряда τ , а другой $-(-\tau)$. Направим ось X перпендикулярно проводам, выбрав начало отсчета на оси первого провода. Напряженность поля E в точке, находящейся на расстоянии $x \geq a$ от оси этого провода, при $a \leq x \leq (b-a)$ равна (см. решение задачи 1.51):

$$E(x) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 x} + \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 (b-x)},$$

а разность потенциалов между поверхностями проводов:

$$\Delta\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \int_a^{b-a} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{b-x} \right) dx = \frac{\tau}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{b-a}{a}.$$

Изначально ($b \gg a$) емкость в расчете на единицу длины проводов была равна:

$$C_0 = \frac{\tau}{\Delta\varphi} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{b-a}{a}} \approx \frac{\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)}.$$

Если уменьшить расстояние между проводами в 2 раза, емкость станет равной: $C_1 \approx \frac{\pi\epsilon_0}{\ln(b/2a)}$, т.е. емкость увеличится на

$$\Delta C = C_1 - C_0 \approx \frac{\pi\epsilon_0 \ln 2}{\ln(b/a) \cdot \ln(b/2a)}.$$

Относительное увеличение емкости составит:

$$\frac{\Delta C}{C_0} = \frac{\ln 2}{\ln(b/2a)}.$$

$$4.7. \Delta C = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}{R - R_1}$$

Решение. Емкость уединенного шара равна $C_1 = 4\pi\varepsilon_0 R_1$. Если окружить шар заземленной сферической оболочкой, то на её внутренней поверхности наведется заряд. При этом шар и сферу можно рассматривать как сферический конденсатор, емкость которого

$$C_2 = \frac{4\pi\varepsilon_0 R R_1}{R - R_1} = 4\pi\varepsilon_0 R_1 \cdot \frac{1}{1 - R_1/R} > C_1.$$

Таким образом, емкость системы "шар – сфера" больше емкости уединенного шара на

$$\Delta C = C_2 - C_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0 R R_1}{R - R_1} - 4\pi\varepsilon_0 R_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}{R - R_1}.$$

$$4.8. q'_1 = \frac{(q_1 + q_2)R_1 R}{(R_1 + R_2)R - R_1 R_2}; \quad q'_2 = \frac{(q_1 + q_2)(R - R_1)R_2}{(R_1 + R_2)R - R_1 R_2}.$$

Решение. Если окружить первый шар заземленной сферической оболочкой, то на её внутренней поверхности появится индуцированный заряд, равный по модулю установившемуся заряду первого шара. Заряды q'_1 и q'_2 на шарах распределяются так, чтобы потенциалы шаров были одинаковы: $\varphi'_1 = \varphi'_2$. При этом заряд на внутренней поверхности сферы будет равен $(-q'_1)$.

Емкость шара в сферической оболочке равна емкости сферического конденсатора:

$$C_{1+об.} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R R_1}{R - R_1}.$$

Так как оболочка заземлена, её потенциал равен нулю. Разность потенциалов между первым шаром и оболочкой находим из соотношения:

$$C_{1+сф.} = \frac{q'_1}{\varphi'_1 - \varphi_{об}} = \frac{q'_1}{\varphi'_1}, \text{ откуда } \varphi'_1 = \frac{q'_1}{C_{1+об.}}$$

Поскольку расстояние между шарами достаточно велико, их взаимодействием можно пренебречь. При этом емкость второго шара $C_2 = 4\pi\epsilon_0 R_2$, а его потенциал $\varphi'_2 = \frac{q'_2}{C_2} = \frac{q'_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$.

Приравнявая $\varphi'_1 = \varphi'_2$, получаем уравнение:

$$\frac{q'_1}{C_{1+об}} = \frac{q'_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \quad \text{или} \quad \frac{q'_1(R - R_1)}{RR_1} = \frac{q'_2}{R_2}. \quad (1)$$

По закону сохранения заряда

$$q_1 + q_2 = q'_1 + q'_2. \quad (2)$$

Решая систему уравнений (1) и (2), находим:

$$q'_1 = \frac{(q_1 + q_2)R_1 R}{(R_1 + R_2)R - R_1 R_2}; \quad q'_2 = \frac{(q_1 + q_2)(R - R_1)R_2}{(R_1 + R_2)R - R_1 R_2}.$$

$$4.9. \quad C = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} + R_3 \right).$$

Решение. Потенциал земли считаем равным нулю. После заземления шара потенциал сферы равен U – как относительно бесконечности, так и относительно внутреннего шара радиусом R_1 . Теперь источник ЭДС заряжает не только сферический конденсатор с радиусами обкладок R_1 и R_2 , но и сферу радиусом R_3 .

Емкость сферического конденсатора равна

$$C_1 = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Емкость "уединенной" сферы радиусом R_3 – $C_2 = 4\pi\epsilon_0 R_3$.

Эквивалентная схема соединения двух конденсаторов показана на рис. О.4.9. Суммарная емкость системы

$$C = C_1 + C_2 = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} + R_3 \right).$$

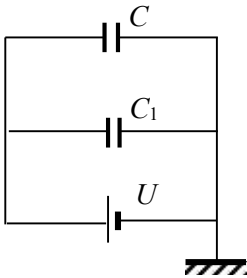


Рис О.4.9.

$$4.10. \quad C = \frac{\epsilon_0 S E}{U} = 17,7 \text{ пФ}, \quad \sigma = \frac{C U}{S} \approx 5,7 \cdot 10^{-7} \text{ К/м}^2.$$

4.11. Емкость увеличится в 1,25 раза.

4.12. Емкость увеличится в 4 раза.

Решение. Поскольку внутри металлического слоя напряженность электрического поля равна нулю, то и напряжение на нем также равно нулю, поэтому можно считать, что образовался новый воздушный конденсатор с радиусами внутренней и внешней обкладок $2R$ и $3R$ соответственно. Емкость такого конденсатора равна:

$$C' = 4\pi\epsilon_0 \frac{2R \cdot 3R}{3R - 2R} = 4\pi\epsilon_0 \cdot 6R.$$

У конденсатора без шарового металлического слоя емкость была

$$C_0 = 4\pi\epsilon_0 \frac{R \cdot 3R}{3R - R} = 4\pi\epsilon_0 \cdot \frac{3}{2} R.$$

Следовательно, $C' / C_0 = 4$.

4.13. $U_{\max} = R_1 E_{\max} \ln(R_2 / R_1) \approx 53,5 \text{ кВ}.$

Решение. Пробой диэлектрика будет в той точке, где напряженность поля максимальна. Если на обкладках конденсатора заряды распределены с линейной плотностью τ и $-\tau$, напряженность электрического поля в конденсаторе

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}, \text{ где } r - \text{расстояние до оси цилиндров.}$$

Максимальное значение напряженность поля имеет на расстояниях от оси, близких к R_1 . Разность потенциалов между обкладками равна:

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Подставляя в эту формулу величину τ , выраженную через напряженность электрического поля: $\tau = 2\pi\epsilon_0 R_1 E_{\max}$, находим:

$$U_{\max} = R_1 E_{\max} \ln(R_2 / R_1) \approx 53,5 \text{ кВ}.$$

4.14. Параллельно соединенные конденсаторы C_1 и C_2 соединить последовательно с C_3 .

4.15. Емкость конденсатора увеличилась на 12,5%.

4.16. Емкости батарей конденсаторов, изображенных на рис. 4.3 а) и б) будут одинаковыми, если $\frac{C_1}{C_3} = \frac{C_2}{C_4}$.

Решение. Для схемы на рис. 4.3 а емкость батареи равна:

$$C = \frac{(C_1 + C_2) \cdot (C_3 + C_4)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}.$$

Для схемы на рис. 4.3 б) $C' = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} + \frac{C_2 C_4}{C_2 + C_4}$.

Если $\frac{C_1}{C_3} = \frac{C_2}{C_4} = n$, то $C = \frac{(C_1 + C_2)^2 n}{(C_1 + C_2) \cdot (n + 1)} = \frac{(C_1 + C_2) n}{n + 1}$;

$$C' = \frac{nC_1^2}{C_1(1+n)} + \frac{nC_2^2}{C_2(1+n)} = \frac{(C_1 + C_2) n}{n + 1} = C.$$

4.17. а) $C_{\text{бат.}} = 4C/3$; б) $C_{\text{бат.}} = 1,5C$.

Решение. В силу симметрии схем потенциалы точек А и В одинаковы, поэтому включенный между этими точками конденсатор всегда не заряжен, и его можно убрать. При этом схемы значительно упрощаются и принимают вид, показанный на рис. О.4.17.

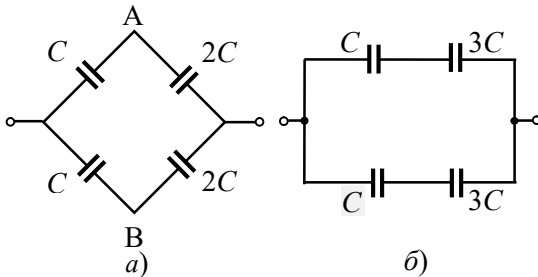


Рис. О.4.17.

Применяя формулы для расчета емкости батарей при последовательном и параллельном соединении конденсаторов, находим:

а) $C_{\text{бат.}} = 4C/3$; б) $C_{\text{бат.}} = 1,5C$.

4.18. $C_{\text{AB}} = 11C/5$.

4.19. $C_{\text{AB}} = 2C$.

$$4.20. C_{\Sigma} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} C.$$

Решение. Так как цепь конденсаторов бесконечна (в одну сторону), удаление одного звена не изменит емкости C_{Σ} оставшейся цепи. Поэтому цепь можно представить в виде эквивалентной, как показано на рис. О.4.20. Емкость такой системы-

$$\frac{1}{C_{\Sigma}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C + C_{\Sigma}},$$

которое сводится к квадратному уравнению:

$$C_{\Sigma}^2 + CC_{\Sigma} - C^2 = 0.$$

Решая данное уравнение, находим: $C_{\Sigma} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} C.$

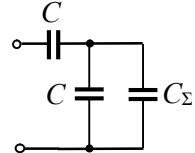


Рис. О.4.20.

$$4.21. C_{AB} = \frac{7}{5} C.$$

Решение. Пусть к точкам А и В соединен источник ЭДС \mathcal{E} (см. рис. О.4.21). Определить емкость системы конденсаторов можно по формуле $C = q/\mathcal{E}$, где q – заряд, который поступил в систему от источника ЭДС.

Левые обкладки конденсаторов C_1 и C_4 приобретут заряды $+q_1$ и $+q_4$, а правые обкладки конденсаторов C_2 и C_5 в сумме приобретут такой же по модулю заряд, который и был подан в систему:

$$q = q_1 + q_4 = q_2 + q_5.$$

Знак заряда на обкладках конденсатора C_3 выберем произвольно (см. рис. О.4.21) (если знак выбран неправильно, получится $q_3 < 0$, решение не изменится). По закону сохранения заряда для электрически изолированных (не имеющих контакта с полюсами источника) обкладок конденсаторов C_1 , C_2 и C_3 и конденсаторов C_3 , C_4 и C_5 можно записать:

$$-q_1 + q_2 + q_3 = 0; \quad (1)$$

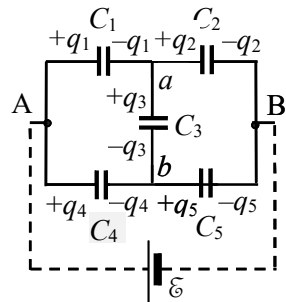


Рис. О.4.21.

$$-q_3 - q_4 + q_5 = 0. \quad (2)$$

Для любых замкнутых контуров сумма напряжений на всех элементах равна сумме ЭДС (с учетом полярности включения источников). С учетом формулы $U = q/C$ получаем:

$$\text{для контура } AC_1C_3C_4: \quad \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_3}{C_3} - \frac{q_4}{C_4} = 0; \quad (3)$$

$$\text{для контура } BC_5C_3C_2: \quad -\frac{q_5}{C_5} - \frac{q_3}{C_3} + \frac{q_2}{C_2} = 0; \quad (4)$$

$$\text{для контура } \mathcal{E}AC_4C_5B\mathcal{E}: \quad \frac{q_4}{C_4} + \frac{q_5}{C_5} - \mathcal{E} = 0. \quad (5)$$

Из полученной системы уравнений (1) – (5) надо найти q_1 и q_4 (или q_2 и q_5), после чего найдем q и емкость $C_{AB} = q/\mathcal{E} = \frac{q_1 + q_4}{\mathcal{E}}$.

Для емкостей, указанных в условии задачи, система уравнений приобретает вид:

$$\begin{aligned} -q_1 + q_2 + q_3 &= 0; \\ -q_3 - q_4 + q_5 &= 0; \\ 2q_1 + 2q_3 &= q_4; \\ 2q_3 + 2q_5 &= q_2; \\ q_4 + 2q_5 &= 2C\mathcal{E}. \end{aligned}$$

Из данной системы находим:

$$q_1 = q_5, \quad q_2 = q_4, \quad q_1 = \frac{4}{5}C\mathcal{E}, \quad q_4 = \frac{3}{5}C\mathcal{E}, \quad q = q_1 + q_4 = \frac{7}{5}C\mathcal{E}.$$

$$\text{Следовательно, } C_{AB} = q/\mathcal{E} = \frac{7}{5}C.$$

$$\mathbf{4.22.} \quad C_{\Sigma} = 2C.$$

Решение. Задачу можно решать способом, описанным в решении задачи 4.21. Однако, если емкости всех конденсаторов одинаковы, схему можно упростить.

Перерисуем схему, показанную на рис. 4.9, в виде эквивалентной схемы включения конденсаторов (рис. О.4.22 а). Из-за равенства емкостей всех конденсаторов потенциалы точек a и b одинаковы.

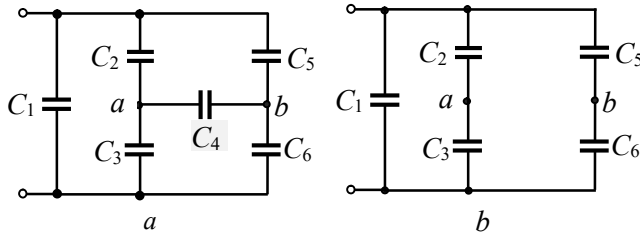


Рис. О.4.22.

наковы, поэтому конденсатор C_4 не заряжен, и его можно удалить (рис. О.4.22 б). Теперь вычисляем общую емкость системы:

$$C_{\Sigma} = C_1 + \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} + \frac{C_5 C_6}{C_5 + C_6} = 2C.$$

4.23. $C = \frac{11 \varepsilon_0 S}{28d}.$

Решение. Каждую из четырех пластин можно представить как две пластины площадью $S/2$ каждая, соединенные между собой проводником (рис. О.4.23 а). При подключении крайних пластин к источнику ЭДС в пластинах произойдет перераспределение зарядов. На боковых поверхностях каждой металлической пластины появятся заряды, равные по модулю, но противоположного знака, а внутри пластин напряженность электрического поля будет равна нулю.

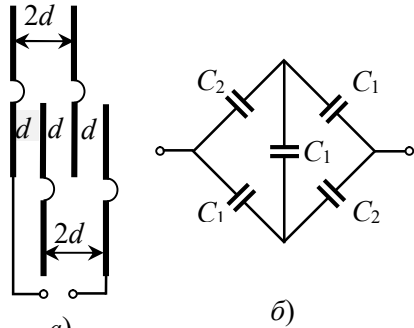


Рис. О.4.23.

Теперь систему пластин можно рассматривать как систему соединенных плоских конденсаторов: трех емкостью

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S/2}{d} = \frac{\varepsilon_0 S}{2d}$$

и двух конденсаторов емкостью

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 S/2}{2d} = \frac{\varepsilon_0 S}{4d} = \frac{C_1}{2}.$$

Эквивалентная схема соединения конденсаторов представлена на рис. О.4.23 б.

Рассчитать емкость такой системы можно по схеме, описанной в решении задачи 4.21. В результате расчетов получаем:

$$C = \frac{11}{14} C_1 = \frac{11 \varepsilon_0 S}{28d}.$$

4.24. $E = 2\varepsilon/d = 40 \text{ кВ/м}.$

Решение. Относительно земли пластина 2 имеет потенциал $\varphi_2 = -\varepsilon$, а пластина 3 $\varphi_3 = \varepsilon$. Разность потенциалов между этими пластинами равна $\Delta\varphi = \varphi_3 - \varphi_2 = 2\varepsilon$, а напряженность электрического поля $E = \Delta\varphi/d = 2\varepsilon/d = 40 \text{ кВ/м}.$

4.25. $\Delta\varphi = \frac{\varepsilon_1 C_1 - \varepsilon_2 C_2}{C_1 + C_2} \approx -1,3 \text{ В}.$

Решение. При последовательном соединении конденсаторов их заряды одинаковы: $q_1 = q_2$. С учетом связи напряжения U на конденсаторе с его зарядом $q = CU$ получаем: $C_1 U_1 = C_2 U_2$.

Сумма напряжений на конденсаторах равна сумме ЭДС:

$$U_1 + U_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Из записанных уравнений находим:

$$U_1 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \cdot \frac{C_1}{C_1 + C_2}.$$

Искомая разность потенциалов равна

$$\Delta\varphi = \varphi_b - \varphi_a = \varepsilon_1 - U_1 = \frac{\varepsilon_1 C_1 - \varepsilon_2 C_2}{C_1 + C_2} \approx -1,3 \text{ В}.$$

4.26. $|U| = \frac{5}{3} U$ на каждом из конденсаторов.

Решение. После соединения разноименно заряженных пластин конденсаторов заряды соединенных пластин одинаковы и равны

$$q' = |q_1 - q_2| = |C_1 U_1 - C_2 U_2| = |CU - 6CU| = 5CU.$$

Два конденсатора можно заменить одним с емкостью $C = C_1 + C_2 = 3C$ (как для параллельно соединенных конденсаторов).

Напряжение на каждом из конденсаторов будет равно:

$$|U| = \frac{q'}{C} = \frac{5CU}{3C} = \frac{5}{3}U.$$

$$4.27. \quad q_1 = \frac{7}{3}CU, \quad q_2 = \frac{14}{3}CU, \quad q_3 = 7CU.$$

4.28. Нельзя, так как конденсатор с наименьшей емкостью будет пробит.

Решение. При последовательном соединении конденсаторов их заряды одинаковы. С учетом связи напряжения U на конденсаторе с его зарядом ($q = CU$) получаем:

$$C_1U_1 = C_2U_2 = C_3U_3.$$

Поданное в цепь напряжение равно сумме напряжений на конденсаторах: $U_0 = U_1 + U_2 + U_3$.

Из данных уравнений находим напряжение на каждом конденсаторе:

$$U_1 = \frac{U_0}{1 + C_1/C_2 + C_1/C_3} = 6000 \text{ В};$$

$$U_2 = \frac{U_0}{1 + C_2/C_1 + C_2/C_3} = 3000 \text{ В};$$

$$U_3 = \frac{U_0}{1 + C_3/C_1 + C_3/C_2} = 2000 \text{ В}.$$

При $U_0 = 11 \text{ кВ}$ первый конденсатор будет пробит.

$$4.29. \quad q = \frac{2}{3}C |\epsilon_1 - \epsilon_2|.$$

$$4.30. \quad C_\Sigma = C; \quad U_{gb} = \epsilon/8.$$

Решение. Два правых конденсатора соединены параллельно, их общая емкость равна $2C_1 = C_2$, поэтому их можно заменить эквивалентным конденсатором емкости C_2 . С конденсатором между

точками d и g на рис. О.4.30 a этот эквивалентный конденсатор соединен последовательно, поэтому их можно заменить эквивалентным конденсатором емкости $C_2/2 = C_1$, в результате схему соединения конденсаторов можно представить в виде, показанном на рис. О.4.30 b . Далее, применяя формулы для параллельного и последовательного соединений конденсаторов, находим общую емкость системы:

$$C_{\Sigma} = C_1 = C.$$

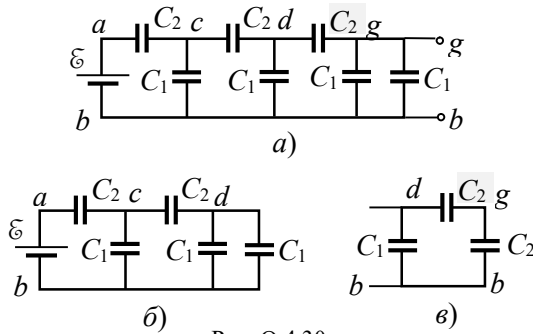


Рис. О.4.30.

Теперь переходим к напряжению U_{gb} . Рассмотрим часть схемы d - b - g (рис. О.4.30 v) (здесь два правых параллельно соединенных конденсатора заменены эквивалентным конденсатором емкостью $C_2 = 2C_1$). Поскольку емкости последовательно соединенных конденсаторов C_2 одинаковы, то

$$U_{dg} = U_{gb} = \frac{1}{2} U_{db}.$$

Аналогично:

$$U_{db} = \frac{1}{2} U_{cb}, \quad U_{cb} = \frac{1}{2} U_{ab}.$$

Следовательно, искомое напряжение равно:

$$U_{gb} = \frac{1}{2^3} U_{ab} = \frac{1}{8} \mathcal{E}.$$

$$4.31. \quad U_1 = U_2 = \frac{(C_3 + C_4)\mathcal{E}_1 - C_3\mathcal{E}_2}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4},$$

$$U_3 = \frac{(C_1 + C_2)\varepsilon_1 - (C_1 + C_2 + C_4)\varepsilon_2}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}, \quad U_4 = \frac{(C_1 + C_2)\varepsilon_1 + C_3\varepsilon_2}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}.$$

Решение. Расставим знаки зарядов на пластинах конденсаторов с учетом того, что $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ (см. рис. О.4.31). Обведенные пунктирной линией обкладки конденсаторов представляют собой электрически изолированную систему, поэтому суммарный заряд этой системы равен нулю:

$$q_1 + q_2 - q_3 - q_4 = 0.$$

Напряжение на конденсаторах C_1 и C_2 одинаковы: $U_1 = U_2$.

Для контуров $abcd$ и bcd можно записать:

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = U_1 + U_3;$$

$$\varepsilon_2 = \varphi_c - \varphi_d = (\varphi_c - \varphi_b) - (\varphi_d - \varphi_b) = U_4 - U_3,$$

где U_3 и U_4 – напряжения на конденсаторах 3 и 4; φ_i – потенциалы соответствующих точек, показанных на рис. О.4.31.

По формуле связи между зарядом и напряжением конденсатора $q = CU$ получаем:

$$q_1 + q_2 = (C_1 + C_2)U_1; \quad q_3 = C_3 U_3; \quad q_4 = C_4 U_4.$$

Исключая из записанных уравнений q_1, q_2, q_3 , получаем систему уравнений:

$$(C_1 + C_2)U_1 - C_3U_3 - C_4U_4 = 0;$$

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = U_1 + U_3;$$

$$\varepsilon_2 = U_4 - U_3.$$

Решая эту систему уравнений, находим:

$$U_1 = U_2 = \frac{(C_3 + C_4)\varepsilon_1 - C_3\varepsilon_2}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4},$$

$$U_3 = \frac{(C_1 + C_2)\varepsilon_1 - (C_1 + C_2 + C_4)\varepsilon_2}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4},$$

$$U_4 = \frac{(C_1 + C_2)\varepsilon_1 + C_3\varepsilon_2}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}.$$

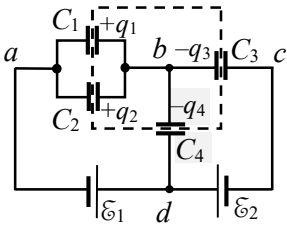


Рис. О.4.31.

$$4.32. q = \varepsilon \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \cdot \left(\frac{C_4}{C_2 + C_4} - \frac{C_3}{C_1 + C_3} \right) = \frac{C \varepsilon}{8}.$$

Решение. После подключения к источнику ЭДС заряд конденсаторов C_1 и C_3 будет равен $q_1 = q_3 = \varepsilon C_{1+3} = \frac{\varepsilon C_1 C_3}{C_1 + C_3}$, а заряды конденсаторов C_2 и C_4 — $q_2 = q_4 = \varepsilon C_{2+4} = \frac{\varepsilon C_2 C_4}{C_2 + C_4}$. При этом разность потенциалов между точками m и n равна

$$U_{mn} = U_2 - U_1 = \frac{q_1}{C_1} - \frac{q_2}{C_2} = \varepsilon \left(\frac{C_4}{C_2 + C_4} - \frac{C_3}{C_1 + C_3} \right).$$

После отключения от источника ЭДС схему можно рассматривать как две параллельные цепи из последовательно соединенных конденсаторов: m - a - n из C_1 и C_2 и m - b - n из C_3 и C_4 , заряженных до разности потенциалов U_{mn} .

После замыкания ключа K разность потенциалов между точками m и n обнулится. При этом цепь m - a - n разрядится, и через точку a протечет заряд $q = C_{1+2} U_{mn}$, где $C_{1+2} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$ — емкость цепи m - a - n . Следовательно,

$$q = \varepsilon \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \cdot \left(\frac{C_4}{C_2 + C_4} - \frac{C_3}{C_1 + C_3} \right) = \frac{C \varepsilon}{8}.$$

$$4.33. Q = \frac{C_1 C_2 (U_1 - U_2)^2}{2(C_1 + C_2)} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}.$$

Решение. После соединения одноименно заряженных пластин конденсаторов их заряды будут одинаковы и равны

$$q' = q_1 + q_2 = C_1 U_1 + C_2 U_2.$$

Два параллельно соединенных конденсатора можно заменить одним с емкостью $C = C_1 + C_2$.

Напряжение на каждом из конденсаторов будет равно:

$$U = \frac{q'}{C} = \frac{C_1 U_1 + C_2 U_2}{C_1 + C_2}.$$

Выделившееся количество теплоты равно разности энергий конденсаторов до и после соединения:

$$Q = \frac{C_1 U_1^2}{2} + \frac{C_2 U_2^2}{2} - \frac{C U^2}{2} = \frac{C_1 C_2 (U_1 - U_2)^2}{2(C_1 + C_2)} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}.$$

$$4.34. \quad q = \varepsilon \frac{C_1^2}{C_1 + C_2}.$$

$$4.35. \quad \Delta q^{(1)} = \varepsilon_1 C_2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) C_1,$$

$$\Delta q^{(2)} = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) C_1 - \frac{\varepsilon_1 C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

$$\text{При } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon \quad \Delta q^{(2)} = -\frac{\varepsilon C_1 C_2}{C_1 + C_2}, \quad \Delta q^{(1)} = \varepsilon C_2.$$

Решение. До замыкания ключа конденсаторы соединены последовательно, и заряд каждого из них равен

$$q_1 = q_2 = \varepsilon_1 \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

После замыкания ключа К новые заряды конденсаторов находятся из условий, записанных для замкнутых простых контуров слева и справа от конденсатора C_2 :

$$\varepsilon_1 = \frac{q_2'}{C_2}; \quad \varepsilon_2 = U_1' + U_2' = \frac{q_1'}{C_1} + \frac{q_2'}{C_2}.$$

Отсюда новые заряды конденсаторов равны:

$$q_2' = \varepsilon_1 C_2; \quad q_1' = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) C_1.$$

Изменить заряд конденсатора C_1 можно только по пути через точку 2, следовательно, через эту точку пройдет заряд

$$\Delta q^{(2)} = q_1' - q_1 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) C_1 - \frac{\varepsilon_1 C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Сумма зарядов, прошедших через точки 1 и 2, равна изменению заряда конденсатора C_2 :

$$\Delta q^{(1)} + \Delta q^{(2)} = q'_2 - q_2,$$

откуда

$$\Delta q^{(1)} = q'_2 - q_2 - \Delta q^{(2)} = \varepsilon_1 C_2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) C_1.$$

При $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ получаем: $\Delta q^{(2)} = -\frac{\varepsilon C_1 C_2}{C_1 + C_2}$, $\Delta q^{(1)} = \varepsilon C_2$.

$$4.36. \Delta q = \frac{\varepsilon C C_0}{2C + C_0}.$$

Решение. Обозначим левый конденсатор емкостью C индексом 1, а правый такой же конденсатор индексом 2. Если ключ находится в положении 1, то общая емкость системы конденсаторов равна $C_\Sigma = \frac{C(C + C_0)}{2C + C_0}$, а заряды конденсаторов

$$q_1 = \frac{\varepsilon C^2}{2C + C_0}, \quad q_0 = \frac{\varepsilon C C_0}{2C + C_0}, \quad q_2 = \frac{\varepsilon C(C + C_0)}{2C + C_0}.$$

После перевода ключа в положение 2 емкость системы конденсаторов C_Σ не изменится, а заряды конденсаторов будут равны:

$$q'_1 = \frac{\varepsilon C(C + C_0)}{2C + C_0}, \quad q'_0 = \frac{\varepsilon C C_0}{2C + C_0}, \quad q'_2 = \frac{\varepsilon C^2}{2C + C_0},$$

т.е. изменятся заряды только крайних конденсаторов на величину

$$\Delta q_1 = q'_1 - q_1 = \frac{\varepsilon C C_0}{2C + C_0} = -\Delta q_2.$$

Именно такой заряд пройдет через источник ЭДС.

$$4.37. A = \varepsilon \Delta q = -\frac{\varepsilon^2 C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

$$4.38. \Delta q = \frac{C_1 C_2 C_3}{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_1 C_3} \varepsilon = \frac{6}{11} C \varepsilon.$$

$$4.39. \Delta q_1 = \frac{C}{18}(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2) \quad \Delta q_2 = -\frac{C}{9}(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2).$$

Решение. При разомкнутом ключе на конденсаторах были заряды $q_1 = q_2 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) C_{1+2} = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{2}{9} C(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$.

После замыкания ключа соединение конденсаторов и источников ЭДС можно представить в виде эквивалентной схемы, показанной на рис. О.4.39. Подобная схема была рассмотрена в задаче 3.31 (чтобы это показать, следует заменить два параллельно соединенных конденсатора в левой части схемы задачи 3.31 одним с емкостью $C_1 + C_2$). Параметры всех конденсаторов после замыкания ключа будем снабжать индексом "штрих". Аналогично решению задачи 3.31 получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} q'_1 - q'_2 - q'_3 &= 0; \\ \varepsilon_1 - \varepsilon_2 &= U'_1 + U'_2; \\ \varepsilon_2 &= U'_3 - U'_2, \end{aligned}$$

где индексом 3 обозначены параметры конденсатора емкостью C .

$$\text{Подставляя } U'_1 = \frac{q'_1}{C_1} = \frac{3q'_1}{C}, \quad U'_2 = \frac{q_2}{C_2} = \frac{3q_2}{2C}; \quad U'_3 = \frac{q'_3}{C_3} = \frac{q'_3}{C},$$

перепишем полученные уравнения в виде:

$$\begin{aligned} q'_1 - q'_2 - q'_3 &= 0; \\ \varepsilon_1 - \varepsilon_2 &= \frac{3q'_1}{C} + \frac{3q'_2}{2C}; \\ \varepsilon_2 &= \frac{q'_3}{C} - \frac{3q'_2}{2C}. \end{aligned}$$

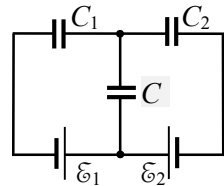


Рис. О.4.39.

Решая данную систему уравнений, находим новые заряды конденсаторов:

$$q'_1 = \frac{C}{18}(5\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2); \quad q'_2 = \frac{C}{9}(\varepsilon_1 - 4\varepsilon_2).$$

Значит, заряды конденсаторов изменились на

$$\Delta q_1 = q'_1 - q_1 = \frac{C}{18}(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2) \quad \Delta q_2 = q'_2 - q_2 = -\frac{C}{9}(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2).$$

$$4.40. q = \frac{1}{3} C(\mathcal{E} - U_0).$$

**§5. Диэлектрики в электростатическом поле.
Конденсаторы с диэлектриками**

$$5.1. \varepsilon = (l_1 / l_2)^2 \approx 2,2.$$

$$5.2. \rho_{\text{ш}} = \frac{\varepsilon_{\text{к}}}{\varepsilon_{\text{к}} - 1} \rho_{\text{к}} = 1600 \text{ кг/м}^3.$$

5.3. а) Электрическая индукция D не изменится, а напряженность E уменьшится в ε раз; б) электрическая индукция увеличится в ε раз, а напряженность электрического поля останется той же.

$$5.4. q = (\varepsilon - 1) C\mathcal{E}.$$

$$5.5. \sigma' = \frac{5}{6} \varepsilon_0 E_0.$$

Решение. Так как напряженность внешнего электрического поля перпендикулярна пластине, то напряжённость поля внутри неё имеет только нормальную компоненту $E = E_n = E_0 / \varepsilon$.

Модуль вектора поляризации в пластине

$$P_n = \varepsilon_0(\varepsilon - 1) E_n = \varepsilon_0(\varepsilon - 1) E_0 / \varepsilon.$$

Так как в воздухе $P_{1n} = 0$, то используя формулу $P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'$, где σ' – поверхностная плотность связанных зарядов, нормаль \mathbf{n} к поверхности раздела сред направлена от среды 1 к среде 2, получаем:

$$\sigma' = P_n = \varepsilon_0(\varepsilon - 1) E_0 / \varepsilon = \frac{5}{6} \varepsilon_0 E_0.$$

$$5.6. \operatorname{tg} \beta = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \operatorname{tg} \alpha; D_2 = \varepsilon_0 E_1 \sqrt{\varepsilon_1^2 \cos^2 \alpha + \varepsilon_2^2 \sin^2 \alpha},$$

$$E_2 = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}, \quad P_2 = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2} E_1 \sqrt{\varepsilon_1^2 \cos^2 \alpha + \varepsilon_2^2 \sin^2 \alpha}.$$

Решение. Из материального уравнения

$$\mathbf{D}_2 = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}_2 = \varepsilon_0 \mathbf{E}_2 + \mathbf{P}_2$$

следует, что векторы \mathbf{E} , \mathbf{P} и \mathbf{D} внутри пластины сонаправлены.

Обозначим угол между нормалью к границе раздела и напряжённостью поля \mathbf{E}_2 β . Согласно граничным условиям для нормальных и тангенциальных составляющих векторов индукции и напряжённости электрического поля в отсутствии свободных зарядов на поверхности раздела:

$$D_{1n} = D_{2n}, \quad E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad \text{где}$$

$$D_{1n} = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_1 \cos \alpha; \quad D_{2n} = \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_2 \cos \beta;$$

$$E_{1\tau} = \frac{D_{1\tau}}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} = E_1 \sin \alpha; \quad E_{2\tau} = \frac{D_{2\tau}}{\varepsilon_0 \varepsilon_2}.$$

Тогда граничные условия запишутся в виде:

$$\varepsilon_1 E_1 \cos \alpha = \varepsilon_2 E_2 \cos \beta; \quad \frac{D_{2\tau}}{\varepsilon_2} = \frac{D_{1\tau}}{\varepsilon_1}.$$

Модули \mathbf{E}_2 , \mathbf{D}_2 и \mathbf{P}_2 в слое диэлектрика равны:

$$D_2 = \sqrt{D_{2n}^2 + D_{2\tau}^2} = \sqrt{D_{1n}^2 + \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2 D_{1\tau}^2} = \varepsilon_0 E_1 \sqrt{\varepsilon_1^2 \cos^2 \alpha + \varepsilon_2^2 \sin^2 \alpha},$$

$$E_2 = \sqrt{E_{2n}^2 + E_{2\tau}^2} = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^2 E_{1n}^2 + E_{1\tau}^2} = E_1 \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{D_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_2},$$

$$P_2 = \varepsilon_0 (\varepsilon_2 - 1) E_2 = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2} E_1 \sqrt{\varepsilon_1^2 \cos^2 \alpha + \varepsilon_2^2 \sin^2 \alpha}.$$

Направление \mathbf{E}_2 определяется углом β , тангенс которого:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{E_{2\tau}}{E_{2n}} = \frac{E_{1\tau}}{(\varepsilon_1 / \varepsilon_2) E_{1n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \alpha.$$

$$5.7. \sigma' = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1) E_0}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha + \varepsilon^2 \sin^2 \alpha}{1 + \varepsilon^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1) E_0}{\varepsilon} \cos \alpha.$$

Решение. Внутри пластины модуль напряженности электрического поля (см. решение задачи 5.6, считая $\varepsilon_1 = 1$ и $\varepsilon_2 = \varepsilon$) равен:

$$E_2 = \frac{E_0}{\varepsilon} \sqrt{\cos^2 \alpha + \varepsilon^2 \sin^2 \alpha}.$$

Вектор E_2 направлен под углом β к нормали, причем $\operatorname{tg} \beta = \varepsilon \operatorname{tg} \alpha$.

Модуль вектора поляризации P_2 в диэлектрике равен

$$P_2 = \varepsilon_0(\varepsilon - 1) E_2 = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1) E_0}{\varepsilon} \sqrt{\cos^2 \alpha + \varepsilon^2 \sin^2 \alpha},$$

а направление P_2 совпадает с направлением E_2 .

Так как в вакууме $P_1 = 0$, из формулы $P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'$ находим:

$$\begin{aligned} \sigma' = P_{2n} = P_2 \cos \beta &= \frac{P_2}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1) E_0}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha + \varepsilon^2 \sin^2 \alpha}{1 + \varepsilon^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \\ &= \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1) E_0}{\varepsilon} \cos \alpha. \end{aligned}$$

5.8. Поверхностная плотность связанных зарядов уменьшится

$$\text{в } \frac{\sigma'_1}{\sigma'_2} = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ раз.}$$

$$5.9. C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d_1 + \varepsilon(d - d_1)}.$$

Решение. Представим конденсатор с пластиной внутри как три последовательно соединенных конденсатора, у которых одинакова площадь обкладок S : воздушного конденсатора над пластиной с расстоянием между обкладками l_1 , конденсатора, заполненного диэлектриком толщиной d_1 , и воздушного конденсатора под пластиной с расстоянием l_2 между обкладками. При этом

$$l_1 + d_1 + l_2 = d.$$

Для емкости последовательно соединенных конденсаторов имеем:

$$\frac{1}{C} = \frac{l_1}{\varepsilon_0 S} + \frac{d_1}{\varepsilon_0 \varepsilon S} + \frac{l_2}{\varepsilon_0 S},$$

откуда находим:

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{(l_1 + l_2) + d_1 / \varepsilon} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d_1 + \varepsilon (d - d_1)}.$$

Видно, что ёмкость C не зависит от расположения диэлектрической пластины относительно обкладок конденсатора (т.е. от величины зазоров l_1 и l_2).

$$5.10. U = \frac{q_2 - q_1}{2\varepsilon_0 S} \left(h - d + \frac{d}{\varepsilon} \right).$$

Решение. Пусть E_0 – напряжённость поля между пластинами в воздушной части, модуль которой

$$E_0 = \frac{q_2}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q_1}{2\varepsilon_0 S}.$$

Так как вектор E_0 перпендикулярен пластинам, то он перпендикулярен и поверхности диэлектрика, а значит, напряжённость поля внутри пластины постоянна и равна: $E_1 = E_{1n} = \frac{E_0}{\varepsilon}$.

Искомая разность потенциалов

$$U = E_0 (h - d) + E_1 d = E_0 \left(h - d + \frac{d}{\varepsilon} \right) = \frac{q_2 - q_1}{2\varepsilon_0 S} \left(h - d + \frac{d}{\varepsilon} \right).$$

$$5.11. U = E_{\max} \frac{d_1 (\varepsilon - 1) + d}{\varepsilon} \approx 34 \text{ кВ}.$$

Решение. На границе раздела воздух – стекло нет свободных зарядов, поэтому $D_{1n} = D_{2n}$ и

$$E_1 / E_2 = \varepsilon_2 / \varepsilon_1 = \varepsilon,$$

где E_1 и E_2 – напряженности электрического поля в воздухе и стекле соответственно (для воздуха $\varepsilon_1 = 1$). Видно, что напряженность электрического поля в воздухе в $\varepsilon = 7$ раз больше, чем в стекле. Поскольку электрическая прочность воздуха значительно меньше, чем стекла, пробой конденсатора произойдет именно в воздухе.

Напряжение между обкладками конденсатора

$$U = E_1 d_1 + E_2 (d - d_1) = E_1 \frac{d_1 (\varepsilon - 1) + d}{\varepsilon}.$$

Подставляя $E_1 = E_{\max 1}$, находим: $U_{\max} \approx 34$ кВ.

При этом напряженность поля в стекле составит

$$E_2 = \frac{U}{d_1 (\varepsilon - 1) + d} \approx 4,3 \text{ кВ/см},$$

что значительно меньше электрической прочности стекла.

$$\begin{aligned} 5.12. \quad \sigma'(2R) &= \frac{(\varepsilon - 1)q}{16\pi\varepsilon R^2}; \quad q'(2R) = \frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon}q; \quad \sigma'(R) = -\frac{(\varepsilon - 1)q}{4\pi\varepsilon R^2}; \\ q'(R) &= -\frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon}q; \quad \rho' = 0. \end{aligned}$$

Решение. По теореме Гаусса для вектора индукции \mathbf{D} для любой сферической концентричной шару поверхности радиуса r :

$$D(r) \cdot 4\pi r^2 = q.$$

С использованием материального уравнения $\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$ получаем напряженность поля в диэлектрическом слое на расстоянии $r > R$ от центра шара:

$$E(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{\varepsilon r^2}.$$

Вне диэлектрического слоя в воздухе при $r > 2R$

$$E(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}.$$

Поляризация внутри диэлектрика зависит от r по закону:

$$P(r) = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E(r) = \frac{(\varepsilon - 1)q}{4\pi\varepsilon r^2}.$$

Вектор поляризации \mathbf{P} направлен, как и вектор напряженности \mathbf{E} , по радиусу сферической поверхности, поэтому на границах диэлектрического слоя имеет только нормальную компоненту P_n .

В данной задаче диэлектрик изотропный и сторонних зарядов внутри него нет, поэтому объемная плотность связанных зарядов в

нем равна нулю: $\rho' = 0$. В этом можно убедиться, вычислив дивергенцию вектора \mathbf{P} в сферических координатах:

$$\rho' = -\operatorname{div}\mathbf{P} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(r^2 P) = 0.$$

Поверхностную плотность связанных зарядов σ' находим по формуле: $\sigma' = P_{1n} - P_{2n}$. Поскольку в воздухе и в металлическом шаре $P = 0$,

на внешней поверхности диэлектрического слоя (при $r = 2R$)

$$\sigma'(2R) = P_n(2R) = \frac{(\varepsilon - 1)q}{16\pi\varepsilon R^2};$$

на внутренней стороне сферического слоя (при $r = R$)

$$\sigma'(R) = -P_n(2R) = -\frac{(\varepsilon - 1)q}{4\pi\varepsilon R^2}.$$

Суммарный связанный заряд на внешней поверхности диэлектрического слоя равен:

$$q'(2R) = \sigma'(2R) \cdot 4\pi(2R)^2 = \frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} q,$$

а на внутренней поверхности:

$$q'(R) = \sigma'(R) \cdot 4\pi R^2 = -\frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} q.$$

5.13. При $r \leq R$: $E = D = 0$;

$$\varphi(r) = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right);$$

при $R \leq r \leq 2R$: $E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \cdot \frac{q}{r^2}$;

$$D(r) = \frac{q}{4\pi r^2}; \quad \varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \left(\frac{1}{r} + \frac{\varepsilon - 1}{2R}\right);$$

при $r \geq 2R$ $E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$; $D(r) = \frac{q}{4\pi r^2}$;

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r}.$$

Графики зависимостей $E(r)$, $D(r)$ и $\varphi(r)$ приведены на рис. О.5.13.

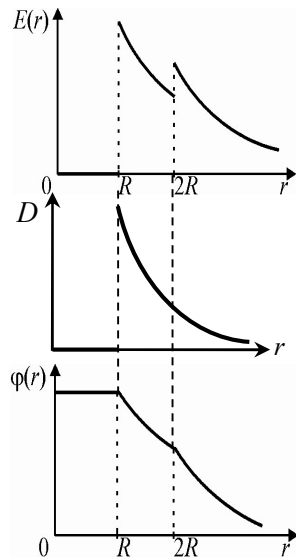


Рис. О.5.13.

$$5.14. \mathbf{P}(\mathbf{r}) = \frac{(\varepsilon - 1)\tau}{2\pi\varepsilon r} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}; \quad \sigma' = -\frac{(\varepsilon - 1)\tau}{2\pi\varepsilon a}, \quad \tau' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\tau, \quad \rho' = 0.$$

Решение. Будем решать задачу в цилиндрической системе координат, ось Z которой направим вдоль оси нити. Модуль электрической индукции в диэлектрике D находим по теореме Гаусса:

$$D(r) = \frac{\tau}{2\pi r}.$$

С учетом материального уравнения $\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$, находим напряженность поля в диэлектрике в произвольной точке на расстоянии $r > a$ от нити:

$$E(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r}, \quad \text{или в векторной форме: } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Поляризация диэлектрика на расстоянии r от оси нити равна:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{(\varepsilon - 1)\tau}{2\pi\varepsilon r} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

По условию задачи диэлектрик – однородный и изотропный, сторонних зарядов внутри него нет. Поэтому объемная плотность связанных зарядов внутри диэлектрика равна нулю: $\rho' = 0$. В этом можно убедиться, вычисляя дивергенцию вектора поляризации в цилиндрической системе:

$$\rho' = \operatorname{div} \mathbf{P} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (rP_r) = 0.$$

Связанные заряды будут индуцироваться в диэлектрике только вблизи поверхности нити (при $r = a$). Внутри проводящей нити поляризация равна нулю, поэтому

$$\sigma' = P_{1n} - P_{2n} = -P_{2n} = -\frac{(\varepsilon - 1)\tau}{2\pi\varepsilon a}.$$

Линейная плотность полного связанного заряда на границе диэлектрика с нитью равна:

$$\tau' = \sigma' \cdot 2\pi a = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\tau.$$

$$5.15. \Delta\varphi = \frac{\rho R^2}{6\varepsilon\varepsilon_0}; \quad \rho' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\rho, \quad \sigma' = \frac{\varepsilon - 1}{3\varepsilon}\rho R;$$

$$q'_{\text{пов}} = \frac{4\pi(\varepsilon - 1)}{3\varepsilon} \rho R^3 = -q'_{\text{внутр}}$$

Решение. Решаем задачу в сферической системе координат с началом в центре шара. Для сферы радиусом $r \leq R$ по теореме Гаусса для вектора \mathbf{D} :

$$D(r) \cdot 4\pi r^2 = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3, \text{ откуда } D(r) = \frac{\rho}{3} r.$$

С учетом $\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}$ находим напряженность поля внутри шара: $E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon \varepsilon_0} r$, а затем определяем разность потенциалов между центром шара и его поверхностью:

$$\Delta\varphi = \int_0^R E(r) dr = \frac{\rho R^2}{6\varepsilon \varepsilon_0}.$$

Вектор поляризации внутри шара направлен по радиусу и по модулю равен:

$$P(r) = (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 E(r) = \frac{(\varepsilon - 1)\rho r}{3\varepsilon}.$$

Так как в воздухе $P = 0$, поверхностная плотность связанных зарядов на поверхности шара

$$\sigma' = P_{1n} - P_{2n} = P(R) = \frac{(\varepsilon - 1)\rho R}{3\varepsilon}.$$

Объемную плотность связанных зарядов в шаре определим из условия:

$$\rho' = -\operatorname{div} \mathbf{P} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 P) = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{(\varepsilon - 1)\rho}{3\varepsilon} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^3) = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \rho.$$

Суммарный связанный заряд внутри шара равен

$$q'_{\text{внутр}} = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho' = -\frac{4\pi(\varepsilon - 1)}{3\varepsilon} \rho R^3,$$

а на поверхности шара суммарный связанный заряд

$$q'_{\text{пов}} = \sigma' \cdot 4\pi R^2 = \frac{4\pi(\varepsilon - 1)}{3\varepsilon} \rho R^3,$$

т.е. полный связанный заряд в диэлектрике равен нулю.

$$5.16. \sigma' = \frac{(\varepsilon - 1)\rho R}{2\varepsilon}, \quad \rho' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\rho.$$

$$5.17. \quad P(x) = \frac{\rho_0(\varepsilon - 1)}{\alpha\varepsilon} \cdot (1 - e^{-\alpha|x|}), \quad \sigma' = \frac{\rho_0(\varepsilon - 1)}{\alpha\varepsilon} \cdot (1 - e^{-\alpha d}),$$

$$\rho'(x) = -\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) e^{-\alpha|x|} \rho_0.$$

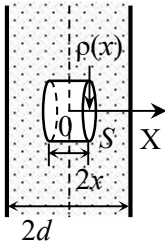


Рис. О.5.17.

Решение. Определим индукцию $D(x)$, используя теорему Гаусса. Для этого выберем вспомогательную поверхность в виде цилиндра с площадью основания S длиной $2x$, расположив его симметрично относительно середины пластины (рис. О.5.17). В силу симметрии поток вектора \mathbf{D} через боковую поверхность цилиндра равен нулю, поэтому учитываем только потоки вектора \mathbf{D} через основания цилиндра:

$$2D(x)S = 2S\rho_0 \int_0^x e^{-\alpha x} dx, \quad \text{откуда} \quad D(x) = \frac{\rho_0}{\alpha} (1 - e^{-\alpha|x|}).$$

Проекция вектора напряженности на ось X равна:

$$E(x) = \frac{D_x}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\rho_0}{\alpha\varepsilon_0\varepsilon} (1 - e^{-\alpha|x|}),$$

а для вектора поляризации получаем:

$$P(x) = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E_x(x) = \frac{\rho_0(\varepsilon - 1)}{\alpha\varepsilon} (1 - e^{-\alpha|x|}).$$

Поверхностную плотность связанных зарядов на границах диэлектрика находим по формуле $\sigma' = P_{1n} - P_{2n}$, учитывая, что для воздуха $P_{2n} = 0$:

$$\sigma' = P(d) = \frac{\rho_0(\varepsilon - 1)}{\alpha\varepsilon} (1 - e^{-\alpha d}).$$

Объемная плотность связанных зарядов в пластине равна:

$$\rho'(x) = -\operatorname{div}\mathbf{P} = -\frac{\partial P_x}{\partial x} = -\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) e^{-\alpha|x|} \rho_0.$$

$$5.18. a) \quad \sigma'(0) = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \cdot \frac{q}{2\pi h^2} \quad (\text{по модулю});$$

$$б) \sigma'(x) = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \cdot \frac{qh}{2\pi(x^2 + h^2)^{3/2}}; в) q' = -q \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}.$$

Решение. Для определения поверхностной плотности поляризованных зарядов на поверхности диэлектрика используем непрерывность нормальной компоненты вектора индукции D_n на границе раздела воздух (среда 1) – керосин (среда 2).

Найдём напряженность поля E в бесконечно малой окрестности произвольной точки А, лежащей на границе раздела (рис. О.5.18). Опустим из точки нахождения заряда q перпендикуляр ВО на границу диэлектрика. Ввиду симметрии системы E зависит лишь от расстояния x между точками А и О.

Вблизи точки А напряженность поля будет суперпозицией поля E_q точечного заряда q и поля E' от всех связанных зарядов, появившихся на границе.

Вектор E_q направлен по радиус-вектору, проведенному от заряда q в точку А, и равен по модулю

$$E_q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}, \text{ где } r^2 = x^2 + h^2.$$

Связанные заряды распределены на плоскости симметрично относительно точки О и их плотность убывает при удалении от этой точки. Нормальная компонента напряженности поля связанных зарядов ($E'_\perp(x)$) на рис. О.5.18) равна по модулю

$$|E'_\perp(x)| = \frac{|\sigma'(x)|}{2\varepsilon_0},$$

где $\sigma'(x)$ – плотность отрицательного связанного заряда в точке А. Горизонтальная компонента поля связанных зарядов (E'_\parallel на рис. О.5.18) компенсируется тангенциальной компонентой напряженности поля E_q .

Учитывая, что $\cos \alpha = \frac{h}{r}$, для нормальных компонент вектора электрической индукции получим:

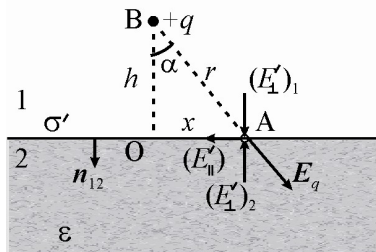


Рис. О.5.18. Напряженности полей, создаваемых в точке А сторонним зарядом q и поляризованными зарядами диэлектрика.

в первой среде – воздухе

$$D_{1n} = \varepsilon_0 E_{1n} = \varepsilon_0 E_q \cos \alpha + \frac{|\sigma'(x)|}{2} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{qh}{r^3} + \frac{|\sigma'(x)|}{2};$$

во второй среде – в керосине:

$$D_{2n} = \varepsilon_0 \varepsilon E_{2n} = \varepsilon \left(\varepsilon_0 E_q \cos \alpha - \frac{|\sigma'(x)|}{2} \right) = \varepsilon \left(\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{qh}{r^3} - \frac{|\sigma'(x)|}{2} \right).$$

Из условия $D_{1n} = D_{2n}$ находим модуль плотности связанного заряда на границе раздела диэлектриков:

$$|\sigma'(x)| = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \cdot \frac{qh}{2\pi r^3} = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \cdot \frac{qh}{2\pi(x^2 + h^2)^{3/2}}.$$

В частном случае, когда $x = 0$ (точка О)

$$\sigma'(0) = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \cdot \frac{q}{2\pi h^2}.$$

Чтобы найти суммарный связанный заряд q' , рассмотрим на плоскости кольцо с центром в точке О и радиусами x и $x + dx$. Его площадь $dS = 2\pi x dx$, на ней находится заряд $dq' = \sigma' dS$. Полный связанный заряд q' находим интегрированием по x от нуля до бесконечности:

$$q' = qh \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \int_0^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + h^2)^{3/2}} = q \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}.$$

$$5.19. \mathbf{E}_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1} \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \frac{\mathbf{r}'}{r'^3} \right), \mathbf{E}_2 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \cdot \frac{\mathbf{r}''}{r''^3};$$

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot \frac{1}{r'} \right), \varphi_1 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \cdot \frac{1}{r''}.$$

Решение. Найдем величину полного связанного заряда q' на границе раздела сред, как это делалось в задаче 5.19. При этом учтем, что диэлектрическая проницаемость первой среды равна ε_1 , а второй – ε_2 . Для нормальных компонент векторов электрической индукции уравнения примут вид:

$$D_{1n} = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_{2n} = \varepsilon_1 \left(\varepsilon_0 E_q \cos \alpha - \frac{\sigma'}{2} \right) = \varepsilon_1 \left(\frac{1}{4\pi} \frac{qh}{r^3} - \frac{\sigma'}{2} \right);$$

$$D_{2n} = \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_{2n} = \varepsilon_2 \left(\varepsilon_0 E_q \cos \alpha + \frac{\sigma'}{2} \right) = \varepsilon_2 \left(\frac{1}{4\pi} \frac{qh}{r^3} + \frac{\sigma'}{2} \right).$$

С учетом граничного условия $D_{1n} = D_{2n}$ находим:

$$\sigma'(x) = -\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot \frac{qh}{2\pi r^3} = -\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot \frac{qh}{2\pi(x^2 + h^2)^{3/2}}.$$

Полный связанный заряд q' на границе раздела сред равен:

$$q' = -qh \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \int_0^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + h^2)^{3/2}} = -q \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}.$$

Теперь по аналогии с задачей о точечном заряде над заземленной металлической плоскостью введем в рассмотрение заряд - "изображение" q' (рис. О.5.19 а). Напряженность поля E_1 в первой среде:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1} \cdot \left(\frac{qr}{r^3} + \frac{q'r'}{r'^3} \right).$$

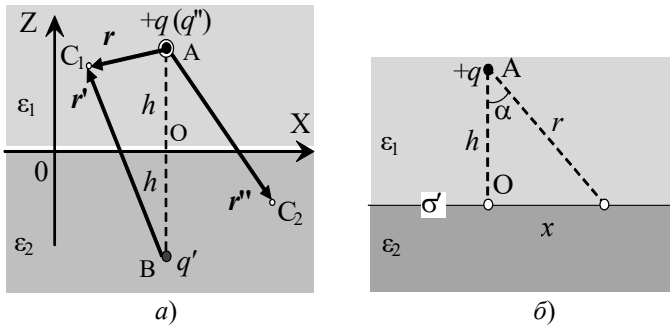


Рис. О.5.19.

Чтобы найти электрическое поле во втором диэлектрике введем в рассмотрение заряд q'' (на рис. О.5.19 а заряд q'' показан большим кружком в т. А). Его величину определим из граничных условий для векторов D и E . Напряженность поля во втором диэлектрике:

$$E_2 = \frac{q''}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2} \cdot \frac{r''}{r''^3},$$

где r'' – вектор, соединяющий точку А с точкой C_2 во второй среде (рис. О.5.19 а).

Выберем точку на границе раздела диэлектриков. Для этой точки $r'' = r$ и $|r| = |r'|$, вектор r составляет с линией АО угол α

(рис. О.5.19 б). Чтобы на границе раздела сред были непрерывны нормальные компоненты вектора \mathbf{D} ($D_{1n} = D_{2n}$), используем формулы для напряженностей \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 . В итоге приходим к условию:

$$q \cos \alpha - q' \cos \alpha = q'' \cos \alpha,$$

из которого находим: $q'' = q - q' = q + q \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q$.

Убедимся, что также выполняются граничные условия для тангенциальных компонент вектора напряженности $E_{1\tau} = E_{2\tau}$:

$$\frac{q}{\varepsilon_1} \sin \alpha + \frac{q'}{\varepsilon_1} \sin \alpha = \frac{q''}{\varepsilon_2} \sin \alpha, \text{ т. е. } \frac{q}{\varepsilon_1} \left(1 - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right) = \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q = \frac{q''}{\varepsilon_2}.$$

Таким образом, полученные выражения для \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 удовлетворяют всем условиям задачи и в силу теоремы единственности дают её решение. Мы заменили реальную систему системой трех точечных зарядов. При этом поле в первой среде обусловлено зарядами q и q' , а во второй среде – зарядом q'' . Напряженности полей в первой и второй средах равны соответственно:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1} \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \frac{\mathbf{r}'}{r'^3} \right), \quad \mathbf{E}_2 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \cdot \frac{\mathbf{r}''}{r^3}.$$

Потенциалы электрического поля в диэлектриках найдем, используя формулы потенциала точечного заряда и принцип суперпозиции. В результате получим:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1} \left(\frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} \right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1} \left(\frac{1}{r} - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot \frac{1}{r'} \right), \\ \varphi_2 &= \frac{q''}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2 r''} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \cdot \frac{1}{r''}. \end{aligned}$$

5.20. Картина силовых линий вектора \mathbf{E} приведена на рис. О.5.20 в.

Решение. Воспользуемся решением задачи 5.19, положив $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon$. Систему "точечный заряд q – связанные заряды на границе диэлектрика" можно заменить системой трех точечных зарядов: самого заряда q , заряда $q' = -q \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}$ и заряда $q'' = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon + 1} q$ (места нахождения зарядов описаны в решении задачи 5.19), причем поле в вакууме создается зарядами q и q' , а в диэлектрике – за-

рядом q'' . Силовые линии поля заряда q'' представляют собой прямые, исходящие из заряда q'' (см. рис. О.5.20 а). Картина силовых линий поля, созданного зарядами q и q' , показана на рис. О.5.20 б. Окончательно картина силовых линий во всем пространстве приведена на рис. О.5.20 в. Штриховой линией проведены эквипотенциальные поверхности поля.

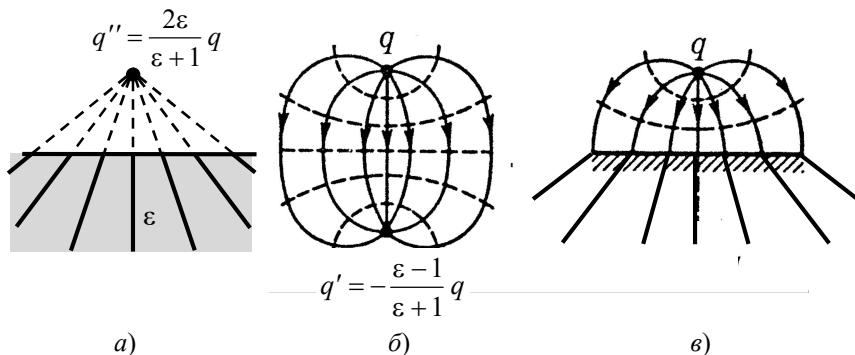


Рис. О.5.20.

$$5.21. F = \frac{1}{16\pi\varepsilon_0\varepsilon_1} \cdot \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \cdot \frac{q^2}{d^2}.$$

Решение. Воспользуемся решением задачи 5.19. Величину силы, действующей на заряд q , находим как силу взаимодействия заряда q с зарядом-изображением q' :

$$F = \frac{1}{16\pi\varepsilon_0\varepsilon_1} \cdot \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \cdot \frac{q^2}{d^2}.$$

Здесь d – расстояние от заряда до плоскости раздела. Заряд q притягивается к границе раздела при $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ и отталкивается от границы в случае $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$.

5.22. Когда т. А находится над границей раздела сред $E_1 \approx \frac{q}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)d^2} \left(1 + \frac{2\varepsilon_2 h}{\varepsilon_1 d}\right)$; когда под границей раздела – $E_2 \approx \frac{q}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)d^2} \left(1 + \frac{2h}{d}\right)$.

Решение. Направим ось Z от среды с ε_2 к среде с ε_1 вдоль перпендикуляра, опущенного из точки нахождения заряда на границу раздела диэлектриков, а начало отсчета выберем на границе раздела. Воспользуемся решением задачи 5.19.

Когда т. А находится в первой среде, напряженность электрического поля в этой точке равна:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1} \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \frac{\mathbf{r}'}{r'^3} \right).$$

При нахождении проекции напряженности на ось Z пренебрежем величинами второго порядка малости h/d :

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1} \left[\frac{1}{(d-h)^2} - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \cdot \frac{1}{(d+h)^2} \right] \approx \\ &\approx \frac{q}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)d^2} \left(1 + \frac{2\varepsilon_2 h}{\varepsilon_1 d} \right) > 0. \end{aligned}$$

Вектор напряженности направлен от границы раздела сред по оси Z .

Когда точка А находится во второй среде, напряженность электрического поля в этой точке равна:

$$\mathbf{E}_2 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \cdot \frac{\mathbf{r}''}{r''^3}.$$

В первом порядке малости по величине h/d модуль напряженности равен:

$$E_2 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(d-h)^2} \approx \frac{q}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)d^2} \left(1 + \frac{2h}{d} \right) > 0.$$

Вектор напряженности направлен также вдоль оси Z в сторону границы раздела.

$$5.23. \sigma'(r) = -\frac{\varepsilon - 1}{2\pi\varepsilon} \cdot \frac{qh}{r^3}.$$

Решение. Так как проводящая плоскость бесконечна, её потенциал равен нулю при нормировке потенциала $\varphi_\infty = 0$. Воспользовавшись методом зеркальных отображений, введем заряд "изображение" ($-q$) заряда q в плоскости.

Но в проводящей плоскости "отразятся" и все поляризационные (связанные) заряды σ' ; это эквивалентно тому, что всё пространство заполнено однородным диэлектриком. В этом диэлектрике находятся два точечных заряда q и $(-q)$ на расстоянии $2h$ друг от друга. Напряженность электрического поля вблизи поверхности диэлектрика на расстоянии r от заряда q вычисляется, как в задачах о точечном заряде над проводящей плоскостью (см., например, решение задачи 3.25). По модулю она равна:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{2qh}{r^3}$$

и направлена по нормали к плоскости.

Поскольку внутри проводника поляризация $P = 0$, поверхностная плотность связанных зарядов на границе диэлектрика равна:

$$\sigma'(r) = P_n(r) = \epsilon_0(\epsilon - 1)E_n(r) = -\frac{\epsilon - 1}{2\pi\epsilon} \cdot \frac{qh}{r^3}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{5.24. а)} \quad U_1 &= \frac{U\epsilon_2 d_1}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1} = 48 \text{ В}, \quad U_2 = \frac{U\epsilon_1 d_2}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1} = 252 \text{ В}; \\ \text{б)} \quad \sigma' &= \frac{\epsilon_0(\epsilon_1 - \epsilon_2)U}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1} \approx 2,7 \cdot 10^{-7} \text{ Кл/м}^2; \quad \text{в)} \quad C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_1 \epsilon_2 S}{d_2 \epsilon_1 + d_1 \epsilon_2} \approx 25 \text{ пФ}. \end{aligned}$$

Решение. а). Из непрерывности нормальных компонент вектора \mathbf{D} на границе раздела диэлектриков $\epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2$.

Напряжение в каждом слое $U_i = E_i d_i$. Для всего конденсатора $U = E_1 d_1 + E_2 d_2$.

Из полученных уравнений находим:

$$U_1 = E_1 d_1 = \frac{U\epsilon_2 d_1}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1} = 48 \text{ В}, \quad U_2 = E_2 d_2 = \frac{U\epsilon_1 d_2}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1} = 252 \text{ В}.$$

б). Для определения σ' используем граничное условие для нормальных составляющих векторов поляризации \mathbf{P}_1 и \mathbf{P}_2 $P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'$, где $P_n = \epsilon_0(\epsilon - 1)E_n$. На границе раздела диэлектриков

$$\sigma' = P_{n1} - P_{n2} = \frac{\epsilon_0(\epsilon_1 - \epsilon_2)U}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1} \approx 2,7 \cdot 10^{-7} \text{ Кл/м}^2.$$

в). Систему можно рассматривать как два последовательно соединенных плоских конденсатора с емкостями

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}{d_1} \text{ и } C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S}{d_2}.$$

Применяя формулу для емкости $1/C = 1/C_1 + 1/C_2$, получаем:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 S}{d_2 \varepsilon_1 + d_1 \varepsilon_2} \approx 25 \text{ пФ}.$$

$$5.25. C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 S}{nd(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}.$$

$$5.26. \Delta q = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \cdot \frac{\varepsilon_0 S U}{2d}.$$

Решение. Так как конденсаторы одинаковые, но вначале напряжения на конденсаторах одинаковы и равны $U/2$, а заряды конденсаторов $q_0 = \frac{CU}{2} = \frac{\varepsilon_0 S U}{2d}$.

После заполнения одного из конденсаторов диэлектриком его ёмкость увеличивается в ε раз, а сумма напряжений на конденсаторах остаётся равной U . Так как конденсаторы соединены последовательно, то их общая емкость равна $C_1 = \frac{\varepsilon C}{\varepsilon + 1} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d(\varepsilon + 1)}$ и

конечный заряд конденсаторов $q_1 = C_1 U = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U}{d(\varepsilon + 1)}$.

Заряд, прошедший по цепи, равен:

$$\Delta q = q_1 - q_0 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U}{d(\varepsilon + 1)} - \frac{\varepsilon_0 S U}{2d} = \frac{\varepsilon_0 S U}{2d} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}.$$

$$5.27. \rho' = \varepsilon_0 E_0 \cdot \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d [\varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(x/d)]^2}, \Delta \varphi = \frac{E_0 d}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \cdot \ln \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.$$

Решение. Согласно условию задачи закон изменения диэлектрической проницаемости материала пластины имеет вид:

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(x/d),$$

где x отсчитывается от левой границы пластины.

Ввиду непрерывности нормальных компонент вектора \mathbf{D} ($\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}_0$ вне пластины) напряженность электрического поля на расстоянии x равна:

$$E(x) = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon(x)} = \frac{E_0}{\varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(x/d)},$$

а поляризация пластины на расстоянии x от левой границы

$$P(x) = D - \varepsilon_0 E(x) = \varepsilon_0 E_0 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(x/d)} \right).$$

Далее получаем объемную плотность связанных зарядов:

$$\rho' = -\operatorname{div} P = -\frac{dP}{dx} = \varepsilon_0 E_0 \cdot \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d [\varepsilon_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(x/d)]^2}.$$

Разность потенциалов между границами пластины равна:

$$\Delta\varphi = \int_0^d E(x) dx = \frac{E_0 d}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \cdot \ln \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.$$

5.28. $C = \frac{3\alpha\varepsilon_0 S}{7d^3}.$

Решение. Пусть на обкладках конденсатора находятся заряды $\pm q$, поверхностная плотность заряда равна $\sigma = \pm q/S$. Согласно граничному условию для электрической индукции внутри диэлектрика она постоянна и равна $D = \sigma$. Напряженность поля в конденсаторе:

$$E(x) = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon(x)} = \frac{\sigma(x+d)^2}{\varepsilon_0 \alpha},$$

разность потенциалов между обкладками конденсатора равна:

$$\Delta\varphi = \int_0^d E(x) dx = \frac{\sigma}{\alpha\varepsilon_0} \int_0^d (x+d)^2 dx = \frac{7qd^3}{3\alpha\varepsilon_0 S}.$$

Емкость конденсатора по определению:

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{3\alpha\varepsilon_0 S}{7d^3}.$$

$$5.29. D(r) = \frac{6\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2RU}{(3\varepsilon_2 - \varepsilon_1)r^2}, \text{ при } R \leq r \leq 2R \quad E_1(r) = \frac{6\varepsilon_2RU}{(3\varepsilon_2 - \varepsilon_1)r^2},$$

$$\text{при } 2R \leq r \leq 3R \quad E_2(r) = \frac{6\varepsilon_1RU}{(3\varepsilon_2 - \varepsilon_1)r^2}; \quad \Delta\varphi_1 = \frac{3\varepsilon_2}{3\varepsilon_2 - \varepsilon_1}U,$$

$$\Delta\varphi_2 = \frac{\varepsilon_1}{3\varepsilon_2 - \varepsilon_1}U.$$

Решение. Пусть заряд внутренней обкладки равен q , тогда $D(r) = \frac{q}{4\pi r^2}$ во всем диапазоне $R \leq r \leq 3R$. При $R \leq r \leq 2R$

$$E_1(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1} \cdot \frac{q}{r^2}, \text{ при } 2R \leq r \leq 3R \quad E_2(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2} \cdot \frac{q}{r^2}.$$

Определим напряжение во внутреннем слое диэлектрика $\Delta\varphi_1$ и во внешнем $\Delta\varphi_2$:

$$\Delta\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1} \cdot \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R} \right) = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_1R};$$

$$\Delta\varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2} \cdot \left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{3R} \right) = \frac{q}{24\pi\varepsilon_0\varepsilon_2R}.$$

Разность потенциалов между обкладками равна:

$$U = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 = \frac{q}{24\pi\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2R} \cdot (3\varepsilon_2 - \varepsilon_1),$$

$$\text{откуда } q = \frac{24\pi\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2RU}{3\varepsilon_2 - \varepsilon_1}.$$

Подставив это значение в выражения для $D(r)$, $E_1(r)$ и $E_2(r)$, получаем:

$$D(r) = \frac{6\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2RU}{(3\varepsilon_2 - \varepsilon_1)r^2}, \quad E_1(r) = \frac{6\varepsilon_2RU}{(3\varepsilon_2 - \varepsilon_1)r^2}, \quad E_2(r) = \frac{6\varepsilon_1RU}{(3\varepsilon_2 - \varepsilon_1)r^2},$$

$$\Delta\varphi_1 = \frac{3\varepsilon_2}{3\varepsilon_2 - \varepsilon_1}U, \quad \Delta\varphi_2 = \frac{\varepsilon_1}{3\varepsilon_2 - \varepsilon_1}U.$$

$$5.30. \frac{U_1}{U_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cdot \frac{\ln(1 + d/R_1)}{\ln(R_2/(R_1 + d))}.$$

Решение. Если на обкладках конденсатора заряды распределены с линейной плотностью τ и $-\tau$, то индукция электрического поля в конденсаторе равна $D = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}$, где r – расстояние до оси цилиндров. Напряженности полей в слоях диэлектриков равны соответственно $E_1(r) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon_1 r}$ и $E_2(r) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon_2 r}$, а падения напряжения в слоях диэлектриков равны:

$$U_1 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon_1} \ln \frac{R_1 + d}{R_1} \quad \text{и} \quad U_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon_2} \ln \frac{R_2}{R_1 + d}.$$

Следовательно, искомое отношение равно:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cdot \frac{\ln(1 + d/R_1)}{\ln(R_2/(R_1 + d))}.$$

5.31. а) В первую очередь будет пробит внутренний слой;
б) в первую очередь будет пробит внешний слой.

Решение. Пробой диэлектрика возникнет там, где напряженность поля максимальна. Максимальное значение напряженности поля в каждом слое имеет при самых малых в этом слое расстояниях от оси цилиндров: вблизи R_1 для первого слоя и $R_1 + d$ для второго. Напряженности электрических полей в этих точках соотносятся как: $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\epsilon_2(R_1 + d)}{\epsilon_1 R_1} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \left(1 + \frac{d}{R_1}\right)$.

Подставляя данные задачи, получаем:

$$а) \frac{E_1}{E_2} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \left(1 + \frac{d}{R_1}\right) = \frac{10}{7}, \text{ т.е. } E_1 = \frac{10}{7} E_2,$$

и, следовательно, в первую очередь будет пробит внутренний слой.

$$б) \frac{E_1}{E_2} = \frac{6}{7}, \text{ т.е. } E_1 = \frac{6}{7} E_2,$$

следовательно, в первую очередь будет пробит внешний слой.

$$\mathbf{5.32.} \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{\epsilon_2 E_2}{\epsilon_1 E_1}.$$

Решение. Напряженность в слое диэлектрика в цилиндрическом конденсаторе максимальна у его внутренней поверхности. При достижении напряженности, соответствующей пробоем в данном диэлектрике, выполняются соотношения:

$$E_1 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_1r_1}, \quad E_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_2r_2},$$

где τ – линейная плотность заряда на обкладках конденсатора, r_1 и r_2 – внутренние радиусы диэлектрических слоев.

Отсюда получаем отношение внутренних радиусов:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\varepsilon_2 E_2}{\varepsilon_1 E_1}.$$

$$5.33. \quad \sigma_{12} = \frac{2\varepsilon_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)U}{3R(\varepsilon_2 \ln 1,5 + \varepsilon_1 \ln(4/3))}.$$

$$5.34. \quad C = \frac{4\pi\alpha\varepsilon_0}{\ln(R_2 / R_1)}.$$

Решение. Пусть на внутренней обкладке конденсатора находится заряд q . Тогда индукция электрического поля в конденсаторе равна $D(r) = \frac{q}{4\pi r^2}$, где r – расстояние до центра сфер.

Напряжённость поля в диэлектрике равна:

$$E(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\alpha\varepsilon_0 r},$$

а разность потенциалов между обкладками конденсатора:

$$\Delta\varphi = \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr = \frac{q}{4\pi\alpha\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{q}{4\pi\alpha\varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

По определению емкость конденсатора равна:

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{4\pi\alpha\varepsilon_0}{\ln(R_2 / R_1)}.$$

$$5.35. P(r) = \frac{q}{4\pi} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{\alpha} \right); \quad \sigma'(a) = -\frac{q}{4\pi} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\alpha} \right);$$

$$\sigma'(b) = \frac{q}{4\pi} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{\alpha} \right); \quad \rho' = \frac{q}{2\pi\alpha r}.$$

Решение. Модуль индукции D на расстоянии r от центра сферического слоя равен $D(r) = \frac{q}{4\pi r^2}$, а модуль напряженности поля в диэлектрике $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\alpha}$.

Модуль вектора поляризации P равен:

$$P(r) = \epsilon_0(\epsilon - 1)E(r) = \frac{q}{4\pi\alpha} \cdot (\epsilon - 1) = \frac{q}{4\pi} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{\alpha} \right).$$

Так как сферический слой находится в среде с $\epsilon = 1$, поляризация вне слоя равна нулю. Поверхностная плотность связанных зарядов находится из граничного условия: $\sigma' = P_{1n} - P_{2n}$. В итоге получаем:

$$\sigma'(a) = -P(a) = -\frac{q}{4\pi} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\alpha} \right); \quad \sigma'(b) = P(b) = \frac{q}{4\pi} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{\alpha} \right).$$

Далее находим объемную плотность связанных зарядов ρ' :

$$\rho' = -\operatorname{div}P = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(r^2 P) = -\frac{q}{4\pi r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(1 - \frac{r^2}{\alpha} \right) = \frac{q}{2\pi\alpha r}.$$

5.36. При $0 \leq r \leq R_1$ $\varphi = 0$; при $R_1 \leq r \leq R_2$

$$\varphi(r) = \frac{\tau}{2\pi\alpha\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right); \quad \text{при } R_2 \leq r \quad \varphi = \frac{\tau(R_1 - R_2)}{2\pi\alpha\epsilon_0 R_1 R_2}.$$

Решение. При $0 \leq r \leq R_1$ напряжённость поля равна нулю, и потенциал также равен нулю согласно условию задачи. Внутри конденсатора ($R_1 \leq r \leq R_2$) индукция электрического поля равна

$D(r) = \frac{\tau}{2\pi r}$, где r – расстояние до оси конденсатора. Напряжённость поля в конденсаторе

$$E(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} = \frac{\tau}{2\pi\alpha\varepsilon_0 r^2}.$$

Потенциал в этой области равен:

$$\varphi = \int_r^{R_1} E(r) dr = \frac{\tau}{2\pi\alpha\varepsilon_0} \int_r^{R_1} \frac{dr}{r^2} = \frac{\tau}{2\pi\alpha\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right) < 0.$$

Снаружи конденсатора ($R_2 \leq r$) напряжённость поля равна нулю, и в силу непрерывности потенциала на границе диэлектрика получаем:

$$\varphi = \varphi(R_2) = \frac{\tau}{2\pi\alpha\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) = \frac{\tau(R_1 - R_2)}{2\pi\alpha\varepsilon_0 R_1 R_2} < 0.$$

$$5.37. C = \frac{4\pi\varepsilon_0 \eta a^2 b^2}{b^2 - a^2}.$$

$$5.38. C = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_1 + 7\varepsilon_2)l}{4\ln(R_2 / R_1)}.$$

Решение. Две части конденсатора с разными диэлектрическими проницаемостями можно рассматривать как два параллельно соединенных конденсатора. Рассчитаем емкость C_1 одного из них, который заполнен диэлектриком с проницаемостью ε_1 .

Разобьем пространство между обкладками конденсатора на соосные цилиндрические слои радиусом одного r и толщиной dr . Емкость C_r такого элементарного конденсатора находим по формуле:

$$C_r = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S_r}{d_r}, \text{ где } S_r = \varphi_1 r l \text{ — площадь поверхности слоя, } d_r = dr$$

— его толщина, φ_1 — двугранный угол между плоскостями, разделяющими диэлектрики, l — длина конденсатора.

Такие элементарные конденсаторы соединены последовательно, поэтому для вычисления емкости C_1 всего рассматриваемого конденсатора воспользуемся формулой:

$$\frac{1}{C_1} = \sum_r \frac{1}{C_r} \rightarrow \frac{1}{C_1} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varphi_1 r l} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varphi_1 l} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Таким образом, $C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varphi_1 l}{\ln(R_2 / R_1)}$.

Аналогично для второй части конденсатора: $C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 \varphi_2 l}{\ln(R_2 / R_1)}$.

Так как обе части конденсатора соединены параллельно, общая емкость всего конденсатора при $\varphi_1 = \pi/4$ и $\varphi_2 = 3\pi/4$ равна:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_1 + 7\varepsilon_2) l}{4 \ln(R_2 / R_1)}.$$

5.39. $C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon a l}{d} \left(1 + \frac{l(d+b)}{4\pi R^2} \right).$

Решение. Будем решать задачу в цилиндрической системе координат. Если считать полярный угол φ изменяющимся непрерывно, для всего многовиткового конденсатора угол $\Delta\varphi$ полного поворота от начальной точки конденсатора до его конечной точки, отстоящей от начальной на расстояние l , с учетом малости толщины диэлектрического слоя d составляет: $\Delta\varphi \cong l/R$. При этом зависимость радиуса кривизны каждого участка конденсатора от φ имеет вид:

$$r = R + \frac{\varphi(d+b)}{2\pi}, \text{ где } 0 \leq \varphi \leq \Delta\varphi \cong l/R.$$

Выделим элемент поверхности конденсатора бесконечно малой толщиной dr , видимый из центра витка под углом $d\varphi$. При $R \gg d$ емкость такого элементарного конденсатора можно рассчитывать по формуле для плоского конденсатора:

$dC = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon dS}{d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon a r}{d} d\varphi$, где $dS = ar d\varphi$ – площадь поверхности участка.

Так как все такие элементарные конденсаторы соединены параллельно, их общая емкость равна сумме их емкостей, поэтому общую емкость находим интегрированием:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon a}{d} \int_0^{\Delta\varphi} r d\varphi = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon a}{d} \int_0^{l/R} \left(R + \frac{\varphi(d+b)}{2\pi} \right) d\varphi = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon a l}{d} \left(1 + \frac{l(d+b)}{4\pi R^2} \right).$$

Из полученного результата видно, что емкость первоначально плоского конденсатора $C_0 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon a l}{d}$ при сворачивании ленты в многовитковую трубку возрастает.

$$5.40. \Delta\varphi = \frac{3P_0 d}{4\varepsilon_0}, \quad \rho'(x) = \frac{3P_0 x^2}{d^3}.$$

Решение. В пластине создается деполяризующее электрическое поле с напряженностью

$$\mathbf{E}(x) = -\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} = -\frac{\mathbf{P}_0}{\varepsilon_0} \left[1 - \left(\frac{x}{d} \right)^3 \right].$$

Поскольку $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, разность потенциалов между поверхностями пластины находим интегрированием:

$$\Delta\varphi = -\int_0^d E(x) dx = \frac{P_0}{\varepsilon_0 d^3} \int_0^d (d^3 - x^3) dx = \frac{3P_0 d}{4\varepsilon_0}.$$

Объемную плотность связанных зарядов ρ' находим по формуле: $\rho' = -\operatorname{div}\mathbf{P}$. Поскольку вектор поляризации зависит только от одной координаты x , получаем:

$$\rho' = -\operatorname{div}\mathbf{P} = -\frac{\partial P}{\partial x} = -P_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(1 - (x/d)^3 \right) = \frac{3P_0 x^2}{d^3}.$$

$$5.41. U = \frac{n\sigma + P}{n\varepsilon_0} d.$$

Решение. При внесении электрета в конденсатор произойдет перераспределение свободных зарядов на пластинах конденсатора так, чтобы напряженность поля в воздушном промежутке \mathbf{E}_1 и в электрете \mathbf{E}_2 стала одинаковой: $E_1 = E_2 = E_0$, поскольку разность потенциалов между пластинами равна $\Delta\varphi = Ed$ независимо от пути перехода от одной пластины к другой – через воздушный промежуток или через диэлектрик. С учетом направлений напряженностей и равенства $\pm\sigma' = \pm P$ для напряженности поля в конденсаторе получаем:

$$E_0 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_2 + \sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_2 + P}{\varepsilon_0},$$

где σ_1 и σ_2 – поверхностные плотности зарядов на верхней пластине конденсатора над воздушным зазором и над электретом соответственно.

Диэлектрик заполняет $1/n$ часть объема конденсатора. По закону сохранения заряда исходная поверхностная плотность заряда σ на пластинах конденсатора равна

$$\sigma = (1 - 1/n)\sigma_1 + (1/n)\sigma_2 = \frac{(n-1)\sigma_1 + \sigma_2}{n}.$$

Из двух уравнений находим: $\sigma_1 = \sigma + P/n$.

Напряженность электрического поля $E = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{n\sigma + P}{n\varepsilon_0}$.

Разность потенциалов между обкладками:

$$U = Ed = \frac{n\sigma + P}{n\varepsilon_0} d.$$

$$5.42. \quad n = \frac{U_2}{U_1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3q + 2PS}{2q + PS}.$$

Указание. См. решение задачи 5.41.

$$5.43. \quad q = \left(\frac{\varepsilon_0 U}{d} - \frac{Ph}{d} \right) S.$$

$$5.44. \quad \Delta\varphi = \frac{P}{\varepsilon_0} \cdot \left[R - \left(\sqrt{R^2 + l^2} - l \right) \right].$$

Решение. Так как $P = \text{const}$, внутри цилиндра плотность объемных связанных зарядов $\rho' = 0$. На торцах цилиндра находятся противоположные по знаку поверхностные связанные заряды, распределенные равномерно с плотностью $\pm \sigma' = \pm P$. Таким образом, потенциал поля в точках на оси цилиндра равен сумме потенциалов полей, создаваемых двумя противоположно заряженными дисками на их общей оси. Потенциал на оси диска вычислен в задаче 1.64 (при нормировке потенциала $\varphi_\infty = 0$):

$$\varphi = \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0}(\sqrt{R^2 + z^2} - z),$$

где R – радиус диска, а z – расстояние вдоль его оси от плоскости диска.

Пусть вектор \mathbf{P} направлен от левого торца цилиндра к правому. Тогда на левом торце $\sigma' = -P$, а на правом $\sigma' = +P$. По принципу суперпозиции потенциалы в центрах левого и правого торцов равны:

$$\varphi_{\text{лев}} = \frac{P}{2\varepsilon_0}(\sqrt{R^2 + l^2} - l) - \frac{PR}{2\varepsilon_0}, \quad \varphi_{\text{прав}} = -\frac{P}{2\varepsilon_0}(\sqrt{R^2 + l^2} - l) + \frac{PR}{2\varepsilon_0}.$$

Разность потенциалов между центрами торцов цилиндра равна: $\Delta\varphi = \frac{P}{\varepsilon_0} \cdot \left[R - \left(\sqrt{R^2 + l^2} - l \right) \right]$.

$$5.45. \quad \rho' = -2\alpha.$$

Решение. В цилиндрической системе координат

$$\rho' = -\operatorname{div}\mathbf{P} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(rP_r) = -\frac{\alpha}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(r^2) = -2\alpha \quad (\text{не зависит от } r).$$

$$5.46. \quad \mathbf{E} \cong -\frac{2r^2\mathbf{P}}{\varepsilon_0 l^2}.$$

Решение. Как обсуждалось в решении задачи 5.44, однородно поляризованный вдоль оси цилиндр эквивалентен двум равномерно заряженным по поверхности дискам с плотностью зарядов $\sigma' = \pm P$.

Напряженность электрического поля на оси Z диска была вычислена в задаче 1.30:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \mathbf{e}_z,$$

где z – расстояние от плоскости диска.

Используя принцип суперпозиции, для напряженности в центре цилиндра получаем:

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \left[1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4r^2}} \right] = -\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 4r^2/l^2}} \right).$$

Считая параметр $x = 4r^2/l^2$ малым, разложим $(1+x)^{-1/2}$ в ряд Тейлора, ограничившись двумя первыми членами разложения:

$$(1+x)^{-1/2} \cong 1 - \frac{1}{2}x.$$

Тогда формула для \mathbf{E} преобразуется к виду:

$$\mathbf{E} \cong -\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4r}{l^2} \right) \right] = -\frac{2r^2 \mathbf{P}}{\varepsilon_0 l^2}.$$

Поскольку цилиндр длинный ($r \ll h$), можно считать, что напряженность электрического поля вне цилиндра вблизи его боковой поверхности напротив центра цилиндра будет практически такой же, как в его центре.

$$5.47. \quad \varepsilon = \frac{2\varepsilon_0 E_0 + P}{2\varepsilon_0 E_0 - P}.$$

Решение. Факторы формы длинного тонкого цилиндра $n_y = n_z = 1/2$, $n_x = 0$, где ось Z направлена вдоль оси цилиндра. С учетом этого напряженность деполяризующего поля, созданного поляризационными зарядами диэлектрика, равна $\mathbf{E}_1 = -\frac{\mathbf{P}}{2\varepsilon_0}$, где

вектор поляризации диэлектрика $\mathbf{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\mathbf{E}$.

По принципу суперпозиции напряженность поля внутри цилиндра $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1$. Подставляя \mathbf{E} в выражение для \mathbf{P} , получаем:

$$\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} = (\varepsilon - 1) \left(\mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{P}}{2\varepsilon_0} \right),$$

откуда диэлектрическая проницаемость цилиндра:

$$\varepsilon = \frac{2\varepsilon_0 E_0 + P}{2\varepsilon_0 E_0 - P}.$$

$$5.48. \quad E = -\frac{Ph}{2\varepsilon_0 \sqrt{h^2 + 4R^2}}.$$

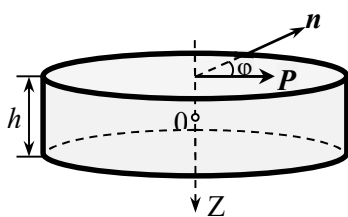


Рис. О.5.48.

Решение. Связанные заряды возникнут только на боковой поверхности диска. Используем цилиндрическую систему координат, начало которой совместим с центром диска, ось Z направим по его оси, а азимутальный угол φ будем отсчитывать от направления \mathbf{P} (рис. О.5.48). В этом случае

поверхностная плотность связанных зарядов равна:

$$\sigma' = (\mathbf{P}\mathbf{n}) = P \cos \varphi,$$

где \mathbf{n} – единичный вектор нормали к боковой поверхности диска.

Нахождение напряженности электрического поля в центре цилиндра с такой поверхностной плотностью зарядов проведено в задаче 1.35 (следует только заменить σ_0 на P).

В результате получаем:

$$\mathbf{E} = -\frac{Ph}{2\varepsilon_0 \sqrt{h^2 + 4R^2}}.$$

5.49. $\mathbf{p} = 4\pi R^3 \varepsilon_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \mathbf{E}_0$, $\sigma' = 3\varepsilon_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} E_0 \cos \theta$, где θ – угол между напряженностью внешнего поля \mathbf{E}_0 и нормалью к поверхности шара в исследуемой точке; $\mathbf{p}_{\varepsilon \rightarrow \infty} = 4\pi R^3 \varepsilon_0 \mathbf{E}_0$, $\sigma'_{\varepsilon \rightarrow \infty} = 3\varepsilon_0 E_0 \cos \theta$.

Решение. Факторы формы шара $n_x = n_y = n_z = 1/3$, а напряженность деполяризующего поля, созданного его поляризационными поверхностными зарядами, равна $\mathbf{E}_1 = -\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}$. Согласно материаль-

ному уравнению $\mathbf{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\mathbf{E}$, где \mathbf{E} – напряженность электрического поля внутри шара. По принципу суперпозиции $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1$.

Теперь можно записать: $\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} = (\varepsilon - 1) \left(\mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0} \right)$, откуда полу-

чаем вектор поляризации шара:

$$\mathbf{P} = 3\varepsilon_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \mathbf{E}_0.$$

Шар поляризован однородно, его дипольный момент равен:

$$\mathbf{p} = PV = \frac{4}{3} \pi R^3 \mathbf{P} = 4\pi R^3 \varepsilon_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \mathbf{E}_0.$$

Поверхностную плотность поляризационных зарядов найдем, используя граничное условие: $\sigma' = P_n = P \cos \theta$, где θ – угол между напряженностью внешнего поля \mathbf{E}_0 и нормалью к поверхности шара в исследуемой точке. Тогда поверхностная плотность поляризационных зарядов σ' равна:

$$\sigma' = P \cos \theta = \frac{3\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) E_0 \cos \theta}{\varepsilon + 2}.$$

Так как в диэлектрике (безграничном шаре) напряженность внешнего электрического поля уменьшается в ε раз, а напряженность поля в проводнике равна нулю, формально проводник можно рассматривать как крайний случай диэлектрика с бесконечно большой диэлектрической проницаемостью. При $\varepsilon \rightarrow \infty$ (проводящий шар) получаем:

$$\mathbf{p}_{\varepsilon \rightarrow \infty} = 4\pi R^3 \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 \text{ и } \sigma'_{\varepsilon \rightarrow \infty} = 3\varepsilon_0 E_0 \cos \theta,$$

что согласуется с решениями задач 3.46 и 3.47 о поведении проводящего шара в однородном электрическом поле.

5.50. На $\sim 3,65\%$.

Указание. См. решение задачи 5.49.

$$\mathbf{5.51.} \quad \varepsilon = 1 + 4\pi r^3 \varepsilon_0 \cdot \frac{P}{kT} \approx 1,00033.$$

Решение. Будем считать молекулы гелия достаточно удаленными друг от друга, так что искажением внешнего электрического поля за счет нахождения в нем других молекул можно пренебречь. Гелий является неполярным диэлектриком, при внесении его во внешнее электрическое поле в молекуле происходит смещение отрицательных и положительных зарядов, подобное возникновению индуцированных зарядов на поверхности проводника во внешнем электрическом поле. Поэтому молекулу гелия можно рассматривать как проводящий шарик.

Во внешнем электрическом поле молекула приобретет дипольный момент (см. решение задачи 5.49)

$$p_{\varepsilon \rightarrow \infty} = 4\pi r^3 \varepsilon_0 E_0.$$

Модуль вектора поляризации газа по определению равен:

$$P = pn = 4\pi r^3 \varepsilon_0 n E_0,$$

где n – концентрация молекул газа.

Так как $P = \varepsilon_0 \chi E_0$, получаем: $\chi = 4\pi r^3 n$ и

$$\varepsilon = 1 + \chi = 1 + 4\pi r^3 n.$$

Концентрацию молекул находим из уравнения $p = nkT$. Окончательно получаем:

$$\varepsilon = 1 + 4\pi r^3 \cdot \frac{p}{kT} \approx 1,00033.$$

§6. Энергия, работа и ponderomotorные силы в электрическом поле

$$6.1. W = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r} \approx 2,9 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 18 \text{ эВ}.$$

$$6.2. \text{ а) } W = -\frac{q^2 \sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0 a}; \text{ б) } W = -\frac{q^2 (\sqrt{2} - 4)}{4\pi\varepsilon_0 a}.$$

$$6.3. \text{ Энергия уменьшилась на } \Delta W = \frac{q^2 (3\sqrt{2} - 1)}{12\pi\varepsilon_0 a}.$$

$$6.4. v_{2\text{max}} = \frac{|q|}{\sqrt{6\pi\varepsilon_0 a m}}.$$

Решение. После пережигания нити шарики, отталкиваясь друг от друга, начинают двигаться. По закону сохранения импульса можно записать:

$$mv_1 + mv_2 + mv_3 = 0,$$

где v_i – скорости шариков, пронумерованных в порядке их расположения.

Отсюда следует, что $v_2 = -(v_1 + v_3)$, а центр масс системы шариков остается на месте. Из симметрии расположения шариков ясно, что после пережигания нити модули скоростей крайних шариков равны, поэтому скорость среднего шарика не меняет своего направления. До момента, когда средний шарик совместится с центром масс системы, его скорость будет возрастать. Она станет максимальной, когда все шарики окажутся на одной прямой. При этом скорости всех шариков будут коллинеарны, и модули скоростей удовлетворяют соотношению: $v_2 = 2v_1 = 2v_3$.

Когда шарики находились в вершинах треугольника, энергия их кулоновского взаимодействия была равна $W_1 = \frac{3q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$, а после расположения шариков вдоль одной прямой:

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{1}{a}(q_1 q_2 + q_2 q_3) + \frac{1}{2a} q_1 q_3 \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{5q^2}{2a},$$

т.е. энергия взаимодействия зарядов изменится на

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{5q^2}{2a} - \frac{3q^2}{a} \right) = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a} < 0.$$

По закону сохранения энергии можно записать:

$$\Delta W + \frac{mv_{2\max}}{2} + 2 \cdot \frac{m(v_{2\max}/2)^2}{2} = 0,$$

откуда находим: $v_{2\max} = \frac{|q|}{\sqrt{6\pi\epsilon_0 a m}}$.

6.5. $R = 2a$.

Решение. Внутри сферы напряженность поля равна нулю и плотность энергии электрического поля также равна нулю.

Вне сферы $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$, и плотность энергии поля равна:

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2.$$

Для вычисления энергии внутри сферы радиусом R разобьем пространство вокруг сферы на концентрические слои радиусами r и

малой толщиной dr . Внутри такого слоя заключена энергия $dW = w \cdot 4\pi r^2 dr$.

Энергия внутри сферы радиусом R :

$$W = \int_a^R w \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_a^R \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R} \right).$$

Энергия электрического поля во всем пространстве равна

$$W = \int_a^\infty w \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a}.$$

Радиус сферы, внутри которой сосредоточена половина всей энергии электрического поля, находим из условия:

$$\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a},$$

откуда $R = 2a$.

$$6.6. W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1^2}{R_1} + \frac{2Q_1Q_2}{R_2} + \frac{Q_2^2}{R_2} \right).$$

$$6.7. W_0 = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} + \frac{\epsilon - 1}{2a\epsilon} \right).$$

Решение. Внутри шара напряженность поля равна нулю, поэтому и энергия поля также равна нулю. В областях $R \leq r \leq a$ и

$r \geq 2a$ $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$, а плотность энергии электрического поля

равна: $w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$. В пространстве $R \leq r \leq a$ заключена энергия

$$W_1 = \int_R^a w 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{2 \cdot 4\pi\epsilon_0} \int_R^a \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{a} \right).$$

Вне диэлектрического слоя при $r \geq 2a$ сосредоточена энергия

$$W_2 = \int_{2a}^\infty w \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_{2a}^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 a}.$$

В диэлектрическом слое при $a \leq r \leq 2a$

$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \cdot \frac{q}{r^2}$, и плотность энергии электрического поля равна:

$w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E^2$. Энергия, заключенная в слое диэлектрика, составляет:

$$W_3 = \int_a^{2a} w \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon} \int_a^{2a} \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0\varepsilon a}.$$

Полная энергия W_0 системы равна:

$$W_0 = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{a} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{2\varepsilon a} \right) = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R} + \frac{\varepsilon - 1}{2a\varepsilon} \right).$$

$$\mathbf{6.8.} \quad W = \frac{q^2(7\varepsilon + 1)}{56\pi\varepsilon_0\varepsilon R}.$$

Решение. Сначала найдем закон изменения объемной плотности заряда внутри шара. По условию задачи $\rho = \alpha r$, а полный

заряд шара $q = \int_0^R \alpha r \cdot 4\pi r^2 dr = \alpha \pi R^4$, откуда $\alpha = \frac{q}{\pi R^4}$.

Вне шара запасенная энергия равна (см. решение задачи 6.5):

$$W_1 = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}.$$

Индукцию электрического поля \mathbf{D} внутри шара находим по теореме Гаусса для вектора \mathbf{D} :

$$4\pi r^2 D = \int_0^r \alpha r \cdot 4\pi r^2 dr = \alpha \pi r^4, \text{ откуда } D = \alpha r^2 / 4.$$

Объемная плотность энергии электрического поля $w = \frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}$.

Энергия поля внутри шара W_2 равна:

$$W_2 = \int_V w dV = \frac{1}{2\varepsilon_0\varepsilon} \int_0^R \frac{\alpha^2 r^4}{16} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{\alpha^2 \pi R^7}{56\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{q^2}{56\pi\varepsilon_0\varepsilon R}.$$

Полная энергия заряженного шара W , равная энергии электрического поля, создаваемого зарядом шара, равна:

$$W = W_1 + W_2 = \frac{q^2(7\varepsilon + 1)}{56\pi\varepsilon_0\varepsilon R}.$$

$$6.9. W = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S d_1}{2} \cdot \left(\frac{V}{\varepsilon(d - d_1 - d_2) + d_1} \right)^2.$$

$$6.10. W = -\frac{\tau_1\tau_2}{4\pi\varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}; \text{ а) } W = -\frac{\tau^2}{4\pi\varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1};$$

$$\text{б) } W = \frac{\tau^2}{4\pi\varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Решение. Будем отсчитывать от оси цилиндров расстояние r до произвольной точки пространства. При $r \leq R_1$ $E = 0$ и энергия равна нулю.

При $R_1 \leq r \leq R_2$ $E = \frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0 r}$, а потенциал электрического поля, созданного внутренним цилиндром,

$$\varphi_1(r) = -\int E dr = -\frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r}{C}, \text{ где } C = \text{const.}$$

Проведем нормировку потенциала, положив $\varphi_1(R_1) = 0$. Тогда $C = R_1$ и

$$\varphi_1(r) = -\frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r}{R_1}.$$

Энергию зарядов внешнего цилиндра в поле зарядов внутреннего цилиндра находим по формуле:

$$W = \frac{1}{2} \int_S \varphi_1 \sigma_2 dS = \frac{1}{2} \int_l \varphi_1(R_2) \tau_2 dl = -\frac{\tau_1\tau_2 l}{4\pi\varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Поскольку потенциал внутреннего цилиндра равен нулю, его энергия также равна нулю, поэтому энергия, приходящаяся на единицу длины системы, равна:

$$W = -\frac{\tau_1 \tau_2}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Для частных случаев:

$$a) \tau_1 = \tau_2 = \tau \quad W = -\frac{\tau^2}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}; \quad б) \tau_1 = \tau, \tau_2 = -\tau \quad W = \frac{\tau^2}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

$$6.11. \quad W = \frac{\rho^2 \pi R^4}{16\epsilon_0 \epsilon}.$$

Решение. Будем отсчитывать от оси цилиндра расстояние r до произвольной точки пространства. Электрическую индукцию внутри цилиндра находим по теореме Гаусса для вектора D :

$$2\pi r l D = \rho \cdot \pi r^2 l, \text{ откуда } D = \rho r / 2.$$

$$\text{Объемная плотность энергии электрического поля } w = \frac{D^2}{2\epsilon\epsilon_0}.$$

Рассмотрим цилиндрическую трубку длиной l , радиусом r и толщиной dr . Энергия электрического поля, заключенная внутри трубки, равна: $dW = wdV = w \cdot 2\pi r l dr$. Полная энергия в расчете на единицу длины цилиндра составляет:

$$W = \int_V w dV = \int_0^R w \cdot 2\pi r l dr = \frac{1}{2\epsilon_0 \epsilon} \int_0^R \frac{\rho^2 r^2}{4} \cdot 2\pi r l dr = \frac{\rho^2 \pi R^4}{16\epsilon_0 \epsilon}.$$

$$6.12. \quad W = \frac{\rho^2 d^3}{24\epsilon_0 \epsilon}.$$

Решение. Направим ось X перпендикулярно пластине, выбрав начало отсчета в центре пластины. По теореме Гаусса электрическая индукция на расстоянии x от центра пластины (см. решение задачи 1.43): $D(x) = \rho x$. Объемная плотность энергии электрического поля $w = \frac{D^2}{2\epsilon\epsilon_0}$.

Рассмотрим слой, параллельный поверхности пластины, толщиной dx , площадью S на расстоянии x от центра пластины. Энергия электрического поля в этом слое $dW = w \cdot S dx$. Полная энергия поля в пластине площадью S равна:

$$W_S = \int_{-d/2}^{d/2} w \cdot S dx = \frac{S}{2\varepsilon_0\varepsilon} \int_{-d/2}^{d/2} \rho^2 x^2 dx = \frac{\rho^2 d^3 S}{24\varepsilon_0\varepsilon},$$

а в расчете на единицу площади $W = \frac{\rho^2 d^3}{24\varepsilon_0\varepsilon}$.

$$6.13. W = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)R}.$$

Решение. Из симметрии распределения зарядов ясно, что векторы \mathbf{E} и \mathbf{D} имеют только радиальные относительно центра сферы составляющие. Вблизи границы раздела диэлектриков напряженности полей имеют только тангенциальные компоненты, причем $E_{\tau 1} = E_{\tau 2}$. Так как для появления связанных зарядов на границе раздела диэлектриков требуется, чтобы векторы \mathbf{E} имели нормальную компоненту ($\sigma' = P_{n1} - P_{n2}$, а $\mathbf{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\mathbf{E}$), то связанных зарядов на границе раздела диэлектриков нет.

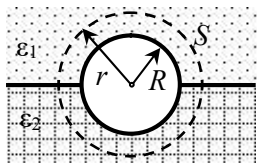


Рис. 0.6.13.

Для определения модулей векторов индукции в диэлектриках применим теорему Гаусса. Для этого рассмотрим сферическую поверхность S радиусом r с центром в центре сферы (рис. 0.6.13):

$$D_1 \cdot 2\pi r^2 + D_2 \cdot 2\pi r^2 = q.$$

Из условия $E_{\tau 1} = E_{\tau 2}$ на границе раздела диэлектриков следует, что $D_1 / \varepsilon_1 = D_2 / \varepsilon_2$. Из этих уравнений находим:

$$D_1 = \frac{q\varepsilon_1}{2\pi r^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}, \quad D_2 = \frac{q\varepsilon_2}{2\pi r^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}.$$

Объемная плотность энергии электрического поля $w = D^2 / (2\varepsilon_0\varepsilon)$. Полная энергия электрического поля равна:

$$W = W_1 + W_2 = \frac{1}{2\varepsilon_0} \int_0^R \left(\frac{D_1^2(r)}{\varepsilon_1} + \frac{D_2^2(r)}{\varepsilon_2} \right) \cdot 2\pi r^2 dr = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)R}.$$

$$6.14. A = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right).$$

$$6.15. Q = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 R}.$$

Решение. На внутренней поверхности средней сферы индуцируется заряд $(-q)$, а на её внешней поверхности – заряд $+q$. Так как внешняя сфера заземлена, на её внешней поверхности заряд равен нулю, а на внутренней поверхности находится индуцированный заряд $(-q)$.

Внутренняя и средняя сферы образуют сферический конденсатор с емкостью $C = 4\pi\epsilon_0 \cdot \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 4\pi\epsilon_0 \cdot \frac{R \cdot 2R}{2R - R} = 8\pi\epsilon_0 R$. В

этом конденсаторе запасена энергия $W_1 = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 R}$.

После соединения внутренней и средней сфер по проводнику пройдет ток, и потенциалы сфер станут одинаковыми, а энергия внутри конденсатора будет равна нулю. Заряды же на внешней поверхности средней сферы и внутренней поверхности сферы радиусом $3R$ не изменятся, поэтому энергия электрического поля между средней и внешней сферами также не изменится. Полное изменение энергии системы составит:

$$\Delta W = W_1 - 0 = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 R} = Q.$$

Эта энергия и выделится в проводнике в виде тепла.

$$6.16. A = \frac{\sigma^2 \pi R^2 \ln 2}{\epsilon_0}.$$

Решение. Рассмотрим элемент цилиндра длиной l вдали от его концов. Его заряд $\tau = \sigma \cdot 2\pi Rl$ и не меняется при изменении радиуса. Подсчитаем вклад в энергию электрического поля от этого элемента по формуле: $W = \frac{1}{2} \int_S \varphi \sigma dS$.

Для этого нормируем потенциал, положив его равным нулю на расстоянии R_0 от оси цилиндра ($R_0 > R$). При $r \geq R$ напряженность электрического поля $E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}$, потенциал

$$\varphi(r) = -\int E(r) dr = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{C}, \text{ где } C = \text{const.}$$

При выбранной нормировке потенциала $\varphi(R_0) = 0$ $C = R_0$ и $\varphi(r) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_0}{r}$, а потенциал точек цилиндрической поверхности

$\varphi(r) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_0}{R}$. Первоначальная энергия зарядов участка цилиндра длиной l была равна:

$$W_1 = \frac{1}{2} \int_S \varphi \sigma dS = \frac{1}{2} \int_l \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_0}{R} \cdot \tau dl = \frac{\tau^2 l}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_0}{R}.$$

После уменьшения радиуса цилиндра в 2 раза энергия рассматриваемого участка цилиндра будет:

$$W_2 = \frac{\tau^2 l}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_0}{R/2}.$$

Совершенная при сжатии цилиндра работа составляет:

$$A_l = W_2 - W_1 = \frac{\tau^2 l}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\ln \frac{2R_0}{R} - \ln \frac{R_0}{R} \right) = \frac{\tau^2 l}{4\pi\epsilon_0} \ln 2.$$

Работа против сил электрического поля в расчете на единицу длины цилиндра равна:

$$A = \frac{\tau^2 \ln 2}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\sigma^2 (2\pi R)^2 \ln 2}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\sigma^2 \pi R^2 \ln 2}{\epsilon_0}.$$

6.17. $A_l = \sqrt{2} A.$

Решение. При сгибании треугольника совершается работа против кулоновских сил отталкивания зарядов, которая равна разности собственных энергий зарядов до и после сгибания. Соб-

ственная энергия зарядов треугольника равна $W_{\text{вз}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \delta q_i \varphi_i$

(здесь δq_i – заряд бесконечно малого участка треугольника, φ_i – потенциал поля всех зарядов за исключением δq_i в точке нахождения заряда δq_i)

Потенциал φ_i в точке нахождения заряда δq_i равен сумме потенциалов полей всех зарядов, кроме δq_i : $\varphi_i = \sum_{j \neq i} \frac{\delta q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$, где r_{ij} – расстояние от заряда δq_j до заряда δq_i .

Так как треугольник был заряжен равномерно, после его сгибания с сохранением подобия плотность зарядов возросла в 2 раза. При этом площадь треугольника уменьшилась в 2 раза, поэтому можно считать, что расстояние между любыми двумя зарядами уменьшилось в $\sqrt{2}$ раз. В результате все потенциалы φ_i увеличились в $\sqrt{2}$ раз, а начальная собственная энергия W_1 зарядов треугольника также возросла в $\sqrt{2}$ раз. Значит, при сгибании треугольного листа была совершена работа

$$A = W_2 - W_1 = W_1(\sqrt{2} - 1).$$

Аналогично после второго сгибания треугольника энергия зарядов будет равна $W_3 = W_2\sqrt{2}$, а работа –

$$A_1 = W_2(\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)W_1 = \sqrt{2}A.$$

6.18. $Q = \frac{\epsilon_0 \epsilon S U^2}{2(d - h)}.$

Решение. Емкость плоского конденсатора с металлической пластиной внутри равна $C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d - h}$, а его энергия –

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon S U^2}{2(d - h)}.$$

После замыкания обкладок конденсатора друг на друга напряжение на нем будет равно нулю, и энергия конденсатора тоже равна нулю. Следовательно, в системе выделится количество тепла, равное первоначальной энергии конденсатора:

$$Q = W = \frac{\epsilon_0 \epsilon S U^2}{2(d - h)}.$$

$$6.19. W = \frac{C_1 C_2 U^2 (C_1 - C_2)^2}{2(C_1 + C_2)^2}.$$

$$6.20. A = \frac{1}{2} \alpha (\varepsilon - 1) [1 + \alpha (\varepsilon - 1)] C U^2.$$

Решение. Конденсатор с вставленной в него пластиной из диэлектрика можно рассматривать как два конденсатора, соединенных параллельно. Емкость первого конденсатора (с диэлектриком) равна

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \alpha S}{d} = \alpha \varepsilon C,$$

а емкость воздушного конденсатора $C_2 = \frac{\varepsilon_0 (1 - \alpha) S}{d} = (1 - \alpha) C$.

Суммарная емкость $C_{\text{н}}$ конденсатора с пластиной составляет

$$C_{\text{н}} = C_1 + C_2 = (1 - \alpha) C + \alpha \varepsilon C = [1 + \alpha (\varepsilon - 1)] C,$$

а запасенная в конденсаторе энергия равна

$$W_1 = \frac{1}{2} C_{\text{н}} U^2 = \frac{1}{2} [1 + \alpha (\varepsilon - 1)] C U^2.$$

При удалении пластины заряд на обкладках конденсатора сохраняется: $q = C_{\text{н}} U = \text{const}$.

Энергия конденсатора без пластины

$$W_2 = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} [1 + \alpha (\varepsilon - 1)]^2 C U^2.$$

а искомая работа по удалению пластины равна:

$$A = W_2 - W_1 = \frac{1}{2} \alpha (\varepsilon - 1) [1 + \alpha (\varepsilon - 1)] C U^2.$$

$$6.21. A = \frac{C U^2 \alpha (\varepsilon - 1)}{2}.$$

Решение. До удаления пластины заряд на обкладках конденсатора был равен $q_1 = C_{\text{н}} U = [1 + \alpha (\varepsilon - 1)] C U$, а энергия конденсатора равна

$$W_1 = \frac{1}{2} C_H U^2 = \frac{1}{2} [1 + \alpha(\varepsilon - 1)] CU^2.$$

После удаления пластины энергия конденсатора будет равна $W_2 = \frac{1}{2} CU^2$, а заряд на его обкладках будет $q_2 = CU$, т.е. заряд изменится на $\Delta q = q_2 - q_1 = \alpha(1 - \varepsilon) CU < 0$.

Этот избыточный отрицательный заряд Δq перетечет в источник ЭДС, двигаясь против сил электрического поля, созданного источником. Следовательно, работа источника отрицательна и равна:

$$A_{\text{ист}} = \Delta q U = \alpha(1 - \varepsilon) CU^2 < 0.$$

Работу внешней силы находим по закону изменения энергии:

$$A + A_{\text{ист}} = \Delta W + Q,$$

где A – работа внешней силы, $A_{\text{ист}}$ – работа источника, ΔW – изменение энергии системы, Q – выделившееся джоулево тепло. При медленном выдвигании диэлектрика потери энергии на теплоту Q можно не учитывать.

Итак, работа внешней силы равна:

$$A = \Delta W - A_{\text{ист}} = W_2 - W_1 + \alpha(\varepsilon - 1)CU^2 = \frac{CU^2}{2} \cdot \alpha(\varepsilon - 1).$$

$$\mathbf{6.22.} \quad A_{\text{ист}} = \frac{CU^2}{n(n-1)}; \quad W_p = \frac{CU^2}{2n(n-1)}.$$

Решение. Емкость батареи конденсаторов увеличится от $C_1 = C/n$ до $C_2 = C/(n-1)$, при этом заряд на обкладках конденсаторов также возрастет от $q_1 = UC_1 = UC/n$ до $q_2 = UC/(n-1)$, т.е. увеличится на $\Delta q = q_2 - q_1 = \frac{UC}{n(n-1)}$. Этот избыточный заряд

пройдет через источник ЭДС, положительная работа которого равна $A_{\text{ист}} = U\Delta q = \frac{U^2 C}{n(n-1)}$.

Энергия батареи конденсаторов увеличится на

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{C_2 U^2}{2} - \frac{C_1 U^2}{2} = \frac{U^2 C}{2n(n-1)}.$$

Энергию разряда находим из закона сохранения энергии $A_{\text{ист}} = \Delta W + W_p$:

$$W_p = A_{\text{ист}} - \Delta W = \frac{U^2 C}{2n(n-1)}.$$

$$6.23. W_p = -\frac{(\varepsilon - 1)^2}{\varepsilon(\varepsilon + 1)} \cdot \frac{CU^2}{2} = -6,1 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}.$$

$$6.24. A = \frac{\varepsilon_0 S h U^2}{2d^2}. \text{ Работа затрачивается на разделение заря-$$

дов внутри металлической пластинки (явление электрической индукции), в результате чего потенциальная энергия этих зарядов возрастает за счет уменьшения энергии электрического поля конденсатора.

$$6.25. W(x) = \varepsilon_0 a(a-x)U^2 / (2d); \quad A = \frac{\varepsilon_0 a^2 U^2}{4d}.$$

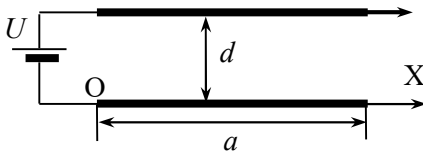


Рис. О.6.25.

Решение. Направим ось X в плоскости неподвижной пластины в сторону движения верхней обкладки, совместив начало отсчета точку O с левым краем пластины

(рис. О.6.25). При движении верхней обкладки будет меняться емкость конденсатора C и, следовательно, энергия W . После смещения обкладки на расстояние x емкость конденсатора равна: $C = \varepsilon_0 a(a-x) / d$, а запасенная в нем энергия:

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 a(a-x)U^2}{2d}.$$

До начала движения верхней обкладки заряд конденсатора был равен $q_1 = UC_1 = U\varepsilon_0 a^2 / d$. После её перемещения на $a/2$ заряд

стал равным $q_2 = UC_2 = U\varepsilon_0 a^2 / (2d)$. Избыточный отрицательный заряд

$$\Delta q = q_2 - q_1 = -U\varepsilon_0 a^2 / (2d)$$

перетекает в источник ЭДС, двигаясь против сторонних сил в источнике. При этом работа источника отрицательна и равна:

$$A_{\text{ист}} = \Delta q U = -\varepsilon_0 a^2 U^2 / (2d) < 0.$$

Изменение запасенной в конденсаторе энергии за время перемещения $\Delta W = U^2 (C_2 - C_1) / 2 = -\frac{\varepsilon_0 a^2 U^2}{4d}$.

По закону изменения энергии работа внешней силы равна

$$A = \Delta W - A_{\text{ист}} = \frac{\varepsilon_0 a^2 U^2}{4d}.$$

$$6.26. A = \frac{\varepsilon_0 a^2 U^2 l}{2d(a-l)}.$$

$$6.27. N(x) = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2x^2} v.$$

Решение. При раздвижении обкладок его емкость изменяется по закону $C(x) = \varepsilon_0 S / x$. Энергия, запасенная в конденсаторе, зависит от расстояния x между обкладками и равна

$$W(x) = \frac{C(x)U^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2x}.$$

При увеличении x на малую величину dx

изменение энергии конденсатора равно

$$dW(x) = -\frac{\varepsilon_0 S U^2}{2x^2} dx,$$

а заряд на обкладках изменяется на величину

$$dq(x) = UdC = -\frac{\varepsilon_0 S U}{x^2} dx.$$

Избыточный отрицательный заряд перетекает в источник ЭДС, который при этом совершает работу

$$\delta A_{\text{ист}} = Udq = -\frac{\varepsilon_0 S U^2}{x^2} dx.$$

Работа внешней силы при перемещении обкладки на dx составляет: $\delta A = dW - \delta A_{\text{ист}} = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2x^2} dx$. Поскольку перемещение обкладки за время dt равно $dx = v dt$ и $\delta A = N dt$, потребляемая механизмом мощность равна:

$$N(x) = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2x^2} v.$$

$$6.28. A = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \pi a U^2}{2} \cdot \left(1 + \frac{d}{2R}\right).$$

Решение. При $d \ll R$ емкость цилиндрического конденсатора приближенно равна:

$$C_1 = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon a}{\ln((R+d)/R)} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon a}{\ln(1+d/R)} \approx \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon a R}{d} \cdot \left(1 + \frac{d}{2R}\right).$$

Здесь использовалось разложение в ряд Тейлора по малому параметру $x = d/R$ функций

$$\ln(1+x) \approx x - x^2/2 \text{ и } (1-x/2)^{-1} \approx 1 + x/2.$$

После разворачивания конденсатора в плоский его емкость будет равна $C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon a \cdot 2\pi R}{d} < C_1$. Так как конденсатор отключен от источника ЭДС, заряд на его пластинах остается неизменным:

$q = C_1 U$, а энергия конденсатора изменяется от $W_1 = \frac{C_1 U^2}{2}$ до

$W_2 = \frac{q^2}{2C_2} = \frac{C_1^2 U^2}{2C_2} > W_1$. Для увеличения энергии конденсатора необходимо затратить работу:

$$A = W_2 - W_1 = \frac{C_1 U^2}{2} \cdot \left(\frac{C_1}{C_2} - 1\right) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \pi a U^2}{2} \cdot \left(1 + \frac{d}{2R}\right).$$

$$6.29. Q = \frac{C_1^2 \mathcal{E}^2}{2(C_1 + C_2)}.$$

Решение. В начальном состоянии заряд каждого конденсатора равен $q = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \mathcal{E}$, энергия системы

$$W_0 = \frac{q^2}{2C_1} + \frac{q^2}{2C_2} = \frac{C_1 C_2 \mathcal{E}^2}{2(C_1 + C_2)}.$$

При подключении резистора к конденсатору C_2 этот конденсатор полностью разрядится, а конденсатор C_1 зарядится до напряжения \mathcal{E} . Конечная энергия системы $W_k = \frac{C_1 \mathcal{E}^2}{2}$.

При перезарядке конденсаторов источник ЭДС переместит по цепи заряд $\Delta q = \left(C_1 - \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \right) \mathcal{E} = \frac{C_1^2 \mathcal{E}}{C_1 + C_2}$, совершив работу

$$A_{\text{ист}} = \Delta q \mathcal{E} = \frac{C_1^2 \mathcal{E}^2}{C_1 + C_2}.$$

По закону сохранения энергии $A_{\text{ист}} = \Delta W + Q$, откуда находим выделившуюся в резисторе теплоту: $Q = \frac{C_1^2 \mathcal{E}^2}{2(C_1 + C_2)}$.

6.30. $Q = C \mathcal{E}^2 / 3$.

6.31. $Q = \frac{C_1 C_2 (U_1 - U_2)^2}{2(C_1 + C_2)} = 0,5 \text{ мДж}$.

6.32. $Q \leq 2\pi \epsilon_0 R_3 \mathcal{E}^2$.

Решение. Когда ключ находится в положении 1, потенциал внешней обкладки равен нулю, и энергия электрического поля заключена внутри сферического конденсатора. При этом заряд на обкладках конденсатора равен $q_1 = C_1 \mathcal{E} = \frac{4\pi \epsilon_0 R_1 R_2 \mathcal{E}}{R_1 + R_2}$, а заряд поверхности радиуса R_3 равен нулю.

После перевода ключа в положение 2 потенциал внешней поверхности становится равным \mathcal{E} . Теперь источник ЭДС заряжает не только сферический конденсатор с радиусами обкладок R_1 и R_2 , но

и "уединенную" сферу радиусом R_3 . В этом случае электрическое поле есть как внутри оболочки, так и вне её.

Для сферического конденсатора, как и ранее, заряд на обкладках равен $q = q_1 = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2 \mathcal{E}}{R_1 + R_2}$. Емкость "уединенной" сферы радиусом R_3 равна $C_2 = 4\pi\epsilon_0 R_3$. Заряд на сфере $q_2 = C_2 \mathcal{E} = 4\pi\epsilon_0 R_3 \mathcal{E}$. Таким образом, заряд на внешней стороне оболочки увеличился на $\Delta q = q_2 = 4\pi\epsilon_0 R_3 \mathcal{E}$. Этот заряд протекал через источник ЭДС, который совершил работу $A_{\text{ист}} = \Delta q \mathcal{E} = 4\pi\epsilon_0 R_3 \mathcal{E}^2$.

Изменение энергии ΔW электрического поля произошло только за счет появления заряда на внешней стороне оболочки и составило: $\Delta W = \frac{C_2 \mathcal{E}^2}{2} = 2\pi\epsilon_0 R_3 \mathcal{E}^2$.

Из закона сохранения энергии $A_{\text{ист}} = \Delta W + Q$ находим количество теплоты, выделившейся на внутреннем сопротивлении батареи: $Q \leq 2\pi\epsilon_0 R_3 \mathcal{E}^2$.

$$6.33. F = \frac{\epsilon\epsilon_0 S U^2}{2d^2}.$$

Решение. Направим ось X перпендикулярно пластинам конденсатора, совместив начало отсчета с одной из пластин. Предположим, что под действием силы другая пластина совершила виртуальное перемещение на dx . Энергия конденсатора равна $W = CU^2/2$, где емкость $C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{x}$ (x – расстояние между пластинами). При перемещении пластины на dx энергия конденсатора изменится на $dW = -\frac{\epsilon\epsilon_0 S U^2}{2x^2} dx$. При $U = \text{const}$ силу, действующую на обкладку, можно рассчитать по формуле:

$$F = \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_U = -\frac{\epsilon\epsilon_0 S U^2}{2x^2}.$$

Подставляя $x = d$, окончательно получаем:

$$F = \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_U = - \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S U^2}{2d^2}.$$

Знак "минус" указывает на то, что сила направлена в сторону другой обкладки, т.е. обкладки притягиваются друг к другу.

$$6.34. F = \frac{2\varepsilon_0 S}{d^2} \left(\frac{\varepsilon U}{\varepsilon + 1} \right)^2.$$

$$6.35. F = -F_x = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) b U^2}{2d}.$$

Решение. Направим ось X вдоль ребра пластины, совместив начало координат с краем обкладки конденсатора (рис. О.6.35), емкость системы будет функцией координаты x левого торца пластины.

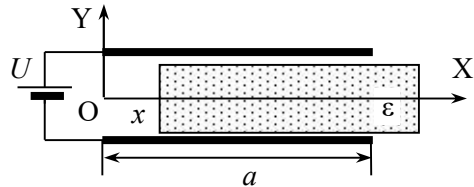


Рис. О.6.35.

Конденсатор с пластиной можно рассматривать как два соединенных параллельно конденсатора – воздушного емкостью C_1 с площадью обкладок $S_1 = bx$ и заполненного диэлектриком конденсатора емкостью C_2 , площадь обкладок которого $S_2 = b(a - x)$. Емкость всего конденсатора равна:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 bx}{d} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon b(a - x)}{d} = \frac{\varepsilon_0 b}{d} \cdot [\varepsilon a - (\varepsilon - 1)x].$$

Действующую на пластину рассчитаем по формуле:

$$F_x = \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_U = \frac{U^2}{2} \cdot \frac{dC}{dx} = - \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) b U^2}{2d}.$$

Знак "минус" указывает на то, что сила стремится втянуть пластину в конденсатор. Чтобы удержать пластину на месте, нужно приложить внешнюю силу $F = -F_x = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) b U^2}{2d}$.

$$6.36. F = \frac{\varepsilon_0 ah U^2}{2d(d-h)}.$$

$$6.37. F_x = \frac{q^2 dh (d-h)}{2\varepsilon_0 a(ad-xh)^2}. \text{ При } x = a/2 \quad F = \frac{2q^2 dh (d-h)}{\varepsilon_0 a^3 (2d-h)^2}.$$

Решение. Конденсатор с пластиной можно рассматривать как два соединенных параллельно конденсатора – воздушного емкостью $C_1 = \varepsilon_0 ax/d$ и конденсатора с металлической пластиной

емкостью $C_2 = \frac{\varepsilon_0 a(a-x)}{d-h}$. Емкость всего конденсатора равна:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 a}{d(d-h)} \cdot (ad-xh).$$

Энергия электрического поля в конденсаторе

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2 d(d-h)}{2\varepsilon_0 a(ad-xh)}.$$

Действующую на пластину силу рассчитаем по формуле:

$$F_x = - \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_q = - \frac{q^2 dh(d-h)}{2\varepsilon_0 a(ad-xh)^2}.$$

Сила втягивает пластину в конденсатор. Чтобы удержать пластину на месте, нужно приложить внешнюю силу, равную силе F_x и противоположно направленную.

$$\text{При } x = a/2 \quad F = \frac{2q^2 dh (d-h)}{\varepsilon_0 a^3 (2d-h)^2}.$$

$$6.38. F = \frac{2q^2 d (\varepsilon - 1)}{\varepsilon_0 a^2 b (\varepsilon + 1)^2}.$$

$$6.39. F = UPL - \frac{P^2 Ld}{2\varepsilon_0}.$$

Решение. Направим ось X вдоль обкладок конденсатора. Применим метод виртуальных перемещений. Выдвинем пластину

из конденсатора на δx и найдем изменение электрической энергии системы при $U = \text{const}$. Это изменение будет обусловлено:

а) увеличением длины свободной части конденсатора

$$\Delta W_1 = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} Ld \cdot \delta x; \quad E_0 = \frac{U}{d};$$

б) уменьшением длины пластины внутри конденсатора и увеличением её вне конденсатора, т.е. изменением напряжённости поля внутри участка пластины длины δx . Плотность энергии поля в электрете с «замороженной» однородной поляризацией равна

$$w_3(E) = \int_0^E EdD(E) = \underbrace{\int_0^{-P/\varepsilon_0} EdD(E)}_{\text{процесс приготовления электрета}} + \underbrace{\int_{-P/\varepsilon_0}^E Ed(\varepsilon_0 E + P)}_{\text{изменение энергии электрического поля при замороженном } P},$$

$$= w_{03} + \frac{\varepsilon_0 E^2}{2},$$

где w_{03} – постоянная величина, зависящая от материала электрета. При вычислении учтено, что в электрете $D = \varepsilon_0 E + P$.

Таким образом, изменение электрической энергии электрета составляет:

$$\Delta W_2 = \frac{\varepsilon_0}{2} (E_3^2 - E_0^2) Ld \cdot \delta x,$$

где $E_0 = \frac{U}{d}$ – напряженность поля в электрете до выдвигания пластины,

$E = E_3 = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{P}{\varepsilon_0}$ – напряженность поля внутри электрета вне конденсатора (в поляризованном диэлектрике на его горизонтальных поверхностях имеются связанные заряды с поверхностной плотностью $\pm \sigma' = \pm P$).

Таким образом,

$$\Delta W_2 = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{P^2}{\varepsilon_0^2} - \frac{U^2}{d^2} \right) Ld \cdot \delta x.$$

Полное изменение энергии системы равно:

$$\begin{aligned}\Delta W &= \Delta W_1 + \Delta W_2 = \frac{\varepsilon_0 U^2}{2d^2} Ld \cdot \delta x + \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{P^2}{\varepsilon_0^2} - \frac{U^2}{d^2} \right) Ld \cdot \delta x = \\ &= \frac{P^2}{2\varepsilon_0} Ld \cdot \delta x.\end{aligned}$$

Изменением P за счет поля зарядов на пластинах конденсатора можно пренебречь. При внесении электрета в конденсатор произойдет перераспределение свободных зарядов на пластинах конденсатора. Если электрет занимает $1/n$ часть объема конденсатора, то на верхней пластине конденсатора поверхностные плотности зарядов над воздушным зазором σ_1 и над электретом σ_2 будут равны (см. решение задачи 5.41):

$$\sigma_1 = \sigma + P/n, \quad \sigma_2 = \sigma_1 - P = \sigma - (n-1)P/n.$$

При выдвигании пластины из конденсатора на δx источник совершит работу по перемещению заряда

$$\delta A_{\text{ист}} = U\Delta q = U(\sigma_1 - \sigma_2)L\delta x = UPL\delta x.$$

Работу внешней силы находим с учетом закона изменения энергии $\Delta W + \delta Q = \delta A_{\text{мех}} + \delta A_{\text{ист}}$ (пренебрегая выделением количества теплоты δQ в цепи источника):

$$A_{\text{мех}} = \frac{P^2}{2\varepsilon_0} Ld \cdot \delta x - UPL\delta x = F_{\text{вн}} \delta x.$$

Внешняя сила равна $F_{\text{вн}} = \frac{A_{\text{мех}}}{\delta x} = \frac{P^2 Ld}{2\varepsilon_0} - UPL$, а равная ей и противоположно направленная сила, действующая на пластину электрета со стороны поля конденсатора,

$$F = UPL - \frac{P^2 Ld}{2\varepsilon_0}.$$

6.40. $F = \frac{q^2(\varepsilon - 1)}{2\varepsilon_0 \varepsilon S}.$

Решение. На поверхность раздела двух сред с разными диэлектрическими проницаемостями действуют максвелловские силы натяжения, возникающие под влиянием нормальной компоненты электрического поля. Полная поверхностная плотность сил натя-

жения направлена в сторону диэлектрика с меньшей диэлектрической проницаемостью и равна:

$$f = \frac{D_n^2}{2\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right).$$

В данной задаче имеется граница раздела между диэлектриком ($\varepsilon_1 = \varepsilon$) и воздухом ($\varepsilon_2 = 1$), сила направлена от диэлектрика, т.е. растягивает пластину.

Нормальная компонента вектора индукции в обеих средах равна: $D_n = \sigma = q/S$. Полная сила, действующая на поверхность диэлектрической пластины,

$$F = fS = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) = \frac{q^2(\varepsilon - 1)}{2\varepsilon_0 \varepsilon S}.$$

6.41. $F = \frac{q^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{8\pi R^2 \varepsilon_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}$, сила направлена в сторону ди-

электрика с большей диэлектрической проницаемостью.

Решение. В задаче **6.13** были определены модули векторов электростатической индукции D_1 и D_2 в обоих диэлектриках:

$$D_1 = \frac{q\varepsilon_1}{2\pi r^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}, \quad D_2 = \frac{q\varepsilon_2}{2\pi r^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}.$$

Векторы \mathbf{D} направлены нормально поверхности шара. Внутри проводника $E = D = 0$, поэтому поверхностные плотности заряда на шаре равны:

$$\sigma_1 = D_1 = \frac{q\varepsilon_1}{2\pi r^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}, \quad \sigma_2 = D_2 = \frac{q\varepsilon_2}{2\pi r^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}.$$

Напряженности электрического поля в диэлектриках на расстоянии r от центра шара:

$$E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_1} = \frac{q}{2\pi r^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}, \quad E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_2} = \frac{q}{2\pi r^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)},$$

т.е. оказываются одинаковыми в первом и втором диэлектрике. Векторы \mathbf{E} направлены нормально поверхности шара.

Пусть ось X перпендикулярна границе раздела диэлектриков (рис. О.6.41). Для расчета силы, действующей на верхнюю половину шара, выделим на его поверхности малый участок площадью ds , на котором будет заряд $dq = \sigma_1 ds$. Сила, действующая на этот за-

ряд, равна $df = dq \cdot E^*$, где E^* – напряженность электрического поля, внешнего по отношению к заряду dq . Если учесть, что заряд на поверхности шара находится в тонком слое, то напряженность у его внешней поверхности в диэлектрике будет равна $E_1(R)$, а внутри шара $E = 0$, поэтому можно считать, что заряд находится в поле с напряженностью $E_1(R)/2$. Сила df направлена по нормали к поверхности шара.

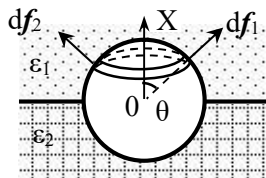


Рис. О.6.41.

Выделим на поверхности шара кольцо малой толщиной dr , участки которого видны из центра шара под углом θ относительно оси X . В силу симметрии задачи ясно, что сила $dF(\theta)$, действующая на заряды этого кольца, направлена вдоль оси X (см. рис. О.6.41), поэтому при вычислении модуля силы $dF(\theta)$ следует суммировать только x -компоненты сил df , действующих на участки кольца: $df_x = df \cos \theta$. Площадь кольца равна

$$dS = 2\pi R \sin \theta \cdot R d\theta = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta, \text{ а модуль силы } dF(\theta):$$

$$dF(\theta) = \sigma_1 dS E^* \cos \theta = \sigma_1 E_1 \pi R^2 \sin \theta \cos \theta d\theta.$$

Полную силу, действующую на верхнюю половину шара, находим интегрированием по углу θ в пределах от 0 до $\pi/2$:

$$F_1 = \sigma_1 E_1 \pi R^2 \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{q^2 \varepsilon_1}{8\pi R^2 \varepsilon_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}.$$

Аналогично получаем силу, действующую на нижнюю половину шара (она направлена противоположно оси X):

$$F_2 = -\frac{q^2 \varepsilon_2}{8\pi R^2 \varepsilon_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}.$$

В итоге действующая на шар сила равна:

$$F = \frac{q^2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{8\pi R^2 \varepsilon_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}.$$

Сила направлена в сторону диэлектрика с большей диэлектрической проницаемостью.

$$6.42. \quad q = 4\pi R^2 (\varepsilon + 1) \sqrt{\frac{(\rho_2 - 2\rho_1) \varepsilon_0 g R}{3(\varepsilon - 1)}}.$$

Решение. На погруженный в жидкость заряженный шар действуют три силы: сила тяжести $mg = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_1 \mathbf{g}$, выталкивающая сила Архимеда $F_A = -\frac{2}{3}\pi R^3 \rho_2 \mathbf{g}$ и сила со стороны электрического поля (направлена в сторону жидкости), модуль которой равен (см. решение задачи 6.41):

$$F_E = \frac{q^2(\varepsilon - 1)}{8\pi R^2 \varepsilon_0 (\varepsilon + 1)^2}.$$

Введем ось X перпендикулярно поверхности жидкости. Условие устойчивого плавания шара в проекции на эту ось имеет вид:

$$F_E + mg = F_A, \quad \text{т.е.} \quad \frac{q^2(\varepsilon - 1)}{8\pi R^2 \varepsilon_0 (\varepsilon + 1)^2} = \frac{2}{3}\pi R^3 g(\rho_2 - 2\rho_1), \quad \text{откуда}$$

находим заряд шара:

$$q = 4\pi R^2(\varepsilon + 1) \sqrt{\frac{(\rho_2 - 2\rho_1)\varepsilon_0 g R}{3(\varepsilon - 1)}}.$$

$$6.43. \quad A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{q^2 r^3 h^2}{2(R^2 + h^2)^3}.$$

Решение. Напряженность электрического поля заряженного кольца E_0 в точке с координатой z равна

$$E_0(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{qz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z.$$

Напряженность «деполяризующего» электрического поля внутри шарика с вектором поляризации \mathbf{P} равна $\mathbf{E}_d = -\frac{1}{3\varepsilon_0} \mathbf{P}$.

Материальное уравнение для вектора поляризации:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\mathbf{E},$$

где $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_d$ – напряженность электрического поля внутри шарика. Отсюда находим вектор поляризации шарика:

$$\mathbf{P} = 3\varepsilon_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \mathbf{E}_0.$$

Дипольный момент \mathbf{p} шарика равен:

$$\mathbf{p}(z) = \mathbf{P} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = 3\varepsilon_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \mathbf{E}_0 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Сила, действующая на точечный диполь в электрическом поле, равна $\mathbf{F} = (\mathbf{p} \nabla) \mathbf{E}_0 = p_z \frac{\partial E_z}{\partial z} \mathbf{e}_z$. Искомая в задаче работа:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^h F_z dz = \int_{E(0)}^{E(h)} p_z(z) dE_z = 4\pi\varepsilon_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} r^3 \int_{E(0)}^{E(h)} E_z dE_z = \\ &= 4\pi\varepsilon_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} r^3 \cdot \frac{E_z^2}{2} \Big|_{E_z(0)}^{E_z(h)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \cdot \frac{q^2 r^3 h^2}{2(R^2 + h^2)^3}. \end{aligned}$$

$$6.44. \quad h = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)U^2}{2\rho g d^2}.$$

Решение. Введем ось X , направив ее вертикально вверх. Пусть длина вертикальной стороны обкладок конденсатора равна a , а горизонтальной стороны b . Предположим, что жидкость поднялась в конденсаторе на высоту x , отсчитываемую от его нижнего торца. Конденсатор с жидкостью можно рассматривать как два соединенных параллельно конденсатора – воздушного емкостью C_1 с площадью обкладок $S_1 = b(a - x)$ и заполненного диэлектриком конденсатора емкостью C_2 , площадь обкладок которого $S_2 = bx$. Емкость всего конденсатора равна:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 b(a - x)}{d} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon b x}{d} = \frac{\varepsilon_0 b}{d} \cdot [a + (\varepsilon - 1)x].$$

Силу, действующую на жидкость со стороны поля, определим по формуле:

$$F = \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_U = \frac{U^2}{2} \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right) = \frac{U^2 \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) b}{2d},$$

где W – энергия поля в конденсаторе.

Эта сила направлена вверх. Она уравнивает вес $mg = \rho g V = \rho g h b d$ жидкости, поднявшейся на высоту h :

$$\frac{U^2 \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) b}{2d} = \rho g h b d, \text{ откуда } h = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) U^2}{2\rho g d^2}.$$

$$6.45. h = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_1 - 1)}{2\rho g} \left(\frac{U \varepsilon_2}{\varepsilon_1 d_1 + \varepsilon_2 (d - d_1)} \right)^2.$$

Решение. Данную задачу можно решать способом, описанным в решении задачи 6.44. Однако более простым в данном случае является способ, основанный на расчете плотности максвелловских сил давления, возникающих под влиянием тангенциальной компоненты электрического поля и направленных по нормали к границе раздела "воздух – диэлектрическая жидкость" в сторону воздуха:

$$f = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_\tau^2 (\varepsilon_1 - 1).$$

Поскольку в конденсаторе напряженность электрического поля направлена вдоль границы раздела "воздух – диэлектрическая жидкость" и свободных зарядов на поверхности жидкости нет, тангенциальные компоненты вектора напряженности в воздухе и жидкости одинаковы: $E_{\tau 1} = E_{\tau 2} = E_\tau$. Поэтому можно их рассчитать либо в верхней части конденсатора, либо в нижней.

Рассчитаем E_τ в части конденсатора, которая заполнена жидкостью. Напряжение между обкладками равно

$$U = E_{\text{ж}} (d - d_1) + E_{\text{пл}} d_1,$$

а из условия непрерывности вектора электрической индукции на границе "жидкость - пластина" следует, что напряженности в жидкости $E_{\text{ж}}$ и в пластине $E_{\text{пл}}$ связаны соотношением:

$$\varepsilon_1 E_{\text{ж}} = \varepsilon_2 E_{\text{пл}}.$$

Таким образом,

$$E_{\text{ж}} = \frac{U \varepsilon_2}{\varepsilon_1 d_1 + \varepsilon_2 (d - d_1)} = E_\tau.$$

Поверхностная плотность максвелловских сил давления на поверхность раздела "воздух – жидкость" равна:

$$f = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_\tau^2 (\varepsilon_1 - 1) = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_1 - 1)}{2} \left(\frac{U \varepsilon_2}{\varepsilon_1 d_1 + \varepsilon_2 (d - d_1)} \right)^2.$$

Сила давления направлена в сторону диэлектрика с меньшей диэлектрической проницаемостью, т.е. вверх. Поверхностная плотность сил давления уравнивается гидростатическим давлением в жидкости: $f = \rho g h$. Искомая высота поднятия жидкости равна

$$h = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_1 - 1)}{2\rho g} \left(\frac{U\varepsilon_2}{\varepsilon_1 d_1 + \varepsilon_2(d - d_1)} \right)^2.$$

$$6.46. h = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)U^2}{(b^2 - a^2)\rho g \ln(b/a)}.$$

$$6.47. p = \frac{Q^2}{32\varepsilon_0\pi^2 R^4}.$$

Решение. Поверхностная плотность зарядов на сфере $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$. Выделим на поверхности сферы малый элемент площади dS . Напряженность электрического поля около этого участка является суммой напряженностей поля зарядов этого элемента, равной $E_1 = \sigma/(2\varepsilon_0)$, и вклада E_2 в напряженность всех остальных зарядов. Увнешней поверхности проводящей сферы напряженность электрического поля равна $E = \sigma/\varepsilon_0$, а внутри сферы $E = 0$. Следовательно, вклад в напряженность поля $E_2 = \sigma/(2\varepsilon_0)$, а соответствующий вектор направлен от центра сферы.

Сила, действующая на заряд $dq = \sigma dS$ со стороны других зарядов сферы, равна:

$$df = E_2 dq = (\sigma^2 / 2\varepsilon_0) dS,$$

откуда давление на поверхность сферы

$$p = df / dS = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \frac{Q^2}{32\varepsilon_0\pi^2 R^4}.$$

$$6.48. F = \frac{Q^2}{32\pi R^2 \varepsilon_0}.$$

Решение. На поверхность сферы изнутри действует давление, обусловленное взаимодействием зарядов (см. решение задачи 6.47):

$p = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$, где $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$ – поверхностная плотность зарядов сферы.

Таким образом, на любой элемент сферы площадью dS действует сила давления $d\mathbf{f} = p dS\mathbf{n}$, направленная по нормали \mathbf{n} к поверхности.

Направим ось Z перпендикулярно плоскости разреза сферы. Выделим на поверхности сферы кольцо малой толщиной dr , участки которого видны из центра сферы под углом θ , отсчитываемым от оси Z . В силу симметрии распределения зарядов действующая на это кольцо сила давления $d\mathbf{F}(\theta)$ направлена вдоль оси Z (см. рис. О.6.48); на рисунке показаны силы $d\mathbf{f}_1$ и $d\mathbf{f}_2$, действующие на участки, находящиеся на противоположных концах диаметра кольца. Поэтому при вычислении модуля силы $d\mathbf{F}(\theta)$ следует суммировать только z -компоненты сил $d\mathbf{f}$: $df_z = df \cos \theta$. Площадь кольца равна

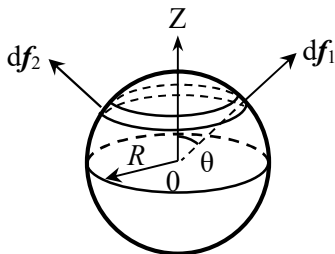


Рис. О.6.48.

$$dS = 2\pi R \sin \theta \cdot R d\theta = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta,$$

а модуль силы:

$$dF(\theta) = p \cos \theta dS = (\sigma^2 / \varepsilon_0) \pi R^2 \sin \theta \cos \theta d\theta.$$

Полную силу, действующую на верхнюю половину сферы, находим интегрированием по углу θ в пределах от 0 до $\pi/2$:

$$F_1 = \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0} \pi R^2 \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{\sigma^2 \pi R^2}{2\varepsilon_0} = \frac{Q^2}{32\pi R^2 \varepsilon_0}.$$

Такая же по модулю сила действует на нижнюю половину сферы вниз, поэтому половинки сферы отталкиваются.

$$6.49. F = \frac{qQ}{8\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Решение. Направим ось Z перпендикулярно сечению сферы. На элемент dS поверхности заряженной сферы действует сила:

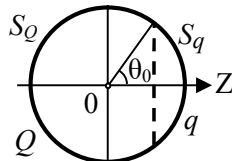


Рис. О.6.49.

$$d\mathbf{F} = E dq = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} n \sigma dS = \frac{\sigma^2 n}{2\varepsilon_0} dS,$$

где E – напряженность поля в месте расположения заряженного элемента dS , создаваемая всеми остальными зарядами сферы, σ – поверхностная плотность заряда. Аналогично решению задачи 6.48 определим силу, действующую на сегмент сферы с зарядом q :

$$F_q = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \pi R^2 \int_0^{\theta_0} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{\sigma^2 \pi R^2}{4\varepsilon_0} (1 - \cos 2\theta_0) = \frac{\sigma^2 \pi R^2}{2\varepsilon_0} \sin^2 \theta_0,$$

где θ_0 – полярный угол, задающий размеры сегментов.

Выразим заряды q и Q сегментов через σ и θ_0 :

$$q = \sigma \int_{S_q} dS = \sigma \int_0^{\theta_0} 2\pi R^2 \sin \theta d\theta = \sigma \cdot 2\pi R^2 (1 - \cos \theta_0),$$

$$Q = \sigma \int_{S_Q} dS = \sigma \int_{\theta_0}^{\pi} 2\pi R^2 \sin \theta d\theta = \sigma \cdot 2\pi R^2 (1 + \cos \theta_0).$$

Так как $\sin^2 \theta_0 = 1 - \cos^2 \theta_0 = (1 - \cos \theta_0) \cdot (1 + \cos \theta_0)$, сила, действующая на сегмент с зарядом q , равна: $F_q = \frac{qQ}{8\pi\varepsilon_0 R^2} \mathbf{k}$.

На другой сегмент действует такая же по модулю сила, но в противоположном направлении, поэтому сегменты отталкиваются друг от друга.

$$6.50. F = \frac{9\varepsilon_0 E_0^2 \pi R^2}{4}.$$

Решение. На поверхности проводящего шара в электрическом поле появляются индуцированные заряды, в результате чего (см. решение задачи 3.46) модуль напряженности электрического поля у поверхности шара равен:

$$E_{\text{ш}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = 3E_0 |\cos \theta|,$$

где θ – угол между вектором напряженности внешнего поля E_0 и направлением на точку поверхности шара.

Внутри проводящего шара $\mathbf{E} = 0$. На поверхность шара будут действовать максвелловские силы натяжения, поверхностная плотность которых $f^n = -(w_1 - w_2) = w_2$, где $w_1 = 0$ и $w_2 = \frac{\epsilon_0 E_{\text{ш}}^2}{2}$ – плотности энергии электрического поля соответственно внутри и снаружи непосредственно у поверхности шара. Эти силы направлены по нормали \mathbf{n} к поверхности шара.

На элемент шара площадью dS действует сила $d\mathbf{f} = w_2 dS \mathbf{n}$. Как отмечалось при решении задачи 6.48, для вычисления силы, действующей на половинку шара, надо учитывать только компоненты сил вдоль направления вектора \mathbf{E}_0 : $df_{\parallel} = df \cos \theta$. Поэтому

$$F = \int_S w_2 \cos \theta dS = \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^{\pi/2} (3E_0 \cos \theta)^2 \cdot 2\pi R^2 \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{9\epsilon_0 E_0^2 \pi R^2}{4}.$$

$$6.51. \mathbf{M} = V\epsilon_0 \frac{(\epsilon - 1)^2}{2(\epsilon + 1)} E_0^2 \sin(2\varphi) \mathbf{i}.$$

Решение. Введем декартову систему координат, начало отсчета которой совместим с произвольной точкой стержня, ось Z направим вдоль стержня, ось Y – перпендикулярно стержню в плоскости, содержащей вектор \mathbf{E}_0 , а ось X – перпендикулярно стержню и напряженности \mathbf{E}_0 (см. рис. О.6.51).

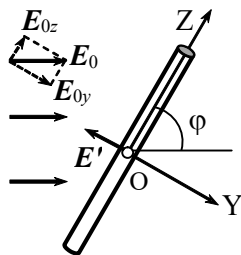


Рис. О.6.51.

Во внешнем электрическом поле цилиндрический стержень приобретает поляризацию \mathbf{P} . При этом модуль напряженности электрического поля \mathbf{E}_α в нем равен: $E_\alpha = E_{0\alpha} + E'_\alpha = E_{0\alpha} - n_\alpha \frac{P_\alpha}{\epsilon_0}$, где $\alpha = x, y, z$ – индексы проекций векторов \mathbf{E}_0 и \mathbf{E}' соответственно на оси X, Y, Z , \mathbf{E}' – напряженность деполаризующего поля, создаваемого поляризационными зарядами, $\{n_\alpha\}$ – факторы формы диэлектрика. С учетом материального уравнения $\mathbf{P} = \epsilon_0(\epsilon - 1)\mathbf{E}$ компоненты вектора поляризации равны:

$$P_\alpha = \epsilon_0 \frac{\epsilon - 1}{1 + n_\alpha(\epsilon - 1)} E_{0\alpha}.$$

Факторы формы стержня $n_x = n_y = 1/2$, $n_z = 0$, поэтому проекции напряженности внешнего поля

$$E_{0x} = 0, \quad E_{0y} = E_0 \sin \varphi, \quad E_{0z} = E_0 \cos \varphi.$$

Для компонент вектора поляризации получаем:

$$P_x = 0, \quad P_y = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon - 1}{1 + n_y(\varepsilon - 1)} E_{0y} = 2\varepsilon_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} E_{0y},$$

$$P_z = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon - 1}{1 + n_z(\varepsilon - 1)} E_{0z} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E_{0z}.$$

Дипольный момент всего стержня $\mathbf{p} = V\mathbf{P}$, а его компоненты:

$$p_x = VP_x = 0, \quad p_y = VP_y = V2\varepsilon_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} E_{0y}, \quad p_z = VP_z = V\varepsilon_0(\varepsilon - 1)E_{0z}.$$

На стержень со стороны внешнего поля \mathbf{E}_0 действует момент сил $\mathbf{M}_{E_0} = [\mathbf{pE}_0]$, который при равновесии должен компенсироваться моментом внешних сил $\mathbf{M} = -\mathbf{M}_{E_0} = -[\mathbf{pE}_0]$.

Искомый момент внешних сил \mathbf{M} равен:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ p_x & p_y & p_z \\ E_{0x} & E_{0y} & E_{0z} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & p_y & p_z \\ 0 & E_{0y} & E_{0z} \end{vmatrix} = (p_z E_{0y} - p_y E_{0z}) \mathbf{i} = \\ &= \left(V\varepsilon_0(\varepsilon - 1)E_{0z}E_{0y} - V2\varepsilon_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} E_{0y}E_{0z} \right) \mathbf{i} = V\varepsilon_0 \frac{(\varepsilon - 1)^2}{2(\varepsilon + 1)} E_0^2 \sin(2\varphi) \mathbf{i}. \end{aligned}$$

При $0 < \varphi < \pi/2$ момент внешних сил \mathbf{M} направлен вдоль оси X, а при $\pi/2 < \varphi < \pi$ – в обратную сторону.

$$6.52. \quad M = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)\pi^2 R^2 U^2}{d [\varepsilon\pi - (\varepsilon - 1)\theta]^2}.$$

Решение. Заряд конденсатора не меняется и равен $q = C_{\text{нач}} U = \varepsilon_0 \pi R^2 U / d$.

Когда диэлектрическая пластина находится в конденсаторе так, как изображено на рис. 6.15, конденсатор с пластиной эквивалентен двум параллельно соединенным конденсаторам: воздушному с площадью пластин $S_1 = R^2\theta/2$ и заполненному диэлек-

триком с площадью пластин $S_2 = R^2(\pi - \theta)/2$. Емкость такого конденсатора равна:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0(S_1 + \varepsilon S_2)}{d} = \frac{\varepsilon_0 R^2(\theta + \varepsilon\pi - \varepsilon\theta)}{2d},$$

а его энергия:

$$W(\theta) = \frac{q^2}{2C} = \frac{dq^2}{\varepsilon_0 R^2 [\varepsilon\pi + (1 - \varepsilon)\theta]} = \frac{\varepsilon_0 \pi^2 R^2 U^2}{d [\varepsilon\pi + (1 - \varepsilon)\theta]}.$$

Когда пластина вдвигается в конденсатор, его емкость увеличивается, а энергия уменьшается (затрачивается на втягивание пластины). При изменении угла θ на малую величину $d\theta$ силам электрического поля совершают работу $\delta A = Md\theta$. По закону сохранения энергии $Md\theta + dW = 0$, откуда получаем:

$$M = - \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} \right)_q = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)\pi^2 R^2 U^2}{d [\varepsilon\pi - (\varepsilon - 1)\theta]^2}.$$

6.53. $M = U^2 n \varepsilon_0 R^2 / d$.

Решение. Емкость одного конденсатора, образованного подвижной и ближайшей к ней неподвижной пластиной, равна $C_1 = \varepsilon_0 S_0 / d$, где S_0 – площадь перекрытия пластин. Конденсаторы соединены параллельно, так что общая емкость равна $C_0 = 2n\varepsilon_0 S_0 / d$.

При повороте подвижных пластин на малый угол $d\theta$ (см. рис. О.6.53) площадь перекрытия пластин изменяется на $dS = R^2 d\theta$, а емкость конденсатора увеличивается на

$$dC = \frac{2n\varepsilon_0 dS}{d} = \frac{2n\varepsilon_0 R^2}{d} d\theta.$$

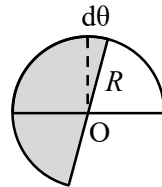


Рис. О.6.53.

При этом заряд конденсатора тоже увеличивается на $dQ = UdC$. Работа источника напряжения по переносу этого заряда равна $\delta A_{\text{ист}} = UdQ = U^2 dC$. Она идет на увеличение энергии электрического поля конденсатора ($dW = U^2 dC / 2$) и работу сил притяжения пластин ($\delta A = Md\theta$):

$$\delta A_{\text{ист}} = dW + Md\theta, \text{ т.е. } U^2 dC = U^2 dC / 2 + Md\theta.$$

Таким образом, $\frac{U^2 n \varepsilon_0 R^2}{d} d\theta = M d\theta$ и $M = \frac{U^2 n \varepsilon_0 R^2}{d}$.

§7. Токи в сплошных проводящих средах

7.1. $\Delta\varphi = \rho j l \cos \alpha$.

Решение. По закону Ома $\mathbf{E} = \rho \mathbf{j}$ разность потенциалов составляет:

$$\Delta\varphi = \int_{AB} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \rho \int_0^l j \cos \alpha dr = \rho j l \cos \alpha.$$

7.2. $\sigma = j \varepsilon_0 (\rho_1 - \rho_2)$.

7.3. $\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \operatorname{tg} \alpha_1$, $\sigma = \varepsilon_0 j_1 \cos \alpha_1 \cdot (1/\lambda_2 - 1/\lambda_1)$.

Решение. Используем граничные условия для нормальных и тангенциальных составляющих векторов плотности стационарного тока для поверхности раздела двух проводящих сред:

$$j_{2n} = j_{1n}, \quad \frac{1}{\lambda_2} j_{2\tau} = \frac{1}{\lambda_1} j_{1\tau}.$$

Углы α_2 и α_1 связаны соотношением:

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{j_{2\tau}}{j_{2n}} = \frac{j_{1\tau}}{j_{1n}} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \operatorname{tg} \alpha_1.$$

Поверхностную плотность зарядов на границе раздела найдем из условия: $\frac{1}{\lambda_2} j_{2n} - \frac{1}{\lambda_1} j_{1n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ с учетом $j_{2n} = j_{1n}$:

$$\sigma = \varepsilon_0 j_{1n} \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) = \varepsilon_0 j_1 \cos \alpha_1 \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right).$$

$$7.4. R = \frac{\rho}{\pi\delta} \left(\frac{h}{D} + \ln \frac{D}{d} \right).$$

Решение. Так как толщина фольги много меньше других размеров банки, можно считать, что по торцам банки токи текут радиально, а по её боковой поверхности вдоль оси банки. Сопротивление боковой поверхности банки равно:

$$R_{\text{бок}} = \frac{\rho h}{S} = \frac{\rho h}{\pi D \delta}.$$

Хотя радиальное течение тока нарушается в области перехода от проводов к основанию, из-за малой толщины фольги плотность тока здесь мала, и сопротивлением этой области можно пренебречь.

Для расчета сопротивления оснований банки разобьем каждое основание на цилиндрические слои радиусом r , толщиной dr и высотой δ . Все эти слои соединены последовательно, поэтому их сопротивления складываются. Сопротивление одного основания банки равно:

$$R_{\text{осн}} = \int_{d/2}^{D/2} \frac{\rho dr}{2\pi r \delta} = \frac{\rho}{2\pi\delta} \ln \frac{D}{d},$$

а сопротивление всей банки:

$$R = R_{\text{бок}} + 2R_{\text{осн}} = \frac{\rho}{\pi\delta} \left(\frac{h}{D} + \ln \frac{D}{d} \right).$$

$$7.5. R = \frac{2\rho l}{\pi(b^2 - a^2)} \ln \frac{b}{a}.$$

Решение. Направим ось Z вдоль оси параболоида вращения, совместив начало координат с его вершиной (рис. О.7.5). Параболоид образован вращением вокруг оси Z отрезка параболы $z = \beta x^2$. Определим координаты z_0 и $z_0 + l$ оснований усеченного параболоида. При $x = a$ $z_0 = \beta a^2$, при $x = b$ $z_0 + l = \beta b^2$. Отсюда находим:

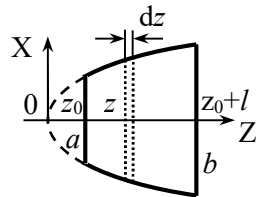


Рис. О.7.5.

$$\frac{z_0 + l}{z_0} = \frac{b^2}{a^2} \rightarrow z_0 = \frac{la^2}{b^2 - a^2}; \quad \beta = \frac{z_0}{a^2} = \frac{l}{b^2 - a^2}.$$

Площадь сечения с координатой z равна: $S(z) = \pi x^2 = \pi z / \beta$.

Сопротивление элемента электрода длиной dz и площадью сечения $S(z)$:

$$dR = \frac{\rho dz}{S(z)} = \frac{\rho \beta dz}{\pi z},$$

а сопротивление электрода:

$$R = \int_{z_0}^{z_0+l} \frac{\rho \beta dz}{\pi z} = \frac{\rho \beta}{\pi} \ln \frac{z_0 + l}{z_0} = \frac{\rho \beta}{\pi} \ln \left(1 + \frac{b^2 - a^2}{a^2} \right) = \frac{2\rho l}{\pi(b^2 - a^2)} \ln \frac{b}{a}.$$

$$7.6. \quad \rho = \frac{\tau}{\varepsilon_0 \varepsilon \ln(q_0 / q)} = 1,47 \cdot 10^{13} \text{ Ом} \cdot \text{м}.$$

Решение. Напряженность электрического поля в конденсаторе равна $E = \frac{U}{d} = \frac{q}{Cd}$, где d – расстояние между обкладками.

По закону Ома $j = \frac{E}{\rho} = \frac{q}{\rho Cd}$. Так как емкость плоского конденсатора $C = \varepsilon \varepsilon_0 S / d$, сила тока между обкладками равна:

$$I = jS = \frac{qS}{\rho Cd} = \frac{q}{\rho \varepsilon \varepsilon_0}.$$

В то же время $I = -\frac{dq}{dt}$. Разделяя переменные в уравнении

$\frac{q}{\rho \varepsilon_0 \varepsilon} = -\frac{dq}{dt}$ и интегрируя, получаем:

$$-\frac{1}{\rho \varepsilon_0 \varepsilon} \int_0^{\tau} dt = \int_{q_0}^q \frac{dq}{q} \rightarrow \ln \frac{q}{q_0} = -\frac{\tau}{\rho \varepsilon_0 \varepsilon},$$

откуда находим удельное сопротивление бумаги:

$$\rho = \frac{\tau}{\varepsilon_0 \varepsilon \ln(q_0 / q)} = 1,47 \cdot 10^{13} \text{ Ом} \cdot \text{м}.$$

$$7.7. t = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\lambda} \ln 2.$$

Решение. Электрическое поле, создаваемое зарядом шара, приводит к появлению тока, плотность которого $\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}$. Запишем уравнение непрерывности в интегральной форме:

$$\oint_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{dS} = -\frac{\partial q}{\partial t}.$$

Используя теорему Гаусса для вектора $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}$ для охватывающей шар concentричной сферической поверхности, получим:

$$\oint_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{dS} = \lambda \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{dS} = \frac{\lambda}{\varepsilon_0 \varepsilon} \oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{dS} = \frac{\lambda q}{\varepsilon_0 \varepsilon}.$$

Тогда уравнение непрерывности примет вид: $\frac{\lambda q}{\varepsilon_0 \varepsilon} = -\frac{\partial q}{\partial t}$,

откуда после разделения переменных получаем: $\frac{dq}{q} = -\frac{\lambda}{\varepsilon_0 \varepsilon} dt$.

Учитывая начальное условие $q|_{t=0} = q_0$, находим, что с течением времени заряд будет уменьшаться по закону:

$$q = q_0 \exp\left(-\frac{\lambda t}{\varepsilon_0 \varepsilon}\right).$$

Величина первоначального заряда уменьшится в $n = 2$ раза через время

$$t = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\lambda} \ln n = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\lambda} \ln 2.$$

$$7.8. I = \frac{UC}{\rho \varepsilon \varepsilon_0} \cong 0,97 \text{ мкА}.$$

$$7.9. I = \frac{4\pi r_1 r_2}{\rho (r_2 - r_1)}.$$

Решение. Напряженность электрического поля в пространстве между сферами ($r_1 < r < r_2$) равна $E = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon r^2}$, где q – заряд

на внутренней обкладке конденсатора. Согласно закону Ома

$$j = \lambda E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon\rho r^2}.$$

Через любую concentрическую сферу радиусом r сила тока одинакова и равна:

$$I = jS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon\rho r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0\epsilon\rho}.$$

Используя формулу для емкости сферического конденсатора ($C = 4\pi\epsilon_0\epsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$) и зная напряжение между его обкладками, находим заряд на внутренней обкладке:

$$q = CU = 4\pi\epsilon_0\epsilon U \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

Ток утечки в конденсаторе составляет: $I = \frac{4\pi r_1 r_2}{\rho(r_2 - r_1)}$.

$$7.10. U = \frac{I \ln(R_2 / R_1)}{2\pi\lambda L}.$$

$$7.11. R = \frac{d(2\rho_0 + \alpha d)}{2S}.$$

Решение. Разобьем конденсатор на параллельные обкладкам слои толщиной dx каждый. Сопротивление проводника длиной dx с сечением S и удельным сопротивлением ρ равно:

$$dR = \frac{\rho dx}{S} = \frac{(\rho_0 + \alpha x) dx}{S}.$$

Проводники соединены последовательно, поэтому их общее сопротивление находим интегрированием по толщине среды между обкладками:

$$R = \int_0^d \frac{\rho_0 + \alpha x}{S} dx = \frac{d(2\rho_0 + \alpha d)}{2S}.$$

$$7.12. \quad q_1 = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 US}{d(2 + \alpha d\lambda_0)}, \quad q_2 = -\frac{2\varepsilon\varepsilon_0 \left(\frac{1}{\lambda_0} + \alpha d\right) US}{d\left(\frac{2}{\lambda_0} + \alpha d\right)};$$

$$\rho(x) = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 \alpha U}{d\left(\frac{2}{\lambda_0} + \alpha d\right)}, \quad \rho'(x) = -\frac{2\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \alpha U}{d\left(\frac{2}{\lambda_0} + \alpha d\right)}.$$

Решение. Сопротивление R среды между обкладками такого конденсатора было определено в **задаче 7.11**:

$$R = \frac{d(2r_0 + \alpha d)}{2S}.$$

Ток утечки через конденсатор равен $I = U/R$, а плотность тока

$$j = \frac{I}{S} = \frac{2U}{d\left(\frac{2}{\lambda_0} + \alpha d\right)}.$$

Так как плотность свободных зарядов $\pm\sigma = \pm D_n$, заряды пластин определим из граничных условий для вектора электрической индукции D :

$$D(x) = \varepsilon_0 \varepsilon E(x) = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{j}{\lambda(x)}.$$

На одной пластине (при $x = 0$) будет заряд:

$$q_1 = S\sigma_1 SD(0) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\lambda_0} j = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 US}{d(2 + \alpha d\lambda_0)},$$

а на другой пластине (при $x = d$):

$$q_2 = S\sigma_2 = -SD(d) = -\frac{2\varepsilon\varepsilon_0 \left(\frac{1}{\lambda_0} + \alpha d\right) US}{d\left(\frac{2}{\lambda_0} + \alpha d\right)}.$$

Объемную плотность свободных зарядов в среде находим из условия $\rho(x) = \operatorname{div} \mathbf{D}$:

$$\rho(x) = \frac{dD}{dx} = \varepsilon_0 \varepsilon E(x) = \varepsilon_0 \varepsilon j \frac{d\left(\frac{1}{\lambda}(x)\right)}{dx} = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 \alpha U}{d\left(\frac{2}{\lambda_0} + \alpha d\right)}.$$

Поскольку электрическое поле внутри конденсатора неоднородно, в среде появится неоднородная поляризация

$$P(x) = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E(x)$$

и связанные поляризационные заряды, объемная плотность которых равна:

$$\rho'(x) = -\operatorname{div}P = -\varepsilon_0(\varepsilon - 1) \frac{dE}{dx} = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \rho(x) = -\frac{2\varepsilon_0(\varepsilon - 1)\alpha U}{d\left(\frac{2}{\lambda_0} + \alpha d\right)}.$$

$$7.13. \rho = \frac{2\pi dR}{\ln(b/a)}.$$

$$7.14. R = \frac{1}{4\pi\alpha} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Решение. Так как полный ток через любую сферическую поверхность радиусом r одинаков ($I = \text{const}$), то плотность тока $j(r)$ меняется с изменением r как: $j(r) = \frac{I}{4\pi r^2}$. По закону Ома находим напряженность электрического поля на расстоянии r от центра сфер:

$$E(r) = \frac{j(r)}{\lambda(r)} = \frac{I}{4\pi r^2 \cdot \alpha / r} = \frac{I}{4\pi\alpha r}.$$

Падение напряжения между обкладками конденсатора равно:

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E(r) dr = \frac{I}{4\pi\alpha} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{I}{4\pi\alpha} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

а сопротивление среды R

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{4\pi\alpha} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$7.15. R_1 = \frac{\alpha}{2\pi(r_2 - r_1)}.$$

Решение. Представим проводник как совокупность тонких цилиндрических слоев, сопротивление единицы длины каждого из которых одинаково по всей длине проводника. В пределах такого слоя плотность тока j также постоянна.

Пусть напряжение между точками на оси проводника, находящимися на расстоянии l друг от друга, равно U . Плотность тока в слое радиусом r толщиной dr

$$j(r) = \lambda(r)E(r) = \frac{U}{\rho(r)l} = \frac{U}{\alpha lr}.$$

Полная сила тока I , текущего по проводу, равна:

$$I = \int_S j dS = \frac{U}{\alpha l} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \cdot 2\pi r dr = \frac{2\pi U}{\alpha l} (r_2 - r_1).$$

Сопротивление участка провода единичной длины равно:

$$R_1 = \frac{R}{l} = \frac{U}{Il} = \frac{\alpha}{2\pi(r_2 - r_1)}.$$

$$7.16. R = \frac{b-a}{2\pi\alpha abl}.$$

Решение. Разобьем цилиндр на трубки радиусом r и толщиной dr (рис. О.7.16). Сопротивление такой трубки находим по формуле:

$$dR = \frac{\rho(r)}{S(r)} dr = \frac{dr}{\lambda(r) \cdot 2\pi r l} = \frac{dr}{2\pi\alpha l r^2}$$

Все трубки, образующие цилиндр, соединены последовательно, поэтому полное сопротивление провода равно:

$$R = \int_a^b dR = \frac{1}{2\pi\alpha l} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{b-a}{2\pi\alpha abl}.$$

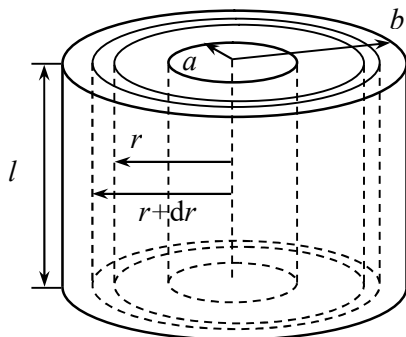


Рис. О.7.16.

$$7.17. \lambda(r) = \frac{A}{r}, \text{ где } A = \text{const.}$$

Решение. Рассмотрим участок цилиндров длиной l . В установленном режиме через боковую поверхность любого соосного цилиндра радиусом r ток $I = \text{const}$, а плотность тока на расстоянии r от оси цилиндров равна $j(r) = \frac{I}{2\pi r l}$. Используя закон Ома, находим напряженность электрического поля:

$$E(r) = \frac{j(r)}{\lambda(r)} = \frac{I}{2\pi r l \cdot \lambda(r)}.$$

Так как по условию задачи $E = \text{const}$, зависимость $\lambda(r)$ должна иметь вид: $\lambda(r) = \frac{A}{r}$, где $A = \text{const}$.

$$7.18. \rho(x) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon (\lambda_1 - \lambda_2) l j}{(\lambda_1 l + (\lambda_2 - \lambda_1) x)^2}, \quad q = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon j S (\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_1 \lambda_2}.$$

Решение. Направим ось X вдоль стержня и совместим начало отсчета с торцом, где $\lambda(0) = \lambda_1$. Закон изменения удельной проводимости имеет вид: $\lambda(x) = \lambda_1 + \alpha x$. Из граничных условий для λ находим:

$$\alpha = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{l}$$

и окончательно $\lambda(x) = \lambda_1 + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{l} x$.

Напряженность электрического поля вдоль стержня равна $E(x) = j / \lambda(x)$. Вектор электрической индукции в стержне зависит от координаты x : $D(x) = \varepsilon_0 \varepsilon \cdot E(x)$. Объемную плотность свободных зарядов находим из уравнения $\rho(x) = \text{div} \mathbf{D}$:

$$\rho(x) = \frac{dD}{dx} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{dE}{dx} = \varepsilon_0 \varepsilon j \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\lambda(x)} \right) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon (\lambda_1 - \lambda_2) l j}{(\lambda_1 l + (\lambda_2 - \lambda_1) x)^2}.$$

Полный свободный заряд в объеме стержня равен:

$$q = \int_V \rho(x) dV = S \int_0^l \rho(x) dx = S \int_0^l \frac{dD}{dx} dx =$$

$$= S(D(l) - D(0)) = \varepsilon_0 \varepsilon j S \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon j S (\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_1 \lambda_2}.$$

$$7.19. \rho = \frac{4U\varepsilon_0}{R_2^2 - R_1^2}.$$

Решение. В установившемся режиме через любую цилиндрическую поверхность радиусом $R_1 < r < R_2$ ток $I = \text{const}$, а плотность тока на расстоянии r от оси цилиндров равна

$$j(r) = \frac{I}{S_{\text{бок}}} = \frac{I}{2\pi r l}.$$

По закону Ома напряженность электрического поля зависит от r :

$$E(r) = \frac{j(r)}{\lambda(r)} = \frac{I}{2\pi r l \cdot \lambda(r)} = \frac{I}{2\pi l r \cdot (\alpha / r^2)} = \frac{Ir}{2\pi \alpha l}.$$

Находим напряжение между обкладками:

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr = \frac{I}{2\pi \alpha l} \int_{R_1}^{R_2} r dr = \frac{I}{4\pi \alpha l} (R_2^2 - R_1^2),$$

откуда определяем ток в конденсаторе: $I = \frac{4\pi \alpha l U}{R_2^2 - R_1^2}$. Следовательно,

но, напряженность электрического поля равна:

$$E = \frac{2U}{R_2^2 - R_1^2} r.$$

В пространстве между обкладками конденсатора вектор электрической индукции $D(r) = \varepsilon_0 E(r)$. Объемную плотность свободных зарядов находим из уравнения $\rho(r) = \text{div} D$. Учитывая, что D зависит только от r , вычисляем $\text{div} D$ в цилиндрической системе координат, ось которой совпадает с осью цилиндров:

$$\rho = \text{div} D = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r D_r) = \frac{2U\varepsilon_0}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2) = \frac{4U\varepsilon_0}{R_2^2 - R_1^2}.$$

$$7.20. q_a = -\frac{8\pi\varepsilon_0 \varepsilon a^3 U}{b^2 - a^2}, \quad q_b = \frac{8\pi\varepsilon_0 \varepsilon b^3 U}{b^2 - a^2}, \quad \rho = \frac{6\varepsilon_0 \varepsilon U}{b^2 - a^2},$$

$$q_{\text{своб}} = \frac{8\pi\varepsilon_0\varepsilon U(b^3 - a^3)}{b^2 - a^2}.$$

Решение. В установившемся режиме через любую концентричную обкладкам сферическую поверхность радиусом $R_1 < r < R_2$ ток $I = \text{const}$, а плотность тока на расстоянии r от центра сфер равна

$$j(r) = \frac{I}{S_{\text{бок}}} = \frac{I}{4\pi r^2}.$$

Напряженность электрического поля зависит от

$$E(r) = \rho(r) \cdot j(r) = \frac{I \cdot \alpha r^3}{4\pi r^2} = \frac{\alpha I r}{4\pi},$$

поэтому напряжение между обкладками равно:

$$U = \int_a^b E(r) dr = \frac{\alpha I}{4\pi} \int_a^b r dr = \frac{\alpha I}{8\pi} (b^2 - a^2).$$

Следовательно, ток в конденсаторе $I = \frac{8\pi U}{\alpha(b^2 - a^2)}$, а напряжен-

ность электрического поля

$$E = \frac{2U}{b^2 - a^2} r.$$

В пространстве между обкладками конденсатора вектор электрической индукции $D(r) = \varepsilon_0 \varepsilon E(r)$. Пусть на внешней обкладке находится положительный заряд. Так как плотность свободных зарядов на обкладках $\pm\sigma = \pm D_n$, заряды на внутренней и внешней сфере равны:

$$q_a = S_1 \sigma_1 = 4\pi a^2 D(a) = -\frac{8\pi\varepsilon_0\varepsilon a^3 U}{b^2 - a^2},$$

$$q_b = S_2 \sigma_2 = -4\pi b^2 D(b) = \frac{8\pi\varepsilon_0\varepsilon b^3 U}{b^2 - a^2}.$$

Объемную плотность свободных зарядов находим по формуле $\rho(r) = \text{div} D$. С учетом того, что D зависит только от r , вычисляем $\text{div} D$ в сферических координатах:

$$\rho = \text{div} D = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) = \frac{2U\varepsilon_0\varepsilon}{b^2 - a^2} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^3) = \frac{6\varepsilon_0\varepsilon U}{b^2 - a^2}.$$

Так как $\rho = \text{const}$, полный свободный заряд в объеме V диэлектрика равен:

$$q_{\text{своб}} = \rho V = \frac{6\varepsilon_0 \varepsilon U}{b^2 - a^2} \cdot \frac{4}{3} \pi (b^3 - a^3) = \frac{8\pi \varepsilon_0 \varepsilon U (b^3 - a^3)}{b^2 - a^2}.$$

Легко заметить, что $|q_{\text{своб}}| = |q_b| - |q_a|$.

Полный заряд q , получаемый конденсатором при зарядке, равен большему по модулю из зарядов обкладок: $q = \max(|q_a|, |q_b|)$. Заряды противоположного знака той же величины будут локализованы на другой обкладке и внутри конденсатора.

$$7.21. P_1 = \frac{2U^2}{d} \cdot \frac{\rho_1}{(\rho_1 + \rho_2)^2} S, P_2 = \frac{2U^2}{d} \cdot \frac{\rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} S.$$

Решение. В установившемся режиме ток в конденсаторе $I = \text{const}$, следовательно, плотность тока $j = \text{const}$. По закону Ома $j = E / \rho$, поэтому для двух проводящих сред получаем:

$$j = E_1 / \rho_1 = E_2 / \rho_2, \text{ откуда } E_2 = \rho_2 E_1 / \rho_1.$$

Разность потенциалов между обкладками конденсатора равна

$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2 = (E_1 + E_2) d / 2.$$

Из написанных соотношений находим напряженности электрических полей в первой и второй среде:

$$E_1 = \frac{2U\rho_1}{d(\rho_1 + \rho_2)}, \quad E_2 = \frac{2U\rho_2}{d(\rho_1 + \rho_2)}.$$

По закону Джоуля–Ленца объёмная плотность тепловой мощности равна $p_V = j \cdot E = \frac{1}{\rho} E^2$. Мощность тепловых потерь во всем слое проводящей среды

$$P = p_V V_{\text{слоя}} = p_V S d / 2.$$

Подставляя найденные значения E_1 и E_2 , получаем мощность тепловых потерь в каждом слое:

$$P_1 = \frac{2U^2}{d} \cdot \frac{\rho_1}{(\rho_1 + \rho_2)^2} S, \quad P_2 = \frac{2U^2}{d} \cdot \frac{\rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} S.$$

$$7.22. P = \frac{2SU^2}{d(\rho_1 + \rho_2)}.$$

Решение. Закон изменения удельного сопротивления в зависимости от расстояния x от обкладки, вблизи которой оно равно ρ_1 :

$$\rho(x) = \rho_1 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{d} x.$$

Сопротивление среды в конденсаторе составляет (см. решение задачи 7.10): $R = \frac{d(\rho_1 + \rho_2)}{2S}$, а выделяемая тепловая мощность

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{2SU^2}{d(\rho_1 + \rho_2)}.$$

$$7.23. Q = \frac{q_0^2 d}{2\epsilon\epsilon_0 S}.$$

Решение. После того, как одной из обкладок конденсатора сообщают заряд, между обкладками возникает электрический ток, который будет течь до тех пор, пока разность потенциалов между обкладками не станет равной нулю.

Аналогично тому, как делалось при решении задачи 7.6, получим, что заряд на обкладке конденсатора будет убывать по закону $q = q_0 \exp\left(-\frac{t}{\epsilon_0 \epsilon \rho}\right)$. В этом случае сила тока между обкладками

конденсатора будет зависеть от времени как

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = -\frac{q_0}{\epsilon_0 \epsilon \rho} \exp\left(-\frac{t}{\epsilon_0 \epsilon \rho}\right).$$

Сопротивление конденсатора равно $R = \rho d / S$.

Все количество теплоты, выделившееся в конденсаторе, находим интегрированием:

$$Q = \int_0^{\infty} I^2 R dt = \int_0^{\infty} \frac{\rho d}{S} \cdot \left(\frac{q_0}{\epsilon_0 \epsilon \rho}\right)^2 \exp\left(-\frac{2t}{\epsilon_0 \epsilon \rho}\right) dt = \frac{q_0^2 d}{2\epsilon\epsilon_0 S}.$$

$$7.24. P = \frac{4\pi U_0^2 R_1 R_2}{\rho(R_2 - R_1)}.$$

Решение. По закону Джоуля–Ленца объёмная плотность тепловой мощности равна:

$$P_V = j \cdot E = \frac{1}{\rho} E^2.$$

В слое толщиной dr , находящемся на расстоянии r от центра конденсатора, выделится мощность:

$$dP = P_V dV = \frac{1}{\rho} E^2 \cdot 4\pi r^2 dr.$$

На расстоянии r от центра конденсатора напряженность электрического поля равна $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, где q – заряд на внутренней обкладке конденсатора.

Мощность тепловых потерь находим интегрированием:

$$P = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{\rho} E^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi q^2}{\rho(4\pi\epsilon_0)^2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{4\pi q^2 (R_2 - R_1)}{\rho(4\pi\epsilon_0)^2 R_1 R_2}.$$

Используя выражение для емкости сферического конденсатора $C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$, находим заряд конденсатора:

$$q = CU_0 = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} U_0.$$

Таким образом, мощность тепловых потерь равна:

$$P = \frac{4\pi U_0^2 R_1 R_2}{\rho(R_2 - R_1)}.$$

$$7.25. P_1 = \frac{U^2 R_1}{(R_1 + R_2)^2}, P_2 = \frac{U^2 R_2}{(R_1 + R_2)^2}, \text{ где } R_1 = \frac{\rho_1 (r_2 - r_1)}{4\pi r_1 r_2},$$

$$R_2 = \frac{\rho_2 (r_3 - r_2)}{4\pi r_2 r_3}.$$

$$7.26. \lambda(r) = \frac{A}{r^4}, \text{ где } A = \text{const.}$$

$$7.27. Q = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

Указание. См. решение задачи 7.23.

$$7.28. P_1 = \frac{2\pi U^2 L \lambda_1 \lambda_2^2 \ln 2}{\left(\lambda_2 \ln 2 + \lambda_1 \ln \frac{3}{2}\right)^2}, P_2 = \frac{2\pi U^2 L \lambda_1^2 \lambda_2 \ln(3/2)}{\left(\lambda_2 \ln 2 + \lambda_1 \ln \frac{3}{2}\right)^2}.$$

$$7.29. R = \rho / (2\pi a) \approx 320 \text{ Ом}.$$

Указание. Использовать формулу $RC = \rho \epsilon \epsilon_0$, где C – емкость системы двух шаров.

$$7.30. R = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\rho_1}{r_1} + \frac{\rho_2}{r_2} \right).$$

Решение. Электрический ток от электродов в земле растекается радиально. С увеличением расстояния между электродами увеличивается площадь среды, через которую протекает ток, и уменьшается плотность тока j . Поэтому основной вклад в сопротивление дают области, непосредственно граничащие с электродами.

Поскольку расстояние между электродами $d \gg r_1, r_2$, можно считать электроды уединенными шарами в бесконечной проводящей среде. Сопротивление среды в таком случае равно $R_i = \frac{\rho_i}{4\pi r_i}$, где удельное сопротивление ρ_i среды определяется в основном областью, граничащей с i -тым электродом.

Так как ток протекает от одного электрода к другому, можно считать сопротивления среды R_i равным сумме сопротивлений около шаров:

$$R = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\rho_1}{r_1} + \frac{\rho_2}{r_2} \right).$$

$$7.31. U = \frac{I\rho}{2\pi r_0(r_0 + l)} \approx 6 \text{ В.}$$

Решение. На расстоянии r от провода плотность тока равна

$$j(r) = \frac{I}{2\pi r^2},$$

а напряженность электрического поля

$$E(r) = \frac{j(r)}{\lambda} = \frac{\rho I}{2\pi r^2}.$$

Шаговое напряжение U равно:

$$U = \int_{r_0}^{r_0+l} E(r) dr = \frac{I\rho}{2\pi} \int_{r_0}^{r_0+l} \frac{dr}{r^2} = \frac{I\rho}{2\pi} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0 + l} \right) = \frac{I\rho}{2\pi r_0(r_0 + l)} \approx 6 \text{ В.}$$

$$7.32. I = 2\pi a \lambda V \approx 3,8 \text{ А.}$$

Решение. Определим сопротивление R_∞ безграничной среды, окружающей уединенный полушар. Сопротивление безграничной среды, окружающей уединенный шар, который можно представить

как два параллельно соединённых полушара, равно $R = \frac{\rho}{4\pi a}$. Тогда

$$R_\infty = \frac{\rho}{2\pi a} = \frac{1}{2\pi \lambda a}.$$

Ток утечки равен:

$$I = \frac{V}{R_\infty} = \frac{2\pi a V}{\rho} = 2\pi a \lambda V \approx 3,8 \text{ А.}$$

$$7.33. U_{\text{ш}} = \frac{I}{\pi \lambda L} \ln \left(1 + \frac{l}{d} \right). \text{ При } d_1 = 1 \text{ м } U_{\text{ш}1} = 178 \text{ В, при } d_2 = 0,5 \text{ м } U_{\text{ш}2} = 292 \text{ В.}$$

Решение. Считая, что ток от провода течет в полую цилиндрическую область, для его плотности на расстоянии r от провода име-

$$\text{ем: } j = \frac{I}{\pi r L}.$$

Напряженность электрического поля равна

$$E_r = \frac{j}{\lambda} = \frac{I}{\pi r \lambda L}.$$

Шаговое напряжение составляет:

$$U_{\text{ш}} = \int_d^{d+l} E_r dr = \frac{I}{\pi \lambda L} \ln \left(1 + \frac{l}{d} \right).$$

На расстоянии $d_1 = 1$ м от провода шаговое напряжение $U_{\text{ш}1} = 178$ В, при $d_2 = 0,5$ м $U_{\text{ш}2} = 292$ В.

§8. Цепи постоянного тока

8.1. а) $R = 3r/2$; б) $R = r/2$; в) $R = 4r/5$.

Решение. Воспользуемся свойством эквипотенциальных точек: в схемах их можно соединять и разъединять, не меняя электростатического состояния системы. Преобразуем схемы к виду, показанному на рис. О.8.1. Пунктирной линией на рис. О.8.1 б показан провод, который можно удалить, т.к. он соединяет точки с одинаковым потенциалом, поэтому ток по нему течь не будет.

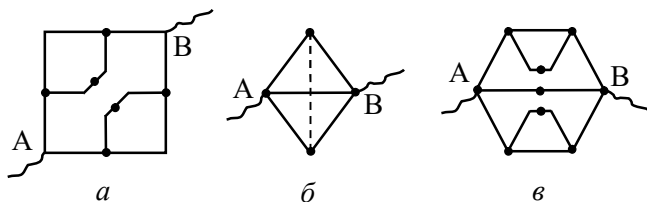


Рис. О.8.1.

Сопротивления преобразованных схем легко рассчитать, используя правила для последовательно и параллельно соединенных резисторов.

8.2. а) $R_{AB} = 13r/7$; б) $R_{CD} = 5r/7$.

Решение. а). При подключении каркаса в цепь между точка-ми А и В в силу симметрии схемы некоторые соединения элементов можно разъединить, не меняя схемы протекания тока. Эквивалентная схема каркаса показана на рис. О.8.2 а. Все разъединенные пары точек на рисунке имеют одинаковые потенциалы, поэтому их

можно соединить, получив при этом первоначальную схему каркаса.

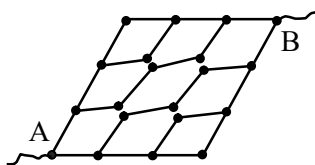


Рис. О.8.2 а.

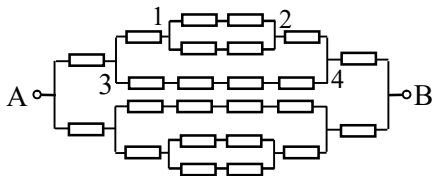


Рис. О.8.2 б.

Для вычисления сопротивления каркаса перерисуем схему, как показано на рис. О.8.2 б. Видно, что схема состоит из двух одинаковых частей (верхней и нижней), соединенных параллельно и подключенных к точкам А и В. Вычислим последовательно сопротивления отдельных частей:

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{2r} + \frac{1}{2r}, \text{ откуда } R_{12} = r;$$

$$\frac{1}{R_{34}} = \frac{1}{3r} + \frac{1}{4r}, \text{ откуда } R_{34} = \frac{12}{7}r.$$

Окончательно сопротивление каркаса между точками А и В равно:

$$R_{AB} = \frac{1}{2}(R_{34} + 2r) = \frac{13}{7}r.$$

8.3. $R_{12} = 7r/12$, $R_{13} = 3r/4$.

Решение. а). При включении каркаса в цепь между точками 1 и 2 потенциалы точек 3 и 6 будут одинаковы в силу симметрии схемы, поэтому их можно соединить. Аналогично, потенциалы точек 4 и 5 тоже одинаковы, их тоже соединяем. Получаем эквивалентную схему каркаса, изображенную на рис. О.8.3 а.

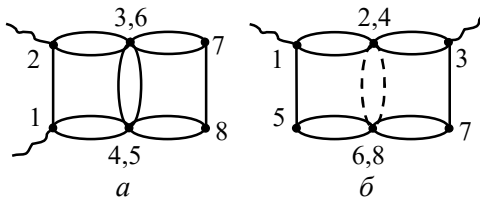


Рис. О.8.3.

После этого последовательно вычисляем сопротивления частей каркаса:

$$R_{6785} = R_{67} + R_{78} + R_{85} = r/2 + r + r/2 = 2r;$$

$$1/R_{3(6)-4(5)} = 1/R_{6785} + 2/r = 5/(2r) \rightarrow R_{3(6)-4(5)} = 2r/5.$$

$$R_{2341} = \frac{2r}{5} + \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = \frac{7r}{5}.$$

Окончательно сопротивление R_{12} каркаса находим из соотношения:

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{r} + \frac{5}{7r} = \frac{12}{7r}, \text{ откуда } R_{12} = \frac{7}{12}r.$$

б). При включении каркаса в цепь между точками 1 и 3 можно соединить точки 2 и 4, а также 6 и 8, так как их потенциалы одинаковы. В то же время одинаковы потенциалы точек 2, 6 и точек 4, 8, поэтому находящиеся между ними ребра каркаса можно убрать. Эквивалентная схема каркаса изображена на рис. О.8.3 б, где удаленные элементы показаны штриховой линией.

После этого легко посчитать сопротивление каркаса:

$$R_{13} = 3r/4.$$

$$8.4. R = \frac{\pi r D}{\pi + 4}.$$

$$8.5. R_{AB} = 2r/3.$$

Решение. При подсоединении к точкам А и В источника ЭДС картину протекания тока можно представить как суперпозицию тока, входящего в точку А и симметрично растекающегося в бесконечность, и тока, симметрично сходящегося в точку В из бесконечности. Если полный ток между точками А и В обозначить I , то ток, входящий в А, и ток, сходящийся к В, симметрично делится на 3 части по $I/3$.

По проводу АВ течет ток $I/3 + I/3 = 2I/3$, следовательно, напряжение $U_{AB} = 2Ir/3$. По закону Ома

$$R_{AB} = U_{AB} / I = 2r/3.$$

$$8.6. a) R_{12} = 19r/30; б) R_{13} = 4r/5; в) R_{14} = 7r/6.$$

8.7. $R = r$; через резисторы с сопротивлением r течет ток

$I_r = \frac{U}{2r}$, через резисторы с сопротивлением $2r$ текут токи (начиная

с самого нижнего на рис. 8.7): $I_1 = \frac{U}{2r}$, $I_2 = \frac{U}{4r}$, ..., $I_n = \frac{U}{2^n r}$.

$$\mathbf{8.8.} \quad R = r(\sqrt{3} - 1).$$

Решение. Надо подключить такое сопротивление R , чтобы сопротивление последней ячейки было равно R . Тогда последнюю ячейку можно заменить сопротивлением R , затем то же самое сделать с предпоследней ячейкой и т.д. При этом общее сопротивление цепи не будет зависеть от числа ячеек и будет равно R .

Сопротивление последней ячейки с подсоединенным резистором R равно:

$$\frac{(2r + R) \cdot r}{3r + R} = R.$$

Получили квадратное уравнение относительно R :

$$R^2 + 2rR - 2r^2 = 0,$$

откуда находим: $R = r(\sqrt{3} - 1)$.

$$\mathbf{8.9.} \quad R_{AB} = 5r/2.$$

$$\mathbf{8.10.} \quad I = \frac{U}{r_1 + r_2}.$$

Решение. Падения напряжений на резисторах r_1 и r_2 , а также на резисторах $3r_1$ и $3r_2$ пропорциональны их сопротивлениям, поэтому потенциалы точек между резисторами r_1 и r_2 и между резисторами $3r_1$ и $3r_2$ одинаковы. Как следствие ток через резистор R не течет, и его можно удалить.

Ток через резистор r_2 равен $I = \frac{U}{r_1 + r_2}$.

$$\mathbf{8.11.} \quad R_{CD} = 2r(1 + \sqrt{3}).$$

Решение. Вся цепь эквивалентна сопротивлению R_{CD} . Ввиду ее бесконечности добавление еще одного звена r , $2r$ и $3r$ перед це-

пью не изменит ее сопротивления (рис. О.8.11), поэтому можно записать:

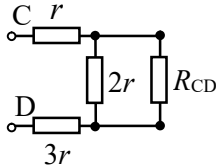


Рис. О.8.12.

$$R_{CD} = r + \frac{2rR_{CD}}{2r + R_{CD}} + 3r,$$

откуда получаем квадратное уравнение относительно R_{CD} :

$$R_{CD}^2 - 4rR_{CD} - 8r^2 = 0.$$

Решая уравнение, находим: $R_{CD} = 2r(1 + \sqrt{3})$.

8.12. $R_{AB} = r(\sqrt{3} - 1)$.

Указание. См. решение задачи 8.11. В качестве повторяющейся секции следует взять первые три резистора слева (см. рис. О.8.12).

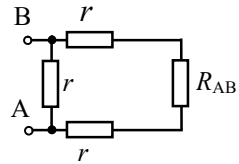


Рис. О.8.12.

8.13. $R_x = r(1 - \sqrt{3}/6)$.

Указание. Сопротивление цепи между точками А и В равно сопротивлению четырех резисторов, соединенных, как показано на рис. О.8.13, где $R_1 = r(\sqrt{3} - 1)$ (см. решение задачи 8.12).

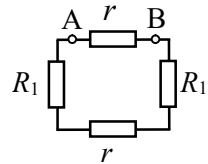


Рис. О.8.13.

8.14. $R_{CD} = (\sqrt{3}/3)r$.

8.15. $R_{AB} = r(\sqrt{5} - 1)/2$.

Указание. В качестве повторяющейся секции следует взять первые четыре проводочных звена слева. Эквивалентная схема каркаса показана на рис. О.8.15.

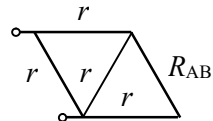


Рис. О.8.15.

8.16. $R_x = r(\sqrt{3} - 1)$.

Решение. Если посмотреть на каркас слева, получится изображение цепи, приведенное в перспективе на рис. О.8.16 а.

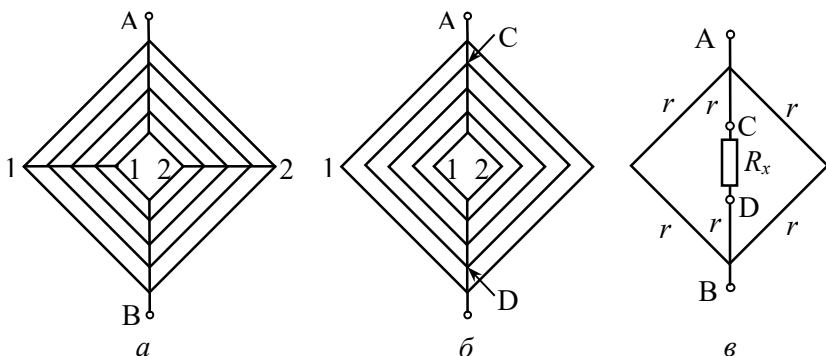


Рис. О.8.16.

Из симметрии рисунка видно, что потенциалы всех узлов соединения звеньев на линиях 1 – 1 и 2 – 2 одинаковы, поэтому звенья, соединяющие эти узлы, можно удалить. После этого получится цепь, изображенная на рис. О.8.16 б.

Между точками С и D находится фигура, сопротивление которой равно искомому сопротивлению R_x , так как цепь бесконечна. При этом эквивалентная схема каркаса приобретает вид, показанный на рис. О.8.16 в. Между точками А и В элемент цепи, в который входит R_x , включен параллельно с параллельно соединенными участками, содержащими по два звена сопротивлением r ; общее сопротивление этих участков равно r . Поскольку сопротивление цепи между точками А и В равно R_x , воспользуемся правилом вычисления сопротивления параллельно соединенных резисторов и получим:

$$R_x = \frac{(2r + R_x) \cdot r}{r + 2r + R_x}.$$

Преобразуя последнюю формулу, приходим к квадратному уравнению относительно R_x :

$$R_x^2 + 2rR_x - 2r^2 = 0,$$

откуда находим: $R_x = r(\sqrt{3} - 1)$.

$$\mathbf{8.17.} \quad R_1 : R_2 : R_3 = (k - 1)^2 : k : (k - 1).$$

Решение. Пусть в цепи n ячеек. В последней n -ой ячейке напряжение U_n на сопротивлении R_3 должно быть в k раз меньше напряжения U_{n-1} на предыдущем вертикальном сопротивлении R_2 . Применяя закон Ома к последней ячейке, получаем:

$$U_n = \frac{U_{n-1}}{R_1 + R_2} R_2 = \frac{U_{n-1}}{k},$$

откуда находим соотношение: $R_1 / R_3 = k - 1$.

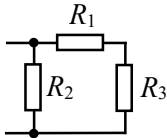


Рис. О.8.17.

Поскольку для любой ячейки должно быть $U_i = \frac{U_{i-1}}{k}$, то сопротивление всей последней ячейки, двух последних ячеек, трех последних ячеек и т.д. также должно быть равно R_3 (см. решение задачи 8.8). Так как в ячейке резисторы R_2 и $R_1 + R_3$ соединены параллельно (см. рис. О.8.17), получаем:

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1 + R_3}, \text{ откуда } R_2 = \frac{(R_1 + R_3) \cdot R_3}{R_1} = R_3 \cdot \frac{k}{k-1}.$$

В тоге находим отношение сопротивлений:

$$R_1 : R_2 : R_3 = (k-1)^2 : k : (k-1).$$

8.18. $R_{AB} = 7r/4$.

Решение. Данная схема несимметрична, в ней нет последовательно и параллельно соединенных проводников, а также точек с равными потенциалами. Поэтому для нахождения сопротивления между точками А и В подсоединим к ним источник ЭДС \mathcal{E} (см.

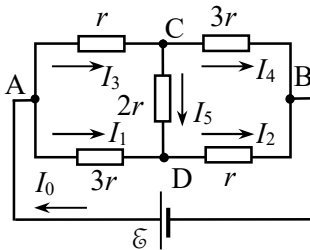


Рис. О.8.18.

рис. О.8.18), найдем ток I_0 , а затем искомое сопротивление R_{AB} определим по формуле:

$$R_{AB} = \mathcal{E} / I_0.$$

Для нахождения тока I_0 используем правила Кирхгофа. Выберем направления токов через резисторы, как показано на рис. О.8.18. В соответствии с 1-м правилом Кирхгофа запишем три уравнения для суммы токов в трех узлах, например, А, С и D:

например, А, С и D:

$$A: I_0 - I_3 - I_1 = 0,$$

$$C: I_3 - I_5 - I_4 = 0,$$

$$D: I_1 + I_5 - I_2 = 0,$$

и три уравнения в соответствии с 2-м правилом Кирхгофа для падений напряжения в трех контурах, например:

$$ADB\&A: 3I_1r + I_2r = \mathcal{E},$$

$$ACDA: I_3r + 2I_5r - 3I_1r = 0,$$

$$CBDC: 3I_4r - I_2r - 2I_5r = 0.$$

Из этой системы уравнений находим ток I_0 : $I_0 = \frac{4\mathcal{E}}{7r}$, а затем

– сопротивление цепи: $R_{AB} = \mathcal{E} / I_0 = 7r / 4$.

$$8.19. I = \frac{\mathcal{E}(R_2 + R_3) + \mathcal{E}_0 R_3}{R(R_2 + R_3) + R_2 R_3}.$$

8.20. $I_2 = 0$, $I_3 = 1$ А, ток течет влево.

Указание. Чтобы избежать громоздких выкладок при записи в общем виде системы уравнений в соответствии с правилами Кирхгофа, следует сразу подставить численные значения сопротивлений резисторов и ЭДС источников тока и далее решать задачу в числах.

$$8.21. U_R = 2\mathcal{E} - I(R_1 + 3r/2) = 1,91 \text{ В}.$$

$$8.22. \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 + r_2} = 1,74 \text{ В}; \quad r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = 0,34 \text{ Ом}.$$

$$8.23. I = \frac{(n - 2k)\mathcal{E}}{R + nr}.$$

8.24. $I_1 = 6,4$ мА, $I_2 = 1,8$ мА (токи текут влево);
 $I_3 = 4,6$ мА (ток течет вниз); $I_4 = 0$.

$$8.25. \quad \mathcal{E}_3 = \frac{\mathcal{E}_1 R_2 + \mathcal{E}_2 R_1}{R_1 + R_2}.$$

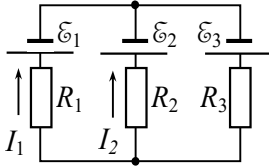


Рис. О.8.24.

Решение. Обозначим стрелками направления токов, как показано на рис. О.8.24. Поскольку ток через резистор R_3 не течет, по 1-му правилу Кирхгофа

$$I_1 + I_2 = 0.$$

По второму правилу Кирхгофа:

$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3 = I_1 R_1, \quad \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_2 = I_2 R_2 = -I_1 R_2.$$

Исключая из последних уравнений I_1 , находим:

$$\mathcal{E}_3 = \frac{\mathcal{E}_1 R_2 + \mathcal{E}_2 R_1}{R_1 + R_2}.$$

$$8.26. \quad \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3 \left(1 + R_2 / R_3\right), \quad I = \mathcal{E}_1 / R_1 - (\mathcal{E}_3 / R_1) \cdot \left(1 + R_2 / R_3\right).$$

$$8.27. \quad R > \frac{\mathcal{E}_2 r_1}{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}.$$

Решение. Обозначим стрелками направления токов через генератор, аккумулятор и резистор так, как показано на рис. О.8.26.

Применяя первое и второе правила Кирхгофа, получим систему уравнений:

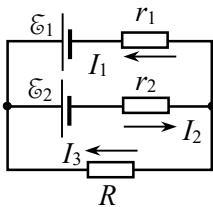


Рис. О.8.26.

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0;$$

$$I_1 r_1 + I_2 r_2 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2;$$

$$I_2 r_2 + I_3 R = -\mathcal{E}_2.$$

Решая эту систему, находим ток I_2 через аккумулятор:

$$I_2 = \frac{(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)R - \mathcal{E}_2 r_1}{r_1(r_2 + R) + r_2 R}.$$

Если ток $I_2 > 0$, аккумулятор заряжается, если $I_2 < 0$ – разряжается. Зарядка происходит при $R > \frac{\mathcal{E}_2 r_1}{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}$.

$$8.28. m = \sqrt{nR/r}, I_{\max} = \frac{\mathcal{E}}{2} \sqrt{\frac{n}{rR}}.$$

Решение. В каждой из m групп будет $k = n/m$ элементов. При параллельном соединении одноименными полюсами k одинаковых источников их можно заменить одним эквивалентным элементом, ЭДС которого равна \mathcal{E} , а внутреннее сопротивление $r_{\text{экв}} = r/k$. Ток, протекающий через резистор, равен:

$$I = \frac{m\mathcal{E}}{R + mr_{\text{экв}}} = \frac{m\mathcal{E}}{R + mr/k} = \frac{m\mathcal{E}}{R + m^2r/n} = \frac{mn\mathcal{E}}{nR + m^2r}.$$

Чтобы найти, при каком значении m ток максимален, продифференцируем I по m и приравняем производную нулю:

$$\left. \frac{dI}{dm} \right|_{I_{\max}} = \frac{\mathcal{E} (nR - m^2r)}{(nR + m^2r)^2} \Big|_{I_{\max}} = 0,$$

откуда находим соответствующее число групп: $m = \sqrt{nR/r}$.

Подставляя найденное значение m , определяем максимальную силу тока через резистор:

$$I_{\max} = \frac{mn\mathcal{E}}{nR + m^2r} = \frac{\mathcal{E}}{2} \sqrt{\frac{n}{rR}}.$$

$$8.29. I_{\max} = \frac{k\mathcal{E}}{r} = 12 \text{ А при } n \rightarrow \infty.$$

$$8.30. \Delta\varphi_{CA} = \varphi_C - \varphi_A = \frac{(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3)r + (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)R}{3r + 2R},$$

$$\Delta\varphi_{DC} = \varphi_D - \varphi_C = \frac{(\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)r + 2\mathcal{E}_3R}{3r + 2R}.$$

Решение. Направим токи через элементы цепи так, как показано на рис. О.8.30 а. Запишем первое правило Кирхгофа для узла С и второе правило Кирхгофа для контуров $A\mathcal{E}_1\mathcal{E}_3RA$ и $A\mathcal{E}_2\mathcal{E}_3RA$:

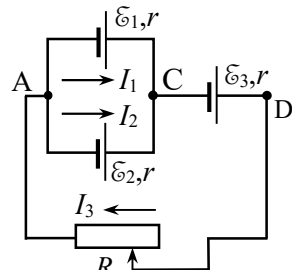


Рис. О.8.30 а.

$$I_1 + I_2 = I_3;$$

$$I_1 r + I_3(r + R) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_3;$$

$$I_2 r + I_3(r + R) = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3.$$

Складывая почленно второе и третье уравнения, с учетом первого уравнения получим:

$$I_3(3r + 2R) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_3 + 2\mathcal{E}_3,$$

откуда

$$I_3 = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\mathcal{E}_3}{3r + 2R} \text{ и далее } I_2 r = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 - (r + R) \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\mathcal{E}_3}{3r + 2R}.$$

Для определения разностей потенциалов $\Delta\varphi_{CA}$ и $\Delta\varphi_{DC}$ применим обобщенный закон Ома к участкам $A\mathcal{E}_2C$ и $C\mathcal{E}_3D$:

$$I_2 r = \varphi_A - \varphi_C + \mathcal{E}_2,$$

$$I_3 r = \varphi_C - \varphi_D + \mathcal{E}_3.$$

Используя значения I_2 и I_3 , получаем:

$$\Delta\varphi_{CA} = \varphi_C - \varphi_A = \frac{(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3)r + (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)R}{3r + 2R},$$

$$\Delta\varphi_{DC} = \varphi_D - \varphi_C = \frac{(\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)r + 2\mathcal{E}_3 R}{3r + 2R}.$$

Для построения графиков подставим данные численные значения ЭДС и r и получим:

$$\Delta\varphi_{CA} (B) = \varphi_C - \varphi_A = \frac{3 + 10R}{1,5 + 2R} = 5 - \frac{4,5}{1,5 + 2R},$$

$$\Delta\varphi_{DC} = \varphi_D - \varphi_C = \frac{-3 + 8R}{1,5 + 2R} = 4 - \frac{9}{1,5 + 2R}.$$

Вид графиков приведен на рис. О.8.30 б.

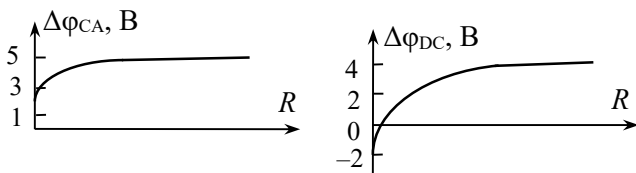


Рис. О.8.30 б.

$$\mathbf{8.31.} \quad U_{AC} = \frac{5R + 24r}{3R + 10r} \mathcal{E}, \quad U_{BD} = \frac{11R + 40r}{3R + 10r} \mathcal{E}.$$

Решение. Выберем направление тока I по часовой стрелке.

Сила тока равна:
$$I = \frac{2\varepsilon}{3R + 10r}.$$

Запишем закон Ома для участка ADC:

$$U_{AC} = \varepsilon_{ADC} - Ir_{ADC} = 3\varepsilon - I(2R + 3r).$$

Подставляя I , находим:
$$U_{AC} = \frac{5R + 24r}{3R + 10r} \varepsilon.$$

Аналогично определяем напряжение между точками B и D:

$$U_{BD} = \varepsilon_{BAD} - Ir_{BAD} = 5\varepsilon - I(2R + 5r) = \frac{11R + 40r}{3R + 10r} \varepsilon.$$

8.32. $R = r.$

8.33. $N = I(\varepsilon - U) = 3 \text{ Вт}.$

8.34. $\frac{N_1}{N_2} = \left(\frac{R + 2r}{2R + r} \right)^2 = \frac{9}{16}$; большая мощность получается

при параллельном соединении.

8.35. $N = 2\varepsilon^2 / 9r = 16 \text{ Вт}.$

8.36. $N_1 = 2N/3, N_2 = N/3.$

8.37. $R_1 R_2 > r^2.$

8.38.
$$I = \frac{n\varepsilon \pm \sqrt{n^2\varepsilon^2 - 4N_1nr}}{2rn}, I_1 = 2 \text{ А}, I_2 = 8/3 \text{ А};$$

$$N_{\text{imax}} = \frac{n\varepsilon^2}{4r} \approx 8,17 \text{ Вт}.$$

Решение. При последовательном соединении элементов их можно заменить эквивалентным источником тока с ЭДС $\varepsilon_{\Sigma} = n\varepsilon$ и внутренним сопротивлением $r_{\Sigma} = nr$.

Полная мощность, развиваемая батареей, $N = I\varepsilon_{\Sigma}$. Мощность

N_2 , выделяемая внутри батареи, $N_2 = I^2 r_\Sigma$.

Полезная мощность N_1 , выделяемая во внешней цепи,

$$N_1 = N - N_2 = I \mathcal{E}_\Sigma - I^2 r_\Sigma = n \mathcal{E} I - nr I^2.$$

Из полученного квадратного уравнения относительно I находим ток:

$$I = \frac{n \mathcal{E} \pm \sqrt{n^2 \mathcal{E}^2 - 4 N_1 nr}}{2nr}.$$

Подставляя численные данные, получаем: $I_1 = 2 \text{ А}$, $I_2 = 8/3 \text{ А}$.

Найдем, при каком токе I^* выделяется максимальная полезная мощность:

$$\frac{dN}{dI} = n \mathcal{E} - 2nr I^* = 0, \text{ откуда } I^* = \mathcal{E} / (2r).$$

Подставляя I^* в выражение для N_1 , находим максимальную полезную мощность:

$$N_{1\max} = \frac{n \mathcal{E}^2}{4r} \approx 8,17 \text{ Вт}.$$

8.39. $U = \frac{\mathcal{E} \pm \sqrt{\mathcal{E}^2 - 4Nr}}{2}$, $U_1 = 9 \text{ В}$, $U_2 = 1 \text{ В}$; $\eta = \frac{R}{R+r}$,
 $\eta_1 = 0,9$, $\eta_2 = 0,1$.

Решение. Выделяющаяся на внешнем сопротивлении R мощность $N = IU$, где падение напряжения U на сопротивлении R равно

$$U = \mathcal{E} - Ir. \text{ Следовательно, ток в цепи равен: } I = \frac{\mathcal{E} - U}{r}.$$

Таким образом, $N = \frac{\mathcal{E}U - U^2}{r}$, откуда

$$U = \frac{\mathcal{E} \pm \sqrt{\mathcal{E}^2 - 4Nr}}{2}.$$

Подставляя численные данные, находим: $U_1 = 9 \text{ В}$, $U_2 = 1 \text{ В}$. Неоднозначность результата связана с тем, что одна и та же мощность может выделяться на различных внешних сопротивлениях, причем каждому R соответствует свой ток I :

при $U_1 = 9 \text{ В}$ $I_1 = 1 \text{ А}$, а $R_1 = N / I_1^2 = 9 \text{ Ом}$;

при $U_2 = 1 \text{ В}$ $I_2 = 9 \text{ А}$, а $R_2 = N / I_2^2 = 1/9 \text{ Ом}$.

КПД η есть отношение полезной мощности ко всей мощности, выделяемой аккумулятором:

$$\eta = \frac{IU}{I\mathcal{E}} = \frac{U}{\mathcal{E}}, \text{ где } U = IR = \frac{\mathcal{E}R}{R+r}.$$

Следовательно, $\eta = \frac{R}{R+r}$. Для найденных ранее значений R_1 и R_2 получаем: $\eta_1 = 0,9$ и $\eta_2 = 0,1$.

8.40. $R_3 = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$.

Решение. Обозначим стрелками направления токов так, как показано на рис. О.8.40. Применим первое правило Кирхгофа к верхнему узлу и второе правило Кирхгофа к контурам $R_1 \mathcal{E}_1 R_3$ и $R_2 \mathcal{E}_2 R_3$:

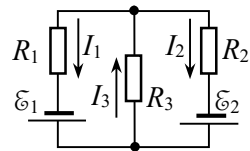


Рис. О.8.40.

$$I_1 + I_2 = I_3;$$

$$I_1 R_1 + I_3 R_3 = \mathcal{E}_1;$$

$$I_2 R_2 + I_3 R_3 = \mathcal{E}_2.$$

Умножив второе уравнение на R_2 , а третье на R_1 и сложив почленно, с учетом первого уравнения получим:

$$I_3 = \frac{\mathcal{E}_1 R_2 + \mathcal{E}_2 R_1}{R_1 R_2 + R_3 (R_1 + R_2)}.$$

Выделяемая на резисторе R_3 тепловая мощность равна:

$$N = I_3^2 R_3 = \frac{(\mathcal{E}_1 R_2 + \mathcal{E}_2 R_1)^2 R_3}{[R_1 R_2 + R_3 (R_1 + R_2)]^2}.$$

Чтобы найти, при каком значении R_3 мощность максимальна, возьмем производную dN/dR_3 и приравняем её нулю:

$$\frac{dN}{dR_3} = \frac{(\mathcal{E}_1 R_2 + \mathcal{E}_2 R_1)^2 [R_1 R_2 + R_3 (R_1 + R_2)]}{[R_1 R_2 + R_3 (R_1 + R_2)]^3} = 0,$$

откуда определяем искомое значение R_3 :

$$R_3 = R_1 R_2 / (R_1 + R_2).$$

$$8.41. N_1 = N_4 = \frac{(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)^2}{4R}, \quad N_2 = N_3 = \frac{(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)^2}{4R}.$$

$$8.42. \eta = \frac{\eta_1 \eta_2}{\eta_1 + \eta_2 - \eta_1 \eta_2} = 0,375.$$

Решение. Пусть сопротивление нагрузки R , а внутренние сопротивления аккумуляторов r_1 и r_2 соответственно. По определению КПД $\eta_i = \frac{IU}{I\mathcal{E}} = \frac{U}{\mathcal{E}} = \frac{R}{R + r_i}$, откуда $r_i = \left(\frac{1}{\eta_i} - 1\right)R$.

При последовательном соединении аккумуляторов общая ЭДС цепи по модулю равна $|\mathcal{E}_\Sigma| = |\mathcal{E}_1 \pm \mathcal{E}_2|$, а падение напряжения на нагрузке составляет: $U_R = \frac{|\mathcal{E}_\Sigma|}{R + r_1 + r_2}$.

При этом КПД батареи аккумуляторов оказывается равным:

$$\eta = \frac{U_R}{|\mathcal{E}_\Sigma|} = \frac{R}{R + r_1 + r_2} = \frac{R}{R + \left(\frac{1}{\eta_1} - 1\right)R + \left(\frac{1}{\eta_2} - 1\right)R} = \frac{\eta_1 \eta_2}{\eta_1 + \eta_2 - \eta_1 \eta_2}.$$

Подставляя числа, получаем: $\eta = 0,375$.

$$8.43. I_0 = \frac{N_2 I_1^2 - N_1 I_2^2}{N_2 I_1 - N_1 I_2} \approx 62 \text{ А}.$$

Решение. Ток короткого замыкания равен $I_0 = \mathcal{E} / r$.

Записываем выражения КПД батареи через ток в нагрузке (см. решение задачи 8.38) для двух токов:

$$N_1 = I_1 \mathcal{E} - I_1^2 r, \quad N_2 = I_2 \mathcal{E} - I_2^2 r.$$

Поделив первое и второе уравнения на r и разделив первое уравнение на второе, получаем:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{(\mathcal{E}/r)I_1 - I_1^2}{(\mathcal{E}/r)I_2 - I_2^2} = \frac{I_0 I_1 - I_1^2}{I_0 I_2 - I_2^2}.$$

Из полученного соотношения определяем I_0 :

$$I_0 = \frac{N_2 I_1^2 - N_1 I_2^2}{N_2 I_1 - N_1 I_2} \approx 62 \text{ А}.$$

$$8.44. N = \varepsilon^2 \cdot \frac{2r + R_1}{2r(r + R_1)}.$$

$$8.45. q = \tau R (I_1^2 + I_2^2 + I_1 I_2) / 3.$$

Решение. Сила тока через резистор изменяется со временем по закону: $I = I_1 + \frac{I_2 - I_1}{\tau} t$. За время dt на резисторе выделится количество теплоты $dq = I^2 R dt$. Полное количество теплоты, выделившееся за время τ , находим интегрированием:

$$q = \int_0^{\tau} \left(I_1 + \frac{I_2 - I_1}{\tau} t \right)^2 dt = \frac{1}{3} \tau R (I_1^2 + I_2^2 + I_1 I_2).$$

$$8.46. Q = \frac{4q^2 R}{3\tau} = 180 \text{ Дж}.$$

$$8.47. q = C \cdot \frac{\varepsilon_1 (R_2 + r_2) + \varepsilon_2 (R_1 + r_1)}{R_1 + R_2 + r_1 + r_2}.$$

Указание. Ток течет только по контуру, содержащему источник ЭДС и сопротивления R_1 и R_2 . Используя закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС, следует определить напряжение на конденсаторе.

$$8.48. q = 5C\varepsilon / 21.$$

$$8.49. q = \varepsilon C / 5 \text{ для каждого конденсатора.}$$

Решение. Постоянный ток не проходит через конденсатор, поэтому по части резисторов ток не течет, и их можно удалить. Тогда эквивалентная схема соединения элементов цепи принимает вид, показанный на рис. О.8.49.

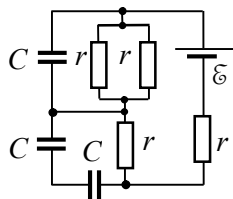


Рис. О.8.49.

Ток течет по правому контуру, сопротивление которого $R = r + r + r/2 = 5r/2$. Сила тока равна:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{2\varepsilon}{5r}.$$

Напряжение на верхнем конденсаторе равно падению напряжения на двух параллельно соединенных резисторах с общим сопротивлением $r/2$: $U_{C1} = Ir/2 = \varepsilon/5$.

Два нижних конденсатора соединены последовательно. Разность потенциалов на участке, где они находятся, равна падению напряжения на резисторе с сопротивлением r : $2U_{C2} = Ir = 2\varepsilon/5$, откуда $U_{C2} = \varepsilon/5$.

Как видно, напряжения на всех конденсаторах одинаковы, следовательно, заряды конденсаторов одинаковы и равны

$$q = CU = \varepsilon C/5.$$

$$8.50. U_{ab} = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{C_2}{C_1 + C_2} \right) \varepsilon.$$

$$8.51. q = RC \cdot \frac{|r_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_1 r_2|}{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)}.$$

$$8.52. Q = \frac{\varepsilon^2}{2} \cdot \left(C_2 + \frac{C_1 R^2}{(R + r)^2} \right) \approx 1,32 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}.$$

Решение. При замкнутом ключе напряжение на конденсаторе C_1 равно $U_1 = \frac{\varepsilon R}{R + r}$, конденсатор C_2 разряжен, энергия системы $W_1 = C_1 U_1^2 / 2$.

После размыкания ключа конденсатор C_1 разряжается, а конденсатор C_2 заряжается до напряжения $U_2 = \varepsilon$. При этом энергия системы становится равной

$$W_2 = C_2 U_2^2 / 2 = C_2 \varepsilon^2 / 2.$$

При зарядке конденсатора через источник тока пройдет заряд $q_2 = C_2 \mathcal{E}$, в результате чего источник совершит работу $A = q_2 \mathcal{E} = C_2 \mathcal{E}^2$.

По закону сохранения энергии $W_1 + A = W_2 + Q$, откуда находим количество выделившейся теплоты:

$$Q = \frac{\mathcal{E}^2}{2} \cdot \left(C_2 + \frac{C_1 R^2}{(R+r)^2} \right) \approx 1,32 \cdot 10^{-4} \text{ Дж.}$$

$$\mathbf{8.53.} \quad Q_R = \frac{(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)^2 C_1 C_2 R}{2(C_1 + C_2) \cdot (R + r_2)}.$$

Решение. Первоначально конденсатор C_1 имеет заряд $q_1 = C_1 \mathcal{E}_1$. После размыкания ключа K_1 и замыкания ключа K_2 происходит перезарядка конденсаторов: конденсатор C_2 приобретет заряд q_2 , а заряд конденсатора C_1 станет равен $q'_1 = q_1 + q_2$.

Распределение напряжений на элементах замкнутого контура, содержащего ЭДС \mathcal{E}_2 , с учетом связи заряда и напряжения конденсаторов $U = q/C$ имеет вид:

$$\frac{q_1 + q_2}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} = \mathcal{E}_2, \text{ откуда находим:}$$

$$q_2 = \frac{(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) C_1 C_2}{C_1 + C_2} \text{ и } q'_1 = C_1 \mathcal{E}_1 + \frac{(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

При перезарядке конденсаторов через источник ЭДС \mathcal{E}_2 пройдет заряд q_2 , и источник совершит работу $A = q_2 \mathcal{E}_2$. Энергии конденсаторов после перезарядки станут равны

$$W_1 = q_1'^2 / (2C_1) \text{ и } W_2 = q_2^2 / (2C_2),$$

а до этого энергия системы была $W_0 = C_1 U_1^2 / 2 = C_1 \mathcal{E}_1^2 / 2$. По закону сохранения энергии $W_0 + A = W_1 + W_2 + Q$, откуда находим количество теплоты, выделившееся во всей цепи:

$$Q = \frac{(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)^2 C_1 C_2}{2(C_1 + C_2)}.$$

Поскольку теплота выделялась на сопротивлениях R и r_2 , по которым протекал один и тот же ток $I(t)$, то количество теплоты, выделившееся за все время во всей цепи, равно

$$Q = \int_0^{\infty} I^2(t)(R + r_2) dt,$$

а выделившееся на резисторе

$$R - Q_R = \int_0^{\infty} I^2(t)R dt, \text{ т.е. } Q_R = \frac{QR}{R + r_2}.$$

Окончательно получаем:

$$Q_R = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 C_1 C_2 R}{2(C_1 + C_2) \cdot (R + r_2)}.$$

$$8.54. \Delta\varphi = \frac{C_2 R_2 - C_1 R_1}{(C_1 + C_2 + C_3) \cdot (R_1 + R_2 + r)} \epsilon.$$

§9. Магнитные поля проводников с током

$$9.1. B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{r_1^2 r_2^2}} \approx 2,6 \cdot 10^{-4} \text{ Тл.}$$

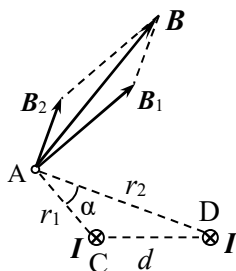


Рис. О.9.1.

Решение. Магнитная индукция поля бесконечного провода с постоянным током I на расстоянии r от него равна $B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I}{r}$.

Направления векторов индукции от двух проводов с токами показано на рис. О.9.1: вектор B_1 перпендикулярен линии AC , а вектор B_2 — линии AD . $\angle B_1 A B_2 = \angle C A D = \alpha$ (как углы с взаимно перпендикулярными сторонами).

Индукция магнитного поля B равна векторной сумме B_1 и B_2 . По теореме косинусов в треугольнике BB_1A находим B :

$$B^2 = B_1^2 + B_2^2 - 2B_1 B_2 \cos(\pi - \alpha) = B_1^2 + B_2^2 + 2B_1 B_2 \cos \alpha.$$

В свою очередь, для треугольника ACD

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \alpha, \text{ откуда } \cos \alpha = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2}.$$

Модуль индукции магнитного поля в точке A равен:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{r_1^2 r_2^2}} \approx 2,6 \cdot 10^{-4} \text{ Тл}.$$

9.2. а) $B = 0$; б) $B = \frac{2\mu_0 I}{\pi d} = 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ Тл}$;

в) $B = \frac{\sqrt{2} \mu_0 I}{\pi d} \approx 1,13 \cdot 10^{-4} \text{ Тл}.$

9.3. $B_A = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} (1 + \sqrt{2})$, $B_C = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}.$

Решение. а). Индукция B_A в т. А равна сумме вкладов от двух полубесконечных проводов. Модуль индукции одного провода вычислим по формуле:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{d} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2),$$

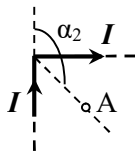


Рис. О.9.3.

где α_1 и α_2 – углы, которые составляют с направлением на точку А крайние элементы провода с током, которые отсчитываются от направления тока (см. рис. О.9.3). В данном случае для провода, изображенного на рис. О.9.3 вертикально, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 3\pi/4$, расстояние от провода до точки А $d = a\sqrt{2}/2$.

Индукция магнитного поля от этого провода в т.А направлена в плоскость рисунка и по модулю равна:

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I\sqrt{2}}{a} \left(\cos 0 - \cos \frac{3\pi}{4} \right) = \frac{\mu_0 I \sqrt{2}}{4\pi a} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

От горизонтального полубесконечного провода индукция также в точке А направлена в рисунок, по модулю совпадает с индукцией первого провода. В итоге индукция в т.А по модулю равна

$$B_A = 2B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} (1 + \sqrt{2})$$

и направлена в плоскость рисунка.

б). В т.С вклад в индукцию от горизонтального провода равен нулю, а от вертикального равен по модулю половине индукции бесконечного провода, находящегося от т. С на расстоянии a :

$$B_C = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}.$$

9.4. Магнитная индукция увеличится в 1,5 раза.

$$9.5. B_A = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{4}.$$

$$9.6. B = nB_1 = \frac{\mu_0 In}{2\pi R} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}; \lim_{n \rightarrow \infty} B = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

Решение. Векторы магнитной индукции полей от каждой из сторон многоугольника в его центре направлены одинаково, поэтому достаточно рассчитать индукцию поля B_1 от одной стороны. Каждая сторона видна из центра под углом $\alpha_0 = 2\pi/n$ (рис. О.9.6).

$$\angle OAC = \angle OCD = \pi/2 - \alpha_0/2 = \pi/2 - \pi/n.$$

Модуль индукции от одной стороны рассчитаем по формуле:

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{d} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2),$$

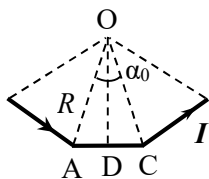


Рис. О.9.6.

$$\text{где } d = OD = R \cos \frac{\alpha_0}{2} = R \cos \frac{\pi}{n},$$

$$\alpha_1 = \angle OAC = \pi/2 - \pi/n,$$

$$\alpha_2 = \pi - \angle OCA = \pi/2 + \pi/n.$$

Для значения B_1 получаем:

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I \sin(\pi/n)}{R \cos(\pi/n)} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}.$$

Индукция поля всего многоугольника в его центре равна

$$B = nB_1 = \frac{\mu_0 In}{2\pi R} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}.$$

При $n \rightarrow \infty$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg}(\pi/n)}{\pi/n} = 1$, поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} B = \frac{\mu_0 I}{2R}$, что совпадает с формулой для индукции B магнитного поля в центре кругового витка радиусом R с током I .

$$9.7. B_A = \frac{\mu_0 I \sqrt{10}}{12\pi d}.$$

$$9.8. B_O = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} (\pi + 1).$$

$$9.9. B_O = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \sqrt{\pi^2 + 1}.$$

$$9.10. B = \frac{\mu_0 I}{16} \left(\frac{3}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

Решение. Индукция магнитного поля в т. О от радиально направленных прямых участков провода равна нулю.

Если магнитное поле создаётся частью кольца радиусом R длиной $\Delta l = R\varphi$ (рис. О.9.10), то индукция магнитного поля в центре кольца равна:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{R^2} \cdot \varphi R = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I\varphi}{R}.$$

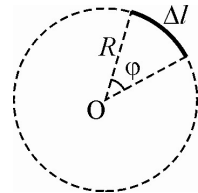


Рис. О.9.10.

Следовательно, от частей кольца радиусов a и b модули индукции в т. О равны соответственно:

$$B_a = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cdot \frac{3\pi}{4} = \frac{3\mu_0 I}{16a}, \quad B_b = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\mu_0 I}{16b}.$$

Так как векторы B_a и B_b сонаправлены, модуль индукции в т. О равен $B = \frac{\mu_0 I}{16} \left(\frac{3}{a} + \frac{1}{b} \right)$.

$$9.11. B = 0.$$

$$9.12. B = \frac{\mu_0 I}{\pi R} \left(\arcsin \frac{a}{R} + \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{a} \right).$$

Решение. Длина l прямых участков контура: $l = 2\sqrt{R^2 - a^2}$.
Индукция магнитного поля от каждого из этих участков равна:

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2), \text{ где } \cos \alpha_1 = -\cos \alpha_2 = \frac{l/2}{R} = \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{R}.$$

$$\text{Следовательно, } B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I\sqrt{R^2 - a^2}}{aR}.$$

Каждая из двух дуг контура опирается на центральный угол φ , для которого $\sin(\varphi/2) = a/R$, откуда $\varphi = 2\arcsin(a/R)$. Индукция магнитного поля в центре дуги равна:

$$B_2 = \frac{\mu_0 I \varphi}{4\pi R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \arcsin \frac{a}{R}.$$

Складывая вклады от всех элементов контура, находим модуль индукции в его центре:

$$B = 2(B_1 + B_2) = \frac{\mu_0 I}{\pi R} \left(\arcsin \frac{a}{R} + \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{a} \right).$$

$$9.13. \text{ а) } B = \frac{9\mu_0 I}{2\pi a}; \text{ б) } B = 0.$$

$$9.14. B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\pi + 4).$$

$$9.15. B = \frac{2\mu_0 I a^2}{\pi(a^2 + x^2)\sqrt{2a^2 + x^2}}.$$

Решение. Направим ось X вдоль перпендикуляра к плоскости рамки, начало координат совместим с её центром. Индукция B магнитного поля в точке A с координатой x равна сумме индукций полей сторон рамки с током I $B = \sum_{i=1}^4 B_i$. Так как стороны рамки

расположены симметрично относительно точки A , суммарная индукция \mathbf{B} направлена вдоль оси X (рис. О.9.15) и равна по модулю сумме проекций векторов \mathbf{B}_i на ось X :

$$B = 4B_{1x} = 4B_1 \cos \beta,$$

где B_1 – модуль индукции магнитного поля от одной стороны, β – угол между \mathbf{B}_1 и осью X . Угол $\beta = \angle AO_1O$ (как углы с взаимно перпендикулярными сторонами).

Модуль вектора \mathbf{B}_1 найдем по формуле индукции поля, создаваемого прямым отрезком с током I на перпендикуляре к отрезку, проведенном через его середину:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \cdot 2 \cos \alpha = \frac{\mu_0 I \cos \alpha}{2\pi r},$$

где r – расстояние от середины стороны CD (точка O_1) до точки A , α – угол между отрезком CD и направлением на точку A из конца отрезка ($\angle ADC$ на рис. О.9.15).

Для r получаем:
$$r = \sqrt{x^2 + a^2};$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{x^2 + (a\sqrt{2})^2}} = \frac{a}{\sqrt{x^2 + 2a^2}}, \quad \cos \beta = \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

Таким образом, модуль индукции поля рамки на расстоянии x от её центра равен:

$$B = \frac{2\mu_0 I a^2}{\pi(a^2 + x^2)\sqrt{2a^2 + x^2}}.$$

9.16. $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \sqrt{\pi^2 + 1}$, вектор \mathbf{B} лежит в плоскости XZ под

углом α к оси OX , где $\operatorname{tg} \alpha = 1/\pi \approx 0,32$.

9.17. $p_m = \frac{\pi NI}{3} (R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2)$.

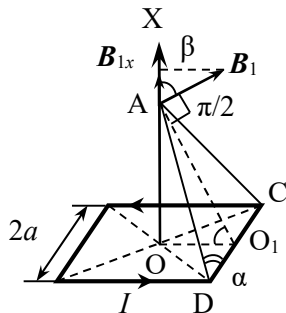


Рис. О.9.15.

Решение. В полярных координатах уравнение спирали можно представить в виде: $r(\varphi) = R_2 + \frac{R_1 - R_2}{2\pi N} \varphi$, где $0 \leq \varphi \leq 2\pi N$.

Разобьем спираль на малые секторы площадью $dS = \frac{1}{2} r^2(\varphi) d\varphi$. Магнитный момент такого сектора равен

$$dp_m = IdS = \frac{I}{2} r^2(\varphi) d\varphi.$$

Полный магнитный момент спирали

$$p_m = \frac{I}{2} \int_0^{2\pi N} \left(R_2 + \frac{R_1 - R_2}{2\pi N} \varphi \right)^2 d\varphi = \frac{\pi NI}{3} (R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2).$$

9.18. $B = \frac{\mu_0 I}{R} \sqrt{1 + \sqrt{2}/2}$; вектор \mathbf{B} направлен за плоскость рисунка и составляет с плоскостью витка №1 угол φ такой, что $\operatorname{tg}\varphi = 1/(1 + \sqrt{2}) \approx 0,414$ при отсчете углов по часовой стрелке, если смотреть на шар сверху.

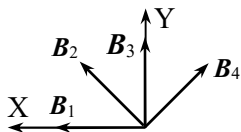


Рис. О.9.18.

Решение. Витки с током создают магнитные поля, индукция каждого из которых перпендикулярна плоскости соответствующего витка. Взаимная ориентация векторов индукции четырех витков показана на рис. О.9.18. Видно, что x -компоненты векторов \mathbf{B}_2 и \mathbf{B}_4 компенсируют друг друга.

Модуль магнитной индукции одного витка в его центре равен $B_1 = \frac{\mu_0 I}{2R}$. Проекция суммарного вектора индукции в центре шара на оси X и Y составляют:

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{2R} (1 + \sqrt{2}), \quad B_y = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

Таким образом,

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \frac{\mu_0 I}{R} \sqrt{1 + \sqrt{2}/2}.$$

Вектор \mathbf{B} направлен за плоскость рисунка и составляет с плоскостью витка №1 угол φ такой, что $\operatorname{tg}\varphi = 1/(1 + \sqrt{2}) \approx 0,414$ при отсчете углов по часовой стрелке, если смотреть на шар сверху.

$$9.19. B = \frac{4\mu_0 I}{\pi a}; \text{ вектор } \mathbf{B} \text{ направлен перпендикулярно плоскости рисунка из нее и составляет с передней гранью куба угол } \pi/4 \text{ при отсчете углов по часовой стрелке, если смотреть на куб сверху.}$$

9.20. $B = \frac{\mu_0 I}{R} \cdot \frac{1 + 5\sqrt{5}}{20\sqrt{10}}$.

$$9.21. B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \int_l^{l+b} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \ln\left(1 + \frac{b}{l}\right).$$

Решение. Введём декартову систему координат, направив ось OX перпендикулярно ленте, а ось Y – вдоль ленты. Начало координат совместим с точкой A .

Разобьём ленту на тонкие полоски толщиной dx . Каждую такую полоску можно рассматривать как линейный ток $dI = \frac{I}{b} dx$. Этот ток создает в точке A магнитное поле с индукцией

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi bx} dx,$$

где x – расстояние от т. A до выделенной полоски.

Модуль индукции магнитного поля всей ленты в точке A находим интегрированием:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \int_l^{l+b} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \ln\left(1 + \frac{b}{l}\right).$$

Вектор индукции магнитного поля направлен перпендикулярно плоскости XY .

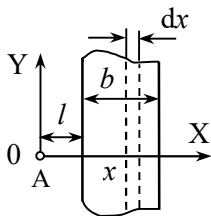


Рис. О.9.21.

$$9.22. \quad B = \frac{\mu_0 I}{\pi b} \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{2h} \right);$$

вектор индукции магнитного поля лежит в плоскости, параллельной плоскости ленты, и направлен перпендикулярно ленте.

Указание. Выбрать декартову систему координат с началом отсчета на ленте в её середине, направив ось X вдоль ленты, ось Y поперек ленты, а ось Z перпендикулярно плоскости ленты. Разбить ленту на узкие полоски (см. решение задачи 9.21) и найти вклад в индукцию поля такой полоски в точке на оси Z (с учетом направления вектора $d\mathbf{B}$). Далее суммировать векторы $d\mathbf{B}$ с учетом симметрии задачи.

$$9.23. \quad B = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}.$$

Указание. См. решение задачи 9.21.

$$9.24. \quad B = \frac{\mu_0 I}{3a}.$$

Вектор индукции \mathbf{B} направлен параллельно грани, лежащей напротив ребра проводника.

Решение. Выберем декартову систему координат с началом отсчета на ребре, вблизи которого будем определять индукцию магнитного поля. Направим ось X вдоль тока, ось Z перпендикулярно грани, находящейся напротив этого ребра, ось Y параллельно этой грани (рис. О.9.24 а).

Выделим в поперечном сечении проводника слой малой толщины dz , параллельный нижней грани. Рассмотрим узкую полоску шириной dy , находящуюся на расстоянии y от её центра (т. С на рис. О.9.24 б). Определим ее вклад в индукцию магнитного поля $d\mathbf{B}_+$ в точке А на ребре проводника (имеющей координату $z = 0$).

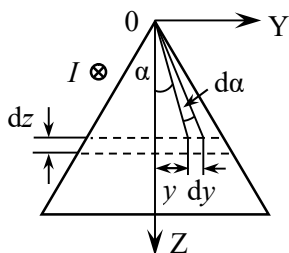


Рис. О.9.24 а.

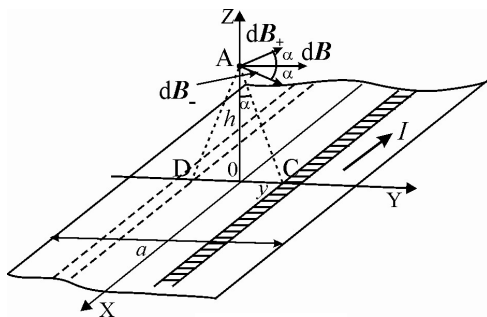


Рис. О.9.24 б.

Выделенную полоску можно рассматривать как линейный бесконечно длинный проводник с током $dI = j dy dz$, где j – плотность тока. Так как ток распределен по сечению равномерно, то

$$j = \frac{I}{S_{\text{сеч.}}} = \frac{4I}{a^2 \sqrt{3}},$$

где $S_{\text{сеч.}}$ – площадь поперечного сечения проводника.

Вектор $d\mathbf{B}_+$ такого проводника направлен перпендикулярно отрезку AC и по модулю равен:

$$dB_+ = \frac{\mu_0 dI(y)}{2\pi r} = \frac{\mu_0 j}{2\pi r} dz dy = \frac{\mu_0 j dz dy}{2\pi \sqrt{z^2 + y^2}}.$$

Выделим ещё одну такую же полоску, расположенную симметрично первой относительно оси X (на рис. О.9.24 б эта полоска заштрихована). Вектор магнитной индукции $d\mathbf{B}_-$ от такой полоски направлен перпендикулярно отрезку AD и равен по модулю dB_+ . В силу симметрии сумма проекций векторов $d\mathbf{B}_+$ и $d\mathbf{B}_-$ на ось Z равна нулю, и для определения суммарной индукции магнитного поля двух полосок нужно сложить только горизонтальные составляющие этих векторов:

$$dB_{\text{двух полосок}} = 2dB_+ \cos \gamma = \frac{\mu_0 j dz dy}{\pi \sqrt{z^2 + y^2}} \cdot \frac{z}{\sqrt{z^2 + y^2}} = \frac{\mu_0 j z dz dy}{\pi (z^2 + y^2)}.$$

Теперь находим модуль индукции в т. А от всего слоя с координатой z толщиной dz :

$$dB_{\text{слоя}} = \frac{\mu_0 j dz}{\pi} \int_0^{y_{\text{края}}} \frac{z dy}{z^2 + y^2} = \frac{\mu_0 j dz}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y_{\text{кр.}}}{z} = \frac{\mu_0 j}{\pi} \cdot \frac{\pi}{6} dz = \frac{\mu_0 j}{6} dz.$$

Индукцию вблизи ребра проводника находим, суммируя индукции всех слоев, т.е. интегрируя по dz в пределах от 0 до высоты сечения проводника $h = a\sqrt{3}/2$:

$$B = \frac{\mu_0 j}{6} \int_0^{a\sqrt{3}/2} dz = \frac{\mu_0 j}{6} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\mu_0 j a \sqrt{3}}{12}.$$

Подставляя выражение для плотности тока j , окончательно получаем:

$$B = \frac{\mu_0 a \sqrt{3}}{12} \cdot \frac{4I}{a^2 \sqrt{3}} = \frac{\mu_0 I}{3a}.$$

Вектор индукции \mathbf{B} направлен параллельно грани, противолежащей ребру проводника.

9.25. а) $B_1 = \mu_0 I n \cos(\pi/4) = 3,15 \text{ мТл}$; б) $B_2 = B_1 / 2 \approx 1,6 \text{ мТл}$.

9.26. $\frac{l}{d} > \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 0,0\alpha}} = 5$.

Решение. Индукция магнитного поля в соленоиде равна

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 I n (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2),$$

где α – угол, под которым видны верхние края торцов соленоида из точки, в которой определяется индукция.

Для центра соленоида

$$\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2 = \frac{l/2}{\sqrt{R^2 + (l/2)^2}} = \frac{l}{\sqrt{4R^2 + l^2}}.$$

Тогда индукция поля B_0 в центре соленоида равна

$$B_0 = \mu_0 I n \cdot \frac{l}{\sqrt{4R^2 + l^2}} = \mu_0 I N \cdot \frac{1}{\sqrt{d^2 + l^2}}.$$

При расчете по формуле для очень длинного соленоида $B_{\text{о прибрл}} = \mu_0 In = \mu_0 IN / l$. При использовании этой формулы относительная погрешность составляет:

$$\eta = \left| B - B_{\text{прибрл}} \right| / B_{\text{прибрл}}.$$

Подставив полученные значения, находим:

$$\eta = 1 - \frac{l}{\sqrt{d^2 + l^2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (d/l)^2}} \cong 1 - \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2}{l^2} \right) = \frac{d^2}{2l^2}.$$

Чтобы относительная погрешность была меньше $\alpha\%$, должно выполняться условие:

$$\frac{d^2}{2l^2} < 0,0\alpha, \text{ откуда } \frac{l}{d} > \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 0,0\alpha}} = 5.$$

$$9.27. \text{ а) } \mathbf{B} = \frac{\mu_0 Q}{2\pi R} \boldsymbol{\omega}; \text{ б) } \mathbf{p}_m = \frac{QR^2}{4} \boldsymbol{\omega}.$$

Решение. Разобьем диск на кольца малой толщины dr . Так как каждое такое кольцо вращается вокруг своей оси, то оно может быть представлено неподвижным кольцом, по которому течет ток

$$dI(r) = \frac{dq}{T} = \frac{\sigma dS}{T} = \frac{\sigma \cdot 2\pi r dr}{T} = \sigma \omega r dr,$$

где T – период обращения сферы вокруг своей оси, $\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$ – поверхностная плотность заряда диска.

Вклад в индукцию магнитного поля такого кольца с током в его центре сонаправлен с $\boldsymbol{\omega}$ и по модулю равен:

$$dB = \frac{\mu_0 dI(r)}{2r} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} dr = \frac{\mu_0 Q \omega}{2\pi R^2} dr.$$

Интегрируя по r от 0 до R , получим индукцию магнитного поля в центре диска:

$$\mathbf{B} = \int_0^R \frac{\mu_0 Q}{2\pi R^2} \boldsymbol{\omega} dr = \frac{\mu_0 QR}{2\pi R^2} \boldsymbol{\omega} = \frac{\mu_0 Q}{2\pi R} \boldsymbol{\omega}.$$

Магнитный момент кольца с током равен

$$d\mathbf{p}_m = dI(r) S n = \sigma r \omega \cdot \pi r^2 |dr = \frac{Q}{R^2} \boldsymbol{\omega} r^3 dr,$$

а магнитный момент всего диска

$$p_m = \int_0^R \frac{Q}{R^2} \omega r^3 dr = \frac{QR^2}{4} \omega.$$

$$9.28. B = \frac{\mu_0 Q \omega}{2\pi}.$$

Решение. Вращающийся цилиндр может быть представлен как неподвижный соленоид (см. решение задачи 9.27), по поверхности которого течет ток с линейной плотностью

$$i = \frac{Q}{T} = \frac{Q\omega}{2\pi},$$

где T – период обращения цилиндра вокруг своей оси.

Индукция магнитного поля на оси длинного цилиндра равна

$$B = \mu_0 I n = \mu_0 i,$$

где I – ток в одном витке, n – число витков на единицу длины.

Подставляя i , находим магнитную индукцию на оси

$$\text{вращающегося цилиндра: } B = \frac{\mu_0 Q \omega}{2\pi}.$$

$$9.29. Q = \frac{6\pi RB}{\mu_0 \omega}.$$

$$9.30. a) p_m = \frac{QR^2}{2} \omega; \quad б) p_m = \frac{QR^2}{4} \cdot \frac{2h+R}{h+R} \omega;$$

$$в) p_m = \frac{QR^2}{4} \omega.$$

$$9.31. p_m = \frac{QR^2}{5} \omega.$$

Решение. Введем сферическую систему координат, совместив начало отсчета с центром шара. Выберем внутри шара малый элемент объемом $dV = r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta$, находящийся на расстоянии r от центра шара (см. рис. О.9.31). Заряд этого элемента

$dq = \rho dV$, где $\rho = \frac{Q}{4\pi R^3 / 3} = \frac{3Q}{4\pi R^3}$ – объемная плотность заряда шара.

При вращении шара движущийся заряд dq эквивалентен току

$$dI(r) = \frac{dq}{T} = \frac{\omega dq}{2\pi},$$

который течет по окружности радиуса $r_c = r \sin \theta$. Магнитный момент этого кругового тока равен:

$$\begin{aligned} dp_m &= dI(r) S n = \frac{dq}{2\pi} \omega \cdot \pi r_c^2 = \\ &= \frac{\rho r^2 \sin \theta}{2\pi} \pi (r \sin \theta)^2 \omega \, dr d\varphi d\theta = \frac{\rho r^4 \sin^3 \theta \omega}{2} dr d\varphi d\theta. \end{aligned}$$

Полный магнитный момент шара находим интегрированием:

$$p_m = \frac{\rho \omega}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^4 dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^3 \theta \, d\theta = \frac{3Q}{4\pi R^3} \cdot \frac{\omega}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{R^5}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{QR^2}{5} \omega.$$

$$9.32. \quad p_m = \frac{Q}{5} \cdot \frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3} \omega; \quad \mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 Q}{20\pi} \cdot \frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3} \cdot \frac{3(\omega \mathbf{r}) \mathbf{r} - r^2 \omega}{r^5}.$$

$$9.33. \quad p_m = \frac{5QR^2}{21} \omega.$$

Указание. Объемная плотность заряда распределена по закону $\rho(r) = \alpha r^2$. Константу α находим, рассчитав полный заряд шара

$$Q = \int_0^R \alpha r^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi \alpha R^5}{5}. \text{ Далее решение задачи аналогично решению задачи 9.31.}$$

$$9.34. \quad \mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{11QR^2}{36} \cdot \frac{3(\omega \mathbf{r}) \mathbf{r} - r^2 \omega}{r^5}.$$

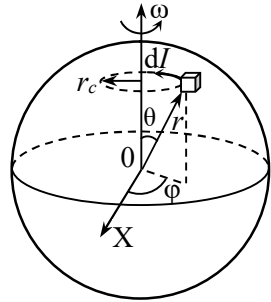


Рис. О.9.31.

Указание. Поверхностная плотность заряда полушара равна $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2 / 2 + \pi R^2} = \frac{Q}{3\pi R^2}$. Далее находим магнитный момент p_m системы (см. в частности решение задачи 9.27) и определяем индукцию магнитного поля на больших расстояниях r от половины шара по формуле:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3(\mathbf{p}_m \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2 \mathbf{p}_m}{r^5},$$

где радиус-вектор \mathbf{r} проведен к точке из центра сферической поверхности.

9.35. а) $B = \mu_0 i / 2$ между плоскостями и $B = 3\mu_0 i / 2$ над и под плоскостями; б) $B = 0$ между плоскостями и $B = \mu_0 i$ над и под плоскостями; в) $B = \mu_0 i / 2$ между плоскостями и $B = 7\mu_0 i / 2$ над и под плоскостями

Указание. В случае бесконечной плоскости, по которой течет ток с поверхностной плотностью i , вектор магнитной индукции направлен параллельно плоскости и перпендикулярно направлению тока, а его модуль равен $B = \frac{\mu_0 i}{2}$.

9.36. а) $B = \mu_0 i / 2$ над и под плоскостями и $B = 3\mu_0 i / 2$ между плоскостями; б) $B = 0$ над и под плоскостями и $B = \mu_0 i$ между плоскостями; в) $B = \mu_0 i / 2$ над и под плоскостями и $B = 7\mu_0 i / 2$ между плоскостями.

9.37. $B = \mu_0 jx$ при $x \leq d$; $B = \mu_0 jd$ при $x \geq d$.

Решение. Сначала рассмотрим случай $x \leq d$. Выберем прямоугольный контур шириной $2x$ и длиной a , расположенный симметрично относительно середины пластины (рис. О.9.37). Этот контур охватывает ток $I_1 = 2jxa$.

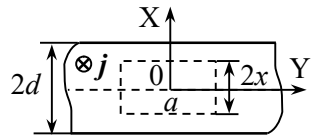


Рис. О.9.37.

Из симметрии задачи ясно, что вектор индукции \mathbf{B} имеет только y-компоненту (см. рис. О.9.37). По теореме о циркуляции вектора магнитной индукции для выбранного контура можно запи-

сать:

$$B \cdot 2a = \mu_0 \cdot 2jxa, \text{ откуда находим: } B = \mu_0 jx.$$

При $x \geq d$ выберем контур, охватывающий пластину, шириной $2x$ и длиной a . Этот контур пронизывает ток $I_2 = 2jda$. Аналогично первому случаю по теореме о циркуляции \mathbf{B} запишем:

$$B \cdot 2a = \mu_0 \cdot 2jda, \text{ откуда } B = \mu_0 jd.$$

$$9.38. B_{\parallel} = \frac{\mu_0 i \Omega}{4\pi}.$$

Решение. Выделим на поверхности малый участок площадью $\delta S = \delta a \cdot \delta b$ (см. рис. О.9.38). Введем декартову систему координат, направив ось Z перпендикулярно поверхности, ось X по направлению плотности тока \mathbf{i} , ось Y в плоскости поверхности, начало координат поместим в центр выбранного участка. Рассмотрим точку A , находящуюся на расстоянии r от выделенного участка. Радиус-вектор \mathbf{r} . A составляет с осью Z угол θ .

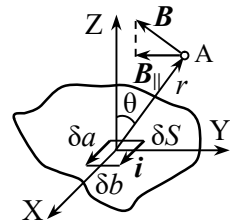


Рис. О.9.38.

По закону Био-Савара-Лапласа индукция магнитного поля в \mathbf{r} . A от элемента площадью δS , равен:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \delta b [\delta a \cdot \mathbf{i}, \mathbf{r}]}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 \delta S [\mathbf{i}, \mathbf{r}]}{4\pi r^3}.$$

Вектор $d\mathbf{B}$ лежит в плоскости YZ , а его компонента, параллельная плоскости участка δS и перпендикулярная вектору \mathbf{i} , является y -компонентой вектора $d\mathbf{B}$:

$$dB_{\parallel} = dB_y = \frac{\mu_0 \delta S [\mathbf{i}, \mathbf{r}]_y}{4\pi r^3}.$$

Поскольку $[\mathbf{i}, \mathbf{r}]_y = iz = ir \cos \theta$, получаем:

$$dB_{\parallel} = dB_y = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \frac{\delta S}{r^2}.$$

По определению телесный угол, под которым поверхность δS видна из точки наблюдения, равен $\delta \Omega = \delta S \cos \theta / r^2$, поэтому

$$dB_{\parallel} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \delta \Omega.$$

Суммируя вклады в магнитную индукцию всех участков плоской поверхности, получаем доказываемое соотношение:

$$B_{\parallel} = \frac{\mu_0 i \Omega}{4\pi}.$$

$$9.39. a) B(r_1) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r_1 = 2,5 \text{ мТл}; \quad б) B(r_2) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} = 2 \text{ мТл}.$$

$$9.40. I_1 = \frac{R^2}{r_1 r_2} I.$$

$$9.41. B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1^2} r \text{ при } r < R_1; \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \text{ при } R_1 \leq r \leq R_2; \quad B = 0$$

при $r \geq R_2$.

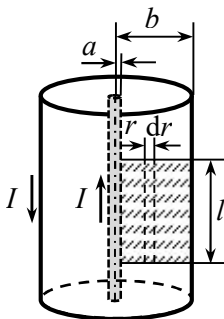
$$9.42. B = 0 \text{ при } r < R_1; \quad B(r) = \frac{\mu_0 j}{2} \cdot \left(r - \frac{R_1^2}{r} \right) \text{ при } R_1 \leq r \leq R_2;$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 j (R_2^2 - R_1^2)}{2r} \text{ при } r \geq R_2.$$

$$9.43. \Phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \left(\frac{b}{a} \right).$$

Решение. Внешний проводник кабеля поля во внутренней области не создает. Магнитное поле в области $r < b$ создается только внутренним проводником, его индукция в области $a < r < b$ равна

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$



Рассмотрим прямоугольный контур длиной l , ограниченный поверхностями внутреннего и внешнего цилиндров вдали от концов кабеля (на рис. О.9.43 плоскость контура заштрихована).

Рис. О.9.43.

Разобьем плоскость контура на узкие полоски толщиной dr , находящиеся на расстоянии r от оси системы. Векторы индукции магнитного поля тока I , протекающего по внутреннему цилиндру, перпендикулярны плоскости контура. Поток индукции через выделенную полоску равен:

$$d\Phi = BdS = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l dr.$$

Полный поток магнитной индукции через площадь контура:

$$\Phi = \int_a^b \frac{\mu_0 I l dr}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) I.$$

9.44. При $r \leq R$ $B(r) = \mu_0 \alpha r^3 / 4$; при $r \geq R$ $B(r) = \frac{\mu_0 \alpha R^4}{4r}$.

Решение. Сначала рассмотрим область $r \leq R$. Проведём через точку, находящуюся на расстоянии r от оси проводника, круговой замкнутый контур L , совпадающий с линией магнитной индукции. Чтобы найти ток, охватываемый контуром, разобьем плоскость контура на кольца малой толщины dr . По каждому из таких колец протекает ток $dI(r) = j(r) \cdot dS = j(r) \cdot 2\pi r dr$. Полный ток $I(r)$, охватываемый рассматриваемым контуром, равен:

$$I(r) = \int_0^r \alpha r^2 \cdot 2\pi r dr = \alpha \pi r^4 / 2.$$

Теорему о циркуляции вектора магнитной индукции по данному контуру можно записать в виде:

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \alpha \pi r^4 / 2, \text{ откуда получаем: } B(r) = \mu_0 \alpha r^3 / 4.$$

Для области $r \geq R$ круговой контур радиуса r охватывает весь ток, текущий по проводу:

$$I = \int_0^R \alpha r^2 \cdot 2\pi r dr = \alpha \pi R^4 / 2.$$

В этом случае $B \cdot 2\pi r = \mu_0 \alpha \pi R^4 / 2$, откуда $B(r) = \frac{\mu_0 \alpha R^4}{4r}$.

9.45. $B = 0$ при $r \leq a$; b $B(r) = \mu_0 \alpha (1 - a/r)$ при $a \leq r \leq b$;
 $B(r) = \frac{\mu_0 \alpha (b - a)}{r}$ при $r \geq b$.

9.46. $B_{\text{внутри}}(r) = \frac{\mu_0 I d}{4\pi^2 R r}$, $B_{\text{вне}}(r) \approx \frac{\mu_0 I}{2\pi(r + R)}$.

Решение. Трубку с прорезью можно представить как суперпозицию сплошной трубки, по которой течет ток I , и тонкой узкой ленты шириной d , по которой течет ток с такой же линейной плотностью, как и по трубке, но противоположного направления. Тогда индукцию магнитного поля \mathbf{B} можно рассчитать как сумму вкладов \mathbf{B}_1 от трубки и \mathbf{B}_2 – от узкой ленты

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2.$$

По проводнику протекает ток $I_1 = \frac{I}{2\pi R - d} \cdot d \approx \frac{I d}{2\pi R}$.

Индукция поля трубки внутри неё $\mathbf{B}_1 = 0$, а вне трубки на расстоянии r от середины прорези на линии, перпендикулярной оси трубки и проходящей через середину щели,

$$B_1(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi(r + R)}.$$

Индукция поля тонкого проводника на расстоянии r от него равна

$$B_2(r) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I d}{4\pi^2 R r}.$$

Внутри трубки индукция равна: $B_{\text{внутри}}(r) = B_2(r) = \frac{\mu_0 I d}{4\pi^2 R r}$.

Вне трубки на линии, перпендикулярной оси трубки и проходящей через середину щели, индукции поля трубки и тонкого проводника направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны, так как направления токов в проводнике и трубке противоположны. Таким образом, индукция поля на расстоянии r от прорези равна:

$$B_{\text{вне}}(r) = B_1(r) + B_2(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi(r + R)} - \frac{\mu_0 I d}{4\pi^2 R r} \approx \frac{\mu_0 I}{2\pi(r + R)}.$$

$$9.47. \text{ При } x \leq d \quad B = \mu_0 jx / 2; \text{ при } x \geq d \quad B = \mu_0 jd \left(1 - \frac{d}{2x} \right).$$

Решение. Пластину с полостью можно представить как суперпозицию пластины без полости, по которой протекает ток с плотностью \mathbf{j} , и бесконечного цилиндра, вдоль оси которого течет ток с такой же объемной плотностью, но в противоположном направлении.

На линии ОХ векторы индукции магнитного поля пластины и цилиндра направлены противоположно вдоль одной линии, параллельной поверхности пластин и перпендикулярной вектору \mathbf{j} .

Индукция магнитного поля пластины на расстоянии x от оси полости равна (см. решение задачи 9.37):

$$B = \mu_0 jx \text{ при } x \leq d; \quad B = \mu_0 jd \text{ при } x \geq d.$$

Индукцию поля цилиндра на расстоянии x от его оси определяем по теореме о циркуляции вектора магнитной индукции, применяя её к круговому контуру радиуса x с центром на оси цилиндра. При $x \leq d$ $B_1 \cdot 2\pi x = \mu_0 j\pi x^2$, откуда $B_1 = \mu_0 jx / 2$; при $x \geq d$ $B_2 \cdot 2\pi x = \mu_0 j\pi d^2$, откуда $B_2 = \mu_0 jd^2 / (2x)$.

В соответствии с принципом суперпозиции индукция системы на линии ОХ:

$$B = B_1 - B_2 = \mu_0 jx / 2 \text{ при } x \leq d;$$

$$B = B_1 - B_2 = \mu_0 jd \left(1 - \frac{d}{2x} \right) \text{ при } x \geq d.$$

$$9.48. \quad B(x) = \frac{\mu_0 j}{4} \sqrt{4h^2 + x^2}.$$

Решение. Систему двух проводов с токами можно рассматривать как суперпозицию провода радиусом R с воздушной цилиндрической полостью радиусом r , находящейся на месте второго провода, и провода радиусом r , по которому течет ток с плотностью $\mathbf{j}/2$. По проводу с полостью течет ток с плотностью \mathbf{j} .

Сначала определим индукцию в полости первого провода. Рассматривая большой провод с пустой полостью радиусом r как суперпозицию сплошного проводника радиусом R с плотностью тока \mathbf{j} и проводника радиусом r , по которому течет ток с плотностью $-\mathbf{j}$, можно для произвольной точки внутри полости опреде-

лить индукцию магнитного поля $\mathbf{B}_{\text{пол}}$. Пусть радиус-вектор точки в полости относительно оси проводника есть \mathbf{a} , а относительно оси полости $-\mathbf{b}$ (рис. О.9.48). Тогда индукция в точке полости

$$\mathbf{B}_{\text{пол}} = \mathbf{B}_1(\mathbf{a}) + \mathbf{B}_2(\mathbf{b}).$$

Дважды применив теорему о циркуляции для круговых контуров, проходящих через рассматриваемую точку, с центрами в точках O и O_1 соответственно, получаем:

$$2\pi a B_1 = \mu_0 \pi a^2 j, \text{ откуда } B_1 = \mu_0 \frac{aj}{2}, B_2 = -\mu_0 \frac{bj}{2}$$

или с учетом направления векторов

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0}{2} [j\mathbf{a}], \quad \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0}{2} [-j\mathbf{b}],$$

$$\mathbf{B}_{\text{пол}} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0}{2} [j\mathbf{a}] + \frac{\mu_0}{2} [-j\mathbf{b}] = \frac{\mu_0}{2} [j\mathbf{h}],$$

где учтено, что для любой точки полости $\mathbf{h} + \mathbf{b} = \mathbf{a}$ (рис. О.9.48).

Таким образом, поле внутри полости однородно, и его индукция направлена перпендикулярно вектору \mathbf{h} , т.е. линии OO_1 . Для указанного на рис. О.9.48 направления вектора j вектор $\mathbf{B}_{\text{пол}}$ направлен вниз.

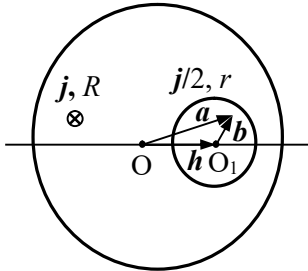


Рис. О.9.48.

Теперь найдем индукцию поля \mathbf{B}_r провода меньшего радиуса r . Выбрав круговой контур радиуса x с центром в т. O_1 , по теореме о циркуляции вектора магнитной индукции для этого контура можно записать:

$$2\pi x B_r = \mu_0 \pi x^2 \cdot (j/2), \text{ откуда } B_r = \mu_0 x j / 4.$$

На линии, перпендикулярной OO_1 , вектор \mathbf{B}_r параллелен OO_1 . Таким образом, векторы \mathbf{B}_r и $\mathbf{B}_{\text{пол}}$ на этой линии взаимно перпендикулярны, и модуль индукции суммарного поля на расстоянии x от т. O_1 равен:

$$B(x) = \sqrt{B_{\text{пол}}^2 + B_r^2} = \frac{\mu_0 j}{4} \sqrt{4h^2 + x^2}.$$

9.49. Индукция магнитного поля в пространстве вокруг провода равна $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, где r – расстояние от провода; под плоскостью $B = 0$.

$$\mathbf{9.50.} \quad B = \frac{\mu_0 I(N_1 - N_2)}{2\pi R} = 20 \text{ мТл.}$$

$$\mathbf{9.51.} \quad \text{При } r \leq R \quad \mathbf{A}^{in} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \pi r^2 \mathbf{j}; \quad \text{при } r \geq R$$

$$\mathbf{A}^{ex}(r) = -\frac{\mu_0 R^2}{2} \left(\ln \frac{r}{R} + \frac{1}{2} \right) \mathbf{j}.$$

Решение. Аналогичной электростатической задачей является задача о нахождении потенциала электрического поля бесконечно цилиндра радиуса R , заряженного по объему с постоянной объемной плотностью ρ , на расстоянии r от оси цилиндра. Для решения этой задачи сначала по теореме Гаусса находим модуль напряженности электрического поля E , а затем по формуле $\varphi(r) = -\int \mathbf{E}(r) dr$ находим потенциал поля φ .

$$\text{При } r \leq R: E \cdot 2\pi r l = \rho \cdot \pi r^2 l / \varepsilon_0 \rightarrow E = \rho r / (2\varepsilon_0) \text{ и}$$

$$\varphi(r) = -\int \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} dr = -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon_0} + C_1.$$

$$\text{При } r \geq R: E \cdot 2\pi r l = \rho \cdot \pi R^2 l / \varepsilon_0 \rightarrow E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r} \text{ и}$$

$$\varphi(r) = -\int \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r} dr = -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \ln \frac{r}{C},$$

где C_1 и C – постоянные

Делая замены: $\varphi \rightarrow A_z$, $\frac{\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow \mu_0 j_z$ с учетом условия $A(0) = 0$ и

направления вектора \mathbf{A} , получаем:

$$\mathbf{A}^{in}(r) = -\frac{\mu_0 r^2}{4} \mathbf{j} \text{ при } r \leq R;$$

$$A^{ex}(r) = -\frac{\mu_0 R^2}{2} \ln \frac{r}{C} \mathbf{j} \text{ при } r \geq R.$$

Константу C определяем из условия непрерывности векторного потенциала при $r = R$:

$$-\frac{\mu_0 R^2}{4} \mathbf{j} = -\frac{\mu_0 R^2}{2} \ln \frac{R}{C} \mathbf{j}, \text{ откуда } C = \frac{R}{e^{1/2}} \text{ и}$$

$$A^{ex}(r) = -\frac{\mu_0 R^2}{2} \left(\ln \frac{r}{R} + \frac{1}{2} \right) \mathbf{j}.$$

9.52. $A = 0$ при $r \leq R$; $A(r) = -\mu_0 R \ln \left(\frac{r}{R} \right) \mathbf{i}$ при $r \geq R$.

9.53. $A = 0$ при $r \leq R_1$;

$$A(r) = -\frac{\mu_0}{2} \cdot \left[\frac{1}{2} (r^2 - R_1^2) - R_1^2 \ln \frac{r}{R_1} \right] \mathbf{j} \text{ при } R_1 \leq r \leq R_2;$$

$$A(r) = -\frac{\mu_0 (R_2^2 - R_1^2)}{2} \cdot \left[\ln \frac{r}{R_2} + \frac{1}{2} - \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \ln \frac{R_2}{R_1} \right] \mathbf{j} \text{ при } r \geq R_2.$$

9.54. $A(z) = A_x(z) = -\frac{\mu_0 i}{2} \cdot |z|$.

Указание. Заменить данную задачу эквивалентной электростатической задачей о нахождении потенциала на расстоянии z от бесконечной заряженной плоскости с поверхностной плотностью заряда σ , а затем сделать замены: $\varphi \rightarrow A_x$, $\sigma/\varepsilon_0 \rightarrow \mu_0 i_x$.

9.55. Линии векторного поля A образуют окружности с центром на оси соленоида, которые лежат в плоскости, перпендикулярной этой оси. В цилиндрических координатах $A_\varphi = \frac{1}{2} Br$ внутри соленоида; $A_\varphi = \frac{a^2 B}{2r}$ — снаружи.

Решение. Найдём циркуляцию вектора A по замкнутому контуру L в виде окружности радиуса r . Так как направление векторного потенциала магнитного поля совпадает с направлением тока,

создающего это поле, то в каждой точке внутри соленоида он направлен по касательной к окружности с центром на оси соленоида. В силу симметрии вектор A одинаков по модулю в каждой точке такой окружности, поэтому

$$\oint_L A \cdot d\mathbf{l} = A \cdot 2\pi r.$$

Согласно теореме Стокса

$$\oint_L A \cdot d\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot} A \cdot d\mathbf{S} = \int_S B \cdot d\mathbf{S},$$

где S – поверхность, охватываемая контуром L .

Внутри соленоида поток вектора магнитной индукции через поверхность S равен

$$\int_S B \cdot d\mathbf{S} = B \cdot \pi r^2 \text{ и } 2\pi r A = B \cdot \pi r^2, \text{ откуда } A = Br / 2.$$

$$\text{Вне соленоида } \int_S B \cdot d\mathbf{S} = B \cdot \pi a^2 = 2\pi r A, \text{ откуда } A = \frac{Ba^2}{2r}.$$

§10. Сила Ампера. Момент сил, действующих на контур с током в магнитном поле

$$10.1. I \geq \frac{2F - mg}{Bl} = 3,1 \text{ А.}$$

$$10.2. F = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d} = 0,1 \text{ Н/м.}$$

$$10.3. F_{ex} = \frac{\mu_0 I_1 I_3 \sqrt{3}}{2\pi d} \approx 2,35 \cdot 10^{-4} \text{ Н/м; сила направлена в}$$

центр правильного треугольника, образованного проводниками.

Решение. Векторы индукции магнитных полей, создаваемых токами I_1 и I_2 в месте нахождения провода с током I_3 , направлены так, как показано на (рис. О.10.3), их модули равны

$$B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}.$$

Суммарная индукция полей двух проводов в месте нахождения третьего провода $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$. Угол между векторами \mathbf{B}_1 и \mathbf{B}_2 равен $\pi/3$, поэтому модуль вектора индукции

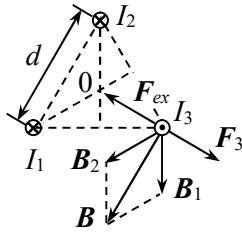


Рис. О.10.3.

$$B = 2B_1 \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\mu_0 I_1 \sqrt{3}}{2\pi d}.$$

Силу, действующую третий провод, определяем по закону Ампера: $\mathbf{F}_3 = I_3 [\mathbf{l}_3 \mathbf{B}]$. Она направлена перпендикулярно вектору \mathbf{B} в плоскости рисунка О.10.3 и по модулю равна

$$F_3 = \frac{\mu_0 I_1 I_3 l_3 \sqrt{3}}{2\pi d}, \text{ где } l_3 \text{ — длина провода.}$$

Чтобы удержать провод в равновесии, к единице его длины надо приложить внешнюю силу \mathbf{F}_{ex} , равную по величине силе F_3/l_3 и противоположно ей направленную (см. рис. О.10.3). Модуль этой силы равен:

$$F_{ex} = \frac{\mu_0 I_1 I_3 \sqrt{3}}{2\pi d} \approx 2,35 \cdot 10^{-4} \text{ Н/м.}$$

$$10.4. F = IB\sqrt{l^2 + L^2} - 2lL \cos \alpha.$$

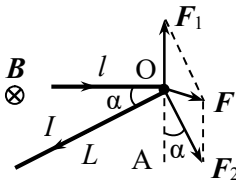


Рис. О.10.4.

Решение. На части провода будут действовать силы Ампера

$$F_1 = I[\mathbf{lB}] \text{ и } F_2 = I[\mathbf{LB}],$$

где векторы \mathbf{l} и \mathbf{L} направлены по току I (рис. О.10.4).

Векторы \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 лежат в плоскости рисунка, $\mathbf{F}_1 \perp \mathbf{l}$, $\mathbf{F}_2 \perp \mathbf{L}$. $\angle OF_2F = \angle AOF_2 = \alpha$

(как углы с взаимно перпендикулярными сторонами). Результирующую силу F определяем по теореме косинусов из треугольника OFF_2 :

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos \alpha,$$

откуда

$$F = IB\sqrt{l^2 + L^2} - 2lL \cos \alpha.$$

$$10.5. (F_l)_{\max} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi a}.$$

$$10.6. T = IBR.$$

Решение. На кольцо с током в магнитном поле будет действовать момент сил $\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m \mathbf{B}]$, где $\mathbf{p}_m = IR^2 \mathbf{n}$ – магнитный момент кольца, \mathbf{n} – нормаль к его плоскости. Под действием этого момента сил кольцо повернется так, что линии индукции магнитного поля будут перпендикулярны плоскости кольца (тогда $\mathbf{p}_m \parallel \mathbf{B}$ и $\mathbf{M} = 0$).

Рассмотрим силу $d\mathbf{F}$, действующую на элемент кольца $d\mathbf{l}$ в магнитном поле (рис. О.10.6). По закону Ампера $d\mathbf{F} = I[d\mathbf{l}, \mathbf{B}]$. Помимо этой силы на данный элемент проводника действуют силы две силы натяжения \mathbf{T} , которые равны по величине и приложены к концам выбранного участка (рис. О.10.6).

Пусть ось OX по направлению силы $d\mathbf{F}$. Из условия равновесия получаем:

$$dF = 2T \cdot \frac{d\alpha}{2} = T \cdot \frac{dl}{R}.$$

Так как $dF = IBdl$, получаем: $T = IBR$.

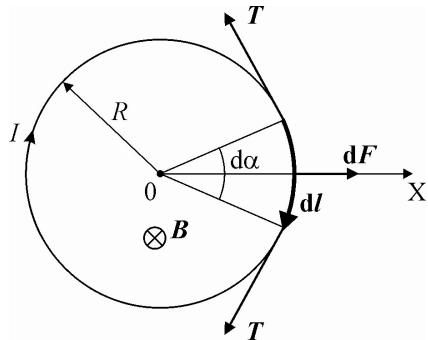


Рис. О.10.6.

10.7. $F = 2\pi IBR \sin \alpha$; сила перпендикулярна плоскости кольца и втягивает кольцо в область более сильно-го поля.

Решение. Выделим элемент кольца длиной dl . На него в магнитном поле действует сила $d\mathbf{F} = I[d\mathbf{l}, \mathbf{B}]$, направленная перпендикулярно вектору \mathbf{B} (рис. О.10.7). Так как вектор $d\mathbf{l}$ перпендикулярен вектору \mathbf{B} во всех точках кольца, модуль силы $dF = IBdl$. Разложим эту силу на две составляющих: перпендикулярную плоскости кольца $dF_{\perp} = dF \sin \alpha$ и параллельную плоскости кольца

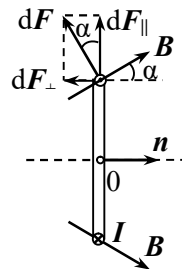


Рис. О.10.7.

$dF_{\parallel} = dF \cos \alpha$. Равнодействующая всех сил dF_{\parallel} равна нулю, эти силы только растягивают кольцо.

Сила, действующая на кольцо, равна результирующей силе dF_{\perp} : $F = F_{\perp} = IB \sin \alpha \int_0^l dl = 2\pi IBR \sin \alpha$.

Эта сила втягивает кольцо в область более сильного поля (там густота силовых линий магнитного поля больше).

10.8. $F = \frac{UB}{2r} (2 + \sqrt{2})$, сила направлена перпендикулярно плоскости контура (от нас в рисунок 10.3).

10.9. $F = \frac{2\mu_0 I_0 Iab}{\pi(4r_0^2 - a^2)}$.

10.10. $M_{ex} = \frac{\mu_0 I_0 a^2}{2\pi b} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2b}\right)^2}$.

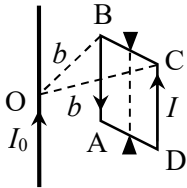


Рис. О.10.10 а. Модуль индукции магнитного поля прямого провода с током на расстоянии b от него равен $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}$. Силы, действующие на элементы сторон BC и AD (см. рис. О.10.10 а), расположены в плоскости рамки и создают момент сил, стремящийся повернуть эти стороны вокруг горизонтальной оси, проходящей через их середины. Поскольку рамка жесткая, такой поворот невозможен.

В т. В стороны AB индукция магнитного поля B_1 направлена перпендикулярно линии OB (см. рис. О.10.10 б) (в месте нахождения всех других участков стороны AB индукция магнитного поля параллельна вектору B_1). Сила, действующая на сторону AB рамки, $F_1 = I[aB_1]$ направлена так, как показано на рис. О.10.10 б.

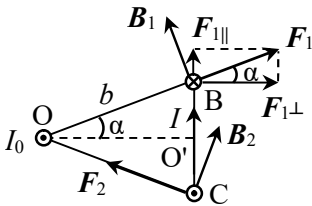


Рис. О.10.10 б.

Разложим эту силу на две состав-

ляющие: F_{\parallel} вдоль перпендикуляра к оси вращения рамки, проходящей через т. O' , и F_{\perp} . Компонента силы F_{\perp} создает момент силы, стремящийся повернуть рамку вокруг её средней линии:

$$M_1 = IB_1 a \cos \alpha \cdot \frac{a}{2} = \frac{\mu_0 I_0 a^2}{4\pi b} \cdot \frac{\sqrt{b^2 - (a/2)^2}}{b} = \frac{\mu_0 I_0 a^2}{4\pi b} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2b}\right)^2}.$$

На сторону CD действует такая же по величине, но по-другому направленная сила F_2 (см. рис. О.10.10 б). Эта пара сил создает вращающий момент относительно средней линии квадрата, параллельной длинному проводу:

$$M = 2M_1 = \frac{\mu_0 I_0 a^2}{2\pi b} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2b}\right)^2}.$$

Такой же момент внешних сил противоположного направления надо приложить к рамке, чтобы она была в равновесии:

$$M_{ex} = \frac{\mu_0 I_0 a^2}{2\pi b} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2b}\right)^2}.$$

10.11. $A = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \left(\frac{d_2}{d_1} \right) \approx 4,4 \cdot 10^{-5} \text{ Дж/м.}$

Решение. Сила, действующая на длину l второго проводника в поле первого проводника, когда они находятся на расстоянии r

друг от друга, равна $F_2 = I_2 l B_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi r}$.

Работа по перемещению единицы длины проводника составляет:

$$A = \int_{d_1}^{d_2} \frac{F_2}{l} dx = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_{d_1}^{d_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \left(\frac{d_2}{d_1} \right) \approx 4,4 \cdot 10^{-5} \text{ Дж/м.}$$

10.12. $A = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \ln 2 \approx 1,4 \cdot 10^{-5} \text{ Дж/м.}$

$$10.13. F = \frac{\mu_0 I^2 d}{(2\pi R)^2}.$$

Указание. Представить внешнюю оболочку со щелью как сплошную оболочку с током I и тонкий длинный проводник с током силы $I_1 = \frac{Id}{2\pi R}$ противоположного направления (см. решение задачи 9.46).

$$10.14. F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi a} \arctg\left(\frac{a}{2b}\right); \text{ провод и лента притягиваются}$$

друг к другу.

Решение. В данной задаче легче определить силу, действующую на провод со стороны поля ленты, а затем воспользоваться третьим законом Ньютона.

Введем декартову систему координат, направив оси X и Y в плоскости ленты (вдоль ленты и поперёк неё), а ось Z перпендикулярно плоскости ленты (рис. О.10.14).

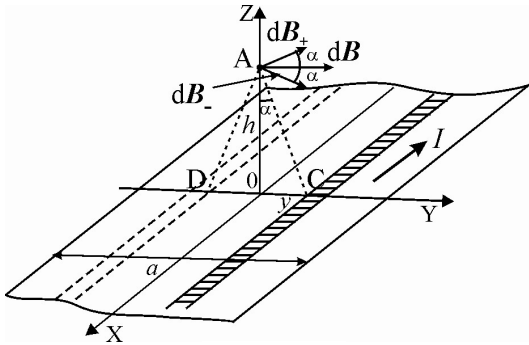


Рис. О.10.14.

Выделим на ленте узкую полоску шириной dy , находящуюся на расстоянии y от её центра. Эту полоску можно рассматривать как бесконечно длинный проводник с током $dI_1 = \frac{I_1}{a} dy$. Вектор $d\mathbf{B}_+$

такого проводника в месте нахождения провода с током I_2 направлен перпендикулярно ортрезку AC и равен по модулю:

$$dB_+ = \frac{\mu_0 dI_1(y)}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I_1 dy}{2\pi a \sqrt{b^2 + y^2}}.$$

Выделим ещё одну такую же полоску, расположенную симметрично первой относительно оси X (на рис. О.10.14 эта полоска показана штриховыми линиями). Вектор индукции $d\mathbf{B}_-$, создавае-

мый такой полоской, направлен перпендикулярно отрезку AD и равен по модулю dB_+ . В силу симметрии задачи сумма проекций векторов $d\mathbf{B}_+$ и $d\mathbf{B}_-$ на ось Z равна нулю, и индукция магнитного поля двух полосок равна сумме только горизонтальных составляющих этих векторов:

$$dB = 2dB_+ \cos \alpha = 2 \cdot \frac{\mu_0 I_1 dy}{2\pi a \sqrt{b^2 + y^2}} \cdot \frac{b}{\sqrt{b^2 + y^2}} = \frac{\mu_0 I_1 b dy}{\pi a (b^2 + y^2)}.$$

Модуль индукции магнитного поля, создаваемого всей лентой на расстоянии b от её плоскости, равен:

$$B = \int_0^{a/2} \frac{\mu_0 I_1 b dy}{\pi a (b^2 + y^2)} = \frac{\mu_0 I_1}{\pi a} \operatorname{arctg} \left(\frac{a}{2b} \right).$$

Вектор индукции \mathbf{B} направлен параллельно плоскости ленты и перпендикулярен току I_2 . Следовательно, сила, действующая на единицу длины тонкого провода, равна $F_1 = I_2 [\mathbf{l}_2, \mathbf{B}]$ и направлена в сторону ленты, где вектор \mathbf{l}_2 направлен по току I_2 и по модулю равен единице. Модуль силы F_1 равен:

$$F_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi a} \operatorname{arctg} \left(\frac{a}{2b} \right).$$

Такая же сила противоположного направления действует со стороны поля тонкого провода на единицу длины ленты:

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi a} \operatorname{arctg} \left(\frac{a}{2b} \right).$$

Провод и лента притягиваются друг к другу.

10.15. $F = \frac{\mu_0 I_1 h}{2\pi(R^2 - r^2)}$; сила F направлена в сторону оси цилиндра.

Решение. Найдем сначала индукцию магнитного поля, создаваемого током электролита в полости, где находится стержень. В решении задачи 9.48 было показано, что поле в такой полости однородно, и его индукция равна:

$$\mathbf{B}_{\text{пол}} = \frac{\mu_0}{2} [\mathbf{j}h],$$

где \mathbf{h} – вектор длиной h , направленный от оси цилиндра к оси стержня, $\mathbf{j} = \frac{I_1}{\pi(R^2 - r^2)}$ – плотность тока в электролите.

На единицу длины стержня действует сила Ампера:

$$\mathbf{F} = [\mathbf{I}, \mathbf{B}] = \frac{\mu_0}{2} [\mathbf{I}[\mathbf{j}\mathbf{h}]] = \frac{\mu_0}{2} (\mathbf{j}(\mathbf{I}\mathbf{h}) - \mathbf{h}(\mathbf{I}\mathbf{j})) = -\frac{\mu_0}{2\pi(R^2 - r^2)} (\mathbf{I} \cdot \mathbf{I}_1)\mathbf{h}.$$

Сила \mathbf{F} направлена против вектора \mathbf{h} , т.е. в сторону оси цилиндра. Модуль силы равен:

$$F = \frac{\mu_0 I_1 h}{2\pi(R^2 - r^2)}.$$

10.16. $\mathbf{F} = 0$.

Решение. Индукция магнитного поля, создаваемого плоскостью с током плотности \mathbf{i} , равна по модулю $B = \mu_0 i/2$ и перпендикулярна вектору плотности тока \mathbf{i} . Значит, вектор индукции магнитного поля одной из плоскостей параллелен вектору плотности тока другой. По закону Ампера сила, с которой магнитное поле одной пластины действует на ток в другой, равна 0.

$$10.17. F = \frac{\mu_0 i^2}{2} l_1 l_2 \cos \alpha.$$

10.18. $F = \mu_0 i l l / 2$, провод притягивается к плоскости.

$$10.19. B = \frac{mg \operatorname{tg} \alpha}{2Ia}.$$

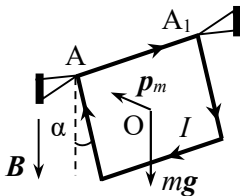


Рис. О.10.19

Решение. Магнитный момент рамки с током

$$\mathbf{p}_m = IS\mathbf{n} = Ia^2 \mathbf{n},$$

где \mathbf{n} – нормаль к плоскости рамки (рис. О.10.19). В однородном магнитном поле на рамку действует вращающий момент сил

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m \mathbf{B}] = Ia^2 [\mathbf{n}\mathbf{B}].$$

Этот момент направлен вдоль стороны рамки AA_1 и по модулю равен $M = Ia^2 B \cos \alpha$, так как угол между вектором \mathbf{B} и нормалью к плоскости рамки \mathbf{n} равен $(\pi - \alpha)$.

В состоянии равновесия момент сил со стороны магнитного поля уравнивается моментом сил тяжести, модуль которого равен $M_{mg} = mg \cdot \frac{a}{2} \sin \alpha$, где $\frac{a}{2} \sin \alpha$ – плечо силы mg относительно оси AA_1 .

Приравнявая моменты сил, получаем:

$$Ia^2 B \cos \alpha = mg \cdot \frac{a}{2} \sin \alpha, \text{ откуда } B = \frac{mg \operatorname{tg} \alpha}{2Ia}.$$

$$10.20. \alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{IB}{4\rho g} \right).$$

$$10.21. I = \frac{2\rho g \operatorname{tg} \alpha}{B}.$$

$$10.22. B = \frac{D\alpha}{INa^2 \sin \alpha}.$$

$$10.23. M = \frac{\pi R^2 IB}{2} (\sin \alpha + \cos \alpha) = \frac{\pi R^2 IB \sqrt{2}}{2}.$$

Решение. Дополним кольцо проводником, проходящим по линии сгиба. Тогда можно рассматривать систему двух замкнутых контуров с током, причем по нижнему контуру ток I течет по проводнику слева направо, а по верхнему – справа налево. Тогда суммарный ток по проводнику равен нулю, что соответствует отсутствию проводника по условию задачи.

Каждый из контуров, образованных половиной кольца и проводником, обладает магнитным моментом

$$\mathbf{p}_m = IS\mathbf{n} = I \cdot \frac{\pi R^2}{2} \mathbf{n},$$

где \mathbf{n} – нормаль к плоскости контура.

В магнитном поле на контур будет действовать момент сил

$$M = [\mathbf{p}_m \mathbf{B}] = \frac{IR^2}{2} [n\mathbf{B}].$$

Моменты сил, действующих на каждый из контуров, направлены вдоль линии OO_1 , поэтому их можно сложить. С учетом направлений нормалей к плоскостям нижней и верхней половины колец получаем:

$$M = \frac{\pi R^2 IB}{2} (\sin \alpha + \cos \alpha) = \frac{\pi R^2 IB \sqrt{2}}{2}.$$

10.24. $M = INabB \sin \alpha$. а) $M = 2,4 \cdot 10^{-7} \text{ Н} \cdot \text{м}$;

б) $M \approx 2,0 \cdot 10^{-7} \text{ Н} \cdot \text{м}$.

10.25. $m = \frac{\mu_0 \pi d^2 n N I^2}{4gl}$.

10.26. $B = \frac{\Delta m g l}{NIS} \approx 0,4 \text{ Тл}$.

§11. Сила Лоренца. Движение заряженных частиц в электромагнитных полях

11.1. $R = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2Um}{e}} \approx 0,96 \text{ м}$.

11.2. $l = v \cos \alpha \cdot T = \frac{2\pi m v \cos \alpha}{eB} \approx 10,3 \text{ мм}$.

11.3. $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{qB}{m} \approx 4,8 \cdot 10^7 \text{ рад/с}$.

11.4. $v = \frac{eB \sqrt{h^2 + 4\pi^2 R^2}}{2\pi m} \approx 4,5 \cdot 10^7 \text{ м/с}$.

Решение. Записываем выражения для радиуса и шага винтовой линии, по которой движется электрон:

$$R = \frac{mv \sin \alpha}{eB},$$

$$h = v \cos \alpha \cdot T = \frac{2\pi mv \cos \alpha}{eB},$$

где α – угол между начальной скоростью частицы и направлением вектора индукции \mathbf{B} магнитного поля.

Деля первое уравнение на второе, получаем:

$$\frac{R}{h} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2\pi}, \text{ откуда } \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\pi R}{h}.$$

Отсюда $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + 4\pi^2 R^2}}$. Из второго урав-

нения выражаем скорость электрона:

$$v = \frac{heB}{2\pi m \cos \alpha} = \frac{eB \sqrt{h^2 + 4\pi^2 R^2}}{2\pi m} \approx 4,5 \cdot 10^7 \text{ м/с}.$$

11.5. $T_1/T_2 = 1$; $R_1/R_2 = \sqrt{W_1/W_2}$.

11.6. При $d < \frac{mv}{eB}$ $\alpha = \arcsin\left(\frac{deB}{mv}\right)$; при $d > \frac{mv}{eB}$ $\alpha = \pi$.

Решение. После попадания электрона в область магнитного поля он будет двигаться по окружности радиуса $R = \frac{mv}{eB}$. Если $d < R$, при

достижении границы области скорость электрона будет направлена под некоторым углом α к первоначальной скорости (см. рис. О.11.6). На рисунке т. О – центр окружности, по которой движется электрон.

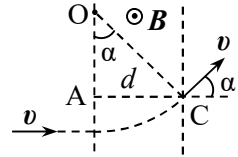


Рис. О.11.6.

$\angle AOC = \alpha$ (как углы с взаимно перпендикулярными сторонами). Из $\triangle AOC$: $\sin \alpha = \frac{d}{R} = \frac{deB}{mv}$, откуда $\alpha = \arcsin\left(\frac{deB}{mv}\right)$.

Если $d > R$, электрон пролетит в области магнитного поля по полуокружности и вылетит из области поля в той же стороне, с какой он прилетел. При этом угол отклонения электрона от первоначального направления движения $\alpha = \pi$.

$$11.7. h = R - \sqrt{R^2 - l^2} + \frac{lL}{\sqrt{R^2 - l^2}} \approx 7,5 \text{ см},$$

где $R = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2Um}{e}} \approx 7,5 \text{ см}.$

Указание. См. решение задачи 11.6.

$$11.8. \tau = \frac{2m}{eB} \operatorname{arctg} \frac{eaB}{mv}.$$

Решение. После попадания в область магнитного поля электрон будет двигаться под действием силы Лоренца по окружности радиуса $R = \frac{mv}{eB}$ с центром в т. С, пока не вылетит из области поля (рис. О.11.8). Введем угол φ , как показано на рисунке. ΔAOC – прямоугольный (AC – касательная к окружности с центром O).

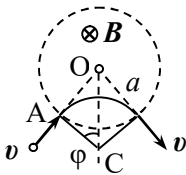


Рис. О.11.8.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{R} = \frac{aeB}{mv}.$$

В магнитном поле электрон пролетит по дуге окружности, опирающейся на центральный угол 2φ . Её длина $l = 2\varphi R$. Поскольку скорость электрона в магнитном поле по модулю не меняется, время движения электрона в области поля равно:

$$\tau = \frac{l}{v} = 2\operatorname{arctg} \frac{aeB}{mv} \cdot \frac{mv}{eBv} = \frac{2m}{eB} \operatorname{arctg} \frac{eaB}{mv}.$$

11.9. $x = \frac{2}{B} \sqrt{\frac{2Um}{q}}$; для ионов H_1^+ $x_1 = 0,29 \text{ м}$, для ионов He_4^+ $x_2 = 0,58 \text{ м}$; $a = 3,7 \text{ см}.$

Решение. На ионы в магнитном поле действует сила Лоренца $F_L = q[\mathbf{vB}]$, под действием которой они двигаются по окружности радиуса $R = \frac{mv}{qB}$ и попадают на фотопластинку на расстоянии $x = 2R$ от места вылета из щели ионизатора. В результате под дей-

ствием ускоряющей разности потенциалов U ионы приобретают энергию

$$qU = mv^2 / 2,$$

откуда определяем скорость ионов $v = \sqrt{2qU/m}$. Тогда

$$x = 2R = \frac{2}{B} \sqrt{\frac{2Um}{q}}.$$

Масса иона водорода H_1^+ $m = m_p$, иона гелия He_4^+ $m = 4m_p$, где m_p – масса протона. Подставляя численные данные, получаем ответ.

$$11.10. v_{др} = \frac{2(B_1 - B_2)}{\pi(B_1 + B_2)} v.$$

Решение. Под действием силы Лоренца $F_L = q[\mathbf{v}\mathbf{B}]$ электрон в магнитных полях будет двигаться по окружностям радиусов $R_1 = \frac{mv}{eB_1}$ и

$$R_2 = \frac{mv}{eB_2} \quad \text{соответственно} \quad (\text{см.}$$

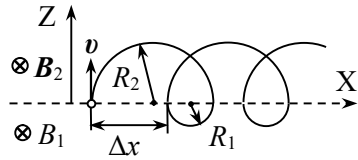


Рис. О.11.10.

рис. О.11.10). При этом за один период обращения электрон смещается вдоль оси X на расстояние

$$\Delta x = 2(R_2 - R_1) = \frac{2mv}{e} \cdot \left(\frac{1}{B_2} - \frac{1}{B_1} \right).$$

$$\text{Это смещение происходит за время } \tau = \frac{T_1}{2} + \frac{T_2}{2} = \frac{\pi(R_1 + R_2)}{v},$$

где $T_i = \frac{2\pi R_i}{v}$ – период обращения электрона в поле с индукцией B_i .

Скорость дрейфа электрона равна:

$$v_{др} = \frac{\Delta x}{\tau} = \frac{2(R_2 - R_1)v}{\pi(R_1 + R_2)} = \frac{2(B_1 - B_2)}{\pi(B_1 + B_2)} v.$$

$$11.11. \operatorname{tg} \alpha = \frac{R_1}{R_2} = \frac{B_2}{B_1}, \quad v_{\text{др}} = \frac{\sqrt{B_1^2 + B_2^2}}{B_1 + B_2} v, \quad \text{где } \alpha \text{ — угол между}$$

скоростью перемещения электрона за длительное время и осью X.

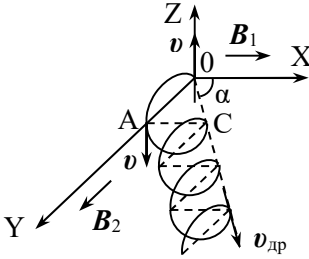


Рис. О.11.11.

Решение. Перемещение электрона показано на рис. О.11.11. Сначала электрон движется в плоскости ZOY по окружности радиуса $R_1 = \frac{mv}{eB_1}$ и через

время $t_1 = \frac{\pi R_1}{v}$ окажется в точке А на

противоположном конце диаметра окружности, по которой он двигался. Затем электрон будет двигаться в плоскости ZOX по окружности ра-

диуса $R_2 = \frac{mv}{eB_2}$ и окажется в точке С, описав половину окружно-

сти. После этого характер движения будет повторяться.

Видно, что точки А и С лежат в плоскости XOY, в этой же плоскости будет находиться скорость дрейфа $v_{\text{др}}$ электрона. Угол α , который вектор скорости $v_{\text{др}}$ составляет с осью X, находим из условия:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R_1}{R_2} = \frac{B_2}{B_1}.$$

Поскольку ясно, что скорость дрейфа электрона направлена вдоль линии ОС, определим модуль скорости, разделив путь ОС на время τ , за которое электрон попадает в точку С.

$$OC = \sqrt{R_1^2 + R_2^2} = \frac{mv}{e} \sqrt{\frac{1}{B_1^2} + \frac{1}{B_2^2}};$$

$$\tau = \frac{\pi(R_1 + R_2)}{v} = \frac{\pi m}{e} \left(\frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2} \right);$$

$$v_{\text{др}} = \frac{OC}{\tau} = \frac{\sqrt{B_1^2 + B_2^2}}{B_1 + B_2} v.$$

$$11.12. l \approx \frac{2\pi mv}{eB}.$$

Решение. Электроны, скорости которых направлены под некоторым углом α к вектору индукции \mathbf{B} магнитного поля, будут двигаться по винтовой линии с шагом

$$h = v \cos \alpha \cdot T = \frac{2\pi mv \cos \alpha}{eB}.$$

При малых углах α $\cos \alpha \approx 1$ и для всех электронов шаг спирали одинаков и равен $h \approx \frac{2\pi mv}{eB}$. Именно на таком расстоянии первый раз происходит фокусировка электронного пучка.

$$11.13. \omega_1 = \frac{qB}{2m} - \sqrt{\left(\frac{qB}{2m}\right)^2 + \omega^2}.$$

Решение. Обозначим предел прочности материала стержня T_{\max} . Пусть длина стержня $2l$.

В отсутствие магнитного поля непосредственно перед разрывом стержня на шарик в горизонтальном направлении действуют сила натяжения T_{\max} со стороны стержня и сила кулоновского отталкивания от второго шарика $F_q = qE$, где E – напряженность электрического поля в месте нахождения шарика (см. рис. О.11.13). Уравнение движения шарика в проекции на ось, направленную вдоль стержня, с началом отсчета в его середине имеет вид:

$$T_{\max} - qE = m\omega^2 l.$$

При включении магнитного поля

на шарик дополнительно действует сила Лоренца $F_L = q[\mathbf{v}\mathbf{B}]$, и уравнение движения шарика непосредственно перед разрывом стержня принимает вид:

$$T_{\max} - qE - q\omega_1 l B = m\omega_1^2 l.$$

Из данных уравнений получаем уравнение относительно ω_1 :

$$m\omega_1^2 l + q\omega_1 l B - m\omega^2 l = 0,$$

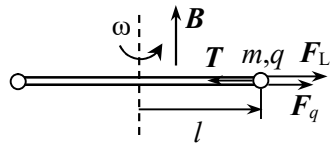


Рис. О.11.13.

решая которое находим:

$$\omega_1 = \frac{qB}{2m} - \sqrt{\left(\frac{qB}{2m}\right)^2 + \omega^2}.$$

11.14. $\omega = qB / E$.

Решение. Пусть масса шарика m , его заряд q , длина нити l . Направим ось Z вертикально вниз, а вторую ось – из центра окружности, по которой вращается шарик, на шарик.

Первоначально на шарик действуют сила тяжести mg и сила натяжения нити T (см. рис. Л.11.14). Уравнения движения шарика в проекциях на выбранные оси имеют вид:

$$\begin{aligned} m\omega^2 l \sin \alpha &= T \sin \alpha, \\ T \cos \alpha - mg &= 0, \end{aligned}$$

откуда находим: $\cos \alpha = \frac{g}{l\omega^2}$.

При наличии электрического и магнитного полей на шарик дополнительно действуют сила $F_q = qE$ и сила Лоренца $F_L = q[vB]$, где $v = [\omega B]$ – скорость шарика (см. рис. О.11.14). Уравнения движения шарика в проекции на те же оси в зависимости от направления скорости шарика принимают вид:

$$\begin{aligned} m\omega^2 l \sin \alpha &= T \sin \alpha \pm q\omega l \sin \alpha B, \\ T \cos \alpha - mg - qE &= 0. \end{aligned}$$

Исключая из этой системы T и подставляя $\cos \alpha = \frac{g}{l\omega^2}$, приходим к уравнению:

$$\frac{\omega E}{g} \pm B = 0,$$

откуда находим $\omega = qB / E$

(знак + в уравнении отбрасываем, т.е. скорость шарика должна быть направлена так, как показано на рис. О.11.14).

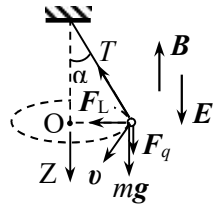


Рис. О.11.14.

11.15. $\omega \approx \omega_0 \pm \frac{eB}{2m}$ в зависимости от направления индукции магнитного поля.

$$\mathbf{11.16. 1). } y' = \frac{qE}{mv_1^2} \left(\frac{l^2}{2} + lL \right); \quad z' = \frac{qB}{mv_1} \left(\frac{l^2}{2} + lL \right);$$

для иона водорода H^+ $y'_1 = 0,86$ см, $z'_1 = 1,07$ см;

для иона гелия He^{++} $y'_2 = 0,43$ см, $z'_2 = 0,54$ см.

2). След на фотопластинке будет представлять собой часть параболы $y' = \frac{mE}{qB^2 \left(l^2 / 2 + lL \right)} z'^2$.

Решение. 1). В конденсаторе, где созданы электрическое и магнитное поля, на ионы будет действовать сила Лоренца

$$\mathbf{F}_L = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v}\mathbf{B}].$$

Направим ось Y вдоль вектора \mathbf{E} , а ось Z перпендикулярно Y и первоначальной скорости ионов (рис. 11.6). Электрическая составляющая силы Лоренца направлена вдоль оси Y и сообщает иону постоянное ускорение $a_y = qE/m$. Ион, пройдя расстояние l за время t_1 , приобретет вертикальную составляющую скорости

$$v_y = qEt_1 / m$$

и сместится вдоль вертикальной оси на расстояние

$$y_1 = qEt_1^2 / (2m).$$

Магнитная составляющая \mathbf{F}_{LB} в начальный момент времени направлена по оси Z . Под действием этой силы ион движется по окружности, при этом направление силы \mathbf{F}_{LB} постоянно меняется. Однако если время t_1 , в течение которого ион находится в конденсаторе, значительно меньше периода T вращения иона по окружности, то изменением направления \mathbf{F}_{LB} можно пренебречь.

Оценим время t_1 . Если $v_x = v_1$, то $t_1 = l/v_1 = 5 \cdot 10^{-8}$ с.

Период вращения иона в магнитном поле $T = 2\pi m / (qB)$. Для иона водорода H^+

$$T = \frac{2\pi m_p}{|e|B} = 6,6 \cdot 10^{-6} \text{ с} \gg t_1,$$

следовательно, изменением направления вектора F_{LB} можно пренебречь. Тогда сила F_{LB} будет все время направлена вдоль оси Z и сообщит иону ускорение $a_z = qBv_1 t_1 / m$. Пройдя область с магнитным полем, ион приобретет составляющую скорости вдоль оси Z

$$v_z = qBv_1 t_1 / m$$

и сместится вдоль оси Z на расстояние

$$z_1 = qBv_1 t_1^2 / (2m).$$

За пределами конденсатора ион движется равномерно и прямолинейно. Компоненты его скорости по осям Y и Z равны найденным ранее v_y и v_z , а по оси X $v_x = v_1$. Время движения иона от конденсатора до фотопластинки $t_2 = L / v_1$. Отсюда определяем координаты иона на экране:

$$y' = y_1 + v_y t_2 = \frac{qE}{mv_1^2} \left(\frac{l^2}{2} + lL \right);$$

$$z' = z_1 + v_z t_2 = \frac{qB}{mv_1} \left(\frac{l^2}{2} + lL \right).$$

Подставляя численные данные, получаем:
 для иона водорода H^+ $y'_1 = 0,86 \text{ см}$, $z'_1 = 1,07 \text{ см}$;
 для иона гелия He^{++} $y'_2 = 0,43 \text{ см}$, $z'_2 = 0,54 \text{ см}$;

2). Если скорости ионов не фиксированы, в формулах для y' и z' считаем скорость v_1 переменной величиной. Исключая её из полученных уравнений, получаем уравнение параболы:

$$y' = \frac{mE}{qB^2 \left(l^2 / 2 + lL \right)} z'^2 = Az'^2,$$

ось которой совпадает с осью OY' , вершина находится в начале координат. Если скорости ионов лежат в диапазоне от v_1 до v_2 , след на фотопластинке будет представлять собой часть параболы. Крутизна параболы зависит от удельного заряда иона q/m .

$$11.17. B_{\text{кр}} \cong \frac{2}{R} \cdot \sqrt{\frac{2mU}{e}}.$$

Решение. При включении магнитного поля траектории электронов искривляются, но анодный ток сначала не меняется, так как электроны, вылетевшие с катода, все еще достигают анода. При критическом значении индукции $B_{\text{кр}}$ электроны перестают достигать анода, и ток прекращается. В этот момент траектории электронов касаются цилиндрической поверхности анода.

Задачу удобно решать в цилиндрической системе координат с осью Z вдоль оси цилиндров. Скорость электрона у анода v_a определяется пройденной им разностью потенциалов U :

$$mv_a^2 / 2 = eU, \text{ откуда } v_a = \sqrt{2eU / m}.$$

Определим изменение момента импульса электрона $L = m[\mathbf{v}r]$ за время его движения от катода до анода. Момент импульса имеет только z -компоненту. При вылете электрона с катода $L_{z1} = 0$, т.к. скорость направлена по радиусу цилиндра. При $B_{\text{кр}}$ траектория электрона касается анода и $L_{z2} = mv_a R$, т.е. изменение момента импульса равно

$$\Delta L = L_{z2} - L_{z1} = mv_a R.$$

Это изменение обусловлено только магнитной составляющей силы Лоренца $F_L = q[\mathbf{v}\mathbf{B}]$, так как электрическая составляющая $F_E = e\mathbf{E}$ направлена вдоль радиуса, и её момент равен нулю.

Момент силы Лоренца имеет только z -компоненту, равную

$$M_z = rev_r B,$$

где $v_r = dr/dt$ – радиальная составляющая скорости электрона.

По закону изменения момента импульса за время τ движения электрона от катода к аноду получаем:

$$\Delta L_z = \int_0^{\tau} M_z dt, \text{ т.е.}$$

$$mv_a R = \int_0^{\tau} rev_r B_{\text{кр}} dt = eB_{\text{кр}} \int_{r_0}^R r dr = \frac{eB_{\text{кр}}}{2} (R^2 - r_0^2) \approx \frac{eB_{\text{кр}} R^2}{2}.$$

Подставляя $v_a = \sqrt{2eU/m}$, окончательно находим:

$$B_{\text{кр}} \cong \frac{2}{R} \cdot \sqrt{\frac{2mU}{e}}.$$

11.18. $B \geq \frac{4mv}{ed}$ или $B = \frac{U}{dv}$.

11.19. Частица будет двигаться по циклоиде:

$$x = \frac{E}{B}t - \frac{mE}{qB^2} \sin \omega t, \quad y = \frac{mE}{qB^2}(1 - \cos \omega t), \quad z = 0, \quad \text{где } \omega = qB/m;$$

$$v = \frac{E}{B} \sqrt{2(1 - \cos \omega t)}.$$

Решение. Введем декартову систему координат, направив ось Y вдоль вектора \mathbf{E} , ось Z вдоль вектора \mathbf{B} , начало координат поместим в место первоначального нахождения частицы.

Уравнение движения частицы имеет вид:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v}, \mathbf{B}].$$

В выбранной системе координат $\mathbf{E} = (0; E; 0)$, $\mathbf{B} = (0; 0; B)$;

$$[\mathbf{v}, \mathbf{B}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = v_y B \mathbf{i} - v_x B \mathbf{j}.$$

В проекциях на оси выбранной системы координат уравнения движения частицы имеют вид:

$$m \frac{dv_x}{dt} = qv_y B; \quad m \frac{dv_y}{dt} = qE - qv_x B; \quad m \frac{dv_z}{dt} = 0.$$

Из последнего уравнения получаем: $v_z = \text{const}$. Так как при $t = 0$ $v = 0$ то $v_z = 0$, т.е. $z = \text{const} = 0$ (из начальных условий). Следовательно, движение будет происходить в плоскости XOY .

Перепишем первые два уравнения в виде:

$$\frac{m}{qB} \cdot \frac{dv_x}{dt} = v_y, \quad \frac{dv_y}{dt} = \frac{q}{m} E - \frac{q}{m} B v_x.$$

Продифференцируем первое уравнение по времени и подставим во второе. В результате получим:

$$\frac{m}{qB} \cdot \frac{d^2 v_x}{dt^2} = \frac{qE}{m} - \frac{qB}{m} v_x \quad \text{или}$$

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} + \left(\frac{qB}{m} \right)^2 v_x - \left(\frac{qB}{m} \right)^2 \cdot \frac{E}{B} = 0.$$

Сделаем в последнем уравнении замену $u_x = v_x - E/B$, получим уравнение:

$$\frac{d^2 u_x}{dt^2} + \left(\frac{qB}{m} \right)^2 u_x = 0,$$

решение которого:

$$u_x = A \sin(\omega t + \varphi), \quad \text{где } \omega = qB/m.$$

Вернувшись к переменной v_x и учитывая, что $\frac{m}{qB} \cdot \frac{dv_x}{dt} = v_y$,

получаем:

$$v_x = A \sin(\omega t + \varphi) + E/B, \quad v_y = A \cos(\omega t + \varphi).$$

Константы A и φ находим из начальных условий: $v_x(0) = v_y(0) = 0$: $\varphi = \pi/2$, $A = -E/B$. Тогда

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{E}{B}(1 - \cos \omega t), \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{E}{B} \sin \omega t.$$

Зависимости от времени координат частицы получаем интегрированием с учетом начальных условий: $x(0) = y(0) = 0$:

$$x = \frac{E}{B} t - \frac{mE}{qB^2} \sin \omega t, \quad y = \frac{mE}{qB^2} (1 - \cos \omega t), \quad z = 0.$$

Если перейти в систему координат K' , в которой $x' = x - v_0 t$, $y' = y - a$, где введены обозначения $v_0 = E/B$ и $a = \frac{mE}{qB^2}$ (начало

этой системы координат смещено вдоль оси Y на a и движется вдоль оси X со скоростью $v_0 = E/B$), то в этой системе движение частицы описывается уравнениями:

$$x' = -a \sin \omega t, \quad y' = -a \cos \omega t,$$

т.е. в системе K' частица движется по часовой стрелке по окружности радиуса a с постоянной угловой скоростью $\omega = qB/m$. Следовательно, относительно неподвижной системы отсчета частица движется так, как двигалась бы точка обода колеса радиуса a , катящегося по горизонтальной плоскости со скоростью $v_0 = E/B$. Траектория, описываемая точкой в этом случае, представляет собой циклоиду.

Смещение центра окружности, по которой движется частица, происходит вдоль оси X , т.е. перпендикулярно плоскости YOZ , в которой лежат векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} . Такое движение называют дрейфом со скоростью $v_{др} = v_0 = E/B$.

Модуль скорости частицы равен:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{E}{B} \sqrt{(1 - \cos \omega t)^2 + \sin^2 \omega t} = \frac{E}{B} \sqrt{2(1 - \cos \omega t)}.$$

11.20. $v_0 = E/B$; скорость частицы должна быть перпендикулярна плоскости, в которой лежат векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} .

Решение. Выберем систему координат, как в решении задачи **11.19**. При решении задачи было получено, что скорости частиц изменяются со временем по законам:

$$v_x = A \sin(\omega t + \varphi) + E/B, \quad v_y = A \cos(\omega t + \varphi), \quad v_z = 0.$$

Константы A и φ находятся из начальных условий. Если выбрать начальные условия $v_y(0) = v_z(0) = 0$, $v_x(0) = E/B$, то получается единственное решение: $A = 0$. При этом

$$v_x = E/B, \quad v_y = 0, \quad v_z = 0,$$

т.е. частица будет двигаться прямолинейно вдоль оси X с постоянной начальной скоростью $v_0 = E/B$.

$$\mathbf{11.21.} \quad v_{др} = \frac{[\mathbf{E}, \mathbf{B}]}{B^2}, \quad v_{др} = E/B.$$

Решение. При наложении электрического поля в зависимости от направления скорости \mathbf{v} иона модуль его скорости будет либо увеличиваться, либо уменьшаться. Это приведёт к изменению радиуса кривизны траектории иона. Движение с малым радиусом кривизны происходит на меньшем участке траектории, в результате

чего за один полный оборот ион смещается в направлении, перпендикулярном как вектору \mathbf{E} , так и вектору \mathbf{B} , т.е. дрейфует. Дрейф можно представить как движение по окружности вокруг центра, который смещается со скоростью дрейфа \mathbf{v}_d (см. решение задачи 11.19).

Уравнение движения иона имеет вид:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v}, \mathbf{B}].$$

Будем искать решение в виде $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_d$, где \mathbf{v}' - скорость движения иона по окружности, а \mathbf{v}_d - постоянная скорость дрейфа. Уравнение движения примет вид:

$$m \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v}', \mathbf{B}] + q[\mathbf{v}_d, \mathbf{B}].$$

Так как при движении по окружности должно выполняться условие $m \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = q[\mathbf{v}', \mathbf{B}]$, для дрейфовой скорости получаем:

$$q\mathbf{E} = -q[\mathbf{v}_d, \mathbf{B}], \text{ откуда } \mathbf{v}_d = \frac{[\mathbf{E}, \mathbf{B}]}{B^2}.$$

Для проверки записанного решения подставим его в уравнение движения:

$$\begin{aligned} m \frac{d\mathbf{v}'}{dt} &= q\mathbf{E} + q[\mathbf{v}', \mathbf{B}] + q\left[\frac{[\mathbf{E}, \mathbf{B}]}{B^2}, \mathbf{B}\right] = \\ &= q\mathbf{E} + q[\mathbf{v}', \mathbf{B}] + \frac{q}{B^2}(\mathbf{B}(\mathbf{E}\mathbf{B}) - \mathbf{E}B^2) = q[\mathbf{v}', \mathbf{B}], \end{aligned}$$

где учтено, что векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} перпендикулярны друг другу и $(\mathbf{E}\mathbf{B}) = 0$.

Модуль дрейфовой скорости равен $v_d = E/B$, а её направление определяется векторным произведением $[\mathbf{E}, \mathbf{B}]$, то есть она перпендикулярна этим векторам.

$$11.22. 1). v = \frac{2}{T} = \frac{qB}{\pi m}; a) v_p = 2,1 \cdot 10^7 \text{ м/с}; б) v_e = 3,9 \cdot 10^{10} \text{ м/с}.$$

$$2). n = \frac{W}{2qU} = 150 \text{ оборотов. } 3) R_{\max} = \frac{\sqrt{2mW}}{|e|B} = 0,50 \text{ м}.$$

Решение. 1). Внутри дуантов частица под действием магнитного поля движется по окружности радиуса $R = \frac{mv}{eB}$. Время движения частицы по дуге полуокружности в одном дуанте $\tau = \frac{T}{2} = \frac{\pi R}{v} = \frac{\pi m}{qB}$. Если энергия частиц относительно невелика, то период вращения частиц в магнитном поле $T = \text{const}$ и не зависит от их скорости и радиуса траектории. Значит, чтобы электрическое поле всегда ускоряло частицы, его направление нужно изменять с постоянной частотой $\nu = \frac{2}{T} = \frac{qB}{\pi m}$.

Подставляя численные данные, получаем:

а) для ускорения протонов $\nu_p = \frac{|e|B}{\pi m_p} = 2,1 \cdot 10^7 \text{1/с}$;

б) для ускорения электронов $\nu_e = \frac{|e|B}{\pi m_e} = 3,9 \cdot 10^{10} \text{1/с}$.

2). Многократно проходя ускоряющее электрическое поле в зазоре между дуантами с разностью потенциалов U , частица приобретает энергию $W = NqU$, где N – число пролетов частицы через зазор. Число полных оборотов частицы в 2 раза меньше числа N . Следовательно, чтобы приобрести энергию W , протон должен сделать $n = \frac{W}{2qU} = 150$ оборотов.

3). Максимальная скорость протона $v_{\text{max}} = \sqrt{2W/m}$. Максимальный радиус протона при энергии W равен

$$R_{\text{max}} = \frac{m\sqrt{2W/m}}{|e|B} = \frac{\sqrt{2mW}}{|e|B} = 0,50 \text{ м}.$$

$$11.23. B = \frac{\pi v m_p}{|e|} = 0,45 \text{ Тл}, W_{\text{max}} = \frac{\pi^2 v^2 m_p R_{\text{max}}^2}{2} = 1,2 \text{ МэВ}.$$

$$11.24. r_{\text{min}} = r_0, r_{\text{max}} = r_0 \exp\left(\frac{4\pi m v_0}{\mu_0 q I}\right).$$

Решение. На движущуюся заряженную частицу вблизи провода с током действует сила Лоренца. Модуль индукции магнитного поля провода с током $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, где r — расстояние до провода.

Поскольку векторы v и F лежат в одной плоскости, траектория движения лежит в плоскости XY (рис. О.11.24). Запишем уравнение движения частицы в проекции на ось Y , учитывая, что проекция силы Лоренца $F_y = -q\dot{x}B$:

$$m\ddot{y} = -q\dot{x}B, \quad \text{или} \quad m\ddot{y} + \frac{\mu_0 q I \dot{r}}{2\pi r} = 0.$$

Интегрируем это уравнение и учтя начальные условия: при $t = 0$ $\dot{y} = v_0$, $r = r_0$, получим:

$$\dot{y} = v_0 - \frac{\mu_0 q I}{2\pi m} \ln \frac{r}{r_0}.$$

Поскольку сила Лоренца не меняет модуль скорости, то при минимальном расстоянии $r = r_{\min}$ величина $\dot{y} = v_0$, а при максимальном $r = r_{\max}$ проекция скорости $\dot{y} = -v_0$ (см. рис.О.11.24). Поэтому получаем:

$$r_{\min} = r_0, \quad r_{\max} = r_0 \exp\left(\frac{4\pi m v_0}{\mu_0 q I}\right).$$

11.25. Скорость дрейфа равна $u = \frac{\pi m v_0^2}{\mu_0 q I}$ и направлена вдоль

тока.

Решение. В решении задачи 11.24 было получено уравнение для y -компоненты скорости частицы:

$$\dot{y} = v_0 - \frac{\mu_0 q I}{2\pi m} \ln \frac{r}{r_0}. \quad (1)$$

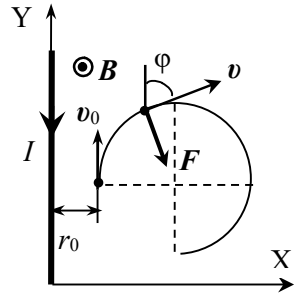


Рис. О.11.24.

Если $\frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max}} \ll 1$, то есть $\alpha \ll 1$, то можно пренебречь не-

однородностью магнитного поля на пути движения частицы. В этом случае движение частицы мало отличается от движения по окружности радиусом $R_0 = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{2} \ll 1$ с угловой скоростью

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{qB}{m} = \frac{q}{m} \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{v_0}{\alpha r}.$$

Центр орбиты частицы всё время находится на одном расстоянии от провода. Неоднородность магнитного поля приводит к медленному смещению (дрейфу) орбиты вдоль оси Y . Скорость дрейфа находим, поделив смещение частицы вдоль оси Y за период на период T :

$$u_y = \frac{1}{T} \int y \dot{y} dt = \frac{1}{T} \int v_0 \cos \varphi dt, \quad (2)$$

где φ — угол между скоростью v и осью Y .

Перепишем уравнение (1) в виде: $r = r_0 \exp(\alpha(1 - \cos \varphi))$ и продифференцируем его по времени:

$$\frac{dr}{dt} = v_0 \sin \varphi = \alpha r_0 \exp(\alpha(1 - \cos \varphi)) \sin \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt}.$$

Подставляя выраженную отсюда величину dt в (2), с учетом малости α получим:

$$\begin{aligned} u_y &= \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} v_0 \frac{\alpha r_0 \exp(\alpha(1 - \cos \varphi)) \sin \varphi \cos \varphi}{v_0 \sin \varphi} d\varphi \approx \\ &\approx \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \alpha r_0 \cos \varphi (1 + \alpha(1 - \cos \varphi)) d\varphi = -\frac{\pi m v_0^2}{\mu_0 q I}. \end{aligned}$$

Скорость дрейфа направлена вдоль тока.

$$11.26. \Delta \varphi = vBc, \quad \sigma = \pm \varepsilon_0 vB.$$

$$11.27. \Delta \varphi = \frac{IB}{end}.$$

$$11.28. \Delta \varphi = vBc, \quad \sigma = \pm \varepsilon_0 vB.$$

$$11.29. U = \frac{\mu_0 I^2}{4en\pi^2(R_2^2 - R_1^2)} \cdot \left(1 - \frac{2R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \ln \frac{R_2}{R_1} \right).$$

Решение. Ток, текущий в проводнике, создает вокруг себя магнитное поле. Это поле действует на электроны проводимости, которые движутся с дрейфовой скоростью

$$v = \frac{I}{enS} = \frac{I}{en\pi(R_2^2 - R_1^2)}.$$

Под действием магнитной составляющей силы Лоренца $\mathbf{F} = e[\mathbf{v}\mathbf{B}]$ электроны начинают смещаться к оси трубы. В результате на внешней поверхности появляется положительный заряд, а в остальном объеме – отрицательный, т.е. возникает электрическое поле, со стороны которого на электроны также действует сила. Равновесие в проводнике достигается, когда действующая на электроны сила Лоренца $\mathbf{F}_L = e\mathbf{E} + e[\mathbf{v}\mathbf{B}]$ станет равной нулю, и в каждой точке проводника будет выполняться равенство

$$eE = evB.$$

Индукция магнитного поля на расстоянии r от оси цилиндрической трубки с током I при $R_1 \leq r \leq R_2$ равна (см. задачу 9.42):

$$B(r) = \frac{\mu_0 j}{2} \cdot \left(r - \frac{R_1^2}{r} \right); \text{ где плотность тока } j = \frac{I}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}.$$

Тогда модуль вектора напряжённости электрического поля в произвольной точке внутри трубы:

$$E(r) = vB(r) = \frac{\mu_0 I^2}{2en\pi^2(R_2^2 - R_1^2)^2} \cdot \left(r - \frac{R_1^2}{r} \right).$$

Отсюда находим разность потенциалов между поверхностями трубы:

$$\begin{aligned} U &= \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{\mu_0 I^2}{2en\pi^2(R_2^2 - R_1^2)^2} \cdot \left(\frac{R_2^2 - R_1^2}{2} - R_1^2 \ln \frac{R_2}{R_1} \right) = \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{4en\pi^2(R_2^2 - R_1^2)} \cdot \left(1 - \frac{2R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \ln \frac{R_2}{R_1} \right). \end{aligned}$$

$$11.30. \mathbf{B} = (m/e) \boldsymbol{\omega} .$$

Решение. Чтобы электростатическое поле не возникало в цилиндре, электроны не должны смещаться относительно его оси. Это возможно, если сила Лоренца $F = evB = m\omega^2 r$, где r – расстояние электрона от оси цилиндра.

Поскольку $v = \omega r$, получаем: $B = m\omega/e$. Направление вектора \mathbf{B} должно совпадать с вектором угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$.

12. Электромагнитная индукция

$$12.1. \mathcal{E} = -\frac{B_1 - B_2}{\Delta t} a^2 = 1,2 \text{ мВ} .$$

$$12.2. a = \sqrt{\frac{4\mathcal{E}\tau}{\sqrt{3}B \sin \alpha}} \approx 7,3 \text{ см} .$$

$$12.3. \mathcal{E} = B_0 lv = 0,15 \text{ В} .$$

$$12.4. P = (\alpha ab)^2 / R .$$

$$12.5. I = \frac{\alpha \pi l}{4r} .$$

Решение. ЭДС индукции в контурах, образованных перемычкой и верхней и нижней половинами кольца, равны:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -S \frac{dB}{dt} = -\frac{\pi l^2 \alpha}{8},$$

где S – площадь контура.

Кольцо с перемычкой теперь можно представить в виде эквивалентной схемы, изображенной на рис. О.12.5. По перемычке и половинам кольца протекут токи, направления которых выберем так, как показано на рисунке. Сопротивление перемычки равно $R_1 = rl$, а половины кольца $R_2 = rl/2$.

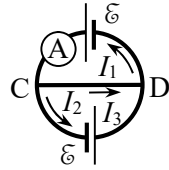


Рис. О.12.5.

По правилам Кирхгофа находим токи:

$$I_1 = I_2 = \mathcal{E} / R_2 = \frac{\alpha \pi l}{4r}, \quad I_3 = 0,$$

т.е. амперметр покажет ток $I = \frac{\alpha \pi l}{4r}$.

$$12.6. \quad I_{AK} = \frac{13}{62} \cdot \frac{\alpha a}{r} \approx 1,7 \cdot 10^{-6} \text{ А}, \quad I_{CD} = \frac{2}{31} \cdot \frac{\alpha a}{r} \approx 0,51 \cdot 10^{-6} \text{ А},$$

$$I_{LN} = \frac{17}{62} \cdot \frac{\alpha a}{r} \approx 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ А}, \quad \text{где } \alpha = \frac{B_2 - B_1}{\tau} = 3,4 \cdot 10^{-4} \text{ Тл/с}; \quad \text{токи}$$

I_{AK} и I_{CD} текут вниз, а ток I_{LN} вверх.

Указание. См. решение задачи 12.5.

$$12.7. \quad \mathcal{E} = -a^2 t^3 B t g \alpha.$$

Решение. Перемещение перемычки $y = at^2/2$, длина перемычки между шинами $x = 2ytg\alpha = at^2tg\alpha$. Поток через контур, ограниченный перемычкой и шинами, изменяется со временем по закону:

$$\Phi = Bxy / 2 = a^2 t^4 B t g \alpha / 4.$$

$$\text{ЭДС индукции в контуре } \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -a^2 t^3 B t g \alpha.$$

$$12.8. \quad I = \frac{9vbB}{r(15b + 8\sqrt{3}d)}.$$

$$12.9. F = \frac{B^2 l^2}{R} v.$$

Решение. При движении в магнитном поле в перемычке возникает ЭДС индукции, и по контуру, включающему перемычку и провод, пойдет индукционный ток $I_{\text{инд}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{R}$.

ЭДС индукции равна:

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \int_l [\mathbf{v} \mathbf{B}] \cdot d\mathbf{l} = Bv \int_l dl = Bvl.$$

Согласно правилу Ленца индукционный ток потечет по перемычке вверх. На перемычку со стороны магнитного поля будет действовать сила Ампера $F_A = I_{\text{инд}} [l\mathbf{B}]$, направленная влево. Эта сила будет тормозить движение перемычки. Величина силы Ампера равна:

$$F_A = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{R} lB = \frac{B^2 l^2 v}{R}.$$

Так как перемычка движется с постоянной скоростью, то приложенная внешняя сила должна компенсировать силу Ампера:

$$\mathbf{F} = -\mathbf{F}_A = \frac{B^2 l^2}{R} v.$$

$$12.10. a = \frac{\sqrt{3RQ/\tau^3}}{Bb}.$$

$$12.11. v = \frac{mgR \sin \alpha}{B^2 l^2 \cos^2 \alpha}.$$

Решение. При движении перемычки в контуре возникает ЭДС индукции: $|\mathcal{E}| = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = \frac{Blvdt}{dt} = Bvl$. Сила тока через перемычку

$I_{\text{инд}} = vBl/R$. В результате на перемычку действует сила Ампера

$$\mathbf{F}_A = I_{\text{инд}} [l\mathbf{B}].$$

Модуль силы Ампера равен

$$F_A = I_{\text{инд}} Bl \cos \alpha = \frac{B^2 v l^2 \cos \alpha}{R}.$$

Кроме того на перемычку действуют сила тяжести mg и сила нормального давления N со стороны шин. Направления сил показаны на рис. О.12.11.

Уравнение движения перемычки имеет вид:

$$ma = mg + F_A + N.$$

Направим ось X в плоскости шин параллельно им. Запишем уравнение движения перемычки в проекции на ось X при установившемся движении, когда $a = 0$:

$$F_{A\parallel} - mg \sin \alpha = 0, \text{ т.е.}$$

$$\frac{(Bl \cos \alpha)^2}{R} v - mg \sin \alpha = 0,$$

откуда $v = \frac{mgR \sin \alpha}{B^2 l^2 \cos^2 \alpha}.$

$$12.12. v = \frac{mgR}{B^2 l^2} \cdot \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + \mu \sin(2\alpha) / 2}.$$

$$12.13. v_0 = \frac{SB^2 l^2}{mR}.$$

Решение. В движущейся перемычке возникает ЭДС индукции $\mathcal{E} = vbl$, и в контуре начинает течь ток $I = vBl/R$. На перемычку действует сила Ампера $F_A = I_{\text{инд}} [lB]$, направленная влево:

$$F_A = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{R} lB = \frac{B^2 l^2 v}{R}.$$

Введем ось X в направлении движения перемычки с началом координат в точке, где перемычка покоилась. Уравнение движения перемычки в проекции на ось X :

$$m \frac{dv}{dt} = - \frac{B^2 l^2}{R} v.$$

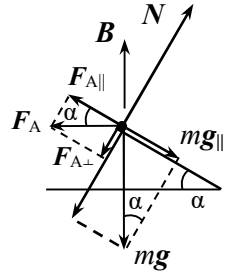


Рис. О.12.11.

Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\ln \frac{v}{v_0} = -\frac{B^2 l^2}{Rm} t, \text{ откуда } v = v_0 \exp\left(-\frac{B^2 l^2}{mR} t\right).$$

Пройденный путь $S = \int_0^{\infty} v dt = \frac{v_0 m R}{B^2 l^2}$, откуда $v_0 = \frac{S B^2 l^2}{m R}$.

12.14. $\varphi_C - \varphi_D = Blv/4$.

12.15. $Q = \frac{B^2 v l^2 \operatorname{tg} \alpha}{2r}$.

Решение. В движущейся проволоке возникает ЭДС индукции $\mathcal{E} = Bvx(t)$, где $x(t) = vlt \operatorname{tg} \alpha$ – длина участка AC проволоки между проводниками.

В контуре, образованном проволокой и проводниками, начинает течь индукционный ток

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R(t)} = \frac{Bvx(t)}{rx(t)} = \frac{Bv}{r},$$

где $R(t) = rx(t)$ – сопротивление участка AC проволоки.

Тепловая мощность, выделяющаяся в проволоке, равна

$$P(t) = I^2 R(t) = \frac{B^2 v^2}{r} \cdot x(t) = \frac{B^2 v^3 \operatorname{tg} \alpha}{r} t,$$

а полное количество теплоты Q , выделившееся за время $\tau = l/v$ перемещения проволоки на расстояние l , составляет:

$$Q = \int_0^{\tau} P(t) dt = \frac{B^2 v^3 \operatorname{tg} \alpha}{r} \int_0^{l/v} t dt = \frac{B^2 v l^2 \operatorname{tg} \alpha}{2r}.$$

12.16. $v = \frac{mgR}{B^2 l^2} \left(1 - e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} t}\right)$.

Решение. Под действием силы тяжести mg проводник начинает двигаться вниз, и в магнитном поле в нем возникает ЭДС ин-

дукции $\mathcal{E}_{\text{инд}} = Bvl$. По замкнутому контуру, включающему шины и проводник, потечет индукционный ток

$$I_{\text{инд}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{R} = \frac{Blv}{R}.$$

На проводник будет действовать сила Ампера $F_A = I_{\text{инд}}[lB]$, где l – вектор, сонаправленный с током и равный по модулю длине проводника. Согласно правилу Ленца, индукционный ток потечет по проводнику слева направо. При этом сила Ампера направлена вверх и по модулю равна:

$$F_A = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{R} lB = \frac{B^2 l^2 v}{R}.$$

Направим ось X вертикально вниз (рис. О.12.16). Уравнение движения проводника в проекции на эту ось имеет вид:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \frac{B^2 l^2}{R} v.$$

Перепишав уравнение в виде:

$$\frac{mR}{B^2 l^2} \cdot \frac{dv}{dt} = - \left(v - \frac{mgR}{B^2 l^2} \right),$$

разделяем переменные, и, интегрируя, получаем скорость движения проводника:

$$\int_0^v \frac{dv}{v - \frac{mgR}{B^2 l^2}} = - \frac{B^2 l^2}{mR} \int_0^t dt,$$

откуда

$$\ln \left(v - \frac{mgR}{B^2 l^2} \right) = - \frac{B^2 l^2}{mR} t, \quad v = \frac{mgR}{B^2 l^2} \left(1 - e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} t} \right).$$

$$12.17. \quad t = \sqrt{\frac{2b(m + CB^2 l^2 \cos^2 \alpha)}{mgsin\alpha}}.$$

Решение. При движении перемычки под действием силы тяжести mg возникнет ЭДС индукции

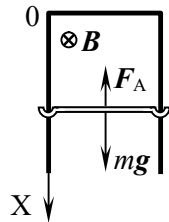


Рис. О.12.16.

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{Blv\cos\alpha dt}{dt} = -Blv\cos\alpha,$$

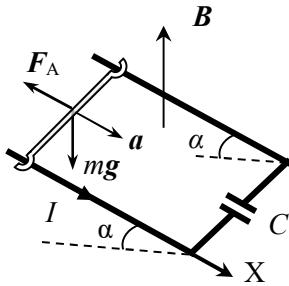


Рис. О.12.17.

вызывающая перемещение свободных электронов с одной пластины конденсатора C на другую, т.е. конденсатор приобретает заряд

$$q = C\mathcal{E} = CBvl\cos\alpha.$$

По переключке будет протекать индукционный ток (см. рис. О.12.17):

$$I = \frac{dq}{dt} = CBl\cos\alpha \frac{dv}{dt} = CBl\cos\alpha a,$$

где $a = \frac{dv}{dt}$ – ускорение переключки, и на

переключку будет действовать сила Ампера $F_A = I[lB]$, модуль которой равен:

$$F_A = IBl = CB^2l^2\cos\alpha a.$$

Уравнение движения переключки имеет вид:

$$ma = mg + F_A.$$

Направим ось X в плоскости реек параллельно им. Уравнение движения переключки в проекции на ось X имеет вид:

$$ma = mg\sin\alpha - CB^2l^2\cos\alpha a,$$

откуда находим ускорение переключки:

$$a = \frac{mg\sin\alpha}{m + CB^2l^2\cos^2\alpha}.$$

В начальный момент времени переключка покоилась, поэтому пройденный ей путь b равен: $b = \frac{at^2}{2}$. Время движения переключки до основания "горки" составляет:

$$t = \sqrt{\frac{2b}{a}} = \sqrt{\frac{2b(m + CB^2l^2\cos^2\alpha)}{mg\sin\alpha}}.$$

$$12.18. v = \frac{2\pi U}{\mu_0 I \ln(1 + l/d)}.$$

Решение. На расстоянии r от провода с током модуль магнитной индукции $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, причем вектор \mathbf{B} перпендикулярен стержню и скорости его движения v .

При движении стержня в магнитном поле в нем происходит перераспределение зарядов под действием силы Лоренца $\mathbf{F}_L = q[\mathbf{v}\mathbf{B}]$, которая направлена вдоль стержня. В результате на концах стержня появляются разноименные заряды, создающие электрическое поле с напряженностью

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{F}_L}{q} = -[\mathbf{v}\mathbf{B}].$$

Так как $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, находим разность потенциалов между концами стержня:

$$U = \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \int_2^1 \mathbf{E}d\mathbf{l} = \int_1^2 ([\mathbf{v}\mathbf{B}]d\mathbf{l}) = \int_d^{d+l} v \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 v I}{2\pi} \ln \frac{d+l}{d}.$$

Здесь $d\mathbf{l} = d\mathbf{r}$ – вектор в направлении длины стержня.

Из последнего уравнения определяем скорость стержня:

$$v = \frac{2\pi U}{\mu_0 I \ln(1+l/d)}.$$

12.19. а) $I_{\text{инд}} = \frac{\mu_0 I v}{\pi R} \ln\left(1 + \frac{l}{a}\right)$, ток течет против часовой

стрелки; б) $\mathbf{F} = \left(\frac{\mu_0 I}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{v}{R} \cdot \ln^2\left(1 + \frac{l}{a}\right) \cdot \frac{\mathbf{v}}{v}$.

12.20. $\mathcal{E}(t) = 5aI\beta t^3/2$.

12.21. $q = \frac{NBS \cos \varphi}{R} = 2,5 \cdot 10^{-4}$ Кл.

12.22. $q = \frac{\mu_0 a I}{2\pi R} \ln \frac{1+a/b}{1+a/(b+v\tau)}$.

Решение. При движении рамки в ней возникает ЭДС индукции, и течет индукционный ток $I_{\text{инд}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{R}$. По закону Фарадея

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{d\Phi}{dt}, \text{ где } \Phi \text{ – поток магнитной индукции через рамку, откуда}$$

$$I_{\text{инд}} = \frac{1}{R} \left| \frac{d\Phi}{dt} \right|.$$

Учитывая, что $I = \frac{dq}{dt}$, получаем: $\frac{dq}{dt} = \frac{1}{R} \left| \frac{d\Phi}{dt} \right|$, откуда после интегрирования имеем:

$$q = \frac{1}{R} |\Delta\Phi|.$$

Потоки магнитной индукции через рамку в начальном положении (Φ_1) и через время τ после начала движения (Φ_2) равны (см. решение задачи 9.43):

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 a I}{2\pi} \ln \frac{b+a}{b} = \frac{\mu_0 a I}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{a}{b} \right);$$

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0 a I}{2\pi} \ln \frac{b+a+v\tau}{b+v\tau} = \frac{\mu_0 a I}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{a}{b+v\tau} \right).$$

Следовательно, количество электричества, протекшее по рамке за время τ , составляет:

$$q = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R} = \frac{\mu_0 a I}{2\pi R} \ln \frac{1 + a/b}{1 + a/(b+v\tau)}.$$

$$12.23. \quad q = \frac{\mu_0 I b}{\pi R} \ln \left(1 + \frac{a}{d} \right).$$

$$12.24. \quad q = \frac{\pi a^2 B}{R} = 1,26 \cdot 10^{-5} \text{ Кл.}$$

$$12.25. \quad q = \frac{Bab}{R} = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ Кл.}$$

$$12.26. \quad \varepsilon_{\max} = Bab\omega.$$

$$12.27. \quad T = \pi \sqrt{\frac{4ml + B^2 l^3 C}{mg}}.$$

Решение. При движении маятника в магнитном поле происходит изменение потока магнитной индукции Φ через проводящий контур, включающий маятник, дугу окружности и конденсатор C с подводящими проводами (см. рис. О.12.27).

Изменение потока $d\Phi$ через контур происходит за счет изменения его площади на величину $dS = \frac{1}{2}l^2 d\alpha$ при повороте маятника на угол $d\alpha$. По закону Фарадея ЭДС индукции равна

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{BdS}{dt} = -\frac{1}{2}Bl^2\dot{\alpha},$$

где α – угол отклонения маятника.

Заряд конденсатора при этом равен

$$q = C\varepsilon = -\frac{1}{2}CB l^2 \dot{\alpha},$$

а сила протекающего по цепи индукционного тока –

$$I = \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{2}CB l^2 \ddot{\alpha}.$$

На стержень длины l будет действовать сила Ампера $F_A = I[IB]$, направленная перпендикулярно стержню (см. рис. О.12.26):

$$F_A = IB l = -\frac{1}{2}CB^2 l^3 \ddot{\alpha}.$$

На шарик также действует сила тяжести mg . Уравнение моментов для маятника относительно оси, перпендикулярной плоскости рисунка, имеет вид:

$$ml^2 \ddot{\alpha} = -mgl \sin \alpha + F_A \cdot \frac{l}{2},$$

С учетом приближения $\sin \alpha \approx \alpha$ получим:

$$ml^2 \ddot{\alpha} = -mgl\alpha - \frac{1}{4}CB^2 l^4 \ddot{\alpha}.$$

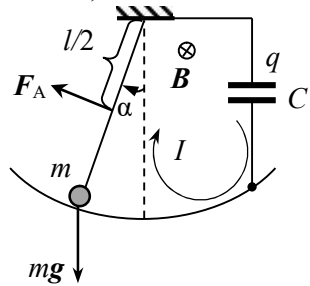


Рис. О.12.27.

Из полученного уравнения гармонических колебаний находим квадрат частоты колебаний маятника ω^2 и искомый период его малых колебаний T :

$$\omega^2 = \frac{mgl}{ml^2 + \frac{1}{4}CB^2l^4} = \frac{mg}{ml + \frac{1}{4}CB^2l^3}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{4ml + B^2l^3C}{mg}}.$$

$$12.28. \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{(m + CB^2a^2)l}{mg}}.$$

$$12.29. \quad I = \frac{\pi vBa^2}{R} \approx 0,04 \text{ A}.$$

Решение. Пусть векторы ω и \mathbf{B} сонаправлены. Под действием силы Лоренца происходит перераспределение электронов во вращающемся диске, и между его центром и краем создается радиальное электрическое поле напряженностью $E_r(r)$. Сила, действующая на электрон в этом поле, уравновешивает магнитную компоненту силы Лоренца, откуда получаем:

$$E_r(r) = -\omega rB.$$

Разность потенциалов между краем и центром диска равна:

$$U = -\int_0^a E(r)dr = \int_0^a \omega rBdr = \frac{1}{2}\omega Ba^2.$$

Амперметр, включенный через сопротивление R между центром и краем диска, покажет силу тока

$$I = \frac{U}{R} = \frac{\omega Ba^2}{2R} = \frac{\pi vBa^2}{R} \approx 0,04 \text{ A}.$$

$$12.30. \quad \varphi_A - \varphi_C = \frac{\omega Bl^2}{4}.$$

Решение. Если стержень вращается так, как показано на рис. 12.21, то свободные электроны под действием силы Лоренца $\mathbf{F}_L = q[\mathbf{vB}]$ движутся от его краев к оси вращения, в результате чего на концах стержня образуются положительные заряды, а вблизи

точки О накопится отрицательный заряд. Заряды разных знаков создают в стержне электрическое поле с напряженностью

$$E(r) = \frac{ma}{e} - \frac{F_L}{e}.$$

Величина $ma = m\omega^2 r$ обычно пренебрежимо мала по сравнению с $F_L = e\omega r B$, поэтому приближенно можно считать, что

$$E(r) = -\frac{F_L}{e} = -[vB].$$

Так как $E = -\nabla\varphi$, разность потенциалов между двумя любыми точками стержня равна

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_2^1 E dl = \int_1^2 ([vB] dl), \text{ где } ([vB] dl) = vB dr = \omega B r dr.$$

Разделим стержень на две части по разные стороны от оси вращения. Разности потенциалов между точкой О и концом стержня для каждой части равны:

$$\varphi_A - \varphi_0 = \int_0^{3l/4} \omega B r dr = \frac{9\omega B l^2}{32}, \quad \varphi_0 - \varphi_C = \int_{l/4}^0 \omega B r dr = -\frac{\omega B l^2}{32}.$$

Складывая полученные значения, получаем:

$$\varphi_A - \varphi_C = \frac{\omega B l^2}{4}.$$

$$12.31. N = \frac{(\omega B R^2 \sin^2 \alpha)^2}{4r}.$$

$$12.32. \omega = \frac{qB}{2m}.$$

Решение. При выключении магнитного поля возникает вихревое электрическое поле с напряженностью E , силовые линии которого ввиду аксиальной симметрии являются окружностями с центром на оси кольца. Это поле будет действовать на заряды кольца, вызывая его ускорение.

ЭДС индукции в замкнутом контуре L , обусловленная вихревым электрическим полем, равна: $\mathcal{E} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}$. По определению

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \oint_L \mathbf{E}_{\text{вихр}} d\mathbf{l},$$

откуда $E(R) = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)/(2\pi R)$, где Φ – магнитный поток через кольцо.

Рассмотрим элемент заряда dq на кольце. Со стороны возникшего электрического поля на него будет действовать сила $dF = Edq$. Эта сила вызывает вращающий момент вдоль оси кольца:

$$dM = RdF = REdq = -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{d\Phi}{dt}\right) dq.$$

Полный вращающий момент, действующий на кольцо, равен:

$$M = REq = -\frac{d\Phi}{dt} \cdot \frac{q}{2\pi}.$$

Уравнение моментов для кольца: $mR^2\varepsilon = M$, откуда с учетом $\Phi = BS = \pi R^2 B$ находим угловое ускорение кольца:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{q \cdot \pi R^2}{2\pi m R^2} \cdot \frac{dB}{dt} = -\frac{q}{2m} \cdot \frac{dB}{dt}, \text{ т.е. } d\omega = -\frac{q}{2m} dB.$$

Интегрируя, получаем:

$$\int_0^\omega d\omega = \frac{q}{2m} \int_B^0 dB \rightarrow \omega = \frac{qB}{2m}.$$

С учетом направления вращающего момента $\boldsymbol{\omega} = \frac{q\mathbf{B}}{2m}$.

$$12.33. I = \frac{\mu_0 n h \alpha (b^2 - a^2)}{4\rho}.$$

Решение. Индукция магнитного поля \mathbf{B} в середине длинного соленоида равна по модулю $B = \mu_0 n I_0$ и направлена вдоль оси кольца. При изменении тока в обмотке соленоида индукция будет меняться с постоянной скоростью $dB/dt = \mu_0 n \alpha$. Меняющееся магнитное поле создаст вихревое электрическое поле, которое вызывает индукционный ток в кольце.

Выделим в кольце цилиндрический слой высотой h , радиусом r и толщиной dr . Контур L выберем внутри слоя соосно ему. При изменении магнитного поля в этом контуре возникает ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \oint_L \mathbf{E}_{\text{вихр}} d\mathbf{l}.$$

Циркуляция напряженности вихревого электрического поля

$$\oint_L \mathbf{E}_{\text{вихр}} d\mathbf{l} = E_{\text{вихр}} \cdot 2\pi r,$$

поток магнитной индукции через контур $\Phi = BS = \pi r^2 B$. Записанное ранее уравнение примет вид:

$$E_{\text{вихр}} \cdot 2\pi r = -\pi r^2 \cdot \mu_0 n \alpha,$$

откуда находим: $E_{\text{вихр}} = -\mu_0 n \alpha r / 2$.

По закону Ома в локальной форме плотность тока в слое равна:

$$j = \frac{E_{\text{вихр}}}{\rho} = -\frac{\mu_0 n \alpha r}{2\rho}.$$

Полный ток в кольце находим интегрированием:

$$I = \int j dS = \frac{\mu_0 n \alpha}{2\rho} \int_a^b r \cdot h dr = \frac{\mu_0 n h \alpha (b^2 - a^2)}{4\rho}.$$

12.34. $\mathcal{E} = \pi a^2 \omega B_0 \cos(2\omega t)$.

12.35. $\mathcal{E} = Bab\omega_0(1 + \alpha t) \sin[\omega_0 t (1 + \alpha t / 2)]$.

12.36. а) $I = \frac{\beta(R_1 - R_2)}{2r}$; б) $|\Delta\Phi| = \pi\beta R_1 R_2$.

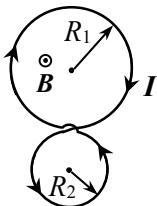


Рис. О.12.36.

Решение. а). Выберем в качестве положительного направления обхода большого контура радиусом R_1 движение по часовой стрелке (рис. О.12.36). Тогда для второго контура радиусом R_2 это направление будет отрицательным. В связи с этим полный магнитный поток через контур

$$\Phi = \pi B(t) (R_1^2 - R_2^2),$$

а величина ЭДС равна:

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi(R_1^2 - R_2^2) \cdot \frac{dB}{dt} = -\pi\beta(R_1^2 - R_2^2).$$

ЭДС самоиндукции не учитываем в соответствии с условиями задачи.

Так как общее сопротивление контура

$$R = 2\pi(R_1 + R_2)r,$$

сила тока в контуре равна (знак "минус" в $\mathcal{E}_{\text{инд}}$ опускаем):

$$I = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{R} = \frac{\pi\beta(R_1^2 - R_2^2)}{2\pi r(R_1 + R_2)} = \frac{\beta(R_1 - R_2)}{2r}.$$

б). В верхней окружности контура при изменении магнитного поля индуцируется ЭДС

$$\mathcal{E}_{\text{инд}1} = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -\pi R_1^2 \cdot \frac{dB}{dt} = -\pi\beta R_1^2.$$

Искомая разность потенциалов равна:

$$\Delta\varphi = \mathcal{E}_{\text{инд}1} - I \cdot 2\pi R_1 r = -\pi\beta R_1^2 + \frac{2\pi r R_1 \cdot \beta(R_1 - R_2)}{2r} = -\pi\beta R_1 R_2.$$

12.37. При $r < R$ $E_{\text{вихр}} = -\alpha t_1 r$; при $r > R$ $E_{\text{вихр}} = -\alpha R^2 t_1 \cdot \frac{1}{r}$.

12.38. $E_{\text{вихр}} = \mu_0 \pi v n I_0 r \cos(2\pi v t)$ при $r < a$;

$$E_{\text{вихр}} = \mu_0 \pi v n a^2 I_0 \cos(2\pi v t) \cdot \frac{1}{r} \text{ при } r > a.$$

12.39. $q_1 = q_2 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \alpha \pi a^2$.

$$12.40. L = \frac{\mu_0 \pi d^2 N^2}{4l} \approx 7,1 \cdot 10^{-4} \text{ Гн} .$$

$$12.41. N = \frac{4dL}{\mu_0 \pi D^2} = 380 .$$

$$12.42. L'_{12} = \mu_0 n_1 n_2 S .$$

$$12.43. L_{12} = \mu_0 n N \pi a^2 \sin \beta .$$

Решение. Индукция поля длинного соленоида $B = \mu_0 n I_1$ (в центральной части). Поток магнитной индукции через все N витков катушки равен:

$$\Phi_2 = \mu_0 n I_1 N \pi a^2 \sin \beta ,$$

откуда коэффициент взаимной индукции равен:

$$L_{12} = \frac{\Phi_2}{I_1} = \mu_0 n N \pi a^2 \sin \beta .$$

$$12.44. L_{12} = 0 .$$

$$12.45. L_{12} = \mu_0 \pi R^2 n |\sin \alpha - \cos \alpha| / 2 .$$

$$12.46. L_{12} \cong \mu_0 \frac{\pi r_1^2 r_2^2}{2d^3} .$$

Решение. Пусть по кольцу радиусом r_1 течет ток I_1 . Он создаст на оси кольца магнитное поле с индукцией $B_1(x)$, величина которой в предельном случае $x \gg r_1$ равна:

$$B_1(x) \approx \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{IR^2}{x^3} ,$$

где x – расстояние от центра кольца до точки на его оси.

Ввиду малых размеров второго кольца в месте его нахождения магнитное поле первого кольца можно считать однородным. Поток магнитной индукции, пронизывающий второе кольцо, равен

$$\Phi_2 = \mathbf{B}_1 \mathbf{S}_2 = \frac{\mu_0 r_1^2}{2d^3} \pi r_2^2 I_1.$$

По определению коэффициента взаимной индукции L_{12} :

$$\Phi_2 = L_{12} I_1,$$

Сравнивая формулы, получаем коэффициент взаимной индукции колец:

$$L_{12} \cong \mu_0 \frac{\pi r_1^2 r_2^2}{2d^3}.$$

$$12.47. L_{12} = \frac{\mu_0 \pi r_1^2 r_2^2}{4d^3}.$$

Решение. Пусть по витку радиусом r_1 течет ток I_1 . На больших расстояниях r от витка индукцию его магнитного поля можно рассчитывать по формуле поля точечного магнитного диполя с магнитным моментом $\mathbf{p}_m = \pi r_1^2 I_1 \mathbf{n}$, где \mathbf{n} – вектор нормали к плоскости витка:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3(\mathbf{p}_m \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2 \mathbf{p}_m}{r^5}.$$

Так как витки лежат в одной плоскости, вектор \mathbf{p}_m перпендикулярен радиус-вектору \mathbf{r} , проведенному из центра первого витка в центр второго и $(\mathbf{p}_m \mathbf{r}) = 0$. Ввиду малых размеров второго витка в месте его нахождения магнитное поле первого витка можно считать однородным и равным

$$\mathbf{B}_1(d) \cong -\frac{\mu_0}{4\pi d^3} \mathbf{p}_m.$$

Поток магнитной индукции, пронизывающий второй виток, равен

$$\Phi_2 = (\mathbf{B}_1(d) \cdot \mathbf{S}_2) \cong -\frac{\mu_0}{4\pi d^3} (\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{S}_2) = \frac{\mu_0 \pi r_1^2 r_2^2}{4d^3} I_1.$$

Сравнивая полученную формулу с $\Phi_2 = L_{12} I_1$, находим:

$$L_{12} = \frac{\mu_0 \pi r_1^2 r_2^2}{4d^3}.$$

$$12.48. L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \left(\frac{a_2}{a_1} \right)$$

Решение. На обоих концах внутренних и внешний цилиндры соединены между собой и подключены к источнику ЭДС, так что совокупность двух цилиндров составляет замкнутую проводящую цепь, по которой циркулирует ток I .

Выберем контур длиной l , ограниченный поверхностями внутреннего и внешнего цилиндров и удаленный от их концов (на рис. О.12.48 плоскость контура заштрихована).

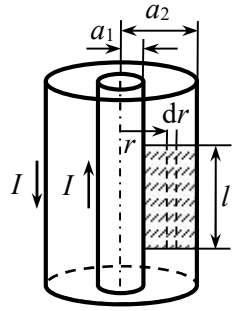


Рис. О.12.48.

Между цилиндрами индукция магнитного поля равна $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$.

Выделим из контура узкую полоску толщиной dr , находящуюся на расстоянии r от оси цилиндров. Векторы индукции магнитного поля перпендикулярны плоскости контура. Поток индукции через выделенную полоску равен:

$$d\Phi = BdS = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l dr.$$

Полный поток магнитной индукции через площадь контура:

$$\Phi = \int_a^b \frac{\mu_0 I l dr}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \left(\frac{b}{a} \right).$$

Сравнивая полученную формулу с выражением $\Phi = LI$, для индуктивности участка цилиндров длиной l получаем:

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \left(\frac{a_2}{a_1} \right).$$

$$12.49. n = \exp \left(\frac{\pi L}{\mu_0} \right).$$

$$12.50. L_{12} = \frac{\mu_0}{2\pi} N_1 N_2 (b - a) \ln \left(\frac{b}{a} \right) \approx 3,4 \cdot 10^{-4} \text{ Гн.}$$

Решение. Пусть по обмотке первой катушки протекает ток I_1 . Он создает внутри тора магнитное поле с индукцией

$$B(r) = \mu_0 \frac{N_1 I_1}{2\pi r}.$$

Магнитное поле первой катушки пронизывает все витки второй катушки. Полный поток магнитной индукции через вторую обмотку с N_2 витками равен:

$$\Phi_2 = N_2 \int_a^b \mu_0 \frac{N_1 I_1}{2\pi r} (b-a) \cdot dr = \frac{\mu_0}{2\pi} N_1 N_2 I_1 (b-a) \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

(высота тора равна $(b-a)$, т.к. он имеет квадратное сечение).

По определению коэффициента взаимной индукции L_{12} : $\Phi_2 = L_{12} I_1$. Сравнивая формулы, получаем:

$$L_{12} = \frac{\mu_0}{2\pi} N_1 N_2 (b-a) \ln\left(\frac{b}{a}\right) \approx 3,4 \cdot 10^{-4} \text{ Гн}.$$

$$12.51. L = \frac{\mu_0 h}{2\pi} I (N_1^2 + N_2^2 \pm 2N_1 N_2) \ln \frac{b}{a}.$$

Решение. При последовательном соединении ток в обеих обмотках одинаков и равен I . Суммарный магнитный поток Φ , пронизывающий обе обмотки, равен алгебраической сумме потоков через первую и вторую обмотки. Каждая из обмоток пронизывается собственным потоком (Φ_{11} или Φ_{22}) и потоком, созданным другой обмоткой (Φ_{21} или Φ_{12}):

$$\Phi = LI = \Phi_{11} + \Phi_{22} + \Phi_{21} + \Phi_{12}.$$

Собственные потоки определяются индуктивностью каждой обмотки:

$$\Phi_{11} = L_1 I, \quad \Phi_{22} = L_2 I.$$

"Сторонние" потоки могут быть положительными или отрицательными в зависимости от направления индукции поля, созданного одной обмоткой в витках другой. Магнитные потоки Φ_{21} и Φ_{12} определяются взаимной индуктивностью обмоток:

$$\Phi_{21} = \Phi_{12} = \pm L_{12} I.$$

Знак в формуле для Φ определяется характером соединения обмоток. Если векторы индукций магнитных полей обмоток сонаправлены, то "сторонние" потоки положительны: $\Phi_{21} = \Phi_{12} = +L_{12} I$.

Если векторы индукции полей катушек направлены навстречу друг другу, то "сторонние" потоки отрицательны и $\Phi_{21} = \Phi_{12} = -L_{12}I$.

Подставив Φ_{11} , Φ_{22} и $\Phi_{21} = \Phi_{12}$ в формулу для Φ , находим индуктивность системы:

$$L = L_1 + L_2 \pm 2L_{12}$$

Индуктивности обмоток равны:

$$L_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}, \quad L_2 = \frac{\mu_0 N_2^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

Взаимная индуктивность обмоток (см. решение задачи 12.49)

$$L_{12} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

В итоге находим индуктивность всей системы:

$$L = \frac{\mu_0 h}{2\pi} (N_1^2 + N_2^2 \pm 2N_1 N_2) \ln \frac{b}{a}.$$

Знак "плюс" при одинаковом направлении токов в обмотках, "минус" – при противоположных направлениях токов.

12.52. $L = \mu_0 \pi (r_1^2 l_1 n_1^2 + r_2^2 l_2 n_2^2 \pm 2n_1 n_2 r_1^2 l_1)$. Знак "плюс" при одинаковом направлении токов.

12.53. $L = \mu_0 \pi \left(\frac{N^2 a^2}{l} + n^2 L b^2 + 2n N a^2 \cos \alpha \right)$; а) L макси-

мальна при $\alpha = 0$, т.е. когда токи в катушке и соленоиде имеют одинаковое направление; б) L минимальна при $\alpha = \pi$, т.е. когда токи в катушке и соленоиде направлены противоположно; в) $L = L_1 + L_2$ при $\alpha = \pi/2$.

12.54. $L = L_1 + L_2 = 1,5$ Гн.

12.55. 1) $L \approx 0$; 2) $L = 0,2$ Гн; 3) $L = 0,05$ Гн.

12.56. $\mathcal{E} = \mu_0 \frac{N}{l} \pi a^2 I_0 \omega \sin \omega t$.

Решение. Найти ЭДС индукции в соленоиде (контур 1) можно

по закону Фарадея: $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_1}{dt}$, где Φ_1 – магнитный поток, пронизывающий все витки соленоида, причем $\Phi_1 = L_{12}I_2$, где $I_2 \equiv I$ – ток в кольце (контур 2), L_{12} – коэффициент взаимной индукции соленоида и кольца.

Рассчитать L_{12} трудно, поскольку для этого надо знать пространственное распределение магнитного поля кольца во всем объеме, занимаемом соленоидом. Поэтому воспользуемся равенством коэффициентов взаимной индукции $L_{12} = L_{21}$ и рассчитаем L_{21} .

Пусть по соленоиду течет ток I_1 . Кольцо пронизывает магнитный поток, который локализован только в сечении соленоида:

$$\Phi_2 = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{S}) = S(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) = \mu_0 n I_1 \cdot \pi a^2,$$

где \mathbf{B} – индукция поля соленоида, $\mathbf{S} = S\mathbf{n}$ – вектор, равный площади кольца, пронизываемой магнитным полем соленоида, и направленный по нормали \mathbf{n} к плоскости кольца.

По определению коэффициента взаимной индукции L_{21} : $\Phi_2 = L_{21}I_1$, откуда получаем:

$$L_{12} = \mu_0 n \pi a^2.$$

Тогда ЭДС, наводимая в соленоиде, равна:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt} = -L_{21} \frac{dI_2}{dt} = \mu_0 \frac{N}{l} \pi a^2 I_0 \omega \sin(\omega t).$$

$$12.57. \Delta\varphi = -\mu_0 \pi R^2 n N \omega I_0 \cos(\omega t).$$

$$12.58. \mathcal{E} = \frac{\mu_0}{2\pi} b \ln\left(1 + \frac{a}{d}\right) \omega I_0 \cos(\omega t).$$

Указание. Использовать теорему о равенстве взаимных индуктивностей.

$$12.59. \Phi_{21} = \mu_0 n N S I \cos \alpha.$$

Указание. Использовать теорему о равенстве взаимных индуктивностей.

$$12.60. \quad x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t).$$

Решение. Направим ось X вдоль скорости перемычки, совместив начало отсчета с начальным положением перемычки. В движущейся перемычке возникает ЭДС индукции

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -Blv,$$

и в контуре начинает течь ток $I = vBl/R$, меняющийся при изменении скорости перемычки. При возникновении тока в катушке появляется ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_{\text{инд}} = -L \frac{dI}{dt}$. По правилу Кирхгофа можно записать:

$$IR = Blv = -L \frac{dI}{dt}, \text{ т.е. } \dot{I} = -BLv/L.$$

На перемычку действует сила Ампера $F_A = BIl$, поэтому уравнение движения перемычки имеет вид:

$$m\ddot{x} = BIl \text{ или } m\dot{v} = BIl.$$

Продифференцируем последнее уравнение по времени:

$$m\ddot{v} = BIl\dot{I}$$

и подставим $\dot{I} = -BLv/L$. Получим уравнение для скорости перемычки:

$$m\ddot{v} = -\frac{(Bl)^2}{L}v \text{ или } \ddot{v} + \frac{(Bl)^2}{mL}v = 0.$$

Это уравнение гармонических колебаний, решение которого

$$v = A \cos(\omega t + \varphi), \text{ где } \omega = \frac{Bl}{\sqrt{mL}}.$$

Константы A и φ находим из начальных условий: при $t = 0$ $v = v_0$ и ускорение перемычки $a = \dot{v} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi) = 0$. В результате получаем: $A = v_0$, $\varphi = 0$, и закон изменения скорости имеет вид:

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos(\omega t).$$

Интегрируя полученное уравнение, находим закон движения

перемычки:

$$x(t) = \int_0^t v_0 \cos(\omega t) dt = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t).$$

§13. Магнитное поле в магнетиках

13.1. $\mu = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}.$

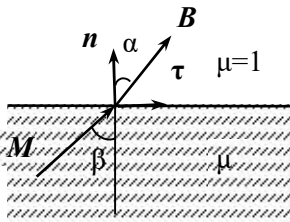


Рис. О.13.1.

Решение. Индексом 1 будем обозначать характеристики магнитного поля в вакууме, а индексом 2 – в магнетике. Поскольку обе среды изотропны, в магнетике вектор B_2 будет направлен так же, как вектор M (рис. О.13.1).

Токов проводимости на границе раздела сред нет, граничные условия для нормальных компонент индукции B_n и тангенциальных компонент напряженности H_τ магнитного поля имеют вид:

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad H_{1\tau} = H_{2\tau}, \quad \text{где } B_{2n} = B_2 \cos \beta, \quad B_{1n} = B_1 \cos \alpha.$$

С использованием материального уравнения $B = \mu\mu_0 H$ получаем: $B_{1\tau} = B_{2\tau} / \mu$. При этом

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{B_{2\tau}}{B_{2n}} = \frac{\mu B_1 \sin \alpha}{B_1 \cos \alpha} = \mu \operatorname{tg}\alpha,$$

откуда $\mu = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}.$

13.2. $\operatorname{tg}\beta = \frac{\mu}{\mu_B} \operatorname{tg}\alpha$; а) $\operatorname{tg}\beta_1 = 1,0000226 \operatorname{tg}\alpha \cong \operatorname{tg}\alpha$; $\beta_1 \cong \alpha$;

б) $\operatorname{tg}\beta_2 \cong 150 \operatorname{tg}\alpha \cong 86,6$, $\beta_2 = 89,6^\circ$.

13.3. $B_2 = \frac{B_1}{\mu_1} \sqrt{(\mu_1 \cos \alpha)^2 + (\mu_2 \sin \alpha)^2}$;

$$H_2 = \frac{B_1}{\mu_0 \mu_1 \mu_2} \sqrt{(\mu_1 \cos \alpha)^2 + (\mu_2 \sin \alpha)^2} ;$$

$$M_2 = \frac{B_1(\mu_2 - 1)}{\mu_0 \mu_1 \mu_2} \sqrt{(\mu_1 \cos \alpha)^2 + (\mu_2 \sin \alpha)^2}$$

Решение. Поскольку токов проводимости на границе раздела сред нет, граничные условия имеют вид:

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad H_{1\tau} = H_{2\tau}, \quad \text{где } B_{2n} = B_1 \cos \alpha.$$

Учитывая $\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}$, можно записать:

$$B_{2\tau} = \frac{\mu_2}{\mu_1} B_{1\tau} = \frac{\mu_2}{\mu_1} B_1 \sin \alpha; \quad H_{2n} = \frac{B_1 \cos \alpha}{\mu_0 \mu_2}, \quad H_{2\tau} = \frac{B_1 \sin \alpha}{\mu_0 \mu_1}.$$

В итоге получаем:

$$B_2 = \sqrt{B_{2n}^2 + B_{2\tau}^2} = B_1 \sqrt{\cos^2 \alpha + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 \sin^2 \alpha} =$$

$$= \frac{B_1}{\mu_1} \sqrt{(\mu_1 \cos \alpha)^2 + (\mu_2 \sin \alpha)^2},$$

$$H_2 = \sqrt{H_{2n}^2 + H_{2\tau}^2} = \frac{B_1}{\mu_0} \sqrt{\left(\frac{\cos \alpha}{\mu_2}\right)^2 + \left(\frac{\sin \alpha}{\mu_1}\right)^2} =$$

$$= \frac{B_1}{\mu_0 \mu_1 \mu_2} \sqrt{(\mu_1 \cos \alpha)^2 + (\mu_2 \sin \alpha)^2}.$$

Из уравнения $\mathbf{M} = (\mu - 1)\mathbf{H}$ получаем:

$$M_2 = \frac{B_1(\mu_2 - 1)}{\mu_0 \mu_1 \mu_2} \sqrt{(\mu_1 \cos \alpha)^2 + (\mu_2 \sin \alpha)^2}.$$

Направление векторов \mathbf{B}_2 , \mathbf{H}_2 и \mathbf{M}_2 определяет угол β , тангенс которого равен:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{B_{2\tau}}{B_{2n}} = \frac{\mu_2 B_1 \sin \alpha}{\mu_1 B_1 \cos \alpha} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \operatorname{tg} \alpha.$$

При $\mu_2 > \mu_1$ угол β больше угла α .

$$13.4. \Phi_H = \frac{B_0 S}{\mu_0} \left(\frac{1}{\mu_B} - \frac{4}{\mu_1 + \mu_2} \right)$$

$$13.5. \oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B_1 \sin \alpha (1 - \mu_2 / \mu_1) l.$$

Решение. Представим вектор \mathbf{B} как сумму его нормальной \mathbf{B}_n и тангенциальной \mathbf{B}_τ компонент:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_n + \mathbf{B}_\tau.$$

Учтем граничные условия для векторов напряженности и индукции магнитного поля:

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad H_{1\tau} = H_{2\tau},$$

откуда с использованием материальных уравнений $\mathbf{B}_1 = \mu_0 \mu_1 \mathbf{H}_1$, $\mathbf{B}_2 = \mu_0 \mu_2 \mathbf{H}_2$ получаем:

$$B_{2\tau} = B_{1\tau} \cdot (\mu_2 / \mu_1).$$

Выберем за положительное направление обхода контура движение по часовой стрелке. Циркуляция вектора \mathbf{B} по каждой из сторон контура, начиная с верхней, равна:

$$\int_1^2 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{l} = B_{1\tau} l,$$

$$\int_2^3 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_2^3 (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) \cdot d\mathbf{l} = - \int_0^{l/2} B_{1n} dl - \int_{l/2}^l B_{2n} dl = -(B_{1n} + B_{2n}) \cdot \frac{l}{2}$$

$$\int_3^4 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_3^4 \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{l} = -B_{2\tau} l,$$

$$\int_4^1 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_4^1 (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{l/2} B_{2n} dl + \int_{l/2}^l B_{1n} dl = (B_{1n} + B_{2n}) \cdot \frac{l}{2}.$$

Суммируя левые и правые части полученных соотношений, находим циркуляцию вектора индукции \mathbf{B} по всему контуру Γ :

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = (B_{1\tau} - B_{2\tau}) l = B_1 \sin \alpha (1 - \mu_2 / \mu_1) l.$$

$$13.6. \mathbf{i} = \frac{1}{\mu_0} \left(B_1 \sin \alpha + \frac{1}{\mu} \sqrt{B_2^2 - B_1^2 \cos^2 \alpha} \right) \mathbf{k}.$$

Решение. Введем правую тройку векторов – $[\mathbf{kn}] = \boldsymbol{\tau}$: вектор нормали \mathbf{n} перпендикулярен границе раздела сред и направлен из первой среды (с индукцией \mathbf{B}_1) во вторую, вектор $\boldsymbol{\tau}$ лежит в плоскости рисунка и направлен вдоль поверхности магнетика вниз, а вектор \mathbf{k} направлен в плоскость рисунка (рис. О.13.6). Воспользуемся граничными условиями для тангенциальных компонент вектора напряженности \mathbf{H} :

$$\mathbf{H}_{2\tau} - \mathbf{H}_{1\tau} = -[\mathbf{ni}],$$

где \mathbf{i} – поверхностная плотность тока проводимости.

Учитывая граничные условия $B_{1n} = B_{2n}$ и материальное уравнение $\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}$, для тангенциальных векторов индукции магнитного поля \mathbf{B}_τ получаем:

$$\frac{\mathbf{B}_{2\tau}}{\mu} - \mathbf{B}_{1\tau} = -\mu_0 [\mathbf{ni}]. \quad (1)$$

Так как вектор $(\mathbf{B}_{2\tau}/\mu - \mathbf{B}_{1\tau})$ направлен вдоль орта $\boldsymbol{\tau}$, то и вектор $[\mathbf{ni}]$ направлен вдоль границы раздела сред, но в противоположном направлении, откуда следует, что вектор \mathbf{i} перпендикулярен \mathbf{n} и $\boldsymbol{\tau}$, т.е. имеет компоненту только вдоль орта \mathbf{k} .

Чтобы определить, в какую сторону течет ток, умножим векторно правую и левую части уравнения (1) на вектор нормали к поверхности \mathbf{n} :

$$\left[\frac{\mathbf{nB}_{2\tau}}{\mu} \right] - [\mathbf{nB}_{1\tau}] = -\mu_0 [\mathbf{n}[\mathbf{ni}]]. \quad (2)$$

Раскроем двойное векторное произведение по формуле $[\mathbf{a}[\mathbf{bc}]] = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab})$, учитывая, что векторы \mathbf{i} и \mathbf{n} перпендикулярны:

$$[\mathbf{n}[\mathbf{ni}]] = \mathbf{n}(\mathbf{ni}) - \mathbf{i}(\mathbf{nn}) = -\mathbf{i}.$$

В результате получаем:

$$\frac{1}{\mu} [\mathbf{nB}_{2\tau}] - [\mathbf{nB}_{1\tau}] = \mu_0 \mathbf{i}.$$

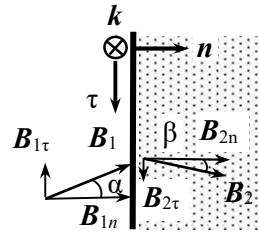


Рис. О.13.6.

Поскольку векторные произведения $[\mathbf{n}\mathbf{B}_{2\tau}]$ и $(-\mathbf{n}\mathbf{B}_{1\tau})$ направлены перпендикулярно плоскости рисунка от нас, то и поверхностная плотность тока \mathbf{i} направлена в плоскость рисунка, т.е. вдоль вектора \mathbf{k} .

Найдем поверхностную плотность тока проводимости \mathbf{i} . Из уравнения (2) следует:

$$\frac{B_{2\tau}}{\mu} \mathbf{k} + B_{1\tau} \mathbf{k} = \mu_0 i \mathbf{k},$$

откуда получаем:

$$\mathbf{i} = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{B_{2\tau}}{\mu} + B_{1\tau} \right) \mathbf{k} = \frac{1}{\mu_0} \left(B_1 \sin \alpha + \frac{B_2}{\mu} \sin \beta \right) \mathbf{k},$$

где β – угол, который составляет вектор индукции \mathbf{B}_2 с нормалью к плоскости пластины. Этот угол можно найти из граничного условия для нормальной компоненты вектора \mathbf{B} : $B_1 \cos \alpha = B_2 \cos \beta$.

Окончательно получаем:

$$\mathbf{i} = \frac{1}{\mu_0} \left(B_1 \sin \alpha + \frac{1}{\mu} \sqrt{B_2^2 - B_1^2 \cos^2 \alpha} \right) \mathbf{k}.$$

$$13.7. \mathbf{H} = \frac{B_0}{\mu \mu_0}, \quad \mathbf{M} = (\mu - 1) \frac{B_0}{\mu \mu_0}.$$

$$13.8. M(r) = (\mu - 1) \frac{Ir}{2\pi a^2}, \quad \mathbf{j}_m = \frac{(\mu - 1)}{\pi a^2} \mathbf{I}, \quad \mathbf{i}_m = -\frac{(\mu - 1)}{2\pi a} \mathbf{I}.$$

Решение. По теореме о циркуляции вектора \mathbf{H} для кругового контура радиусом $r < a$ с центром на оси провода:

$$2\pi r H(r) = \frac{I}{\pi a^2} \pi r^2 = I \left(\frac{r}{a} \right)^2,$$

откуда получаем: $H(r) = \frac{Ir}{2\pi a^2}$.

Модуль намагниченности M на расстоянии $r < a$ от оси провода равен:

$$M(r) = (\mu - 1) H(r) = (\mu - 1) \frac{Ir}{2\pi a^2},$$

а вектор $\mathbf{M}(r)$ направлен по касательной к окружности радиусом r .

Объемная плотность токов намагничивания определяем по формуле: $\text{rot } \mathbf{M} = \mathbf{j}_m$. В силу симметрии задачи используем выражение для $\text{rot } \mathbf{M}$ в цилиндрических координатах, учитывая, что \mathbf{M} имеет только компоненту M_ϕ и зависит только от r :

$$\mathbf{j}_m = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(rM_\phi)}{\partial r} \mathbf{e}_z = \frac{(\mu - 1)I}{2\pi a^2 r} \cdot \frac{\partial(r^2)}{\partial r} \mathbf{e}_z = \frac{(\mu - 1)}{\pi a^2} \mathbf{I} = \text{const}.$$

Полный объемный ток намагничивания равен:

$$\mathbf{I}_{m \text{ об}} = \mathbf{j}_m \pi a^2 = (\mu - 1) \mathbf{I}.$$

Поверхностную плотность i_m тока намагничивания определим из граничного условия для тангенциальной составляющей вектора намагниченности:

$$\mathbf{M}_{2\tau} - \mathbf{M}_{1\tau} = -[\mathbf{n}i_m],$$

где \mathbf{n} – внешняя нормаль к поверхности цилиндра. Для воздуха $M_{2\tau} = 0$, тогда

$$i_m = M(a) = \frac{(\mu - 1)I}{2\pi a}.$$

Направление вектора i_m противоположно току проводимости \mathbf{I} (это видно из направления векторного произведения $[\mathbf{n}i_m]$). Полный поверхностный ток проводимости равен

$$\mathbf{I}_{m \text{ пов}} = i_m \cdot 2\pi a = -(\mu - 1) \mathbf{I}.$$

Следовательно, $I_{m1\text{пов}} + I_{m1\text{об}} = 0$.

Поэтому характеристики магнитного поля в воздухе определяются только током проводимости \mathbf{I} .

$$13.9. \quad j_m = \beta\chi r, \quad i_m = \frac{1}{3}\beta\chi R^2, \quad I_{m \text{ об}} = -I_{m \text{ пов}} = \frac{2}{3}\pi\beta\chi R^3.$$

Указание. См. решение задачи 13.8.

$$13.10. \quad i_m = (\mu - 1) \frac{I}{2\pi a}, \quad \text{направление вектора } i_m \text{ совпадает с}$$

направлением тока в трубке; $j_m = 0$.

$$13.11. \underline{r < a}: H_1(r) = \frac{I}{2\pi a^2} r, \quad B_1(r) = \mu_0 \mu(r) \frac{I}{2\pi a^2} r,$$

$$M_1(r) = \frac{\alpha I}{2\pi a^3} r^2; \quad j_{m1} = \frac{3}{2} \alpha \frac{I}{\pi a^3} r;$$

$$\underline{r \geq a}: \quad H_2(r) = \frac{I}{2\pi r}, \quad B_2(r) = \mu_0 \frac{I}{2\pi r},$$

$$M_2(r) = 0; \quad j_{m2} = 0,$$

$$\underline{r = a}: \quad i_m = \alpha \frac{I}{2\pi a}, \quad I_m = -I_{\text{доб}} = \alpha I.$$

Указание. Для нахождения токов намагничивания рассчитать $\text{rot}\mathbf{M}$ в цилиндрических координатах, учитывая, что вектор \mathbf{M} имеет только полярную φ -компоненту:

$$j_m = (\text{rot}\mathbf{M})_z = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (rM_\varphi) - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial M_r}{\partial \varphi}.$$

$$13.12. \quad B = \frac{\mu_0 \mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \frac{I}{\pi r}, \quad M_1(r) = \frac{(\mu_1 - 1) \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \frac{I}{\pi r},$$

$$M_2(r) = \frac{(\mu_2 - 1) \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \frac{I}{\pi r}, \quad j_m = 0, \quad i_{m1} = \frac{(\mu_1 - 1) \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \frac{I}{\pi a},$$

$$i_{m2} = \frac{(\mu_2 - 1) \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \frac{I}{\pi a}, \quad I_m = I \cdot \frac{2\mu_1 \mu_2 - \mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}, \quad I_\Sigma = I \cdot \frac{2\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}.$$

Решение. Объемных токов намагничивания и поверхностных токов намагничивания на плоской границе раздела магнетиков нет. Есть поверхностные токи намагничивания на границе провода с магнетиками.

Запишем теорему о циркуляции вектора \mathbf{H} по замкнутому контуру, совпадающему с одной из линий магнитной индукции радиусом r :

$$\pi r H_1 + \pi r H_2 = I,$$

где H_1 и H_2 – модули напряженностей полей в средах с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 соответственно.

Учитывая материальное уравнение $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, получаем:

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_0 \mu_1}, \quad H_2 = \frac{B_2}{\mu_0 \mu_2}.$$

На границе раздела сред векторы \mathbf{B}_1 и \mathbf{B}_2 направлены по нормали к плоскости раздела, поэтому, согласно граничным условиям для нормальных компонент векторов индукции, их величины равны: $B_1 = B_2 = B$. Тогда первое уравнение принимает вид:

$$\pi r \left(\frac{B}{\mu_0 \mu_1} + \frac{B}{\mu_0 \mu_2} \right) = I,$$

откуда модуль индукции B на расстоянии r от оси провода равен:

$$B = \frac{\mu_0 \mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \frac{I}{\pi r}.$$

Значения напряженности H магнитных полей в магнетиках:

$$H_1(r) = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \frac{I}{\pi r}, \quad H_2(r) = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \frac{I}{\pi r}.$$

Намагниченности магнетиков находим, исходя из формулы $M = (\mu - 1)H$:

$$M_1(r) = (\mu_1 - 1)H_1 = \frac{(\mu_1 - 1)\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \frac{I}{\pi r}, \quad M_2(r) = \frac{(\mu_2 - 1)\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \frac{I}{\pi r}.$$

Поверхностную плотность токов намагничивания на границе магнетиков с проводом получим, применяя формулу $i_m = M_{\text{магн } \tau} - M_{\text{пров } \tau}$, где $M_{\text{магн } \tau}$ и $M_{\text{пров } \tau}$ – тангенциальные компоненты намагниченности в магнетике и проводе, причем $M_{\text{пров } \tau} = 0$. Тогда

$$i_{m1} = M_1(a) = \frac{(\mu_1 - 1)\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \frac{I}{\pi a}, \quad i_{m2} = M_2(a) = \frac{(\mu_2 - 1)\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \frac{I}{\pi a}.$$

Полный ток намагничивания на границе провода с магнетиками равен:

$$I_m = \pi a \cdot i_{m1}(a) + \pi a \cdot i_{m2}(a) = I \cdot \frac{2\mu_1\mu_2 - \mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}.$$

Суммарный эффективный линейный ток провода

$$I_\Sigma = I + I_m = I \cdot \frac{2\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}.$$

$$13.13. \quad B_1 = \frac{\mu_0 \mu}{\mu + 1} \cdot \frac{IR^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Решение. Индукция магнитного поля на оси кольца с током I на расстоянии z от его плоскости (обозначим эту точку А) в отсутствие магнетика равна

$$B_0 = \frac{1}{2} \mu_0 I \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = kI.$$

Когда кольцо лежит на поверхности магнетика (рис. О.13.13), объемные молекулярные токи в среде отсутствуют, поверхностных токов на плоской границе раздела сред нет, а на границе провода с магнетиком имеется молекулярный ток с поверхностной плотностью i_m . Полный ток I_m добавляется к току проводимости I , образуя с ним суммарный эффективный круговой ток величиной $I_\Sigma = I + I_m$.

Полная индукция магнитного поля в точке А равна:

$$B_1 = kI_\Sigma = k(I + I').$$

Пусть радиус провода, из которого изготовлено кольцо, равен a , при этом половина провода находится в магнетике, а половина в воздухе. Запишем теорему о циркуляции вектора \mathbf{H} по контуру, охватывающему провод и проходящему вблизи него в магнетике и в воздухе (на рис. О.13.13 этот контур обозначен штриховой линией):

$$\pi a H_1 + \pi a H_2 = I,$$

где $H_1 = \frac{B}{\mu_0}$ — напряженность магнитного поля в воздухе,

$H_2 = \frac{B}{\mu \mu_0}$ — напряженность поля в магнетике, B — индукция маг-

нитного поля в точках контура (на границе раздела сред величина B не меняется, что следует из граничных условий для нормальных компонент вектора индукции).

Записанное уравнение примет вид:

$$\pi a \left(\frac{B}{\mu_0} + \frac{B}{\mu \mu_0} \right) = I, \text{ откуда}$$

$$B = \frac{\mu \mu_0 I}{\pi a (\mu + 1)}.$$

Учитывая, что $I_m = i_m \cdot \pi a$ и

$i_m = M(a) = (\mu - 1)H_2$, находим полный ток намагничивания I_m :

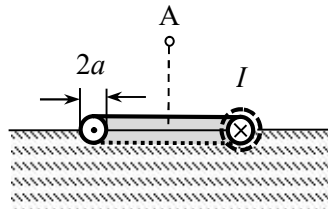


Рис. О.13.13.

$$I_m = i_m \cdot \pi a = (\mu - 1) \cdot \pi a \cdot \frac{B}{\mu \mu_0} = I \cdot \frac{\mu - 1}{\mu + 1}.$$

Индукция B_1 магнитного поля в рассматриваемой точке А на оси кольца при наличии магнетика равна:

$$B_1 = k(I + I') = k \left(I + \frac{\mu - 1}{\mu + 1} I \right) = \frac{2\mu}{\mu + 1} kI = \frac{\mu_0 \mu}{\mu + 1} \cdot \frac{IR^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

$$13.14. \quad M(r) = \frac{\alpha B_0}{\mu_0} r^3; \quad B(r) = (1 + \alpha r^3) B_0; \quad j_m(r) = -\frac{3\alpha B_0}{\mu_0} r^2;$$

$$i_m(r) = \frac{\alpha B_0}{\mu_0} R^3.$$

Указание. Для вычисления объемной плотности тока намагничивания j_m рассчитать $\text{rot} \mathbf{M}$ в цилиндрических координатах, в которых, учитывая, что вектор \mathbf{M} имеет только z -компоненту:

$$j_m = j_{m\varphi} = (\text{rot} \mathbf{M})_{\varphi} = \frac{\partial M_r}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial r} = -\frac{\partial M_z}{\partial r}.$$

$$13.15. \quad L = \mu_0 \frac{N^2}{l} \pi a^2 \left(1 + \frac{\alpha}{2} a^2 \right).$$

$$13.16. \quad F' = \frac{\mu_0}{4\pi d} \cdot \frac{\mu - 1}{\mu + 1} I^2.$$

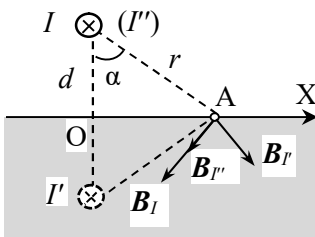


Рис. О.13.16.

Решение. Направим ось X вдоль поверхности магнетика перпендикулярно проводу с током, начало координат совместим с основанием перпендикуляра (т. О), опущенного от провода на границу магнетика (рис. О.13.16).

Под действием магнитного поля прямого провода с током I на поверхности магнетика появятся токи намагничивания, параллельные току в проводе. Поскольку парамагнетик

изотропен и однороден, а токов проводимости в нем нет, то объемные молекулярные токи отсутствуют: $j' = 0$.

Пусть точка А на поверхности магнетика находится на расстоянии r от провода. Индукция магнитного поля тока I вблизи т. А равна $B_I = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, где $r = \sqrt{d^2 + x^2}$. Вектор B_I направлен по касательной к окружности радиусом r с центром на оси провода (рис. О.13.16).

По аналогии с задачей о точечном заряде q , находящемся над границей раздела двух однородных диэлектриков с разными диэлектрическими проницаемостями (см. решения задач 5.19, 5.21) введем в рассмотрение два линейных тока I' и I'' : провод с током I' параллелен проводу с током I и расположен зеркально ему относительно поверхности магнетика, а провод с током I'' расположен так же, как провод с током I . Ток I' создаст в точке А поле с индукцией $B_{I'}$, направление которой показано на рис. О.13.16. При этом провода с токами I и I' создают магнитное поле в вакууме. Провод с током I'' должен создавать магнитное поле в пространстве, где находится магнетик, с такими параметрами, чтобы на границе раздела сред выполнялись граничные условия для нормальных компонент вектора индукции: $B_{1n} = B_{2n}$ и тангенциальных компонент вектора напряженности: $H_{1\tau} = H_{2\tau}$.

Из условия $B_{1n} = B_{2n}$ на границе раздела "вакуум – магнетик" следует:

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \sin \alpha + \frac{\mu_0 I'}{2\pi r} \sin \alpha = \frac{\mu_0 \mu I''}{2\pi r} \sin \alpha,$$

а условие $H_{1\tau} = H_{2\tau}$ имеет вид:

$$\frac{I}{2\pi r} \cos \alpha - \frac{I'}{2\pi r} \cos \alpha = \frac{I''}{2\pi r} \cos \alpha.$$

Получаем систему уравнений:

$$I + I' = \mu I'', \quad I - I' = I'',$$

из которой находим значения токов:

$$I' = \frac{\mu - 1}{\mu + 1} I, \quad I'' = \frac{2}{\mu + 1} I.$$

Силу, действующую со стороны магнетика на провод с током I длиной l , можно найти как силу, действующую на этот провод со стороны магнитного поля провода с током I' :

$$F = \frac{\mu_0 I I' l}{2\pi \cdot 2d} = \frac{\mu_0}{4\pi d} \cdot \frac{\mu - 1}{\mu + 1} I^2 l.$$

Сила в расчете на единицу длины провода равна $F' = \frac{\mu_0}{4\pi d} \cdot \frac{\mu - 1}{\mu + 1} I^2$ и направлена в сторону магнетика.

13.17. Внутри $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{H} = -\mathbf{M}$; снаружи $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{H} = 0$.

13.18. Внутри $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{M}$, $\mathbf{H} = 0$; снаружи $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{H} = 0$.

13.19.
$$M = \frac{\pi a B}{2\sqrt{2} \mu_0 h}.$$

Решение. Так как намагниченность однородна, объемные токи намагничивания отсутствуют, а по боковой поверхности пластины течет поверхностный ток намагничивания плотностью $\mathbf{i}_m = [\mathbf{M}\mathbf{n}]$, модуль которого $i_m = M$. Полный ток намагничивания, текущий по боковой поверхности пластины, равен:

$$I_m = i_m h = Mh.$$

Поскольку пластина тонкая, этот ток можно считать линейным. Создаваемое им магнитное поле будет совпадать с полем на оси квадратной рамки с током $I = I_m$, определяемым формулой (см.

задачу 9.15):
$$B(0) = \frac{2\sqrt{2} \mu_0 I}{\pi a}.$$

Подставляя $I = I_m = Mh$, получаем:

$$B = \frac{2\sqrt{2} \mu_0 Mh}{\pi a}, \text{ откуда находим } M = \frac{\pi a B}{2\sqrt{2} \mu_0 h}.$$

13.20.
$$B = \frac{\mu_0 Mh}{2R}.$$

Указание. См. решение задачи 13.19.

$$13.21. I = M / n .$$

$$13.22. B = \mu_0 M / 2 .$$

Решение. Применяя метод молекулярных токов, находим, что зависимость модуля индукции магнитного поля на оси магнита имеет вид:

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 M (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2),$$

где α_1 и α_2 – углы, под которыми видны крайние точки магнита из точки наблюдения.

Для центра одного из торцов длинного магнита ($l \gg R$) $\cos \alpha_1 = 1$, $\cos \alpha_2 = 0$ и модуль индукции $B = \frac{1}{2} \mu_0 M$.

$$13.23. M = 2 \cdot \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \cdot \frac{B_0}{\mu_0}, \quad H = \frac{2B_0}{\mu_0(\mu + 2)}, \quad B = \frac{2\mu}{\mu + 2} B_0.$$

Решение. Для длинного цилиндра с поперечной намагничённостью (без учета неоднородности поля на торцах) оба фактора формы в его поперечном сечении равны $N_1 = N_2 = 1/2$, а продольный $N_3 = 0$. Тогда напряжённость "размагничивающего" магнитного поля внутри цилиндра $H_m = -\frac{1}{2} M$.

В соответствии с принципом суперпозиции $B = B_0 + B_m$. Согласно линейному материальному уравнению

$$M = \chi H = (\mu - 1)(H_0 + H_m).$$

Учитывая связь M и H_m , получим:

$$M = (\mu - 1) \left(H_0 - \frac{1}{2} M \right),$$

откуда определяем намагничённость цилиндра:

$$M = \frac{2(\mu - 1)}{\mu + 2} H_0 = \frac{2(\mu - 1)}{\mu_0(\mu + 2)} B_0.$$

Напряжённость магнитного поля внутри цилиндра равна:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{M}}{\mu - 1} = \frac{2\mathbf{B}_0}{\mu_0(\mu + 2)}.$$

Магнитная индукции внутри цилиндра $\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H} = \frac{2\mu}{\mu + 2}\mathbf{B}_0$.

$$13.24. p_m = \frac{2\pi R^3 B}{\mu_0} \approx 16 \text{ А} \cdot \text{м}^2.$$

Решение. С учетом факторов формы однородно намагниченного шара $N = N_x = N_y = N_z = 1/3$ напряжённость "размагничивающего" магнитного поля внутри шара $\mathbf{H}_m = -\frac{1}{3}\mathbf{M}$.

Используя связь B , H и M в магнетике, получим:

$$B = \mu_0(M + H_m) = \mu_0(M - \frac{1}{3}M) = \frac{2}{3}\mu_0 M.$$

Тогда магнитный момент шара равен:

$$p_m = \frac{4}{3}\pi R^3 M = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \frac{3B}{2\mu_0} = \frac{2\pi R^3 B}{\mu_0} = 16 \text{ А} \cdot \text{м}^2.$$

$$13.25. \mu = \frac{2B}{3B_0 - B}, M = \frac{3(B - B_0)}{2\mu_0}.$$

Указание. Выразить намагниченность \mathbf{M} магнетика, из которого изготовлен шар, и индукцию \mathbf{B} внутри шара через индукцию \mathbf{B}_0 внешнего магнитного поля, как это делалось в решении **задачи 13.23**, с учетом фактора формы шара $N = N_x = N_y = N_z = 1/3$.

$$13.26. B_1 = 1,07 \text{ Тл}, M_1 = 0,85 \text{ МА/м}, \mu_1 = 1700;$$

$$B_2 = 1,25 \text{ Тл}, M_2 = 0,99 \text{ МА/м}, \mu_2 = 994;$$

$$\frac{H_2}{H_1} = 2, \frac{B_2}{B_1} = 1,17 \neq \frac{H_2}{H_1}; \frac{M_2}{M_1} = 1,16 \approx \frac{B_2}{B_1}.$$

Решение. При плотной намотке катушки линии индукции и напряженности магнитного поля имеют форму окружностей, кон-

центричных самому тору. Для контура, совпадающего со средней линией тора, по теореме о циркуляции вектора напряженности H получаем:

$$2\pi r_0 H = NI, \text{ откуда } H = \frac{NI}{2\pi r_0}.$$

При силе тока в обмотке I_1 и I_2 получаем:

$$H_1 \approx 500 \text{ А/м}, \quad H_2 \approx 1000 \text{ А/м}.$$

По графику на рис. 13.6 определяем индукцию магнитного поля: $B_1 = 1,07 \text{ Тл}$, $B_2 = 1,25 \text{ Тл}$.

По найденным значениям B и H находим намагниченность M и относительную магнитную проницаемость μ сердечника при токах в обмотке I_1 и I_2 :

$$M_1 = B_1 / \mu_0 - H_1 = 0,85 \text{ МА/м}, \quad \mu_1 = B_1 / (\mu_0 H_1) = 1700;$$

$$M_2 = B_2 / \mu_0 - H_2 = 0,99 \text{ МА/м}, \quad \mu_2 = B_2 / (\mu_0 H_2) = 994.$$

$$\text{Видно, что } \frac{H_2}{H_1} = \frac{I_2}{I_1} = 2; \quad \frac{B_2}{B_1} = 1,17 \neq \frac{H_2}{H_1}; \quad \frac{M_2}{M_1} = 1,16 \approx \frac{B_2}{B_1}.$$

Последнее соотношение показывает, что основной вклад в индукцию магнитного поля дают токи намагничивания в сердечнике, а не ток в катушке.

$$13.27. \quad \mathbf{B}_c = -\mathbf{B}, \quad H_c = \frac{d}{\mu_0(l-d)} \mathbf{B}, \quad \mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \left(1 - \frac{d}{l}\right).$$

Решение. Пренебрегаем рассеянием магнитного поля в зазоре. Из граничных условий для нормальных компонент вектора индукции на границе воздушного зазора и сердечника следует, что индукция магнитного поля в зазоре \mathbf{B} и в сердечнике \mathbf{B}_c вблизи зазора одинакова: $\mathbf{B}_c = \mathbf{B}$.

Напряженность магнитного поля в зазоре равна $H_3 = \mathbf{B}/\mu_0$.

По теореме о циркуляции вектора напряженности по контуру, совпадающему со средней линией тороида, можно записать (за положительное направление обхода контура выбираем направление против часовой стрелки):

$$H_c(l-d) + H_3 d = 0, \text{ откуда } H_c = -H_3 \cdot \frac{d}{l-d} = -\frac{Bd}{\mu_0(l-d)}.$$

Знак "минус" показывает, что $\oint_{l-d} \mathbf{H}_c d\mathbf{l} < 0$,

т.е. угол между векторами \mathbf{H}_c и $d\mathbf{l}$ равен π , в то время, как в зазоре векторы \mathbf{H}_3 и $d\mathbf{l}$ сонаправлены. Следовательно, в сердечнике вектор \mathbf{H}_c направлен противоположно вектору \mathbf{B}_c , т.е. в т. А сердечника вектор \mathbf{H}_c противоположен вектору \mathbf{B}_c (см. рис. О.13.27).

Намагниченность сердечника находим по формуле:

$$\mathbf{M} = \mathbf{B} / \mu_0 - \mathbf{H}.$$

Направим ось X по направлению вектора индукции \mathbf{B} в зазоре. Для т. А проекция намагниченности на ось X равна:

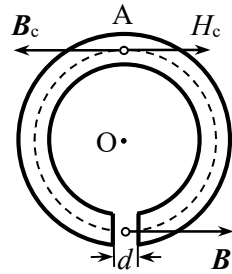


Рис. О.13.27.

$$M = -B / \mu_0 - H_c = -\frac{B}{\mu_0} \left(1 - \frac{d}{l-d} \right) \approx -\frac{B}{\mu_0} \left(1 - \frac{d}{l} \right),$$

а вектор \mathbf{M} направлен противоположно вектору \mathbf{B} .

$$13.28. \quad d = \frac{NI\mu\mu_0 - Bl}{B(\mu - 1)} \approx 3,2 \text{ мм.}$$

Решение. По теореме о циркуляции для вектора напряжённости магнитного поля по средней линии тороида можно записать:

$$H_c(l-d) + H_3 d = NI,$$

где H_c – напряжённость магнитного поля в сердечнике, а H_3 – в зазоре.

Пренебрегаем рассеянием магнитного поля в зазоре. Согласно граничным условиям нормальная компонента вектора индукции магнитного поля не изменяется при переходе через границу раздела двух сред: $B_c = B_3 = B$.

Используя связь векторов индукции и напряжённости магнитного поля

$$H_c = \frac{B_c}{\mu\mu_0} = \frac{B}{\mu\mu_0}; \quad H_3 = \frac{B_3}{\mu_0} = \frac{B}{\mu_0},$$

получаем:

$$\frac{B}{\mu\mu_0}(l-d+\mu d) = NI, \text{ откуда } d = \frac{NI\mu\mu_0 - Bl}{B(\mu - 1)} \approx 3,2 \text{ мм.}$$

$$13.29. n = \frac{B_1}{B_2} \cong 1 + \mu \frac{h}{l}.$$

$$13.30. B = \frac{\mu_0\mu_1\mu_2 NI}{2d\mu_1\mu_2 + (l/2 - d) \cdot (\mu_1 + \mu_2)}.$$

$$13.31. \mu \approx 2100.$$

Решение. Воспользуемся теоремой о циркуляции вектора напряжённости магнитного поля по средней линии тороида:

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{l-d} \mathbf{H}_c \cdot d\mathbf{l} + \int_d \mathbf{H}_z \cdot d\mathbf{l} = H(\pi D - d) + H_z d = NI,$$

где \mathbf{H} – напряжённость магнитного поля в сердечнике, а \mathbf{H}_z – напряжённость магнитного поля в зазоре.

Из граничных условий для нормальных компонент вектора индукции магнитного поля следует, что $B_z = B$ (пренебрегаем рассеянием поля в зазоре).

Учитывая связь векторов индукции и напряжённости магнитного поля $H_z = \frac{B_z}{\mu_0} = \frac{B}{\mu_0}$, получаем:

$$H(\pi D - d) + \frac{B}{\mu_0} d = NI,$$

откуда находим связь модулей индукции и напряжённости магнитного поля внутри железного сердечника:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{d} - \frac{\mu_0 (\pi D - d)}{d} H.$$

Зависимость $B(H)$ является линейной. С учётом заданных числовых величин зависимость $B(H)$ в сердечнике с зазором имеет вид (в системе СИ):

$$B \approx 1,2 - 6 \cdot 10^{-4} H.$$

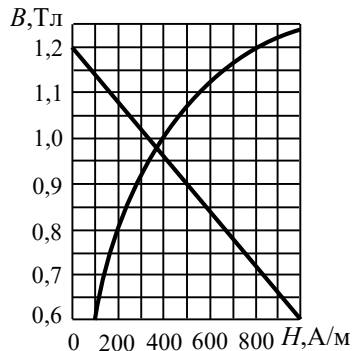


Рис. О.13.31.

Изобразим эту прямую на графике и найдём её пересечение с зависимостью $B(H)$ (рис. О.13.31). При $H = 0$ А/м $B = 1,2$ Тл, а при $H = 1000$ А/м $B = 0,6$ Тл. Координаты точки пересечения равны:

$$H = 370 \text{ А/м}, \quad B = 0,98 \text{ Тл}.$$

Магнитная проницаемость железа в этом случае

$$\mu = \frac{B}{\mu_0 H} \approx 2100.$$

$$13.32. \quad B = \left(\frac{2\pi R}{h} - 1 \right) \cdot \frac{\mu_0 M_r}{\sqrt{\frac{M_r^2}{H_c^2} + \left(\frac{2\pi R}{h} \right)^2}}.$$

Решение. Ввиду малой толщины тора пренебрежем зависимостью магнитного поля от радиуса.

Пусть H_1 – средняя напряженность магнитного поля внутри тора, H_2 – напряженность поля в зазоре. Рассеянием магнитного поля в зазоре пренебрежем. Согласно теореме о циркуляции вектора \mathbf{H} по средней линии тора можно записать:

$$(2\pi R - h) H_1 + h H_2 = 0.$$

Непрерывность нормальной компоненты индукции B_n на границах тонкого зазора дает:

$$\mu_0 (H_1 + M_1) = \mu_0 H_2.$$

Связь M_1 и H_1 определяется формой кривой размагничивания (окружность):

$$\frac{M_1^2}{M_r^2} + \frac{H_1^2}{H_c^2} = 1.$$

Решая систему из этих трех уравнений, получаем:

$$B = \mu_0 H_2 = \left(\frac{2\pi R}{h} - 1 \right) \cdot \frac{\mu_0 M_r}{\sqrt{\frac{M_r^2}{H_c^2} + \left(\frac{2\pi R}{h} \right)^2}}.$$

$$13.33. \quad N = \frac{B(l + \mu d)}{\mu_0 \mu I_{\max}} \approx 3020.$$

$$13.34. \Phi(x) = \frac{\mu_0 \mu N^2 IS}{l + 2\mu x}.$$

$$13.35. B = \frac{\mu_0 M_r}{1 + \frac{h}{2\pi R} \cdot \frac{M_r}{H_c}}.$$

$$13.36. a) I_0 = \frac{1}{N} (H_S L + M_S l); \bar{b}) B_3 = \mu_0 \cdot \frac{NI + (L-l)M_S}{L}.$$

Решение. а). По теореме о циркуляции для вектора напряжённости магнитного поля по средней линии катушки при токе I_0 можно записать:

$$H_c (L-l) + H_3 l = NI_0,$$

где H_c – напряжённость магнитного поля в сердечнике, а H_3 – в зазоре.

В ферромагнетике значение магнитной проницаемости неизвестно, поэтому выразим индукцию магнитного поля в сердечнике при достижении намагниченности насыщения в виде:

$$B_S = \mu_0 (H_S + M_S).$$

В зазоре $B_3 = \mu_0 H_3$.

Пренебрегаем рассеянием магнитного поля в зазоре. Непрерывность нормальной компоненты индукции B_n на границах узкого зазора дает:

$$\mu_0 (H_S + M_S) = \mu_0 H_3, \text{ т.е. } H_S + M_S = H_3.$$

Тогда первое уравнение принимает вид:

$$H_S (L-l) + (H_S + M_S)l = NI_0,$$

откуда находим: $I_0 = \frac{1}{N} (H_S L + M_S l)$.

б). При $I > I_0$ индукция магнитного поля в сердечнике равна $B_c = \mu_0 (H_c + M_S)$. Из условия непрерывности нормальных компонент вектора индукции получаем: $H_c + M_S = H_3$.

Решая далее задачу, как в пункте а), находим:

$$B_3 = \mu_0 \cdot \frac{NI + (L-l)M_S}{L}.$$

$$13.37. B = \frac{\mu_0 M d}{2(d + \pi R / \mu)}.$$

Указание. Использовать теорему о циркуляции вектора напряженности магнитного поля по средней линии тороида, учитывая, что в сердечнике модуль напряженности равен $H_c = B / (\mu \mu_0)$, в воздушном зазоре $H_z = B / \mu_0$, а в постоянном магните $H_M = B / \mu_0 - M$.

$$13.38. B(r) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{p_m}{r^3}, \text{ где } p_m = \frac{\mu - 1}{\mu} \cdot \frac{B}{\mu_0} a^2 l.$$

Решение. В силу непрерывности нормальных компонент вектора индукции B_n на границе магнетика с воздушным зазором в сердечнике индукция магнитного поля также равна B . Напряженность поля в сердечнике $H_c = B / (\mu \mu_0)$, а намагниченность сердечника $M = (\mu - 1)H_c = \frac{(\mu - 1)B}{\mu \mu_0}$. В воздухе $M_v = 0$.

Ввиду разрыва нормальной компоненты вектора \mathbf{M} на границах зазора появляются "магнитные заряды" противоположного знака $\pm q_m$ с поверхностной плотностью $\sigma_m = \pm M$, а весь зазор можно рассматривать как магнитный диполь с магнитным моментом

$$p_m = M a^2 l = \frac{(\mu - 1)B}{\mu \mu_0} \cdot a^2 l.$$

Вектор p_m направлен перпендикулярно плоскости разреза сердечника.

При расстояниях от зазора $r \gg R$ магнитный диполь можно считать точечным, и индукция магнитного поля в т. А вычисляется по формуле:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3(\mathbf{p}_m \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2 \mathbf{p}_m}{r^5}, \text{ где } \mathbf{p}_m \perp \mathbf{r}.$$

$$\text{В итоге получаем: } B(r) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{p_m}{r^3}.$$

$$13.39. B_0 \approx \frac{\mu_0 M a^2 l}{2R^2 [2\pi R + (\mu - 1)l]}.$$

Решение. Согласно теореме о циркуляции напряженности магнитного поля по средней линии тора:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = (2\pi R - l)H_c + H_m l = 0,$$

где H_c и H_m – напряженности поля в сердечнике и магните соответственно.

Индукция магнитного поля в сердечнике $B_c = \mu_0 \mu H_c$, а в магните $B_m = \mu_0 (H_m + M)$. Так как нормальные компоненты вектора магнитной индукции не меняются на границе "сердечник - магнит", можно записать:

$$\mu_0 \mu H_c = \mu_0 (H_m + M),$$

откуда $H_m = \mu H_c - M$. Подставляя H_m в первое уравнение, получаем:

$$(2\pi R - l)H_c + (\mu H_c - M)l = 0,$$

откуда напряженность магнитного поля в сердечнике:

$$H_c = \frac{Ml}{2\pi R + (\mu - 1)l}.$$

Намагниченность материала сердечника равна:

$$M_c = (\mu - 1)H_c = \frac{Ml(\mu - 1)}{2\pi R + (\mu - 1)l}.$$

Ввиду разрыва нормальной компоненты вектора \mathbf{M} на границах зазора появляются "магнитные заряды" противоположного знака $\pm q_m$ с поверхностной плотностью $\sigma_m = \pm(M - M_c)$, а весь зазор можно рассматривать как магнитный диполь с магнитным моментом

$$p_m = (M - M_c) a^2 l = \left[M - \frac{Ml(\mu - 1)}{2\pi R + (\mu - 1)l} \right] \cdot a^2 l = \frac{2\pi R M a^2 l}{2\pi R + (\mu - 1)l}.$$

Вектор \mathbf{p}_m направлен перпендикулярно плоскости разреза сердечника.

Так как $R \gg a \gg l$, индукцию магнитного поля в т. О можно найти по формуле индукции точечного магнитного диполя (см. решение задачи 13.38):

$$B_0 \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{p_m}{R^3} = \frac{\mu_0 M a^2 l}{2R^2 [2\pi R + (\mu - 1)l]}.$$

13.40. $L_{12} = \mu \mu_0 n N S$.

$$13.41. L_1 = \frac{\mu_0}{8\pi} \left(\mu_1 + 4\mu_2 \ln \frac{a}{b} \right).$$

Решение. Магнитное поле в области $r \leq b$ создается только внутренним проводником. Применяя теорему о циркуляции вектора \mathbf{H} , находим сначала H , а потом величину индукции магнитного поля B . Внутри центрального провода ($r \leq a$) с однородной плотностью тока $B = \frac{\mu_1 \mu_0 I}{2\pi a^2} r$, а снаружи ($a \leq r \leq b$) $B = \frac{\mu_2 \mu_0 I}{2\pi r}$

Плотность энергии магнитного поля $w = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}$, а энергия, приходящаяся на длину l системы, равна:

$$r \leq a: W_1 = \int_V w dV = \frac{1}{2\mu_0\mu_1} \left(\frac{\mu_1 \mu_0 I}{2\pi a^2} \right)^2 \int_0^a r^2 l \cdot 2\pi r dr = \frac{\mu_1 \mu_0}{16\pi} I^2 ;$$

$$r \geq a: W_2 = \int_V w dV = \frac{1}{2\mu_0\mu_2} \left(\frac{\mu_2 \mu_0 I}{2\pi a^2} \right)^2 \int_0^a \frac{l}{r^2} \cdot 2\pi r dr = \frac{\mu_2 \mu_0}{4\pi} I^2 \ln \left(\frac{b}{a} \right).$$

Полная энергия длины l системы составляет:

$$W = W_1 + W_2 = \frac{\mu_0}{16\pi} I^2 \left[\mu_1 + 4\mu_2 \ln \left(\frac{a}{b} \right) \right] = \frac{1}{2} LI^2, \text{ откуда:}$$

$$L(l) = \frac{\mu_0}{8\pi} \left(\mu_1 + 4\mu_2 \ln \frac{a}{b} \right) l$$

и для единицы длины системы $L_1 = \frac{\mu_0}{8\pi} \left(\mu_1 + 4\mu_2 \ln \frac{a}{b} \right)$.

$$13.42. L_{12} = \sqrt{L_1 L_2}.$$

Решение. При протекании тока I_1 через первую катушку создается магнитное поле. Если $\mu \gg 1$ и рассеяния поля нет, всё оно сосредоточено в сердечнике, и поток вектора индукции будет постоянным через любое его поперечное сечение. Когда на сердечник навита вторая катушка, то такой же поток индукции будет пронизывать каждый её виток.

Пусть H_1 – напряженность магнитного поля в сердечнике, когда ток протекает по первой катушке. По теореме о циркуляции

напряженности поля H_1 по контуру, проходящему внутри сердечника и имеющему длину l , можно записать:

$$H_1 l = I_1 N_1,$$

где N_1 – число витков первой катушки. Отсюда

$$H_1 = \frac{I_1 N_1}{l}.$$

Поток Φ'_1 вектора индукции \mathbf{B} , пронизывающий каждый виток любой катушки, надетой на сердечник, равен:

$$\Phi'_1 = \mu_0 \mu H_1 S = \frac{\mu \mu_0 I_1 N_1 S}{l},$$

где S – площадь поперечного сечения сердечника.

Полный поток Φ_1 вектора индукции магнитного поля через первую катушку составляет:

$$\Phi_1 = \Phi'_1 N_1 = \frac{\mu \mu_0 N_1^2 S}{l} I_1 = L_1 I_1,$$

откуда индуктивность L_1 первой катушки равна $L_1 = \frac{\mu \mu_0 N_1^2 S}{l}$.

Поток Φ_{21} вектора индукции через все N_2 витков второй катушки равен

$$\Phi_{21} = \Phi'_1 N_2 = \frac{\mu \mu_0 N_1 N_2 S}{l} I_1.$$

Учитывая, что $\Phi_{21} = L_{21} I_1$, где L_{21} – коэффициент взаимной индукции катушек, находим:

$$L_{21} = \frac{\mu \mu_0 N_1 N_2 S}{l} = L_{12}.$$

Теперь предположим, что ток течет по второй катушке. Аналогично находим индуктивность L_2 второй катушки: $L_2 = \frac{\mu \mu_0 N_2^2 S}{l}$

Сравнивая формулы, получаем: $L_{12} = \sqrt{L_1 L_2}$.

13.43. $L_{12} = \sqrt{L_1 L_2} = 0,06$ Гн ; $L = L_1 + L_2 + 2\sqrt{L_1 L_2} = 0,25$ Гн ;
 $N = N_1 \left(1 + \sqrt{L_2 / L_1}\right) = 250$.

Указание. Воспользоваться результатом решения задачи 13.42.

$$13.44. \mathcal{E} = \frac{\mu\mu_0 N_1 N_2 S}{L} I_0 \omega \cos \omega t.$$

§14. Энергия, работа и ponderomotorные силы в магнитном поле

$$14.1. W_1 = \frac{\pi\mu_0 \alpha^2 R^6}{54}.$$

Решение. По теореме о циркуляции вектора \mathbf{B} находим модуль индукции магнитного поля B на расстоянии r от оси провода:

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \int_0^r j(r) \cdot 2\pi r dr = 2\pi\mu_0 \alpha r^3 / 3 \rightarrow B = \mu_0 \alpha r^2 / 3.$$

Объёмная плотность энергии магнитного поля равна:

$$w(r) = \frac{B^2(r)}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 \alpha^2 r^4}{18}.$$

Разобьём провод на трубки малой толщины dr , радиусом r и длиной l , соосные с проводом. Энергия магнитного поля внутри трубки

$$dW(r) = w(r) dV = \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 \alpha}{3} r^2 \right)^2 \cdot 2\pi r l dr,$$

а энергия внутри провода в расчете на единицу длины равна:

$$W_1 = \frac{W}{l} = \frac{1}{l} \int_{V_{\text{пров}}} dw(r) = \frac{\pi\mu_0 \alpha^2 R^6}{54}.$$

14.2. Не изменится.

$$14.3. W = \frac{\mu_0 N^2 h I^2}{4\pi} \ln \left(\frac{b}{a} \right).$$

$$14.4. W = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi} \left[1 + 4 \ln \left(\frac{b}{a} \right) \right].$$

Указание. Вычислить отдельно энергию внутри центрального цилиндрического проводника и энергию в пространстве между проводниками.

$$14.5. W = \frac{\mu_0 \mu V}{2l^2} (I_1^2 N_1^2 \pm 2I_1 N_1 I_2 N_2 + I_2^2 N_2^2).$$

Решение. Если $\mu \gg 1$, то всё магнитное поле будет сосредоточено в сердечнике. Пусть на сердечник намотана только первая катушка. При протекании по ней тока силы I_1 в сердечнике энергия магнитного поля будет равна $W_1 = \frac{\mu_0 \mu H_1^2}{2} V$, где $H_1 = \frac{I_1 N_1}{l}$ – напряженность магнитного поля в сердечнике, V – объем сердечника.

Если на сердечник намотана только вторая катушка, по которой протекает ток I_2 , то энергия магнитного поля в сердечнике $W_2 = \frac{\mu_0 \mu H_2^2}{2} V$, где $H_2 = \frac{I_2 N_2}{l}$.

Если на сердечник намотаны обе катушки, по которым протекают токи I_1 и I_2 соответственно, то энергия магнитного поля, запасенная в сердечнике, равна:

$$W = \frac{\mu_0 \mu}{2} (H_1 \pm H_2)^2 V = \frac{\mu \mu_0 H_1^2}{2} V \pm \mu \mu_0 H_1 H_2 V + \frac{\mu \mu_0 H_2^2}{2} V.$$

Знак "плюс" соответствует случаю, когда токи I_1 и I_2 текут по катушкам в одном направлении, а знак "минус" – когда в противоположных.

Подставляя H_1 и H_2 , получаем:

$$W = \frac{\mu_0 \mu V}{2l^2} (I_1^2 N_1^2 \pm 2I_1 N_1 I_2 N_2 + I_2^2 N_2^2).$$

$$14.6. W \cong \frac{\mu \mu_0 S l}{2} \left(\frac{N I}{l + \mu b} \right)^2.$$

Решение. Пусть H – напряженность магнитного поля в кольце, H_3 – в зазоре. По теореме о циркуляции вектора \mathbf{H} для кругового контура, совпадающего со средней линией кольца:

$$(l - b)H + bH_3 = N I.$$

Поскольку на границах зазора нормальная компонента индукции $B_n = B$ непрерывна,

$$H = \frac{B}{\mu\mu_0}, \quad H_3 = \frac{B}{\mu_0}.$$

Первое уравнение можно переписать в виде:

$$\frac{(l-b)B}{\mu\mu_0} + \frac{bB}{\mu_0} = NI,$$

откуда
$$B = \frac{\mu_0 NI}{\frac{l-b}{\mu} + b} \cong \frac{\mu\mu_0 NI}{l + \mu b}.$$

Энергия магнитного поля W в кольце равна:

$$W = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} V \cong \frac{Sl}{2\mu\mu_0} \left(\frac{\mu\mu_0 NI}{l + \mu b} \right)^2 = \frac{\mu\mu_0 Sl}{2} \left(\frac{NI}{l + \mu b} \right)^2.$$

14.7. $p = \frac{B_1^2 - B_2^2}{2\mu_0}$, сила давления направлена вправо.

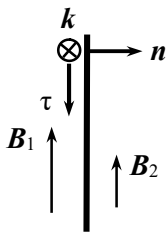


Рис. О.14.7.

Решение. По густоте линий магнитной индукции видно, что $B_1 > B_2$. Можно доказать, что ток по пластине направлен в плоскость рис. О.14.7, т.е. вдоль вектора k .

Обозначим индукцию внешнего магнитного поля B_0 . Ток, протекающий по бесконечной пластине, создает в вакууме магнитное поле с модулем индукции $B_i = \mu_0 i / 2$, где i – поверхностная плотность тока. Учитывая, что направления векторов B_i слева и справа от пластины противоположны, по принципу суперпозиции можно записать:

$$B_1 = B_0 + B_{i \text{ лев}} \equiv B_0 + B_i, \quad B_2 = B_0 + B_{i \text{ прав}} = B_0 - B_i,$$

где $B_{i \text{ лев}}$ (обозначим B_i) и $B_{i \text{ прав}}$ – индукции магнитного поля тока, протекающего по пластине, слева и справа от неё соответственно.

Отсюда находим:

$$B_0 = \frac{B_1 + B_2}{2}, \quad B_i = \frac{B_1 - B_2}{2}.$$

Так как модуль $B_i = \mu_0 i / 2$, $i = \frac{B_1 - B_2}{\mu_0}$.

Выделим на плоскости узкую полоску толщиной dx вдоль направления тока. Со стороны внешнего магнитного поля с индукцией \mathbf{B}_0 на эту полоску с током $dI = i dx$ действует сила Ампера

$$dF_A = dI[\mathbf{lB}_0] = i dx [\mathbf{lB}_0] = \frac{B_1 - B_2}{\mu_0} \left[\mathbf{k}, \frac{\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2}{2} \right] dS,$$

где \mathbf{l} – вектор в направлении тока, модуль которого равен длине полоски с током, $dS = l dx$ – площадь полоски, \mathbf{k} – единичный вектор вдоль тока (см. рис. О.14.7).

Сила dF_A направлена перпендикулярно плоскости пластины.

Давление, действующее на пластину в магнитном поле, составляет:

$$p = \frac{dF_A}{dS} = \frac{B_1 - B_2}{\mu_0} \cdot \frac{B_1 + B_2}{2} = \frac{B_1^2 - B_2^2}{2\mu_0} = w_1 - w_2,$$

где w_1 и w_2 – объемные плотности энергий магнитного поля с разных сторон от пластины.

$$14.8. \quad p = \frac{\mu_0 n^2 I^2}{2} \approx 5,7 \text{ Н/м}^2.$$

$$14.9. \quad F_{\text{пред}} = \frac{\mu_0 n I_0^2 R}{2} \approx 140 \text{ Н}.$$

Решение. Поверхностная плотность сил давления равна $p = \frac{1}{2} \mu_0 H^2$ (здесь $H = nI$ – напряженность магнитного поля внутри длинного соленоида). Рассмотрим прямоугольный участок соленоида высотой d и шириной dl . На этом участке находится $N = nd$ витков проволоки, и на него действует сила давления

$$\delta F_{\text{давл}} = p dS = \frac{\mu_0 n^2 I^2}{2} d dl.$$

Следовательно, на элемент dl одного кольца обмотки действует сила

$$dF = \frac{F_{\text{давл}}}{N} = \frac{\mu_0 n I^2}{2} dl,$$

направленная перпендикулярно элементу кольца (рис. О.14.9).

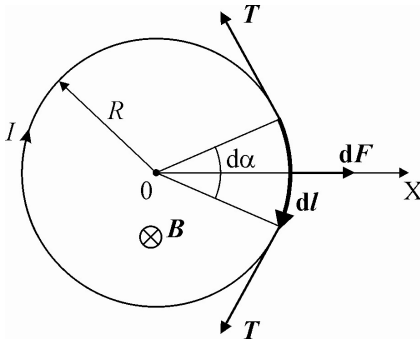


Рис. О.14.9.

Помимо этой силы на данный элемент кольца действуют две силы натяжения T , равные по величине и приложенные к концам выбранного участка (рис. О.14.9).

Выберем ось OX по направлению силы dF . Из условия равновесия кольца получаем:

$$dF = 2T \cdot \frac{d\alpha}{2} = T \cdot \frac{dl}{R}.$$

Подставляя dF , находим: $T = \frac{\mu_0 n I^2 R}{2}$. Следовательно, предельная нагрузка на разрыв проволоки равна:

$$F_{\text{пред}} = \frac{\mu_0 n I_0^2 R}{2} \approx 140 \text{ Н}.$$

14.10.
$$p = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^2}.$$

Решение. Длинный тонкостенный цилиндр разделяет все пространство на две области: внутреннюю, в которой индукция магнитного поля $B_1 = 0$, и внешнюю (вне цилиндра) — где

$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ (r — расстояние до оси цилиндра). Давление, оказываемое на боковую поверхность цилиндра, равно:

$$p = w_2 - w_1 = \frac{B_2^2}{2\mu_0} - 0 = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^2},$$

где w_1 и w_2 — объемные плотности энергий магнитного поля вблизи стенки цилиндра вне и внутри него соответственно.

$$14.11. \quad x = \frac{F}{k} - \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2 I^2}{2l^2 k}.$$

Решение. Будем считать пружину аналогом очень длинного соленоида, поскольку радиус витка пружины $R \ll l$. При протекании тока по пружине на неё действует как радиальная сила, оказывающая давление на боковую поверхность, так и продольная сила, которая сжимает пружину. Пусть под действием продольной силы длина пружины изменилась на малую величину dl при неизменной силе тока. Работа этой силы равна изменению энергии пружины:

$$\delta A = F_l dl = \delta W|_{I=const}, \text{ откуда } F_l = \left(\frac{\partial W}{\partial l} \right)_I.$$

Используя выражение для индуктивности очень длинного тонкого соленоида $L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}$, где S – площадь поперечного сечения соленоида, запишем энергию пружины:

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2 I^2}{2l}.$$

Продольная сила, действующая на пружину, равна:

$$F_l = \frac{1}{2} \mu_0 N^2 \pi R^2 I^2 \cdot \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{1}{l} \right) = -\frac{\mu_0}{2} N^2 \pi R^2 I^2 \cdot \frac{1}{l^2} = -\frac{\mu_0}{2} n^2 I^2 \pi R^2.$$

Знак "минус" указывает, что осевая сила сжимает пружину.

Под действием приложенной постоянной силы F пружина растягивается. В состоянии равновесия можно записать:

$$kx = F - F_l = F - \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2 I^2}{2l^2},$$

откуда определяем удлинение пружины:

$$x = \frac{F}{k} - \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2 I^2}{2l^2 k}.$$

$$14.12. \quad F = In |\Phi_1 - \Phi_2|.$$

Решение. Направим ось Z вдоль оси

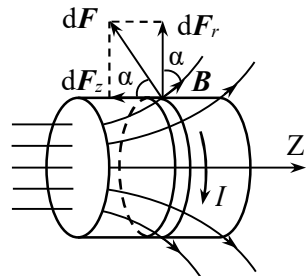


Рис. О.14.12.

соленоида. Выделим на соленоиде узкий кольцевой слой толщиной dz . На каждый элемент длиной dl этого слоя действует сила

$$dF = Indz \cdot dl \cdot B,$$

направленная перпендикулярно вектору индукции \mathbf{B} в месте нахождения элемента dl (рис. О.14.12). Разложим эту силу на две составляющие: радиальную dF_r и продольную dF_l . Ввиду аксиальной симметрии магнитного поля сумма всех радиальных составляющих сил dF_r , действующих на кольцевой слой, равна нулю. Сумма продольных составляющих $dF_l = dF_z < 0$ по всем элементам кольца и затем по всем кольцам даст силу, действующую на соленоид:

$$F_z = \iint_{S_{\text{бок}}} dF_z = In \iint_{S_{\text{бок}}} B \cos \alpha dz dl = In \int d\Phi = In\Phi_{\text{бок}},$$

где $S_{\text{бок}}$ – боковая поверхность соленоида, $d\Phi = B \cdot dz dl \cdot \cos \alpha$ – поток вектора магнитной индукции через элемент боковой поверхности соленоида площадью $dS = dz dl$, $\Phi_{\text{бок}}$ – поток вектора индукции через всю боковую поверхность соленоида.

По теореме Гаусса для потока вектора магнитной индукции через замкнутую поверхность $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ получаем:

$$\Phi_{\text{бок}} - \Phi_1 + \Phi_2 = 0, \text{ откуда } \Phi_{\text{бок}} = \Phi_1 - \Phi_2.$$

Сила, действующая на соленоид, по модулю равна

$$F_z = In |\Phi_1 - \Phi_2|$$

и направлена против оси Z , т.е. соленоид втягивается в область более сильного магнитного поля.

$$14.13. F = \frac{\mu_0 \pi (nIR)^2}{2}.$$

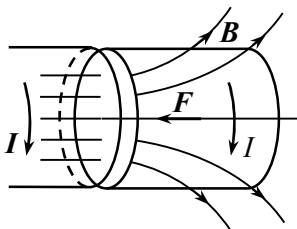


Рис. О.14.13.

Решение. Разделим мысленно соленоид на две половинки (рис. О.14.13). Левая половинка является источником аксиально-симметричного неоднородного магнитного поля, в котором находится правая половинка соленоида.

Воспользуемся результатом решения задачи 14.12. Сила, действующая на правую половинку, равна

$$F = In |\Phi_1 - \Phi_2|,$$

где Φ_1 – поток вектора индукции магнитного поля левой половинки через левый торец правой половинки, а Φ_2 – через её правый торец. На торце левой длинной половинки соленоида индукция магнитного поля $B = \mu_0 nI / 2$ и $\Phi_1 = BS = \mu_0 nI \pi R^2 / 2$. Поскольку правая половинка длинная, поток поля левой половинки через её правый торец $\Phi_2 = 0$. Сила притяжения правой половинки к левой по модулю равна:

$$F = In (\mu_0 nI \pi R^2 / 2 - 0) = \frac{\mu_0 \pi (nIR)^2}{2}.$$

Такая же сила действует на левую половинку соленоида и направлена в сторону правой половинки.

$$14.14. F = \frac{B_0^2}{2\mu_0} (\mu - 1) ld.$$

Решение. На границе раздела "магнетик - воздух" тангенциальная компонента напряженности магнитного поля $H_\mu = H_0 = B_0 / \mu_0$. На границу раздела сред будут действовать максвелловские силы давления, плотность которых равна

$$f = w_1 - w_2 = \frac{1}{2} \mu_0 H_0^2 (\mu_1 - \mu_2) = \frac{B_0^2}{2\mu_0} (\mu - 1).$$

Полная сила, действующая на пластину, составляет:

$$F = fld = \frac{B_0^2}{2\mu_0} (\mu - 1) ld.$$

Она направлена перпендикулярно боковой поверхности пластины и вытягивает её в пространство между полюсами магнита.

$$14.15. F = MB_0 ld.$$

$$14.16. F = (w_0 - w_\mu) S \cong \frac{1}{2} \mu_0 (\mu - 1) n^2 I^2 S.$$

$$14.17. F = (w_\mu - w_0) S = \frac{1}{2} \mu_0 \mu (\mu - 1) n^2 I^2 S, \text{ где } w_\mu \text{ и } w_0 - \text{плот-}$$

ности энергии магнитного поля в стержнях и в зазоре между стержнями соответственно.

$$14.18. F = \frac{\mu_0 \pi R^2 M^2}{4}, \text{ половинки шара притягиваются друг к другу.}$$

другу.

Решение. Решим задачу методом "магнитных зарядов". Введем сферическую систему координат, направив ось Z из центра шара по направлению вектора намагниченности M (рис. О.14.18). Шар намагничен равномерно, поэтому объемных "магнитных зарядов" нет, но на поверхности возникают "заряды" с поверхностной плотностью

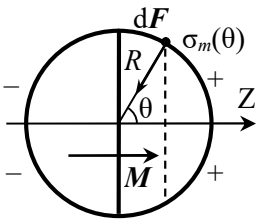


Рис. О.14.18.

$$\sigma_m(\theta) = M_n = M \cos \theta,$$

где вектор нормали n направлен от первой среды ко второй.

Отсюда видно, что "заряды" мысленно разделенных половинок шара противоположны по знаку, поэтому половинки будут притягиваться друг к другу.

Запишем силу, действующую на элемент площадью dS поверхности сферы:

$$dF = \mu_0 H d q_m = \mu_0 H \sigma_m dS,$$

где H – напряженность поля в месте расположения "заряженного" элемента dS , создаваемая всеми остальными "зарядами" шара.

Как известно из электростатики, напряженность электрического поля в непосредственной близости от поверхности шара с поверхностной плотностью заряда σ равна $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$. Проведем заме-

ны $E \rightarrow H$, $\frac{\sigma}{\epsilon_0} \rightarrow \sigma_m$, получаем модуль напряженности магнитного

поля вблизи поверхности намагниченного шара: $H_1 = \sigma_m/2$. Таким образом,

$$dF = -\mu_0 \frac{\sigma_m}{2} n \cdot \sigma_m dS = -\frac{\mu_0 \sigma_m^2 n}{2} dS = -\frac{1}{2} \mu_0 M^2 \cos^2 \theta n dS,$$

где n – вектор внешней нормали к поверхности dS .

Выделим на сфере колечко малой толщиной $dr = R d\theta$, радиус которого $r = R \sin \theta$ (на рис. О.14.18 диаметр кольца показан штри-

ховой линией). В силу симметрии сила, действующая на все "заряды" этого колечка, имеет только z-компоненту и равна

$$dF_{\text{кол}} = dF \cos \theta \cdot 2\pi r dr = \mu_0 \pi R^2 M^2 \cos^3 \theta \sin \theta d\theta.$$

Полная сила, действующая на половину шара, составляет:

$$F = \int_{S_{\text{шара}}/2} dF_{\text{кол}} = \mu_0 \pi R^2 M^2 \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 \pi R^2 M^2}{4}.$$

$$14.19. h = \frac{\mu_0 (\mu - 1) I^2 \ln(r_2 / r_1)}{4\pi^2 \rho g (r_2^2 - r_1^2)}.$$

Решение. Магнитная индукция в пространстве между центральным проводником и цилиндром над жидкостью равна

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \text{ где } r \text{ — расстояние от оси цилиндра, а внутри жидкости —}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi r}. \text{ Плотности энергии магнитного поля в воздухе и в жидкости соответственно равны:}$$

$$w_1(r) = \frac{B_1^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} \text{ и } w_2(r) = \frac{B_2^2}{2\mu_0 \mu} = \frac{\mu_0 \mu I^2}{8\pi^2 r^2}.$$

Давление, оказываемое на границу раздела двух сред с разными объемными плотностями w энергии магнитного поля:

$$p(r) = w_2 - w_1 = \frac{\mu_0 (\mu - 1) I^2}{8\pi^2 r^2}.$$

Суммарная сила давления, оказываемая на границу жидкости, направлена вверх и по модулю равна:

$$F = \int_{r_1}^{r_2} p(r) \cdot 2\pi r dr = \frac{\mu_0 (\mu - 1) I^2}{4\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 (\mu - 1) I^2 \ln(r_2 / r_1)}{4\pi}.$$

При равновесии сила, втягивающая жидкость в область с меньшим значением μ , компенсируется весом жидкости:

$$mg = \rho \pi (r_2^2 - r_1^2) h = \frac{\mu_0 (\mu - 1) I^2 \ln(r_2 / r_1)}{4\pi}.$$

Отсюда высота поднятия жидкости:

$$h = \frac{\mu_0(\mu - 1)I^2 \ln(r_2 / r_1)}{4\pi^2 \rho g (r_2^2 - r_1^2)}.$$

14.20. Уровень жидкости опустится на $h = \frac{(1 - \mu)B^2}{2\mu_0 \rho g}$.

14.21. $p = (1/2) \mu_0(\mu - 1)n^2 I^2$, сила давления направлена вверх.

14.22. $p(r) = \mu_0 \mu \left(\frac{I}{2\pi R^2} \right)^2 (R^2 - r^2)$.

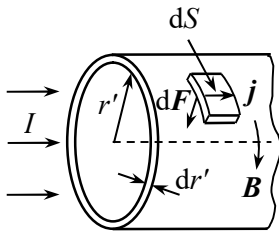


Рис. О.14.22.

Решение. Выделим в жидком магнетике тонкий цилиндрический слой радиусом r' и толщиной dr' (рис. О.14.22). Рассмотрим малый участок этого слоя площадью dS и толщиной dr' . Индукцию магнитного поля в области нахождения этого участка определим по теореме о циркуляции вектора напряженности \mathbf{H} по круговому контуру радиусом r' :

$$H \cdot 2\pi r' = \frac{I}{\pi R^2} \cdot \pi r'^2, \text{ откуда } H = \frac{I}{2\pi R^2} \cdot r' \text{ и } B = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi R^2} \cdot r'.$$

В магнитном поле на выделенный участок действует сила Ампера $d\mathbf{F} = [j\mathbf{B}] \cdot dS \cdot dr'$, направленная к оси цилиндра ($j = \frac{I}{\pi R^2}$ – плотность тока). Эта сила создает на внутренние слои жидкого магнетика давление

$$dp = \frac{dF}{dS} = \frac{\mu_0 \mu}{2} \cdot \left(\frac{I}{\pi R^2} \right)^2 \cdot r' dr'.$$

Найденное давление создано только элементом толщиной dr' . Полное давление, создаваемое всеми элементами тока, находящимися в слое толщиной $r \leq r' \leq R$, находим интегрированием:

$$p(r) = \frac{\mu_0 \mu}{2} \cdot \left(\frac{I}{\pi R^2} \right)^2 \int_r^R r' dr' = \frac{\mu_0 \mu}{4} \cdot \left(\frac{I}{\pi R^2} \right)^2 (R^2 - r^2).$$

$$14.23. F = \mu_0 S \left(\frac{N}{\pi R} \right)^2 \left(\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \right)^2 I^2.$$

$$14.24. A = \Delta W \approx \frac{\mu_0 S (\mu NI)^2}{4\pi R \left(\mu + \frac{2\pi R}{l} \right)} \text{ при } \mu \gg 1.$$

$$14.25. B = \sqrt{\frac{\mu_0 P}{S}} \approx 0,35 \text{ Тл}, \quad \mu = \frac{Bl}{\mu_0 NI - 2Bx} \approx 143.$$

Решение. При небольшом виртуальном перемещении якоря электромагнита на расстояние dx внешние силы совершают работу, равную изменению энергии магнитного поля:

$$\delta A = F dx = \delta W \Big|_{I=\text{const}}, \text{ откуда } F = \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_I.$$

Подставляя энергию магнитного поля $W = LI^2/2 = I\Phi/2$, где L – индуктивность катушки с сердечником, $\Phi = LI$ – поток магнитной индукции, пронизывающий все витки обмотки, получаем:

$$F = \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{I=\text{const}} = \frac{1}{2} I \frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

По теореме о циркуляции вектора \mathbf{H} по контуру, совпадающему со средней линией электромагнита, запишем:

$$H_1 l + 2x H_2 = NI,$$

где H_1 – напряженность магнитного поля в сердечнике, H_2 – в зазорах. Учитывая непрерывность нормальной компоненты индукции B_n на границах зазоров и материальное уравнение, находим:

$$H_1 = \frac{B}{\mu \mu_0}, \quad H_2 = \frac{B}{\mu_0}$$

При этом предыдущее уравнение принимает вид:

$$\frac{Bl}{\mu\mu_0} + \frac{2xB}{\mu_0} = NI, \text{ откуда } B(x) = \frac{\mu_0\mu NI}{l + 2\mu x}.$$

Полный поток магнитной индукции через обмотку равен:

$$\Phi(x) = NSB = NS \frac{\mu_0\mu NI}{l + 2\mu x} = \frac{\mu_0\mu N^2 IS}{l + 2\mu x}.$$

Сила, притягивающая якорь электромагнита,

$$F(x) = \frac{I}{2} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial x} = -\frac{\mu_0\mu^2 N^2 I^2 S}{(l + 2\mu x)^2} = -\frac{B^2}{2\mu_0} \cdot 2S,$$

где $S' = 2S$ – площадь контакта якоря с сердечником.

Эта сила равна весу якоря с грузом:

$$\frac{B^2}{\mu_0} \cdot S = P, \text{ откуда } B = \sqrt{\frac{\mu_0 P}{S}} \approx 0,35 \text{ Тл}.$$

Из выражения для B находим относительную магнитную проницаемость железа:

$$\mu = \frac{Bl}{\mu_0 NI - 2Bx} \approx 143.$$

$$14.26. B = \sqrt{\frac{4\mu_0 mg}{\pi D^2}} \approx 0,63 \text{ Тл}.$$

$$14.27. A_{\text{внеш}} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{d}\right).$$

Решение. Индукция поля провода $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$. Поток вектора

\mathbf{B} через рамку в начальном положении

$$\Phi_1 = \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r} b dr = \frac{\mu_0 I_2 b}{2\pi} \ln \frac{d+a}{d}.$$

После поворота рамки вектор нормали \mathbf{n} повернется вместе с рамкой, и угол между \mathbf{B} и вектором $d\mathbf{S}$ станет $\alpha = \pi$ ($\cos\alpha = -1$). При этом поток магнитной индукции через рамку изменит знак:

$$\Phi_2 = -\Phi_1.$$

Работа внешних сил равна работе сил поля A , взятой с обратным знаком. При $I_1 = \text{const}$

$$A_{\text{внеш}} = -A = -I_1(\Phi_2 - \Phi_1) = I_1(\Phi_1 - \Phi_2) = 2I_1\Phi_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{d}\right)$$

14.28. $A = IBS(1 - \sin\alpha).$

14.29. $A = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{2a}{b}\right).$

14.30. $F = 0.$

14.31. $F = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3p_m^2 \cos\theta}{r^4} \sqrt{3 \cos^2\theta + 1},$

$F_{\text{max}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{6p_m^2}{r^4}$ при $\theta = 0, \pi.$

14.32. $F = F_x = \frac{\mu_0 p_m I}{2\pi r^2}.$

14.33. $F = \frac{\mu_0 I p_{mx}}{2\pi r^2}$; сила направлена от нас перпендикулярно

плоскости рисунка; $M = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \sqrt{(p_{mx})^2 + (p_{my})^2}$, Вектор \mathbf{M} лежит в

плоскости рисунка и направлен под углом $\alpha = \text{arctg} \frac{p_{mx}}{p_{my}}$ к оси X.

$$14.34. |F| = \frac{2\mu_0 I a^2 p_m x (5a^2 + 3x^2)}{\pi(a^2 + x^2)^2 (2a^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Решение. Модуль индукции поля рамки на расстоянии x от её плоскости равен (см. задачу 9.15):

$$B = \frac{2\mu_0 I a^2}{\pi(a^2 + x^2)\sqrt{2a^2 + x^2}}.$$

Сила, действующая на катушку с магнитным моментом p_m , имеет только x -компоненту, её величина определяется соотношением

$$F = F_x = p_m \frac{\partial B_x}{\partial x} \text{ и равна}$$

$$F = -\frac{2\mu_0 I a^2 p_m x (5a^2 + 3x^2)}{\pi(a^2 + x^2)^2 (2a^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Знак "минус" указывает на то, что сила направлена к рамке с током, т.е. катушка втягивается в область более сильного магнитного поля.

$$14.35. T = 2\pi l \sqrt{\frac{2m}{3mgl \pm 6p_m B}}.$$

Решение. Введем ось Z перпендикулярно плоскости рисунка на нас. Начало координат совместим с точкой подвеса стержня.

Пусть стержень отклонился от вертикали на малый угол α (рис. О.14.35, на рисунке показано одно из возможных направлений вектора индукции \mathbf{B}). На стержень будут действовать момент силы тяжести $\mathbf{M}_1 = [l/2, mg]$ и момент силы со стороны магнитного поля $\mathbf{M}_2 = [p_m \mathbf{B}]$ ($l/2$ – радиус-вектор, проведенный из начала координат в середину стержня). Оба этих момента сил направлены по оси Z , а момент \mathbf{M}_2 в зависимости от ориентации вектора индукции \mathbf{B} направлен либо так же, как \mathbf{M}_1 , если вектор \mathbf{B} направлен вниз, либо противоположно \mathbf{M}_1 , если вектор \mathbf{B} направлен вверх.

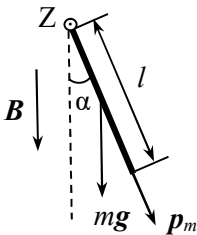


Рис. О.14.35.

Запишем уравнение моментов для стержня в проекции на ось Z :

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -mg \frac{l}{2} \sin \alpha \mp p_m B \sin \alpha ,$$

где $J = \frac{1}{3} ml^2$ – момент инерции стержня.

При малых углах отклонения $\sin \alpha \approx \alpha$, и уравнение приобретает вид:

$$\frac{1}{3} ml^2 \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \left(mg \frac{l}{2} \pm p_m B \right) \alpha = 0 ,$$

откуда угловая частота ω_0 колебаний стержня равна

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2l} \pm \frac{3Bp_m}{ml^2}} = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{3mgl \pm 6p_m B}{2m}} ,$$

а период колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi l \sqrt{\frac{2m}{3mgl \pm 6p_m B}} .$$

Если индукция магнитного поля направлена вниз, период колебаний стержня при выключении магнитного поля увеличится, а если вверх, то уменьшится.

$$14.36. T = 2\pi l \sqrt{\frac{m}{3p_m B_r}} .$$

$$14.37. F_{\text{внеш}} = \frac{(\mu - 1)S}{2\mu_0\mu} (B_1^2 - B_2^2) .$$

Решение. Направим ось Z вдоль стержня и совместим с его левым концом начало отсчета. В магнитном поле у стержня появляется намагниченность $\mathbf{M} = (\mu - 1)\mathbf{H}_\mu$, где \mathbf{H}_μ – напряженность магнитного поля в стержне. Модуль $H_\mu = \frac{B_\mu}{\mu_0\mu}$, где B_μ – индукция магнитного поля в стержне.

Из граничных условий для нормальных компонент вектора \mathbf{B} ($B_{1n} = B_{2n}$) следует, что на концах стержня $B_{1\mu} = B_1$ и $B_{2\mu} = B_2$.

На стержень со стороны магнитного поля действуют силы с объемной плотностью f :

$$f = M \frac{dB_\mu}{dz} e_z = \frac{\mu - 1}{\mu_0 \mu} \cdot B_\mu \cdot \frac{dB_\mu}{dz} e_z = \frac{(\mu - 1)}{2\mu_0 \mu} \cdot \frac{d(B_\mu^2)}{dz} e_z,$$

где e_z – единичный орт в направлении оси Z .

Модуль силы, действующей на элемент объема dV длиной dz , равен:

$$dF = f dV = \frac{(\mu - 1)}{2\mu_0 \mu} \cdot \frac{d(B_\mu^2)}{dz} \cdot S dz = S \cdot \frac{(\mu - 1)}{2\mu_0 \mu} \cdot d(B_\mu^2).$$

Сила, действующая на стержень,

$$F = S \cdot \frac{(\mu - 1)}{2\mu_0 \mu} \int_{B_1}^{B_2} d(B_\mu^2) = S \cdot \frac{(\mu - 1)}{2\mu_0 \mu} \cdot (B_2^2 - B_1^2)$$

стремится втянуть стержень в область с большей магнитной индукцией. Чтобы его удержать, надо приложить в противоположном направлении внешнюю силу

$$F_{\text{внеш}} = \frac{(\mu - 1)S}{2\mu_0 \mu} (B_1^2 - B_2^2).$$

14.38. $F = \frac{6\chi V B_0^2}{\mu_0 (3 + \chi) a^5}$, сила направлена к центру цилиндра.

Решение. В магнитном поле шарик приобретет магнитный момент $p_m = MV = \chi V H_{\text{ш}}$, где $H_{\text{ш}}$ – напряженность магнитного поля в шарике, M – вектор намагниченности парамагнетика.

Считаем, что из-за малых размеров шарика в месте его нахождения поле однородно. Напряженность поля в шарике $H_{\text{ш}}$ складывается из напряженности внешнего поля H и напряженности поля H_i , созданного в шаре в результате его намагничивания. С

учетом фактора формы шара $N_i = 1/3$ $H_i = -\frac{1}{3} M$.

Согласно материальному уравнению

$$M = \chi H_{\text{ш}} = (\mu - 1)(H + H_i) = (\mu - 1) \left(H - \frac{1}{3} M \right),$$

откуда намагниченность шара равна:

$$M = \frac{3(\mu - 1)}{\mu + 2} H = \frac{3(\mu - 1)}{\mu_0(\mu + 2)} B,$$

а напряжённость магнитного поля внутри шара

$$H_{\text{ш}} = \frac{M}{\mu - 1} = \frac{3H}{\mu + 2} = \frac{3B}{\mu_0(\mu + 2)},$$

где B – индукция магнитного поля в месте нахождения шарика.

Сила, действующая на шарик в неоднородном магнитном поле, $F = p_m \frac{\partial B}{\partial x}$, а её проекция F_x в точке с координатой $x = a$

$$F_x = (\chi V H_{\text{ш}}) \cdot \frac{\partial B}{\partial x} = \chi V \cdot \frac{3B_0}{\mu_0(2 + \mu)a^2} \cdot \left(-\frac{2B_0}{a^3} \right) = -\frac{6\chi V B_0^2}{\mu_0(2 + \mu)a^5}.$$

Сила направлена к центру цилиндра.

$$14.39. A = \frac{3(\mu - 1)VB^2}{2\mu_0(\mu + 2)}.$$

$$14.40. F = \frac{\mu_0(\mu - 1)VI^2}{2(\mu + 1)\pi^2 d^3}.$$

Указание. Вычислить магнитный момент палочки $p_m = MV = (\mu - 1)VH_{\text{пал}}$, при этом напряжённость магнитного поля внутри палочки $H_{\text{пал}}$ рассчитать с учетом её фактора формы $N = 1/2$.

§15. Переходные процессы в электрических цепях

$$15.1. U(t) = IR_2 = \frac{\mathcal{E}R_2}{R_1} \exp\left(-\frac{R_1 + R_2}{L}t\right);$$

$$U(t_1) = 440 \text{ В}, U(t_2) = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ В}.$$

Решение. До размыкания ключа сила тока через дроссель равна $I_1 = \mathcal{E} / R_1$. При отключении источника в цепи, состоящей из дросселя и лампочки, действует только ЭДС самоиндукции, и по

второму правилу Кирхгофа можно записать:

$$I(R_1 + R_2) = -L \frac{dI}{dt},$$

где I – текущее значение силы тока через дроссель и лампочку.

После разделения переменных уравнение примет вид:

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R_1 + R_2}{L} dt.$$

Интегрируя данное уравнение, получаем:

$$\int_{I_1}^I \frac{dI}{I} = -\frac{R_1 + R_2}{L} \int_0^t dt,$$

$$I = I_1 \exp\left(-\frac{R_1 + R_2}{L} t\right) = \frac{\mathcal{E}}{R_1} \exp\left(-\frac{R_1 + R_2}{L} t\right).$$

Напряжение на зажимах дросселя будет равно напряжению на лампочке:

$$U(t) = IR_2 = \frac{\mathcal{E}R_2}{R_1} \exp\left(-\frac{R_1 + R_2}{L} t\right).$$

Подставляя численные значения, получаем: $U(t_1) = 440$ В, $U(t_2) = 1,8 \cdot 10^{-4}$ В. Как видно, при размыкании ключа разность потенциалов на зажимах дросселя на очень короткое время значительно превышает ЭДС источника, и можно наблюдать мгновенную яркую вспышку лампочки.

$$15.2. \tau = -\frac{L}{R} \ln(1 - 0,01\eta) \approx 0,58 \text{ с}.$$

$$15.3. I_1(t) = \frac{\mathcal{E}\tau}{L_1} \cdot [1 - \exp(-t/\tau)], \quad I_2(t) = \frac{\mathcal{E}\tau}{L_2} \cdot [1 - \exp(-t/\tau)], \text{ где}$$

$$\tau = \frac{L_1 + L_2}{RL_1L_2}.$$

Решение. Индуктивность параллельно соединенных катушек равна $L = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$. Тогда для цепи с последовательно соединенными

L , R и \mathcal{E} можно записать уравнение:

$$IR + L \frac{dI}{dt} = \mathcal{E},$$

решение которого имеет вид:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \cdot [1 - \exp(-t/\tau)], \text{ где } \tau = \frac{L}{R} = \frac{L_1 + L_2}{RL_1 L_2}.$$

По первому правилу Кирхгофа

$$I = I_1 + I_2,$$

где I_1 и I_2 – токи через L_1 и L_2 , соответственно. Очевидно, что

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} = L_2 \frac{dI_2}{dt},$$

откуда $L_1 I_1 = L_2 I_2$ или $L_1 I_1 = L_2 (I - I_1)$, т.е.

$$I_1 = \frac{L_2}{L_1 + L_2} I, \quad I_2 = \frac{L_1}{L_1 + L_2} I.$$

Окончательно получим:

$$I_1(t) = \frac{\mathcal{E}\tau}{L_1} \cdot [1 - \exp(-t/\tau)], \quad I_2(t) = \frac{\mathcal{E}\tau}{L_2} \cdot [1 - \exp(-t/\tau)].$$

15.4. $U = \frac{r}{R+r} \left(\mathcal{E} - \frac{Rr}{L} q \right)$ при $q < \mathcal{E}l/(rR)$.

Решение. Расставим токи, как показано на рис. О.15.4. По первому правилу Кирхгофа можно записать:

$$I_r = I_L + I_R.$$

При замыкании ключа в катушке возникает ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_{\text{инд}} = -L \frac{dI_L}{dt}$.

Напряжение на катушке равно падению напряжения на резисторе: $U = I_R R$.

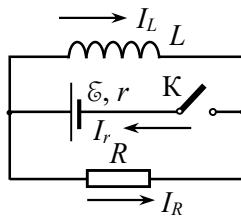


Рис. О.15.4.

По второму правилу Кирхгофа получаем:

$$I_R R = \mathcal{E} - I_r r = \mathcal{E} - (I_L + U/R)r.$$

С другой стороны, $I_R R = L \frac{dI_L}{dt}$. До замыкания ключа тока в катушке не было, т.е. в момент времени $t = 0$ $I_{L0} = 0$. Разделяя переменные в последнем уравнении и интегрируя, получаем:

$$R \int_0^t I_R dt = L \int_0^{I_L} dI_L, \text{ т.е. } Rq = LI_L,$$

откуда определяем значение тока I_L через катушку в момент времени, когда через резистор протек заряд $q = \int_0^t I_R dt$: $I_L = Rq/L$.

Напряжение на катушке в этот момент определим из уравнения:

$$U = \mathcal{E} - (I_L + U/R)r \rightarrow U = \frac{r}{R+r} \left(\mathcal{E} - \frac{Rr q}{L} \right).$$

Задача имеет решение при $q < \mathcal{E}l/(rR)$.

$$15.5. I_L(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - \exp\left(-\frac{R}{2L}t\right) \right), U_L(t) = \frac{\mathcal{E}}{2} \exp\left(-\frac{R}{2L}t\right).$$

$$15.6. I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 + \frac{L_1 - L_2}{L_2} \cdot \exp\left(-\frac{R}{L_2}t\right) \right).$$

Решение. При быстром выдергивании сердечника из катушки возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}_{\text{инд}}(t) = -\frac{d\Phi}{dt}$ и, как следствие, изменяется ток в цепи $I(t)$. При этом

$$I(t)R = \mathcal{E} + \mathcal{E}_{\text{инд}}(t) = \mathcal{E} - d\Phi/dt.$$

Разделив переменные и проинтегрировав правую и левую части этого уравнения по времени от 0 до Δt , где Δt – время выдергивания сердечника, получим:

$$R \int_0^{\Delta t} [I(t) - \varepsilon] dt = -[\Phi(\Delta t) - \Phi(0)].$$

Сила тока $I(t)$ всегда ограничена по величине, поэтому при очень быстром выдергивании сердечника ($\Delta t \rightarrow 0$)

$$\int_0^{\Delta t} [I(t) - \varepsilon] dt \rightarrow 0, \text{ откуда следует: } \Phi(\Delta t) - \Phi(0) \approx 0.$$

Поскольку $\Phi(\Delta t) = L_2 I(\Delta t)$, $\Phi(0) = L_1 I(0) = L_1(\varepsilon/R)$, сила индукционного тока сразу после удаления сердечника равна

$$I(\Delta t) = \frac{L_1 \varepsilon}{L_2 R}.$$

После удаления сердечника (при $t > 0$) для цепи по второму закону Кирхгофа можно записать:

$$IR = \varepsilon - L_2 \frac{dI}{dt}.$$

Преобразуем полученное уравнение к виду:

$$L_2 \frac{dI}{dt} = -R \left(I - \frac{\varepsilon}{R} \right)$$

и введем новую переменную $I' = I - \varepsilon/R$. Тогда уравнение примет

вид: $L_2 \frac{dI'}{dt} = -RI'$. Разделяя переменные, интегрируя и возвращаясь к переменной I , находим решение:

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} + A \exp\left(-\frac{R}{L_2} t\right).$$

Постоянную A определяем из условия, что при $t = 0$ ток в цепи был равен $I(\Delta t) = \frac{L_1 \varepsilon}{L_2 R}$:

$$\frac{L_1}{L_2} \cdot \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\varepsilon}{R} + A, \text{ откуда } A = \frac{\varepsilon}{R} \cdot \frac{L_1 - L_2}{L_2}.$$

Окончательно получаем:

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 + \frac{L_1 - L_2}{L_2} \cdot \exp\left(-\frac{R}{L_2} t\right) \right).$$

$$15.7. \chi = \frac{V}{\mathcal{E}} \approx 1,6 \cdot 10^{-3}; \Delta t \ll \frac{L}{R} = 0,1 \text{ с.}$$

Указание. Воспользоваться решением задачи 15.6.

$$15.8. L_2 = \frac{L_1 I - qR}{(r + R)I}.$$

$$15.9. q = q_0 [1 - \exp(-\Delta t / (RC))] = 0,16 \text{ мКл.}$$

Решение. Напряжение на конденсаторе после замыкания ключа меняется по закону:

$$U_C = U_0 \exp(-t / RC).$$

Изменение напряжения на конденсаторе за время Δt равно

$$\Delta U = U_0 - U_C = U_0 (1 - \exp(-\Delta t / RC)),$$

при этом через сопротивление R прошел заряд

$$q = C \Delta U = CU_0 (1 - \exp(-\Delta t / RC)) = q_0 [1 - \exp(-\Delta t / (RC))].$$

$$15.10. I = I_1 + I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \left(1 + \frac{R}{r} e^{-t/\tau} \right).$$

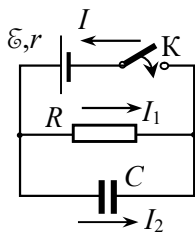


Рис. О.15.10

Решение. Расставим силы токов на различных участках цепи так, как показано на рис. О.15.10. Применяя правила Кирхгофа, при обходе обоих замкнутых контуров против часовой стрелки получаем систему уравнений:

$$I = I_1 + I_2,$$

$$I_1 R + Ir = \mathcal{E},$$

$$-I_1 R + \frac{q}{C} = 0,$$

где q – заряд на конденсаторе и $I_2 = \frac{dq}{dt}$.

Оставляя одну переменную q , приходим к уравнению:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{R + r}{RrC} q = \frac{\mathcal{E}}{r}.$$

Используя начальное условие: при $t = 0$ заряд на конденсаторе $q = 0$, получаем решение уравнения:

$$q = \frac{\mathcal{E}RC}{R+r}(1 - e^{-t/\tau}), \text{ где } \tau = \frac{RrC}{R+r}.$$

Токи через конденсатор и резистор равны:

$$I_2 = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{r} e^{-t/\tau}, \quad I_1 = \frac{q}{RC} = \frac{\mathcal{E}}{R+r}(1 - e^{-t/\tau}),$$

а ток, текущий через источник ЭДС, составляет:

$$I = I_1 + I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R+r} \left(1 + \frac{R}{r} e^{-t/\tau} \right).$$

$$15.11. \quad \mathcal{E} = \frac{nU}{n-1} = 3,5 \text{ В.}$$

$$15.12. \quad I(t) = \mathcal{E}_0 \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \exp\left(-\frac{t}{R_2 C}\right) \right].$$

$$15.13. \quad I(t) = \frac{U}{R} \exp\left[-\frac{(C_1 + C_2)t}{C_1 C_2 R}\right].$$

Решение. Пусть заряд конденсатора C_2 в момент времени t после начала зарядки равен $q(t)$, тогда заряд, оставшийся на конденсаторе C_1 , равен $(q_0 - q(t))$, где q_0 – заряд на C_1 при $t = 0$.

Для контура с двумя конденсаторами и резистором можно записать:

$$IR + q(t)/C_2 = (q_0 - q(t))/C_1.$$

После дифференцирования по t с учетом $dq/dt = I$ получим уравнение:

$$R \frac{dI}{dt} + I \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = 0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим решение:

$$\int_{I_0}^{I(t)} \frac{dI}{I} = -\frac{C_1 + C_2}{RC_1 C_2} \int_0^t dt, \text{ откуда } I(t) = \frac{U}{R} \exp\left[-\frac{(C_1 + C_2)t}{C_1 C_2 R}\right].$$

$$15.14. q(t) = \frac{\mathcal{E}CR_2}{R_1 + R_2} \left(1 + \frac{R_1}{R_2} e^{-t/\tau} \right), \text{ где } \tau = \frac{R_2^2 C}{R_1 + R_2}.$$

$$15.15. I(t) = \frac{\mathcal{E}}{2R} \exp\left(-\frac{t}{2RC_0}\right); Q = \frac{C_0 \mathcal{E}^2}{2}.$$

Решение. Время релаксации в последовательной RC -цепи равно $\tau = RC$. Будем считать, что время, за которое сближаются пластины конденсатора, существенно меньше времени релаксации. Тогда можно считать, что величина емкости в цепи изменилась скачком от начального значения $C_0 = \varepsilon_0 S/d$ до конечного $C = \varepsilon_0 S/(d/2) = 2C_0$. При этом заряд q на пластинах конденсатора остался неизменным: $q = C_0 \mathcal{E}$.

После сближения пластин конденсатора в любой момент времени по второму закону Кирхгофа можно записать:

$$U_C + U_R = \mathcal{E},$$

откуда получаем уравнение для заряда конденсатора:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

Полученное неоднородное линейное дифференциальное уравнение может быть сведено к однородному уравнению заменой переменной $q^* = q - C\mathcal{E}$ и решено интегрированием после разделения переменных. В результате находим:

$$q(t) = B \exp(-t/\tau) + C\mathcal{E}, \text{ где } \tau = RC.$$

Постоянную интегрирования B определяем из начального условия: при $t = 0$ $q = C_0 \mathcal{E}$.

$$B = (C_0 - C)\mathcal{E} = -C_0 \mathcal{E}.$$

Окончательно,

$$q(t) = C\mathcal{E} - C_0 \mathcal{E} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) = \mathcal{E}C_0 \left(2 - \exp\left(-\frac{t}{2RC_0}\right) \right).$$

Силу тока в цепи определяем, вычисляя производную dq/dt :

$$I(t) = \left| \frac{dq}{dt} \right| = C_0 \mathcal{E} \cdot \frac{1}{\tau} \cdot e^{-(t/\tau)} = \frac{\mathcal{E}}{2RC_0} \exp\left(-\frac{t}{2RC_0}\right).$$

Количество теплоты, выделившееся на резисторе, равно:

$$Q = \int_0^{\infty} I^2(t) R dt = \left(\frac{\mathcal{E}}{2R}\right)^2 R \int_0^{\infty} e^{-t/(2RC_0)} dt = \frac{C_0 \mathcal{E}^2}{2}.$$

$$15.16. \quad q(t) = C\mathcal{E} \left(1 + (\varepsilon - 1) \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right).$$

15.17. 1. $U_L(t) = 0$, при $t < 0$; $U_L(t) = I_0 R \exp(-t/\tau)$, при $t > 0$,
где $\tau = L/R$;

2. $U_L(t) = 0$, при $t < 0$; $U_L(t) = I_0 R \exp(-t/\tau)$ при $0 < t < T$,

$$U_L(t) = I_0 R \left[\exp\left(-\frac{T}{\tau}\right) - \exp\left(-\frac{t-T}{\tau}\right) \right] \text{ при } t > T.$$

$$15.18. \quad I = \frac{\alpha \mathcal{E}^{3/2}}{\left(1 + \alpha \sqrt{\mathcal{E}} t / (2C)\right)^3}.$$

Решение. После замыкания ключа по второму закону Кирхгофа для цепи можно записать:

$$\mathcal{E} = U_R + U_C,$$

откуда выражаем напряжение на сопротивлении U_R через напряжение на конденсаторе U_C : $U_R = \mathcal{E} - U_C$.

По условию задачи в нелинейном сопротивлении

$$I_R = \alpha U_R^{3/2} = \alpha (\mathcal{E} - U_C)^{3/2}.$$

Поскольку элементы цепи соединены последовательно, $I_R = I_C = I$. Для конденсатора

$$I = I_C = \frac{dq}{dt} = C \frac{dU_C}{dt}.$$

Подставляя $I = I_R$, получаем уравнение относительно напряжения на конденсаторе:

$$C \frac{dU_C}{dt} = \alpha (\mathcal{E} - U_C)^{3/2}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим:

$$\int \frac{dU_C}{(\mathcal{E} - U_C)^{3/2}} = \frac{\alpha}{C} \int dt \rightarrow \frac{2}{(\mathcal{E} - U_C)^{1/2}} = \frac{\alpha}{C} t + A.$$

Константу интегрирования A определяем из начальных условий: при $t = 0$ $U_C = 0$. Отсюда $A = \frac{2}{\mathcal{E}^{1/2}}$ и $\frac{2}{(\mathcal{E} - U_C)^{1/2}} = \frac{\alpha}{C} t + \frac{2}{\sqrt{\mathcal{E}}}$.

Подставляя $\mathcal{E} - U_C = U_R$, из последнего уравнения находим:

$$U_R^{1/2} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}}} + \frac{\alpha}{2C} t}.$$

Используя связь тока и напряжения в нелинейном сопротивлении, определяем ток в цепи:

$$I = \alpha U_R^{3/2} = \frac{\alpha \mathcal{E}^{3/2}}{\left(1 + \alpha \sqrt{\mathcal{E}} t / (2C)\right)^3}.$$

15.19. $W(t) = \frac{C_2 U^2}{2} \cdot \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2}\right)^2 \left(1 - e^{-t/\tau}\right)^2$, где $\tau = \frac{C_1 C_2 R}{C_1 + C_2}$.

Решение. Ток в цепи с течением времени будет меняться по закону (см. решение задачи **15.13**):

$$I(t) = \frac{U}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \text{ где } \tau = \frac{C_1 C_2 R}{C_1 + C_2}.$$

Поскольку $I(t) = dq/dt$, заряд конденсатора емкостью C_2 находим интегрированием:

$$q(t) = \int_0^t I(t) dt = \frac{UC_1 C_2}{C_1 + C_2} \left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$

При зарядке конденсатора его энергия изменяется со временем по закону

$$W(t) = \frac{q^2(t)}{2C_2} = \frac{C_2 U^2}{2} \cdot \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2}\right)^2 \left(1 - e^{-t/\tau}\right)^2.$$

$$15.20. Q = \frac{C\varepsilon_0^2}{2} \left[1 - \exp\left(-\frac{2t}{rC}\right) \right].$$

Указание. Использовать формулу: $A_{\text{ист}} = \Delta W + Q$, где ΔW – изменение энергии конденсатора.

$$15.21. Q = \frac{\varepsilon^2 L}{2r^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{2r}{L}t\right) \right].$$

$$15.22. 1) I(t) = \frac{\varepsilon}{L} t \exp\left(-\frac{R}{2L}t\right); 2) t_0 = \frac{2L}{R}; 3) I_{\text{max}} = \frac{2\varepsilon}{eR};$$

$$4) U = \varepsilon \cdot \frac{e-2}{e}.$$

Решение. 1). Применяя второе правило Кирхгофа, получаем уравнение:

$$RI + \frac{q}{C} + L \frac{dI}{dt} = \varepsilon,$$

где I – сила тока в цепи, q – заряд на конденсаторе.

Преобразуем уравнение к каноническому виду:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{\varepsilon}{L}, \text{ где } \beta = R/2L, \omega_0^2 = 1/LC.$$

При заданной связи параметров цепи реализуется случай критического затухания. При этом решение уравнения имеет вид:

$$q(t) = (A + Bt)e^{-\beta t} + \varepsilon C,$$

а ток в цепи равен: $I(t) = \frac{dq}{dt} = [B - \beta(A + Bt)]e^{-\beta t}.$

Постоянные A и B определяем из начальных условий: при $t = 0$, $q(0) = 0 = A + \varepsilon C$, $I(0) = B - \beta A = 0$, откуда:

$$A = -\varepsilon C; B = -\beta \varepsilon C.$$

Окончательно получаем:

$$q(t) = \varepsilon C [1 - (1 + \beta t)e^{-\beta t}], \quad I(t) = \varepsilon C \beta^2 t e^{-\beta t} = \frac{\varepsilon}{L} t \exp\left(-\frac{R}{2L} t\right).$$

2). Ток имеет максимальное значение, когда $\frac{dI}{dt} = 0$. Проводя

дифференцирование, находим:

$$\left. \frac{dI}{dt} \right|_{I_{\max}} = \frac{\varepsilon}{L} (1 - \beta) e^{-\beta t} = 0, \text{ откуда } t_0 = 1/\beta = 2L/R.$$

$$3). I_{\max} = I(t_0) = \frac{\varepsilon}{L} t_0 \exp\left(-\frac{R}{2L} t_0\right) = \frac{2\varepsilon}{eR}.$$

$$4). U(t_0) = \frac{q(t_0)}{C} = \varepsilon [1 - (1 + \beta t_0)e^{-\beta t_0}] = \varepsilon \cdot \frac{e-2}{e}.$$

$$15.23. I(t) = \frac{\varepsilon C \omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t\right) e^{-\beta t},$$

где $\beta = R/2L$, $\omega_0^2 = 1/LC$.

$$15.24. I(t) = \frac{\Phi_0}{L} \cos(\omega_0 t), \text{ где } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Указание. При быстром выключении магнитного поля поток магнитной индукции через катушку не изменяется (см. решение задачи 15.6), что определяет начальное значение силы тока в контуре после выключения магнитного поля.

$$15.25. I(t) = \frac{L_1 I_0}{L_1 + L_2} \cos(\omega_0 t), \quad U_C(t) = \frac{L_1 I_0}{\sqrt{C(L_1 + L_2)}} \sin(\omega_0 t),$$

где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C(L_1 + L_2)}}$.

Решение. При быстром размыкании ключа за время $\Delta t \rightarrow 0$ в цепи возникает ЭДС индукции $\varepsilon_{\text{инд}}(t) = -\frac{d\Phi}{dt}$, где Φ – суммарный поток индукции через обе катушки. На конденсаторе будет накапливаться заряд q . Учитывая, что активные сопротивления всех элементов равны нулю, для цепи можно записать:

$$\frac{1}{C} \cdot q(t) = \varepsilon_{\text{инд}}(t) = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Разделив переменные и проинтегрировав правую и левую части этого уравнения по времени от 0 до Δt , получим:

$$\frac{1}{C} \int_0^{\Delta t} q(t) dt = -[\Phi(\Delta t) - \Phi(0)].$$

За очень малое время $\Delta t \rightarrow 0$ $\int_0^{\Delta t} q(t) dt \rightarrow 0$, откуда

$$\Phi(\Delta t) - \Phi(0) \approx 0.$$

Поскольку $\Phi(\Delta t) = L_1 I(\Delta t) + L_2 I(\Delta t)$, $\Phi(0) = L_1 I(0) = L_1 I_0$, сила индукционного тока сразу после размыкания ключа (это будет начальная сила тока в цепи) равна

$$I(\Delta t) = I_{\text{нач}} = \frac{L_1 I_0}{L_2 + L_1}.$$

Далее по второму правилу Кирхгофа можно записать:

$$U_C + (L_1 + L_2) \frac{dI}{dt} = 0.$$

Переходя к заряду на конденсаторе $q = CU_C$, преобразуем уравнение к виду:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{C(L_1 + L_2)} q = 0.$$

Решением уравнения является функция:

$$q(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi), \text{ где } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C(L_1 + L_2)}}.$$

Постоянные величины A и φ определяем из начальных условий: при $t = 0$

$$q(0) = 0 = A \sin \varphi, \quad I(0) = I_{\text{нач}} = A \omega_0 \cos \varphi = \frac{L_1}{L_1 + L_2} I_0, \text{ откуда:}$$

$$\varphi = 0; \quad A = \frac{L_1}{L_1 + L_2} \cdot \frac{I_0}{\omega_0}.$$

Зависимость заряда конденсатора от времени имеет вид:
 $q(t) = A \sin \omega_0 t$, а напряжение на конденсаторе меняется по закону:

$$U_C(t) = \frac{q}{C} = \frac{L_1}{L_1 + L_2} \cdot \frac{I_0}{C\omega_0} \sin(\omega_0 t) = \frac{L_1 I_0}{\sqrt{C(L_1 + L_2)}} \sin(\omega_0 t).$$

Зависимость тока в цепи от времени

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t) = \frac{L_1 I_0}{L_1 + L_2} \cos(\omega_0 t).$$

$$15.26. I_L(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \left[1 - \frac{\beta_2 e^{-\beta_1 t} - \beta_1 e^{-\beta_2 t}}{\beta_2 - \beta_1} \right],$$

где $\beta_1 = \beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$, $\beta_2 = \beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$, $\beta = \frac{1}{2RC}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$.

$$15.27. I_L(t) = \frac{\mathcal{E}}{R_2} e^{-\beta t} \left[\cos \omega t - \left(\frac{\beta}{\omega} + \frac{\omega_0^2 CR_2}{\omega} \right) \sin \omega t \right];$$

$$U_C(t) = \mathcal{E} e^{-\beta t} \left[\cos \omega t + \left(\frac{\beta}{\omega} + \frac{1}{\omega R_2 C} \right) \sin \omega t \right],$$

где $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, $\beta = \frac{R_1 + R_2}{2L}$, $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$, $\beta < \omega_0$.

$$15.28. L_{12} = CR_1 R_2.$$

Решение. При замыкании ключа К сила тока i_1 в контуре, включающем в себя источник ЭДС \mathcal{E} , сопротивление R_1 и катушку индуктивности L_1 , нарастает постепенно от нуля до установившегося значения I_1 в течение некоторого времени τ . За это время происходит зарядка конденсатора, и по резистору R_2 течет ток i_2 , сила которого определяется приращением заряда на обкладках конденсатора: $i_2 = dq / dt$.

Чтобы в течение времени τ ток через гальванометр был ооавен нулю, надо, чтобы разность потенциалов $\varphi_3 - \varphi_2 = i_2 R_2$ была равна и противоположна по знаку ЭДС индукции, возникающей во второй катушке. Поскольку $L_2 \rightarrow 0$, ЭДС определяется только взаимной индукцией катушек и равна:

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -L_{12} \frac{di_1}{dt}.$$

Ток в гальванометре отсутствует при условии:

$$i_2 R_2 = L_{12} \frac{di_1}{dt} \quad \text{или} \quad R_2 \frac{dq}{dt} = L_{12} \frac{di_1}{dt}.$$

Проинтегрировав последнее уравнение, получаем:

$$R_2 \int_0^q dq = L_{12} \int_0^{I_1} di_1 \rightarrow R_2 q = L_{12} I_1,$$

где q – окончательный заряд конденсатора.

При установившейся силе тока I_1 ток, текущий по резистору R_2 , $i_2 = 0$, разность потенциалов $\varphi_3 - \varphi_2 = 0$ и напряжение на конденсаторе составляет:

$$U_C = \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_3 - \varphi_1 = I_1 R_1,$$

откуда находим окончательный заряд конденсатора:

$$q = C U_C = C I_1 R_1.$$

Используя найденное значение q , получаем: $L_{12} = C R_1 R_2$.

$$15.29. \quad Q = \frac{L_1 \mathcal{E}^2}{2(R+r)^2} - \frac{L_2 I_2^2}{2}.$$

$$15.30. \quad \tau = \frac{\pi}{2} \left[\sqrt{\frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} C_2} + \sqrt{\frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} (C_1 + C_2)} + \sqrt{L_1 C_2} \right].$$

Решение. На первом этапе конденсатор C_1 "отключён" диодом D_1 , диод D_2 открыт, конденсатор C_2 разряжается через параллельно соединённые катушки L_1 и L_2 . Их можно заменить одной эквивалентной катушкой с индуктивностью $L = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$. Колебания в данном контуре происходят с периодом

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} C_2}$$

в течение времени $\tau_1 = T_1/4$, пока конденсатор C_2 полностью не разрядится.

Потом конденсатор C_2 начинает перезаряжаться за счёт постепенного уменьшения тока в катушках. Этот ток потечёт через диод D_1 , заряжая конденсатор C_1 . Образуется колебательный контур, состоящий из катушки индуктивностью L и пары параллельно соединённых конденсаторов C_1 и C_2 , которая эквивалентна конденсатору с ёмкостью $C = C_1 + C_2$. Период колебаний в таком контуре равен

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} (C_1 + C_2)} .$$

Эти колебания продолжаются $\tau_2 = T_2/4$, после чего заряженный до максимального по модулю напряжения конденсатор C_1 "отключается" диодом D_1 , поскольку далее напряжение на конденсаторе C_2 не может превысить достигнутого максимального значения.

После момента времени $\tau_1 + \tau_2$ конденсатор C_2 будет разряжаться только через L_1 , поскольку катушка L_2 оказывается "отключённой" диодом D_2 . Время этого процесса $\tau_3 = T_3/4$, где $T_3 = 2\pi \sqrt{L_1 C_2}$ — период колебаний контура, образованного конденсатором C_2 и катушкой L_1 . В момент времени $\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$ конденсатор C_2 полностью разрядится.

После этого момента энергия магнитного поля катушки L_1 расходуется на перезарядку конденсатора C_2 и на создание тока в катушке L_2 . Диод D_2 не препятствует этому току, поскольку согласно правилу Ленца, направление ЭДС самоиндукции в катушке L_1 совпадает с пропускным направлением данного диода. Ток в катушке L_1 достигает значения, когда конденсатор заряжается до максимального напряжения. Тот же ток течёт и по другой катушке, обеспечивая в этот момент времени равенство нулю изменения заряда конденсатора.

Далее гармонические колебания контура, образованного конденсатором C_2 и парой параллельно соединённых катушек, будут продолжаться неограниченно долго (в отсутствие потерь), так как диод D_2 всё время остаётся открытым: когда ток в диоде приближается к нулевому значению, ситуация ничем не отличается от ситуации в момент времени τ , при которой диод "отпирался".

С момента времени $\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$ установятся гармонические колебания с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}} C_2.$$

§16. Цепи переменного тока

$$16.1. a) |Z| = \frac{\omega L(2 - \omega^2 LC)}{1 - \omega^2 LC}; \quad б) |Z| = R \sqrt{\frac{R^2 + (\omega L)^2}{4R^2 + (\omega L)^2}};$$

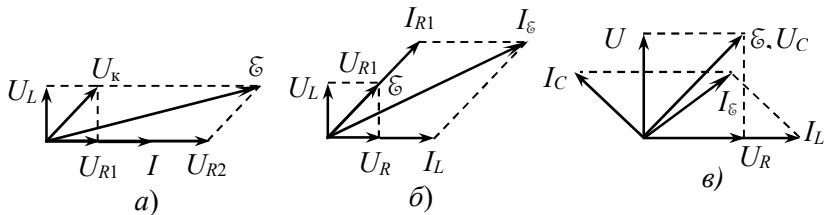
$$в) |Z| = R \sqrt{\frac{1 + (\omega RC)^2}{1 + (2\omega RC)^2}}.$$

$$16.2. |Z| = R / \sqrt{1 + (2\pi\nu CR)^2} \approx 28 \text{ Ом}.$$

$$16.3. |Z| = \sqrt{\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{(\omega CR)^2 + (1 - \omega^2 CL)^2}}.$$

$$16.4. |Z| = \frac{R}{\sqrt{1 + (\omega L/R)^2}} \approx 19,5 \text{ Ом}, \quad \varphi = \arctg\left(\frac{\omega L}{R}\right) \approx 9^\circ.$$

16.5.



Здесь U_k – напряжение на катушке индуктивности с учетом её активного сопротивления, I_ε – ток через источник напряжения.

$$16.6. \varphi = \arctg \frac{\sqrt{\varepsilon_0^2 - I_0^2 R^2}}{I_0 R} = 60^\circ, \text{ ток опережает напряжение.}$$

16.7. Параметры схемы должны удовлетворять условиям:

$$R = \frac{1}{\omega C} \text{ и } r = \omega L.$$

Решение. Начинаем построение векторной диаграммы с параметра, общего для нескольких элементов схемы, в данном случае

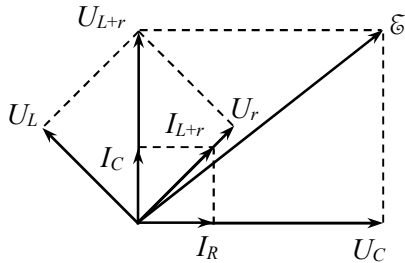


Рис. О.16.7.

с вектора напряжения U_C на конденсаторе и резисторе R . Вектор тока I_R через резистор R сонаправлен с вектором U_C , а вектор тока в конденсаторе I_C перпендикулярен вектору напряжения U_C (сдвинут вперед по фазе на $\pi/2$). Складывая векторы I_C и I_R (по условию задачи их длины одинаковы, что воз-

можно, если модуль импеданса конденсатора равен сопротивлению R : $R = \frac{1}{\omega C}$), получаем вектор тока I_{L+r} , протекающего по катушке индуктивности L и резистору r .

С этим вектором сонаправлен вектор U_r напряжения на сопротивлении r , а вектор U_L напряжения на катушке индуктивности перпендикулярен вектору I_{L+r} (сдвинут вперед по фазе на $\pi/2$). Длины векторов равны: $U_r = r$, $U_L = \omega L$. Так как по условию задачи $r = \omega L$, длины векторов одинаковы. Складывая векторы U_r и U_L , получаем вектор суммарного напряжения U_{L+r} на катушке и резисторе r , который в данном случае сонаправлен с вектором I_C .

Вектор амплитуды ЭДС источника \mathcal{E} получаем, суммируя векторы U_{L+r} и U_C .

$$\mathbf{16.8.} \quad \varphi = \arctg \left(\frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R} \right) \approx 77^\circ; \text{ ток опережает по фазе}$$

напряжение.

$$\mathbf{16.9.} \quad L = \frac{r \operatorname{tg} \varphi}{2\pi\omega} \approx 0,033 \text{ Гн.}$$

$$16.10. \operatorname{tg}\varphi = -\frac{\omega(rRC + L)}{R + r - \omega^2 RCL}; \text{ напряжение } U_R \text{ отстает от ЭДС}$$

ε при $R + r > \omega^2 RCL$.

Решение. Сначала находим полный импеданс цепи. Для параллельно соединенных конденсатора и резистора сопротивлением R импеданс рассчитывается из соотношения:

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{R} + i\omega C, \text{ откуда } Z_1 = \frac{R}{1 + i\omega RC},$$

а импеданс всей цепи равен:

$$Z = Z_1 + r + i\omega L = \frac{R + r - \omega^2 RCL + i\omega(rRC + L)}{1 + i\omega RC}.$$

Ток в цепи $I = \frac{\varepsilon}{Z}$, а напряжение на резисторе R равно:

$$\begin{aligned} U_R = IZ_1 &= \frac{\varepsilon(1 + i\omega RC)}{R + r - \omega^2 RCL + i\omega(rRC + L)} \cdot \frac{R}{1 + i\omega RC} = \\ &= \varepsilon R \frac{R + r - \omega^2 RCL - i\omega(rRC + L)}{(R + r - \omega^2 RCL)^2 + \omega^2 (rRC + L)^2}. \end{aligned}$$

Искомую разность фаз находим из соотношения:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{Im}U_R}{\operatorname{Re}U_R} = -\frac{\omega(rRC + L)}{R + r - \omega^2 RCL}.$$

Напряжение U_R отстает от ЭДС ε при $R + r > \omega^2 RCL$.

$$16.11. L = CR^2.$$

$$16.12. U_R = \frac{\varepsilon_0 R}{\sqrt{R^2 + 1/(2\pi\nu C)^2}} \approx 151 \text{ В},$$

$$U_R = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{1 + (2\pi\nu CR)^2}} \approx 161 \text{ В}.$$

$$16.13. L = \frac{1}{\omega^2 C} + \frac{1}{\omega} \cdot \sqrt{\left(\frac{U_0}{I_0}\right)^2 - r^2} \approx 1,6 \text{ Гн.}$$

$$16.14. I_{C0} = 2\pi\nu C U_0 \approx 0,75 \text{ А}, I_{L0} = \frac{U_0}{\sqrt{r^2 + (2\pi\nu L)^2}} \approx 0,64 \text{ А},$$

$$I_{\Sigma 0} = \frac{\sqrt{(1 - 4\pi^2\nu^2 LC)^2 + (2\pi\nu r C)^2}}{\sqrt{r^2 + (2\pi\nu L)^2}} U_0 \approx 0,40 \text{ А}.$$

$$16.15. I_{R0} = \frac{I_{L0}}{R} \sqrt{r^2 + (\omega L)^2}, I_0 = I_{L0} \frac{\sqrt{(R+r)^2 + (\omega L)^2}}{R},$$

$$\text{tg}\varphi = -\frac{\omega RL}{(R+r)r + (\omega L)^2}.$$

Решение. Пусть напряжение на данном участке цепи равно $U = U_0 \cos(\omega t)$. Модуль импеданса катушки индуктивности с учетом её омического сопротивления равен: $|Z_1| = \sqrt{r^2 + (\omega L)^2}$, а амплитуда тока через катушку $I_{L0} = \frac{U_0}{|Z_1|}$, откуда находим амплитуду напряжения: $U_0 = I_{L0}|Z_1| = I_{L0}\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}$.

Амплитуда тока через резистор составляет:

$$I_{R0} = \frac{U_0}{R} = \frac{I_{L0}}{R} \sqrt{r^2 + (\omega L)^2}.$$

Импеданс всего участка цепи находим из условия:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{r + i\omega L}, \text{ откуда } Z = \frac{R(r + i\omega L)}{R + r + i\omega L} \text{ и } |Z| = \frac{R\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}}{\sqrt{(R+r)^2 + (\omega L)^2}}.$$

Общий ток в цепи в комплексной форме имеет вид:

$$I = \frac{U}{Z} = U \frac{R + r + i\omega L}{R(r + i\omega L)} = U \frac{(R+r)r + \omega^2 L^2 - i\omega RL}{R(r^2 + \omega^2 L^2)}.$$

Амплитуда общего тока в цепи равна:

$$I_0 = \frac{U_0}{|Z|} = I_{L0} \frac{\sqrt{(R+r)^2 + (\omega L)^2}}{R},$$

а тангенс угла разности фаз между общим током и напряжением на данном участке цепи составляет:

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\omega RL}{(R+r)r + (\omega L)^2}.$$

Общий ток в цепи отстает по фазе от напряжения на данном участке.

16.16. $I_{r_1} = 3,9e^{-i11^\circ 19'}$, $I_{r_2} = 2,78e^{i33^\circ 40'}$, $I_{r_3} = 6,21e^{i7^\circ 8'}$;
 $\Delta\varphi = 18^\circ 27'$.

Решение. Применим метод контурных токов, направив токи так, как показано на рис. О.16.16. Запишем систему уравнений:

$$I_1 r_3 + (I_1 - I_2) r_1 = \mathcal{E},$$

$$(I_2 - I_1) r_1 + I_2 r_2 + \frac{1}{i\omega C} I_2 = 0.$$

Преобразуем систему к виду:

$$(r_1 + r_3) I_1 - r_1 I_2 = \mathcal{E},$$

$$-r_1 I_1 + \left(r_1 + r_2 - \frac{i}{\omega C} \right) I_2 = 0$$

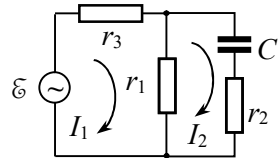


Рис. О.16.16.

и подставим численные данные, после чего система примет вид:

$$2I_1 - I_2 = 10,$$

$$-I_1 + (2 - i)I_2 = 0.$$

Решая данную систему, получаем:

$$I_1 = \frac{10}{13}(8 + i), \quad I_2 = \frac{10}{13}(3 + 2i).$$

Далее находим токи через резисторы:

$$I_{r_1} = I_1 - I_2 = \frac{10}{13}(5 - i) = 3,9e^{-i \arctg(1/5)} = 3,9e^{-i11^\circ 19'},$$

$$I_{r_2} = I_2 = \frac{10}{13}(3 + 2i) = 2,78e^{i \arctg(2/3)} = 2,78e^{i 33^\circ 40'}$$

$$I_{r_3} = I_1 = \frac{10}{13}(8 + i) = 6,21e^{i \arctg(1/8)} = 6,21e^{i 7^\circ 8'}$$

Ток через резистор r_3 сдвинут по фазе относительно тока через r_1 на угол $\Delta\varphi = 7^\circ 8' + 11^\circ 19' = 18^\circ 27'$.

16.17. $R = \omega L$; $U_{\text{вх}}/U_{\text{вых}} = 3$.

16.18. $I = U_0 \frac{1 - \omega^2 LC}{\omega L(2 - \omega^2 LC)} \sin(\omega t)$.

16.19. $I_0 = U_0 \sqrt{\frac{(1/R)^2 + [1/(\omega L) - \omega C]^2}{(1 + r/R)^2 + r^2 [1/(\omega L) - \omega C]^2}}$,

$$\Delta\varphi = \frac{\omega C - 1/(\omega L)}{r [\omega C - 1/(\omega L)]^2 + (1/R) \cdot (1 + r/R)}$$

Указание. Чтобы избежать громоздких вычислений при нахождении модуля тока I_0 , можно воспользоваться тем, что модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей:

$$\frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

16.20. $P_1 = \frac{U_1^2}{R}$, $P_2 = \frac{U^2 - U_1^2 - U_2^2}{2R}$.

Решение. Мощность, выделяющаяся на резисторе, равна $P_1 = \frac{U_1^2}{R}$. Поскольку дроссель обладает как активным, так и индуктивным сопротивлениями, между током и напряжением на нем существует разность фаз φ , а выделяющаяся на дросселе мощность равна

$$P_2 = IU_2 \cos \varphi = \frac{U_1}{R} U_2 \cos \varphi$$

Построим векторную диаграмму тока и напряжений для схемы (рис. О.16.20). По теореме косинусов можно записать:

$$U^2 = U_1^2 + U_2^2 + 2U_1U_2 \cos \varphi,$$

откуда находим:

$$U_2 \cos \varphi = (U^2 - U_1^2 - U_2^2) / (2U_1).$$

Используя это выражение, получаем мощность P_2 :

$$P_2 = \frac{U^2 - U_1^2 - U_2^2}{2R}.$$

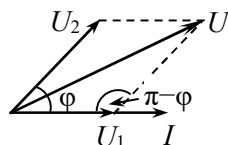


Рис. О.16.20.

$$16.21. P_1 = I_1^2 R \approx 312 \text{ Вт}, P_2 = \frac{I^2 - I_1^2 - I_2^2}{2} R = 154 \text{ Вт}.$$

$$16.22. R = \frac{\xi^2}{P} = 400 \text{ Ом}, L = \frac{R}{2\pi\nu \operatorname{tg} \varphi} = 1,27 \text{ Гн}.$$

$$16.23. L = \frac{\xi^2}{2\omega P} \sin 2\varphi = 0,08 \text{ Гн}.$$

Решение. Сила тока в цепи равна

$$I = \frac{\xi}{|Z|} = \frac{\xi}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}},$$

где r – активное сопротивление катушки. Катушка потребляет мощность $P = \xi I \cos \varphi = \frac{\xi^2 \cos \varphi}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}}$, откуда $\sqrt{r^2 + (\omega L)^2} = \frac{\xi^2 \cos \varphi}{P}$.

В результате получаем:

$$\cos \varphi = \frac{r}{\sqrt{r^2 + (\omega L)^2}} = \frac{rP}{\xi^2 \cos \varphi}.$$

Из последнего уравнения находим r : $r = \frac{\xi^2 \cos^2 \varphi}{P}$.

Возведя выражение для $\cos \varphi$ в квадрат, получаем:

$$\cos^2 \varphi = \frac{r^2}{r^2 + (\omega L)^2} \text{ или } (1 - \cos^2 \varphi)r^2 = (\omega L)^2 \cos^2 \varphi.$$

Отсюда находим индуктивность катушки:

$$L = \frac{r \sin \varphi}{\omega \cos \varphi} = \frac{\xi^2 \cos^2 \varphi \sin \varphi}{P \omega \cos \varphi} = \frac{\xi^2 \cos \varphi}{2P\omega}.$$

$$16.24. R = \frac{P}{I^2} = 6 \text{ Ом}, L = \frac{\sqrt{(U/I)^2 - (P/I^2)^2}}{2\pi\nu} \approx 0,025 \text{ Гн}.$$

$$16.25. P = \frac{\xi_0^2 R/2}{R^2 + [\omega L - 1/(\omega C)]^2}; P_{\max} = \frac{\xi_0^2}{2R} \text{ при } C = \frac{1}{\omega^2 L}.$$

$$16.26. C = \frac{I^2}{2\pi\nu\sqrt{U^2 I^2 - P^2}} \approx 142 \text{ мкФ}.$$

$$16.27. \eta = \frac{R}{r + R}.$$

Решение. Пусть по цепи течет ток с эффективным значением I . Тогда полная мощность, выделяющаяся в цепи, равна:

$$P_0 = 0,5I^2(r + R),$$

а мощность, выделяющаяся в нагрузке, $P = 0,5I^2 R$.

По определению КПД цепи составляет:

$$\eta = \frac{P}{P_0} = \frac{R}{r + R}.$$

$$16.28. P_0 = \frac{\xi^2 [R + (1 + \omega^2 R^2 C^2)r]}{(r + R)^2 + (\omega RrC)^2},$$

$$P = \frac{\xi^2 R [R + (1 + \omega^2 R^2 C^2)r]}{[(r + R)^2 + (\omega RrC)^2] \cdot [R + (1 + \omega^2 R^2 C^2)r]},$$

$$\eta = \frac{R}{R + (1 + \omega^2 R^2 C^2)r}.$$

$$16.29. \cos \varphi = \sqrt{1 - (\omega L / Z)^2}; P = (U / Z)^2 \sqrt{Z^2 - (\omega L)^2}.$$

$$16.30. \text{Увеличилось на } \sqrt{n} - 1 \approx 0,30 \text{ (30\%).}$$

§17. Колебания в электрических контурах

$$17.1. U(t) = U_0 \cos(\omega_0 t), I_1(t) = -U_0 \sqrt{\frac{CL_2}{(L_1 + L_2)L_1}} \sin(\omega_0 t),$$

$$I_2(t) = -U_0 \sqrt{\frac{CL_1}{(L_1 + L_2)L_2}} \sin(\omega_0 t), \text{ где } \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C}}.$$

Решение. Заменяем две катушки индуктивности одной эквивалентной с индуктивностью $L = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$ (по правилу расчета коэффициента самоиндукции параллельно соединенных катушек индуктивности). В результате получаем колебательный контур, в котором после замыкания ключа будут свободные колебания.

Уравнение для заряда на конденсаторе имеет вид:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0,$$

где $\omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C}}$ – собственная частота колебаний.

Решением уравнения является функция: $q(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$. При этом заряд на конденсаторе будет меняться по закону:

$$U(t) = q(t) / C = B \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

а ток в цепи равен: $I(t) = \frac{dq}{dt} = -BC\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$.

Постоянные B и φ определяем из начальных условий: при $t = 0$ $U(0) = U_0 = B \cos \varphi$ и $I(0) = 0 = -BC\omega_0 \sin \varphi$. Отсюда находим: $\varphi = 0$ и $B = U_0$. Заряд на конденсаторе будет меняться со временем по закону: $U(t) = U_0 \cos(\omega_0 t)$.

У параллельно соединенных катушек индуктивности ЭДС самоиндукции одинаковы, поэтому можно записать:

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} = L_2 \frac{dI_2}{dt}, \text{ откуда } L_1 I_1 = L_2 I_2.$$

По первому правилу Кирхгофа $I = I_1 + I_2$. Из последних двух уравнений находим:

$$I_1 = \frac{IL_2}{L_1 + L_2}, \quad I_2 = \frac{IL_1}{L_1 + L_2}.$$

Подставляя

$$I(t) = -U_0 C \omega_0 \sin(\omega_0 t) = -U_0 \sqrt{\frac{C(L_1 + L_2)}{L_1 L_2}} \sin(\omega_0 t),$$

получаем токи в катушках индуктивности:

$$I_1(t) = -U_0 \sqrt{\frac{CL_2}{(L_1 + L_2)L_1}} \sin(\omega_0 t),$$

$$I_2(t) = -U_0 \sqrt{\frac{CL_1}{(L_1 + L_2)L_2}} \sin(\omega_0 t).$$

$$17.2. \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{L_2}{(L_1 L_2 - L_{12}^2)C}}.$$

Решение. Пусть заряд конденсатора в произвольный момент времени равен q . При разрядке конденсатора в соленоиде возникнет ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt}$ и ЭДС взаимной индукции

$\mathcal{E}_{\text{вз}} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}$, где $I_1 = \frac{dq}{dt}$ – ток в контуре с соленоидом, I_2 – ток в контуре с катушкой. Запишем второе правило Кирхгофа для колебательного контура с соленоидом:

$$\frac{q}{C} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - L_{12} \frac{dI_2}{dt}.$$

В контуре с катушкой за счет взаимной индукции возникнет ЭДС взаимной индукции $\mathcal{E}_{\text{вз}} = -L_{12} \frac{dI_1}{dt}$ и ЭДС самоиндукции

$\varepsilon_2 = -L_2 \frac{dI_2}{dt}$. Для этого контура можно записать:

$$-L_2 \frac{dI_2}{dt} - L_{12} \frac{dI_1}{dt} = 0, \text{ откуда } \frac{dI_2}{dt} = -\frac{L_{12}}{L_2} \cdot \frac{dI_1}{dt} = -\frac{L_{12}}{L_2} \cdot \frac{d^2 q}{dt^2}.$$

Подставляя это выражение в уравнение для контура с соленоидом, получим:

$$\frac{q}{C} = -L_1 \ddot{q} + L_{12} \cdot \frac{L_{12}}{L_2} \ddot{q}$$

или в стандартной форме:

$$\ddot{q} + \frac{L_2}{C(L_1 L_2 - L_{12}^2)} q = 0,$$

откуда сразу определяем частоту собственных колебаний контура:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{L_2}{(L_1 L_2 - L_{12}^2) C}}.$$

$$17.3. U(t) = I_0 L_1 \sin(\omega_0 t), \quad I(t) = \frac{I_0 L_1}{L_1 + L_2} \cos(\omega_0 t),$$

где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2) C}}$.

$$17.4. \alpha = \frac{W_{\text{магн}}}{W_{\text{эл}}} = \text{tg}^2(\omega_0 t): a) \alpha = 1; b) \alpha = 3.$$

$$17.5. r = 2L / \tau = 5 \text{ Ом}.$$

$$17.6. n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4L}{R^2 C} - 1} \approx 14.$$

Решение. Амплитуда тока убывает в e раз за время релаксации $\tau = L/2R = nT$, где n – число колебаний, а T – их период.

Используя выражение для частоты затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L}}$$

и связь периода с частотой $T = 2\pi/\omega$, получим:

$$n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4L}{R^2 C}} - 1 \approx 14.$$

$$17.7. \Delta t = \frac{Q}{\pi v_0} \ln \eta \approx 0,2 \text{ с.}$$

$$17.8. n = e^\theta = 1,22.$$

$$17.9. Q = \frac{\Delta t}{2\sqrt{LC} \ln n} \approx 117.$$

$$17.10. \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} \approx \frac{1}{8Q^2} = 0,0026 \text{ (0,26\%)}.$$

Решение. Относительная погрешность равна:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} &= 1 - \frac{\omega}{\omega_0} = 1 - \sqrt{LC} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L}} = \\ &= 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \approx 1 - \left(1 - \frac{1}{2 \cdot 4Q^2}\right) = \frac{1}{8Q^2} \approx 0,0026. \end{aligned}$$

$$17.11. C \cong \frac{8L\delta}{R^2} = 0,64 \text{ мкФ.}$$

$$17.12. t_n = [\arctg(-\beta/\omega) + \pi n] / \omega, \text{ где } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$17.13. \Delta t = Q\sqrt{LC} \ln \frac{W_0}{W_{\text{кон}}} \approx 0,0224 \text{ с.}$$

Решение. Поскольку энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды, затухание энергии происходит со временем релаксации вдвое меньшим, чем для амплитуд: $\tau_\varepsilon = \tau/2$. По условию задачи $W_{\text{кон}} = 0,1 W_0$. Тогда:

$$\eta = \frac{W_0}{W_{\text{кон}}} = 10 = \exp\left(\frac{2\Delta t}{\tau}\right),$$

откуда время, за которое амплитуда убывает в η раз, равно

$$\Delta t = \frac{\tau}{2} \ln \eta.$$

Поскольку добротность $Q \gg 1$, пренебрежем различием в частотах собственных затухающих и незатухающих колебаний. По определению добротности

$$Q = \frac{\pi}{\theta} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi}{(1/\tau) \cdot 2\pi\sqrt{LC}} = \frac{\tau}{2\sqrt{LC}}, \text{ откуда } \tau = 2Q\sqrt{LC}.$$

Для искомого времени Δt получим:

$$\Delta t = Q\sqrt{LC} \ln \eta \approx 0,0224 \text{ с.}$$

$$17.14. \theta = \frac{\ln n}{2k} \approx 0,38, \quad R = \frac{\theta}{\pi} \sqrt{\frac{L}{C}} \left(1 + \frac{\theta^2}{4\pi^2}\right)^{-1/2} \approx 19 \text{ Ом.}$$

Решение. При свободных затухающих колебаниях в электрическом контуре напряжение на конденсаторе меняется по закону:

$$U = U_0 e^{-\beta t} \cos \omega t, \text{ где } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad \omega_0 = 1/\sqrt{LC},$$

а запасенная в контуре энергия $W = W_{\text{Сmax}} = CU^2/2$. При уменьшении энергии за время $\Delta t = kT$ в n раз амплитуда напряжения на конденсаторе уменьшается в \sqrt{n} раз, т.е.

$$\frac{U(t)}{U(t+kT)} = \frac{\exp(-\beta t)}{\exp[-\beta(t+kT)]} = \exp(\beta kT) = \sqrt{n},$$

откуда находим логарифмический декремент затухания $\theta = \beta T$:

$$\theta = \frac{\ln n}{2k} = \frac{\ln 10}{6} \approx 0,38.$$

Для нахождения коэффициента затухания $\beta = \theta/T$ определяем период затухающих колебаний $T/(2\pi)$ из выражения для их циклической частоты $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$:

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \omega_0^2 - \frac{\theta^2}{T^2}, \text{ откуда } T = \frac{\sqrt{4\pi^2 + \theta^2}}{\omega_0}.$$

Коэффициент затухания равен:

$$\beta = \frac{\theta}{T} = \frac{\theta\omega_0}{\sqrt{4\pi^2 + \theta^2}} = \frac{\theta\omega_0}{2\pi} \left(1 + \frac{\theta^2}{4\pi^2}\right)^{-1/2} = \frac{R}{2L},$$

а омическое сопротивление цепи составляет:

$$R = 2L\beta = \frac{\theta}{\pi} \sqrt{\frac{L}{C}} \left(1 + \frac{\theta^2}{4\pi^2}\right)^{-1/2} \approx \frac{\theta}{\pi} \sqrt{\frac{L}{C}} \approx 19 \text{ Ом}.$$

$$17.15. \langle P \rangle = \frac{U_0^2 CR}{2L} = 1,5 \text{ мВт}.$$

Решение. Если напряжение на конденсаторе поддерживается постоянным, в контуре возникают незатухающие колебания, близкие к гармоническим, и напряжение на конденсаторе меняется по закону:

$$U = U_0 \sin(\omega t + \varphi), \text{ где } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \approx \omega_0 = 1/\sqrt{LC}.$$

При этом в контуре протекает ток

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d(CU)}{dt} = CU_0\omega_0 \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Для поддержания колебаний незатухающими, к контуру надо подводить энергию, причем средняя за период потребляемая мощность должна быть равна средней за период мощности потерь на джоулеву теплоту, выделяющуюся на активном сопротивлении R :

$$\langle P \rangle = \langle Q_{\text{дж}} \rangle_T = \int_t^{t+T} I^2(t) R dt = C^2 U_0^2 \omega^2 R \int_t^{t+T} \cos^2(\omega t + \varphi_0) dt = \frac{U_0^2 CR}{2L}.$$

Подставляя численные данные, получаем: $\langle P \rangle = 1,5 \text{ мВт}$.

$$17.16. Q = \frac{U_0^2}{2\langle P \rangle} \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} \approx 400.$$

$$17.17. Q = \frac{U_{cp}}{\xi_0} = 30.$$

$$17.18. Q = \frac{1}{2\pi\nu_p RC} \approx 100.$$

$$17.19. \omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2}.$$

Решение. Модуль импеданса последовательной RLC -цепи равен:

$$Z_0 = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

$$\text{а амплитуда тока } I_0 = \frac{\xi_0}{Z_0} = \frac{\xi_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

$$\text{Собственная частота контура } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Запишем равенство амплитуд токов при частотах ω_1 и ω_2 :

$$\frac{\xi_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right)^2}} = \frac{\xi_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}\right)^2}}.$$

После очевидных преобразований получаем равенство:

$$\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} = \omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}, \text{ или}$$

$$\omega_2 - \omega_1 = (\omega_2 - \omega_1) \cdot \frac{1}{\omega_1 \omega_2 LC} = \frac{\omega_0^2}{\omega_1 \omega_2} (\omega_2 - \omega_1),$$

откуда $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$.

$$17.20. Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}.$$

Решение. При резонансе сила тока в цепи равна $I_p = I_{0\max} = \frac{\varepsilon_0}{R}$ и она в $\sqrt{2}$ раз превышает амплитуды при частотах ω_1 или ω_2 :

$$\frac{\varepsilon_0}{R} = \frac{\sqrt{2} \varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right)^2}}, \text{ откуда } R^2 = \frac{R^2 + \left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right)^2}{2}, \text{ или}$$

$$R^2 = \frac{1}{\omega_1^2 C^2} (LC\omega_1^2 - 1)^2 = \frac{1}{\omega_1^2 C^2} \left(\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} - 1\right)^2.$$

После перегруппировки с учетом соотношения $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$ (см. решение задачи 17.19) и формулы Томсона $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ находим:

$$\frac{1}{(\omega_0 RC)^2} = \frac{\omega_1 \omega_2}{(\omega_2 - \omega_1)^2}.$$

Добротность контура Q при малом затухании равна:

$$Q = \frac{\pi}{\theta} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\omega}{2\beta} \cong \frac{1}{2(R/2L)} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Учитывая, что $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, т.е. $L = \frac{1}{\omega_0^2 C}$, последнее выражение можно записать в виде: $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0 RC)^2}}.$

Используя полученные ранее соотношения, окончательно для добротности находим:

$$Q = \frac{\sqrt{\omega_1 \omega_2}}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}.$$

$$17.21. \omega_{cp} = \sqrt{\omega_0^2 = 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - 2\left(\frac{R}{2L}\right)^2},$$

$$U_{Cp} = \frac{\omega_0^2 \xi_0}{\sqrt{4\beta^2(\omega_0^2 - \beta^2)}} = \frac{\xi_0}{RC\sqrt{1/(LC) - R^2/(2L)^2}},$$

где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\beta = \frac{R}{2L}$.

Решение. Модуль импеданса последовательной RLC -цепи равен:

$$Z_0 = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

а амплитуда тока $I_0 = \frac{\xi_0}{Z_0} = \frac{\xi_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$.

Поскольку модуль импеданса конденсатора равен $|Z_C| = \frac{1}{\omega C}$, зависимость амплитуды напряжения на конденсаторе от частоты ω имеет вид:

$$U_{C0} = |Z_C| I_0 = \frac{\xi_0}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{\omega_0^2 \xi_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}},$$

где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\beta = \frac{R}{2L}$.

Максимальное значение U_C достигается при резонансной частоте ω_{Cp} , определяемой из условия:

$$\frac{d}{dt} \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2 \right] \Big|_{\omega_{Cp}} = 4\omega(\omega_0^2 - 2\beta^2) \Big|_{\omega_{Cp}} = 0,$$

откуда $\omega_{Cp} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - 2\left(\frac{R}{2L}\right)^2}$.

При $\omega = \omega_{Cp}$ резонансная амплитуда напряжения на конденсаторе равна

$$U_{Cp} = \frac{\omega_0^2 \xi_0}{\sqrt{4\beta^2(\omega_0^2 - \beta^2)}} = \frac{\xi_0}{RC\sqrt{1/(LC) - R^2/(2L)^2}}.$$

$$17.22. \omega_{\text{Ср}} = \sqrt{\omega_1 \omega_2 - (\omega_2 - \omega_1) / 6} = 406 \text{ с}^{-1}.$$

Решение. Преобразуем выражение для амплитуды тока к виду:

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{\xi_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{\xi_0}{L \sqrt{4 \left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\omega - \frac{1}{\omega LC}\right)^2}} = \\ &= \frac{\xi_0}{L \sqrt{(\omega_0^2 / \omega - \omega)^2 + 4\beta^2}}, \text{ где } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \beta = \frac{R}{2L}. \end{aligned}$$

Максимальная амплитуда тока достигается при частоте $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ и равна $I_{0\text{max}} = \frac{\xi_0}{2\beta L}$. При частотах ω_1 и ω_2 по условию задачи $I_0(\omega_1) = I_0(\omega_2) = I_{0\text{max}} / 2 = \frac{\xi_0}{4\beta L}$. Подставляя ω_1 в формулу для I_0 , получаем:

$$\frac{\xi_0}{L \sqrt{(\omega_0^2 / \omega_1 - \omega_1)^2 + 4\beta^2}} = \frac{\xi_0}{4\beta L},$$

откуда находим:

$$\omega_0^2 / \omega_1 - \omega_1 = 12\beta^2.$$

Частота, при которой напряжение на конденсаторе максимально, равна (см. решение задачи 17.21): $\omega_{\text{Ср}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$. Учитывая, что $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$ (см. задачу 17.19), получаем:

$$\omega_{\text{Ср}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \left(\omega_0^2 / \omega_1 - \omega_1\right) / 6 = \sqrt{\omega_1 \omega_2 - (\omega_2 - \omega_1) / 6}.$$

Подставляя численные данные, находим: $\omega_{\text{Ср}} = 406 \text{ с}^{-1}$, что значительно отличается от частоты $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2} = 424 \text{ с}^{-1}$ и свидетельствует о значительном затухании собственных колебаний в контуре.

$$17.23. \omega_{\text{Лр}} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{LC - R^2 C / (2L)}},$$

$$U_{L0p} = \frac{\xi_0 \omega_0}{2\beta(1 - \beta^2 / \omega_0^2)} = \frac{\xi_0}{R\sqrt{C/L}(1 - R^2 C / (4L))},$$

$$\text{где } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \beta = \frac{R}{2L}.$$

Указание. Задача решается аналогично задаче 17.21.

$$17.24. L = \frac{1}{4\pi^2 \nu_0^2 C} \approx 3,4 \text{ мГн}, R = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L}{C}} \approx 10,6 \text{ Ом}.$$

$$17.25. \omega_p = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2}.$$

$$17.26. \omega_p \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^7 \text{ с}^{-1}; Q = \frac{1}{2r} \sqrt{\frac{L}{C}} = 100;$$

$$Z_0 = 2rQ^2 = 10^5 \text{ Ом}.$$

Решение. Сначала рассчитаем добротность контура:

$$Q = \frac{1}{2r} \sqrt{\frac{L}{C}} = 100.$$

Поскольку добротность велика, резонансную частоту можно найти по приближенной формуле:

$$\omega_p \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^7 \text{ с}^{-1}.$$

Реактивное сопротивление катушки на частоте ω_0 оказывается много большим активного сопротивления r , поэтому $r + i\omega L \approx i\omega L$. Полное сопротивление контура при резонансе при таких упрощениях может быть рассчитано по формуле:

$$Z_0 = 2rQ^2 = 10^5 \text{ Ом}.$$

$$17.27. \omega_x = \frac{R}{\sqrt{L(R^2 C - L)}}.$$

$$17.28. P = \frac{0,5 \varepsilon_0^2 R}{R^2 + L/C}.$$

Указание. Рассчитать амплитуду тока и полное сопротивление цепи при резонансе, считая резонансную частоту приблизительно равной $\omega_p \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

$$17.29. \omega_{1p} = \frac{1}{\sqrt{L(C_1 + C_2)}} = 250 \text{ с}^{-1}; I_{01}(\omega_{1p}) = \varepsilon_0 / R = 2 \text{ А},$$

$$I_2 = \frac{\varepsilon_0}{R} \cdot \frac{\omega_{1p}^2 LC_2}{\omega_{1p}^2 LC_2 - 1} = 2/3 \text{ А}, I_3 = \frac{\varepsilon_0}{R} \cdot \frac{1}{\omega_{1p}^2 LC_2 - 1} = 8/3 \text{ А};$$

$$\omega_{2p} = \frac{1}{\sqrt{LC_2}} = 500 \text{ с}^{-1}; I_{01}(\omega_{2p}) = 0, I_2 = I_3 = \varepsilon_0 \omega_{2p} C_2 = 0,1 \text{ А}.$$

Решение. В данной цепи возможны два резонансных режима: резонанс токов в контуре, состоящем из катушки индуктивности и конденсатора емкостью C_2 , и резонанс напряжений во всей цепи с источником ЭДС.

Импеданс всей цепи равен:

$$Z = R - \frac{i}{\omega C_1} + \frac{i\omega L \cdot [-i/(\omega C_2)]}{i\omega L - i/(\omega C_2)} = R - i \left(\frac{1}{\omega C_1} + \frac{\omega L}{\omega^2 LC_2 - 1} \right).$$

Резонансную частоту находим из условия, что при резонансе контур обладает только активным сопротивлением:

$$\text{Im } Z = - \left(\frac{1}{\omega C_1} + \frac{\omega L}{\omega^2 LC_2 - 1} \right) = 0, \text{ откуда}$$

$$\omega_{1p} = \frac{1}{\sqrt{L(C_1 + C_2)}} = 250 \text{ с}^{-1}.$$

Ток I_1 при резонансе напряжений совпадает по фазе с ЭДС ε и равен $I_{01}(\omega_{1p}) = \varepsilon_0 / R = 2 \text{ А}$.

Напряжение на параллельном контуре L - C_2 при резонансе составляет:

$$U_{LC_2}(\omega_{1p}) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \cdot \frac{(-i\omega L)}{\omega^2 LC_2 - 1},$$

а силы токов в конденсаторе и катушке индуктивности равны:

$$I_2 = U_{LC_2}(\omega_{1p}) \cdot (i\omega C_2) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \cdot \frac{\omega_{1p}^2 LC_2}{\omega_{1p}^2 LC_2 - 1} = -2/3 \text{ A};$$

$$I_3 = U_{LC_2}(\omega_{1p}) / (i\omega L) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \cdot \frac{1}{\omega_{1p}^2 LC_2 - 1} = 8/3 \text{ A}.$$

Знак "минус" у тока I_2 показывает, что он течет в направлении, противоположном току I_3 .

Резонанс токов происходит при частоте

$$\omega_{2p} = \frac{1}{\sqrt{LC_2}} = 500 \text{ с}^{-1}.$$

При резонансе токов реактивное сопротивление параллельно соединенных конденсатора и катушки индуктивности стремится к бесконечности, и ток во внешней цепи $I_{01}(\omega_{2p}) = 0$. Силы токов в ветвях контура равны:

$$I_2 = I_3 = \mathcal{E}_0 \omega_{2p} C_2 = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega_{2p} L} = 0,1 \text{ A}.$$

Токи текут по ветвям контура в противоположных направлениях.

$$17.30. \omega_p = \frac{1}{\sqrt{C(L_1 + L_2 - 2L_{12})}}; L_{12} = \frac{1}{2} \left(L_1 + L_2 - \frac{1}{C\omega_0^2} \right).$$

Решение. Обозначим ток, текущий по ветви контура, содержащей конденсатор, I_1 , а по второй ветви контура I_2 . В катушках индуктивности при протекании переменного тока возникают ЭДС

самоиндукции $\mathcal{E}_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt}$ и $\mathcal{E}_2 = -L_2 \frac{dI_2}{dt}$ и ЭДС взаимной ин-

дукции $\mathcal{E}_{12} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}$ и $\mathcal{E}_{21} = -L_{12} \frac{dI_1}{dt}$. Ток через конденсатор

$I_1 = \frac{dq}{dt}$, где q – заряд конденсатора.

Поскольку ветви контура соединены параллельно, можно записать:

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} + L_{12} \frac{dI_2}{dt} + \frac{q}{C} = L_2 \frac{dI_2}{dt} + L_{12} \frac{dI_1}{dt}.$$

В контуре, имеющем чисто реактивное сопротивление, при резонансе токов ток во внешней цепи равен нулю, поэтому по первому правилу Кирхгофа:

$$I_1 + I_2 = 0, \text{ откуда } I_2 = -I_1.$$

Подставляя I_2 в предыдущее уравнение с учетом $I_1 = dq/dt$, получаем:

$$L_1 \frac{d^2 q}{dt^2} - L_{12} \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C} = -L_2 \frac{d^2 q}{dt^2} + L_{12} \frac{dI_1}{dt} \text{ или}$$

$$(L_1 + L_2 - 2L_{12}) \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0,$$

откуда определяем резонансную частоту контура:

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{C(L_1 + L_2 - 2L_{12})}}.$$

Чтобы контур был настроен на частоту ω_0 , коэффициент взаимной индукции должен быть равен

$$L_{12} = \frac{1}{2} \left(L_1 + L_2 - \frac{1}{C\omega_0^2} \right).$$

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. НЕКОТОРЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ

Масса электрона	$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
Масса протона	$m_p = 1,672 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Заряд электрона	$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Удельный заряд электрона	$e / m_e = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}$
Удельный заряд протона	$e / m_p = 0,959 \cdot 10^8 \text{ Кл/кг}$
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 \cong 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}}{\text{В} \cdot \text{м}} \left(\frac{\Phi}{\text{м}} \right)$
	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{м}}{\text{Ф}}$
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}$
	$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ Гн/м}$
Гравитационная постоянная	$G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 / (\text{кг} \cdot \text{с}^2)$
Стандартное ускорение свободного падения	$g = 9,807 \text{ м/с}^2$
Классический радиус электрона	$r_e = 0,529 \cdot 10^{-15} \text{ м}$

2. СВЕДЕНИЯ ИЗ МАТЕМАТИКИ

1). Векторный дифференциальный оператор "набла":

в декартовой системе координат:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k};$$

в цилиндрической системе координат:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z;$$

в сферической системе координат:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi.$$

2). **Градиент** выражается через векторный дифференциальный оператор набла $\text{grad } a(\mathbf{r}) \equiv \nabla a(\mathbf{r})$ и его можно найти:

в декартовой системе координат:

$$\text{grad } a = \frac{\partial a}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial a}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial a}{\partial z} \mathbf{k};$$

в цилиндрической системе координат:

$$\text{grad } a = \frac{\partial a}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial a}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial a}{\partial z} \mathbf{e}_z;$$

в сферической системе координат:

$$\text{grad } a = \frac{\partial a}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial a}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi.$$

3). Производная скалярной функции $a(\mathbf{r}) \equiv a(x, y, z)$ по любому направлению (вдоль направления, задаваемого единичным вектором \mathbf{n}_u) равна проекции градиента функции на это направление:

$$\frac{da(x, y, z)}{du} = \mathbf{n}_u \cdot \text{grad } a(\mathbf{r}) = \frac{\partial a}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial a}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial a}{\partial z} \cos \gamma,$$

где $\cos \alpha$, $\cos \beta$ и $\cos \gamma$ – направляющие косинусы вектора \mathbf{n}_u .

4). **Дивергенция векторного поля $\mathbf{a}(\mathbf{r})$** по определению равна:

$$\text{div } \mathbf{a}(\mathbf{r}) \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi_a}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{a}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V},$$

где $\Delta \Phi_a$ – поток вектора $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ через достаточно малую замкнутую поверхность ΔS , которая охватывает малый объем ΔV .

Дивергенция выражается через векторный дифференциальный оператор набла:

в декартовой системе координат:

$$\text{div } \mathbf{a} = (\nabla \mathbf{a}) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z};$$

в цилиндрической системе координат:

$$\text{div } \mathbf{a} = (\nabla \mathbf{a}) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r a_r) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z};$$

в сферической системе координат:

$$\text{div } \mathbf{a} = (\nabla \mathbf{a}) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta a_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}.$$

5). **Формула Остроградского-Гаусса** для произвольного векторного поля $\mathbf{a}(\mathbf{r})$:

$$\oint_S \mathbf{a}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \text{div } \mathbf{a}(\mathbf{r}) dV,$$

где S – произвольная замкнутая поверхность, охватывающая объем V .

6). **Циркуляция векторного поля $\mathbf{a}(r)$** вдоль произвольно-го замкнутого контура L :

$$\oint_L \mathbf{a}(r) \cdot d\mathbf{r} \equiv \oint_L \mathbf{a}(l) \cdot d\mathbf{l} = \oint_L a_l(l) dl,$$

где l – координата точки на контуре и $d\mathbf{l} = d\mathbf{r}$, $dl = |d\mathbf{l}| = |d\mathbf{r}|$, $\mathbf{a}(r) = \mathbf{a}(l)$.

7). **Ротором векторного поля $\mathbf{a}(r)$** называется вектор, проекция которого на направление нормали \mathbf{n} к произвольно ориентированному в пространстве плоскому элементу поверхности ΔS равна:

$$(\text{rot } \mathbf{a}(r))_n \equiv \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta L} \mathbf{a}(r) \cdot d\mathbf{r}}{\Delta S},$$

где направление обхода контура ΔL , охватывающего поверхность ΔS (площадью ΔS), согласовано с направлением нормали \mathbf{n} по правилу буравчика.

Ротор выражается через векторный дифференциальный оператор набла $\text{rot } \mathbf{a} = [\nabla \mathbf{a}]$ и имеет вид определителя квадратной матрицы третьего порядка:

в декартовой системе координат:

$$\text{rot } \mathbf{a} = [\nabla \mathbf{a}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix};$$

в цилиндрической системе координат:

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\varphi & \frac{1}{r} \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_r & r a_\varphi & a_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_r}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta + \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (r a_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z ;$$

в сферической системе координат:

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r \mathbf{e}_\theta & r \sin \theta \mathbf{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ a_r & r a_\theta & r \sin \theta a_\varphi \end{vmatrix} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial (\sin \theta a_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \right] \mathbf{e}_{r\varphi} +$$

$$+ \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r a_\varphi)}{\partial r} \right] \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_\theta .$$

8). **Формула Стокса** для произвольного векторного поля $\mathbf{a}(\mathbf{r})$:

$$\oint_L \mathbf{a}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{a}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} ,$$

где направление обхода контура L , охватывающего поверхность S , согласовано с направлением нормали \mathbf{n} по правилу буравчика.

9). **Оператор Лапласа** Δ – скалярный дифференциальный оператор, равный скалярному произведению двух векторных дифференциальных операторов набла (∇):

$$\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \operatorname{div}(\operatorname{grad}) .$$

В декартовой системе координат:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

в цилиндрической системе координат:

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

в сферической системе координат:

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

10). Некоторые неопределенные интегралы

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctgx} + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tgx} + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$$

11). Сведения из теории комплексных чисел

Модуль комплексного числа $z = a + ib$ равен:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Аргумент φ комплексного числа $z = a + ib$ равен:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}.$$

Представление комплексного числа $z = a + ib$ **в экспоненциальной форме:**

$$z = |z|e^{i\varphi}.$$

Модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей этих чисел:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

Модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей:

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

3. ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ПРОНИЦАЕМОСТИ ϵ НЕКОТОРЫХ ВЕЩЕСТВ

Бумага	2 – 2,5	Спирт	26
Вода	81	Слюда	7
Кварц	4	Стекло	7
Керосин	2	Фарфор	6
Оргстекло	3,5	Эбонит	3
Парафин	2	Янтарь	2,8

4. МАГНИТНЫЕ ВОСПРИИМЧИВОСТИ χ НЕКОТОРЫХ ВЕЩЕСТВ

Диамагнетики		Парамагнетики	
Материал	$\chi \cdot 10^6$	Материал	$\chi \cdot 10^6$
Гелий He	-2,02	Воздух	0,38
Медь Cu	-5,41	Дерево	0,44
Неон Ne	-6,96	Кислород O ₂	1,9
Вода H ₂ O (0°C)	-13,0	Олово Sn	4,4
Серебро Ag	-21,5	Алюминий Al	23
Золото Au	-29,59	Кальций Ca	44
Ртуть Hg	-33,4	Вольфрам W	175
Висмут Bi	-284,0	Платина Pt	360

**5. ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ МАГНИТНЫЕ ПРОНИЦАЕМОСТИ
μ НЕКОТОРЫХ ФЕРРОМАГНЕТИКОВ
(МАКСИМАЛЬНЫЕ)**

Кобальт	170
Никель	1100
Сталь мягкая	2200
Железо углеродистое	3000
Сталь трансформаторная	7500
Железо мягкое	8000
Железо-кобальтовые сплавы	18000
Железо-никелевые сплавы	80000

6. Некоторые внесистемные единицы

$$1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж.}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Сборник задач по курсу физики. Ч.1. Механика. Электричество и магнетизм. / Под ред. С.Э Хайкина. М.-Л.: 1949, 300 с.
2. *Буханов В.М., Васильева О.Н., Жукарев А.С., Лукашева Е.В., Русаков В.С.* Электричество и магнетизм. Разработка семинарских занятий (Университетский курс общей физики). М.: Физический факультет МГУ, 2015, 775 с.
3. *Буханов В.М., Васильева О.Н., Лукашева Е.В., Русаков В.С.* Электричество и магнетизм. Методика решения задач (Университетский курс общей физики). М.: Физический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова, 2018, 608 с.
4. *Матвеев А.Н.* Электричество и магнетизм. М.: Оникс-21 век, 2005, 465 с.
5. *Алешкевич В.А.* Электромагнетизм. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014, 404 с.
6. *Антонов Л.И., Деденко Л.Г., Матвеев А.Н.* Методика решения задач по электричеству. М.: Издательство Московского университета, 1982, 168 с.
7. *Брандт Н.Н., Миронова Г.А., Салецкий А.М.* Электростатика в вопросах и задачах. Пособие по решению задач для студентов. СПб.: Лань, 2011, 288 с.
8. *Иродов И.Е.* Задачи по общей физике. М.: Наука, 1988, 416 с.
9. *Савельев И.В.* Сборник вопросов и задач по общей физике. М.: Наука, 1982, 272 с.