

**В.М. Буханов, О.Н. Васильева, Е.В. Лукашева,  
В.С. Русаков**

# **ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ**

*Допущено УМО по классическому университетскому образованию РФ  
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,  
обучающихся по направлению 010700.62 «Физика»  
и по специальности 010701.65 «Физика»*



Москва  
Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова  
2018

**УДК 53.02**  
**ББК 22.33**

В. М. Буханов, О. Н. Васильева, Е. В. Лукашева,  
В. С. Русаков. **Электричество и магнетизм. Методика решения задач** / Учебное пособие. Изд. 2-е, перераб. и дополн. М.: Физический факультет МГУ, 2018. 608 с.

ISBN 978-5-8279-0147-1

Предлагаемое учебное пособие «Электричество и магнетизм. Методика решения задач» является составной частью серии учебно-методических разработок кафедры общей физики физического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова «Университетский курс общей физики». Пособие составлено в соответствии с новым учебным планом изучения курса общей физики на физическом факультете МГУ и соответствует тематическому плану семинарских занятий по курсу «Электричество и магнетизм».

Содержанием пособия является набор задач с решениями, причем по каждой теме рассматриваются наиболее характерные и типичные задачи и методы их решения. С этой целью наряду с оригинальными задачами использованы формулировки условий задач из существующих учебников, задачников и учебных пособий, которые подверглись существенному исправлению и доработке.

Пособие разбито по главам, каждая из которых включает в себя теоретический материал, основные типы задач и методы их решения, примеры решения задач, а также задачи для самостоятельного решения.

Настоящее пособие предназначено для студентов высших учебных заведений и имеет целью помочь им овладеть основными методами и приобрести навыки решения задач по курсу «Электричество и магнетизм».

Рецензенты: д.ф.-м. н., профессор *Г.С. Плотников*,  
д.ф.-м. н., профессор *А.С. Илюшин*

ISBN 978-5-8279-0147-1

© Физический факультет МГУ им.  
М.В. Ломоносова, 2010, 2018 г.  
© Коллектив авторов, 2018 г.

## **УНИВЕРСИТЕТСКИЙ КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ**

### **(Предисловие редактора инновационного учебно-методического комплекса)**

В настоящее время физика все более глубоко проникает во все области современной науки и техники, появляются ее новые отрасли. В связи с этим возникает проблема подготовки квалифицированных кадров ученых-физиков. Существенную роль в такой подготовке играет преподавание общего курса физики. Для решения этой проблемы на физическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова создан инновационный учебно-методический комплекс (ИУМК) «Университетский курс общей физики», обеспечивающий организационную и содержательную целостность системы подготовки, методов и средств обучения общей физике.

ИУМК «Университетский курс общей физики» создан на основе многолетнего опыта преподавания физики студентам физического факультета Московского университета. Курс охватывает все разделы общей физики. Отличительной особенностью данного курса является то, что в нем в методическом отношении осуществлено единство основных форм обучения физике: лекции, лабораторные работы и семинары. В системе университетского образования теоретический материал излагается в основном в лекционных курсах, а умение решать задачи отрабатывается на семинарских занятиях. Развитие навыков эксперимента и анализа его результатов происходит в процессе занятий в общем физическом практикуме. В связи с этим, каждый раздел курса состоит из шести пособий: «Лекции», «Лекционный эксперимент», «Лабораторный практикум», «Разработка семинарских занятий», «Методика решения задач» и «Сборник задач».

Каждая глава пособия «Лекции» содержит материал базового уровня, соответствующего программе курса, и отражает современные тенденции и технологии физического образования. Цель авторов данного курса – представить общую физику в виде, используемом активно работающими в науке физиками.

Лекции по каждой теме сопровождаются демонстрацией основных физических экспериментов, описание которых представлено в пособии «Лекционный эксперимент». Большая часть описанных экспериментов разработана на кафедре общей физики физического

факультета им. М.В. Ломоносова. В тексте пособия имеется также ряд ссылок на авторские свидетельства на изобретения в области лекционных экспериментов, полученные сотрудниками кафедры. Описание классических опытов и экспериментальных установок, представленное в пособии «Лекционный эксперимент», увеличивает ценность и привлекательность курса.

Для установления единого уровня сложности задач и широты охвата материала на семинарах служит пособие «Разработка семинарских занятий», предназначенное для преподавателя. В данном пособии описаны основные принципы проведения семинара. Рассматривается порядок подачи учебного материала, включающий проверку теоретической подготовки студента, обсуждение метода решения задачи, анализ физического смысла результата, разбор характерных ошибок.

Все формы занятий предполагают значительную самостоятельную внеаудиторную работу студентов. Пособием, позволяющим самостоятельно развивать умение решать физические задачи, является «Методика решения задач». Весь материал пособия разбит на главы. Разбор задач всех глав проводится по единой схеме, причем каждую главу можно прорабатывать независимо от других. Пособие содержит также задачи с решениями повышенной сложности для студентов, желающих более глубоко освоить курс общей физики. Для самостоятельной работы студентов предназначен «Сборник задач», в котором представлены наиболее характерные и типичные задачи.

Неотъемлемой частью курса общей физики служит лабораторный практикум. Материалы пособия «Лабораторный практикум» достаточны для самостоятельной подготовки к выполнению работ. В связи с этим в пособии имеется как общее теоретическое введение, так и более подробное изложение теории к каждой лабораторной работе. Кроме того, для каждой работы сформулированы цель и идея эксперимента, дано описание установки и подробное изложение последовательности проведения эксперимента и обработки результатов. Представленные в пособии лабораторные работы являются результатом работы нескольких поколений преподавателей кафедры общей физики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Первые лабораторные работы составили содержание двухтомника «Физический практикум» под редакцией В.И. Ивероновой, вышедшего в свет в 1967 г. В последние годы разработаны и введены в действие новые современные лабораторные работы с

использованием современных экспериментальных методов исследования физических процессов. Более 50% лабораторных работ являются автоматизированными с управлением компьютером. В каждом семестре студент выполняет 12 лабораторных работ, причем 60-70% являются обязательными для всех студентов, а остальные распределяются с учетом их пожеланий.

Для повышения эффективности усвоения сути изучаемых физических явлений и законов в тематических лабораториях без расхода времени на ознакомление со стандартной технологией измерений в ИУМК введен раздел «Введение в технику эксперимента», состоящий из двух частей: «Лекции» и «Практикум». Лекции посвящены краткому изложению общих принципов проведения физических измерений, теории ошибок и статистической оценки достоверности полученных результатов, а также основных требований к оформлению полученной информации в виде графиков, номограмм и таблиц. В практической части представлены описания лабораторных работ начального цикла, в которых на сравнительно простых физических явлениях студент знакомится с наиболее распространенными приборами, с методами измерений и с правильной обработкой их результатов, основами анализа погрешностей измерений и правилами представления результатов с учетом его точности.

Курс предназначен не только для физиков, но может быть полезен для будущих инженеров, химиков и биологов.

Все пожелания и замечания по пособиям курса будут с благодарностью приняты и рассмотрены на кафедре общей физики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

*А.М. Салецкий*

**ОГЛАВЛЕНИЕ**

<b>Предисловие</b> .....	10
Раздел 1	
<b>Электростатическое поле в вакууме.</b>	
<b>Проводники в электрическом поле</b>	
Глава 1. <b>Электростатическое поле в вакууме. Закон Кулона. Напряжённость электрического поля. Принцип суперпозиции</b> .....	12
1.1. Теоретический материал .....	12
1.2. Основные типы задач (классификация) .....	16
1.3. Методы решения и примеры решения задач .....	16
1.4. Задачи для самостоятельного решения .....	30
Глава 2. <b>Электростатическая теорема Гаусса</b> .....	36
2.1. Теоретический материал .....	36
2.2. Основные типы задач (классификация) .....	38
2.3. Методы решения и примеры решения задач .....	38
2.4. Задачи для самостоятельного решения .....	52
Глава 3. <b>Работа сил и потенциал электростатического поля</b> .....	56
3.1. Теоретический материал .....	56
3.2. Основные типы задач (классификация) .....	60
3.3. Методы решения и примеры решения задач .....	61
3.4. Задачи для самостоятельного решения .....	80
Глава 4. <b>Уравнения Пуассона и Лапласа. Электрический диполь и его поле</b> .....	86
4.1. Теоретический материал .....	86
4.2. Основные типы задач (классификация) .....	88
4.3. Методы решения и примеры решения задач .....	88
4.4. Задачи для самостоятельного решения .....	97
Глава 5. <b>Проводники в электростатическом поле</b> .....	100
5.1. Теоретический материал .....	100
5.2. Основные типы задач (классификация) .....	101
5.3. Методы решения и примеры решения задач .....	101
5.4. Задачи для самостоятельного решения .....	114
Глава 6. <b>Метод электростатических изображений</b> .....	118
6.1. Теоретический материал .....	118
6.2. Основные типы задач (классификация) .....	121
6.3. Методы решения и примеры решения задач .....	121
6.4. Задачи для самостоятельного решения .....	133
Глава 7. <b>Емкость. Простые конденсаторы и их соединения</b> .....	137
7.1. Теоретический материал .....	137

7.2. Основные типы задач (классификация) .....	139
7.3. Методы решения и примеры решения задач .....	139
7.4. Задачи для самостоятельного решения .....	151

## Раздел 2

### Электростатические поля в диэлектриках. Пондеромоторные силы и энергия электрического поля. Постоянный ток

Глава 8. <b>Однородный диэлектрик в электростатическом поле.</b>	
<b>Граничные условия</b> .....	156
8.1. Теоретический материал .....	156
8.2. Основные типы задач (классификация) .....	159
8.3. Методы решения и примеры решения задач .....	159
8.4. Задачи для самостоятельного решения .....	173
Глава 9. <b>Неоднородный диэлектрик в электростатическом поле. Конденсаторы с диэлектриками</b> .....	177
9.1. Теоретический материал .....	177
9.2. Основные типы задач (классификация) .....	178
9.3. Методы решения и примеры решения задач .....	178
9.4. Задачи для самостоятельного решения .....	188
Глава 10. <b>Диэлектрики с заданным статическим состоянием поляризации</b> .....	192
10.1. Теоретический материал .....	192
10.2. Основные типы задач (классификация) .....	195
10.3. Методы решения и примеры решения задач .....	196
10.4. Задачи для самостоятельного решения .....	207
Глава 11. <b>Энергия и работа электрического поля</b> .....	210
11.1. Теоретический материал .....	210
11.2. Основные типы задач (классификация) .....	212
11.3. Методы решения и примеры решения задач .....	213
11.4. Задачи для самостоятельного решения .....	232
Глава 12. <b>Пондеромоторные силы в электрическом поле</b> .....	237
12.1. Теоретический материал .....	237
12.2. Основные типы задач (классификация) .....	239
12.3. Методы решения и примеры решения задач .....	240
12.4. Задачи для самостоятельного решения .....	251
Глава 13. <b>Токи в сплошных проводящих средах</b> .....	255
13.1. Теоретический материал .....	255
13.2. Основные типы задач (классификация) .....	258
13.3. Методы решения и примеры решения задач .....	259
13.4. Задачи для самостоятельного решения .....	276
Глава 14. <b>Расчет цепей постоянного тока. Правила Кирхгофа, методы контурных токов и узловых потенциалов</b> .....	279

14.1. Теоретические вопросы .....	279
14.2. Основные типы задач (классификация) .....	284
14.3. Методы решения и примеры решения задач .....	284
14.4. Задачи для самостоятельного решения .....	296

### Раздел 3

#### **Магнитное поле проводников с током в вакууме. Силы Ампера и Лоренца. Само- и взаимной индукция. Пондеромоторные силы и энергия магнитного поля**

Глава 15. <b>Магнитные поля проводников с током. Закон Био–Савара–Лапласа</b> .....	302
15.1. Теоретический материал .....	302
15.2. Основные типы задач (классификация) .....	304
15.3. Методы решения и примеры решения задач .....	304
15.4. Задачи для самостоятельного решения .....	319
Глава 16. <b>Магнитные поля проводников с током. Теорема о циркуляции. Векторный потенциал</b> .....	325
16.1. Теоретический материал .....	325
16.2. Основные типы задач (классификация) .....	326
16.3. Методы решения и примеры решения задач .....	327
16.4. Задачи для самостоятельного решения .....	339
Глава 17. <b>Сила Ампера. Сила Лоренца. Движение заряженных частиц в электромагнитных полях</b> .....	342
17.1. Теоретический материал .....	342
17.2. Основные типы задач (классификация) .....	343
17.3. Методы решения и примеры решения задач .....	344
17.4. Задачи для самостоятельного решения .....	358
Глава 18. <b>Электромагнитная индукция</b> .....	363
18.1. Теоретический материал .....	363
18.2. Основные типы задач (классификация) .....	365
18.3. Методы решения и примеры решения задач .....	366
18.4. Задачи для самостоятельного решения .....	382
Глава 19. <b>Самоиндукция и взаимная индукция. Энергия магнитного поля</b> .....	389
19.1. Теоретический материал .....	389
19.2. Основные типы задач (классификация) .....	391
19.3. Методы решения и примеры решения задач .....	391
19.4. Задачи для самостоятельного решения .....	403
Глава 20. <b>Пондеромоторные силы и работа в магнитном поле</b> ....	408
20.1. Теоретический материал .....	408
20.2. Основные типы задач (классификация) .....	410
20.3. Методы решения и примеры решения задач .....	410
20.4. Задачи для самостоятельного решения .....	424

## Раздел 4

**Магнитное поле в магнетиках. Энергия магнитного поля и пондеромоторные силы в магнетиках. Переменный ток. Электрические колебания в контурах**

Глава 21. <b>Магнитное поле в магнетиках. Граничные условия. Метод молекулярных токов</b> .....	429
21.1. Теоретический материал .....	429
21.2. Основные типы задач (классификация) .....	436
21.3. Методы решения и примеры решения задач .....	436
21.4. Задачи для самостоятельного решения .....	451
Глава 22. <b>Поле постоянных магнитов. Магнетики во внешнем магнитном поле. Факторы формы магнетика</b> .....	454
22.1. Теоретический материал .....	454
22.2. Основные типы задач (классификация) .....	460
22.3. Методы решения и примеры решения задач .....	460
22.4. Задачи для самостоятельного решения .....	475
Глава 23. <b>Энергия магнитного поля и пондеромоторные силы в магнетиках</b> .....	480
23.1. Теоретический материал .....	480
23.2. Основные типы задач (классификация) .....	483
23.3. Методы решения и примеры решения задач .....	483
23.3. Задачи для самостоятельного решения .....	498
Глава 24. <b>Переходные процессы в электрических цепях</b> .....	502
24.1. Теоретический материал .....	502
24.2. Основные типы задач (классификация) .....	506
24.3. Методы решения и примеры решения задач .....	506
24.3. Задачи для самостоятельного решения .....	536
Глава 25. <b>Расчет цепей переменного тока. Методы комплексных амплитуд и векторных диаграмм. Мощность в цепях переменного тока</b> .....	542
25.1. Теоретический материал .....	542
25.2. Основные типы задач (классификация) .....	547
25.3. Методы решения и примеры решения задач .....	547
25.4. Задачи для самостоятельного решения .....	567
Глава 26. <b>Свободные и вынужденные колебания в контурах. Резонанс напряжений и токов</b> .....	573
26.1. Теоретический материал .....	573
26.2. Основные типы задач (классификация) .....	579
26.3. Методы решения и примеры решения задач .....	580
26.4. Задачи для самостоятельного решения .....	602
<b>Литература</b> .....	606

## Предисловие

Предлагаемое учебное пособие «Электричество и магнетизм. Методика решения задач» предназначено для самостоятельной работы студентов с целью выработки умений, навыков и методов решения задач по разделу «Электричество и магнетизм». Пособие разработано в соответствии с новым планом изучения данного курса на физическом факультете МГУ.

В пособии использован материал предыдущего издания книги «Электричество и магнетизм. Методика решения задач» (авторы А.С. Жукарев, С.А. Иванов, С.А. Киров, Д.Ф. Киселёв, Е.В. Лукашёва [1]), который был значительно расширен, дополнен и структурирован в соответствии с тематическим планом проведения занятий по данному разделу курса общей физики.

Пособие состоит из 26 глав, соответствующих основным темам раздела. Содержание каждой главы разбито на четыре основные части.

1. Теоретический материал. Эта часть носит справочный характер и содержит определения основных физических понятий и величин, формулировки законов физики, ряд наиболее часто употребляемых формул, используемых по данной теме.

2. Основные типы задач (классификация). В этой части перечисляются основные типы задач, относящихся к теме данной главы.

3. Методы решения и примеры решения задач. Эта часть содержит не менее 8 задач с решениями, где на конкретных примерах рассмотрены методы решения (в том числе и альтернативные) различных типов задач. При подборе задач использовались как оригинальные задачи, так и задачи, формулировки которых заимствовались из классических учебников и задачников, рекомендованных в программе курса.

4. Задачи для самостоятельной работы. В данной части содержатся условия задач с ответами для самостоятельного решения.

В конце пособия приводится список литературы, которая рекомендуется студентам для изучения теоретического материала, а также перечислены задачники, из которых взяты задачи для самостоятельной работы.

В книге векторы обозначены жирным наклонным шрифтом ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ), а их модули – не жирным шрифтом ( $E$ ,  $H$ ). Во всей книге соотношения между величинами и выражения для законов даны в системе СИ. Также в СИ приведены решения задач и ответы к задачам для самостоятельного решения.

# **ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ. ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ**

**1**

- ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ. ЗАКОН КУЛОНА. НАПРЯЖЁННОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ
- ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА ГАУССА
- РАБОТА СИЛ И ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ
- УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА И ЛАПЛАСА. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ДИПОЛЬ И ЕГО ПОЛЕ
- ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ
- МЕТОД ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ
- ЭЛЕКТРОЕМКОСТЬ. ПРОСТЫЕ КОНДЕНСАТОРЫ И ИХ СОЕДИНЕНИЯ

## Глава 1

**ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВАКУУМЕ. ЗАКОН КУЛОНА. НАПРЯЖЕННОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ****1.1. Теоретический материал**

**Заряд** – это и физическое понятие (определение которого отвечает на вопрос, что подразумевается под этим понятием) и физическая величина (определение которой позволяет экспериментально определить или посчитать эту величину).

**Заряд как физическое понятие:**

- способность материального объекта к электромагнитному взаимодействию; выражает одно из свойств материи; заряд не может существовать независимо от материального носителя заряда;

- материальный носитель способности к электромагнитному взаимодействию; источник и объект электромагнитного взаимодействия.

**Заряд как физическая величина:**

- мера способности к электромагнитному взаимодействию; характеристика, определяющая электромагнитное взаимодействие.

**Точечный заряд** – заряженная материальная точка. Носитель заряда – материальная точка, т.е. тело, размеры которого гораздо меньше расстояния от заряженного тела до точки наблюдения (при расчете характеристик поля заряда в точке наблюдения) или характерных линейных размеров неоднородности внешнего электрического поля в месте расположения заряженного тела (при расчете силы, действующей на заряд во внешнем поле).

**Пробный заряд** – точечный заряд, достаточно малый по величине, чтобы своим присутствием не изменить внешнее по отношению к пробному заряду поле, т.е. величину и пространственное расположение зарядов, создающих это внешнее поле.

**Фундаментальные свойства заряда.**

А. **Два вида заряда.** Существуют два вида электрических зарядов – положительные и отрицательные, при этом одноименные точечные заряды отталкиваются, а разноименные притягиваются.

В. **Дискретность заряда.** Существует минимальный по величине (элементарный) электрический заряд ( $|e| = 1.60 \cdot 10^{-19}$  Кл),

которому кратны все электрические заряды частиц и тел в свободном состоянии.

С. Инвариантность заряда. Величина заряда не зависит от скорости его движения.

Д. Сохранение заряда. Полный электрический заряд изолированной системы, равный алгебраической сумме зарядов, входящих в систему, сохраняется при любых процессах, происходящих в системе.

**Численное значение элементарного заряда (в системе СИ):**

$$e = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$$

**Закон Кулона.**

Силы взаимодействия  $F_{12}$  и  $F_{21}$  двух неподвижных точечных зарядов  $q_1$  и  $q_2$  в вакууме направлены вдоль прямой, соединяющей эти заряды, их величины (модули) пропорциональны величинам (модулям) зарядов и обратно пропорциональны квадрату расстояния между ними. При этом одноименные заряды отталкиваются, а разноименные – притягиваются (см. рис. 1.1):

$$F_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{r_{12}}{r_{12}} = -F_{21}. \quad (1.1)$$

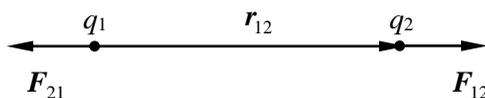


Рис. 1.1. Силы взаимодействия двух точечных одноимённых зарядов.

**Коэффициент пропорциональности в законе Кулона (в системе СИ):**

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{c^2}{10^7} \cong 9 \cdot 10^9 \frac{\text{В} \cdot \text{м}}{\text{Кл}}, \quad (1.2)$$

где

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \cong 0.885 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Кл}}{\text{В} \cdot \text{м}} \left( \frac{\Phi}{\text{м}} \right) - \quad (1.3)$$

– электрическая постоянная,  $c \cong 3.00 \cdot 10^8$  м/с – скорость света в вакууме.

**Полевая трактовка электростатического взаимодействия (концепция ближкодействия).** Взаимодействие зарядов осуществляется посредством электрического поля – материального

носителя взаимодействия. Заряд создает в окружающем его пространстве электрическое поле. Другой заряд, находящийся в поле, подвергается со стороны этого поля действию силы.

**Напряженность (вектор напряженности) электрического поля** – физическая величина, равная отношению силы  $F(\mathbf{r})$ , действующей в данной точке пространства (с радиус-вектором  $\mathbf{r}$ ) на покоящийся пробный заряд, к величине этого заряда  $q$ :

$$E(\mathbf{r}) \equiv \frac{F(\mathbf{r})}{q}. \text{ Единица измерения – } [E] = \frac{\text{Н}}{\text{Кл}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{Кл} \cdot \text{м}} = \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Если пробный заряд положителен, то направление напряженности электрического поля совпадает с направлением силы, действующей на пробный заряд.

**Электростатическое поле** – постоянное электрическое поле, напряженность в каждой точке которого, не зависит от времени.

**Напряженность поля  $E(\mathbf{r})$  точечного заряда  $q$ :**

$$E(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (1.4)$$

где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор точки наблюдения относительно точечного заряда.

**Принцип суперпозиции электрических полей.**

Напряженность электрического поля  $E$ , создаваемого совокупностью точечных зарядов, равна сумме напряженностей полей  $\{E_i\}$ , создаваемых каждым зарядом в отдельности:

$$E = \sum_i E_i. \quad (1.5)$$

**Линейная плотность заряда  $\tau(\mathbf{r})$ :**

$$\tau(\mathbf{r}) \equiv \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta L} = \frac{dq}{dL}, \quad [\tau] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}}. \quad (1.6)$$

**Поверхностная плотность заряда  $\sigma(\mathbf{r})$ :**

$$\sigma(\mathbf{r}) \equiv \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS}, \quad [\sigma] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}. \quad (1.7)$$

**Объемная плотность заряда  $\rho(\mathbf{r})$ :**

$$\rho(\mathbf{r}) \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}, \quad [\rho] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^3}. \quad (1.8)$$

**Напряженность электрического поля дискретно распределенного заряда** (см. рис. 1.2):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}. \quad (1.9)$$

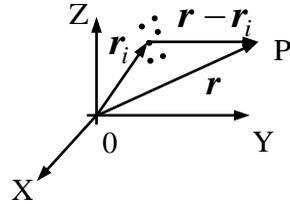


Рис. 1.2. Дискретно распределенный заряд.

**Напряженность электрического поля линейно распределенного заряда** (см. рис. 1.3):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{L'} \frac{\tau(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dL'. \quad (1.10)$$

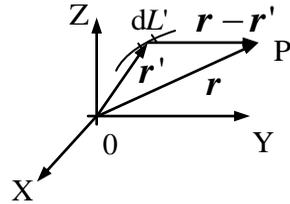


Рис. 1.3. Линейно распределенный заряд.

**Напряженность электрического поля поверхностно распределенного заряда** (см. рис. 1.4):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS'. \quad (1.11)$$

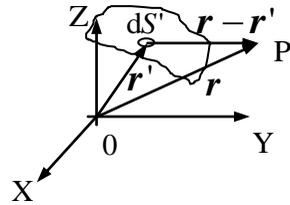


Рис. 1.4. Поверхностно распределенный заряд.

**Напряженность электрического поля объемно распределенного заряда** (см. рис. 1.5):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (1.12)$$

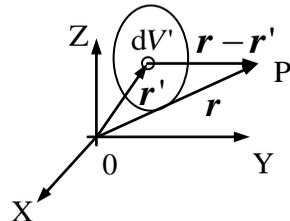


Рис. 1.5. Объемно распределенный заряд.

**Силовая линия (линия напряженности) электрического поля** – воображаемая направленная линия в пространстве, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением

напряженности электрического поля в этой точке (в случае переменных электрических полей в данный момент времени).

#### **Свойства силовых линий электрического поля:**

- 1) через любую точку электрического поля (где  $E(\mathbf{r}) \neq 0$ ) можно провести силовую линию;
- 2) силовые линии не пересекаются;
- 3) силовые линии электростатического поля начинаются на положительных зарядах или в бесконечности и заканчиваются на отрицательных зарядах или в бесконечности;
- 4) силовые линии гуще там, где модуль напряженности поля больше.

### **1.2. Основные типы задач (классификация)**

1.1. Определение напряженности электростатического поля, созданного **дискретным** распределением точечных зарядов.

1.2. Определение напряженности электростатического поля, созданного **непрерывным** распределением зарядов в произвольных конечных областях пространства с заданными значениями линейной ( $\tau$ ), поверхностной ( $\sigma$ ) или объемной ( $\rho$ ) плотностей заряда.

Обычно в задачах этого типа заряд распределен по конечным отрезкам нитей, кольцам, участкам цилиндрических и сферических поверхностей.

### **1.3. Методы решения и примеры решения задач**

#### **Задачи типа 1.1**

*Определение напряженности электрического поля заданного дискретного распределения точечных зарядов.*

**Метод решения.** Использовать формулы (1.2) – (1.4) и принцип суперпозиции (1.5) из теоретического материала. С целью упрощения вычислений необходимо выбрать такую систему координат, которая соответствует элементам симметрии распределения точечных зарядов, заданного в условии задачи.

**Задача 1.3.1.** Положительный точечный заряд 50 мкКл находится на плоскости XY в точке A с радиус-вектором  $\mathbf{r}_0 = 2\mathbf{e}_x + 3\mathbf{e}_y$ , где  $\mathbf{e}_x$  и  $\mathbf{e}_y$  – орты осей X и Y. Найти модуль и вектор

напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  в точке В с радиус-вектором  $\mathbf{r} = 8\mathbf{e}_x - 5\mathbf{e}_y$ . Значения координат  $\mathbf{r}_0$  и  $\mathbf{r}$  даны в метрах.

### Решение

Используя численные данные, приведенные в условии задачи, рисуем схематическое изображение изучаемой системы (рис. 1.6). Заряд находится в точке А с координатами  $x_0 = 2$  м,  $y_0 = 3$  м, а напряженность поля определяется в точке В с координатами  $x = 8$  м,  $y = -5$  м. Для применения формулы (1.4) находим расстояние  $d$  между точками А и В:

$$d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Тогда модуль напряженности поля будет равен:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{d^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Так как направление вектора  $\mathbf{E}$  совпадает с направлением от точки А к точке В, то вектор  $\mathbf{E}$  можно представить в виде:

$$\mathbf{E} = E \cos\alpha \cdot \mathbf{e}_x + E \sin\alpha \cdot \mathbf{e}_y = E \frac{x - x_0}{d} \mathbf{e}_x + E \frac{y - y_0}{d} \mathbf{e}_y.$$

Окончательно для напряженности электрического поля получаем

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(x - x_0)\mathbf{e}_x + (y - y_0)\mathbf{e}_y}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{3/2}}.$$

Подстановка численных данных дает:

$$d = 10 \text{ м}, E = 4,5 \text{ кВ/м}. \mathbf{E} = (2,7 \mathbf{e}_x - 3,6 \mathbf{e}_y) \text{ кВ/м}.$$

$$\text{Ответ: } E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = 4,5 \text{ кВ/м},$$

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(x - x_0)\mathbf{e}_x + (y - y_0)\mathbf{e}_y}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{3/2}} = (2,7 \mathbf{e}_x - 3,6 \mathbf{e}_y) \text{ кВ/м}.$$

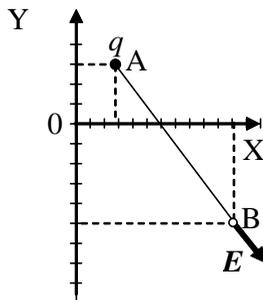


Рис. 1.6. К определению напряженности поля  $\mathbf{E}$  точечного заряда  $q$ .

**Задача 1.3.2.** В вершинах квадрата с диагональю  $2h$  находятся точечные заряды  $+q$  и  $-q$ , как показано на рис. 1.7. Найти модуль и вектор напряженности электрического поля в точке, расположенной симметрично относительно вершин квадрата на расстоянии  $x$  от его плоскости.

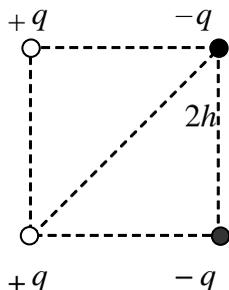


Рис. 1.7. Расположение точечных зарядов  $q^+$  и  $q^-$  в координатной плоскости  $XY$ .

### Решение

Поместим начало координат в центре квадрата. Ось  $X$  проведем перпендикулярно плоскости квадрата, а ось  $Y$  – параллельно сторонам, соединяющим заряды  $+q$  и  $-q$  (рис. 1.8).

В точке  $A$ , отстоящей от плоскости квадрата на расстояние  $x$ , вектор напряженности поля  $E$  будет равен векторной сумме четырех напряженностей, создаваемых точечными зарядами (на рис. 1.8 показано два из них).

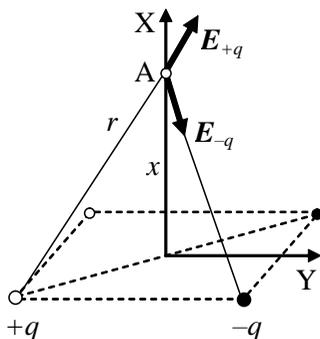


Рис. 1.8. Векторы напряженности электрического поля в произвольной точке  $A$  на оси симметрии системы зарядов.

Модули этих четырех напряженностей одинаковы и согласно формуле (1.4) равны:

$$E_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{x^2 + h^2}.$$

Из симметрии системы следует, что сумма проекций всех четырех напряженностей на оси  $X$  и  $Z$  равны нулю, а проекции всех

четырёх напряженностей  $E_q$  на ось  $Y$  одинаковы. Проекция  $E_q$  на плоскость  $YZ$  равна:

$$E_h = \frac{h}{r} E_q,$$

а проекция  $E_q$  на ось  $Y$  равна:

$$E_y = \frac{E_h}{\sqrt{2}} = \frac{h}{\sqrt{2}r} E_q.$$

Суммируя все четыре вклада, находим:

$$E_y = E = \frac{4h}{\sqrt{2}r} E_q = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^3} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{(x^2 + h^2)^{3/2}};$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{(x^2 + h^2)^{3/2}} \mathbf{e}_x.$$

$$\text{Ответ: } E = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{(x^2 + h^2)^{3/2}},$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{(x^2 + h^2)^{3/2}} \mathbf{e}_x.$$

### Задачи типа 1.2

*Определение напряженности электростатического поля, созданного непрерывным распределением электрических зарядов в конечных областях пространства с заданными значениями линейной ( $\tau$ ), поверхностной ( $\sigma$ ) или объёмной ( $\rho$ ) плотностей заряда.*

**Метод решения.** В непрерывном распределении зарядов выделяем физически бесконечно малый участок – т.е. отрезок малой длины  $dl$  (в случае линейного распределения), малой площади  $dS$  (в случае поверхностного распределения) или малого объема  $dV$  (в случае объёмного распределения). Заряды этих выделенных участков далее рассматриваются как точечные. Создаваемая ими напряженность поля в интересующей нас точке вычисляется по формуле напряженности поля точечного заряда (1.4), после чего в соответствии с принципом суперпозиции (1.5) суммируются все вклады от таких зарядов. Фактически дело сводится к вычислению линейных, поверхностных или объёмных интегралов. В курсе общей физики объекты выбираются обычно

такими, чтобы вычисление интегралов не представляло значительных математических затруднений.

**Задача 1.3.3.** Прямая нить длиной  $L$  заряжена равномерно с линейной плотностью  $\tau$ . Найти напряженность электрического поля в произвольной точке, находящейся на расстоянии  $h$  от нити.

### Решение

Поместим начало системы координат  $O$  в основание перпендикуляра, опущенного из точки наблюдения  $A$  на направление нити, ось  $Y$  направим вдоль нити, а ось  $X$  перпендикулярно к ней (см. рис. 1.9, где для наглядности нить представлена в виде тонкого цилиндра).

Выделим на нити на произвольном расстоянии  $y$  от начала координат участок бесконечно малой длины  $dy$ , который рассматриваем как точечный заряд  $dq = \tau dy$ . Этот заряд создает в точке  $A$  электрическое поле напряженностью

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau dy}{r^2},$$

где  $r = \sqrt{h^2 + y^2} = \frac{h}{\cos\alpha}$  (угол  $\alpha$ , под которым участок  $dy$  виден из точки наблюдения  $A$ , отсчитывается от направления  $AO$ ). Вектор  $dE$  лежит в плоскости  $XY$ , и его проекции на координатные оси равны:

$$dE_x = dE \cos\alpha,$$

$$dE_y = -dE \sin\alpha,$$

$$dE_z = 0.$$

Проекции напряженности электрического поля, создаваемого всей нитью, получим, вычисляя интегралы вдоль нити. Удобно выполнить интегрирование, если в качестве переменной вместо

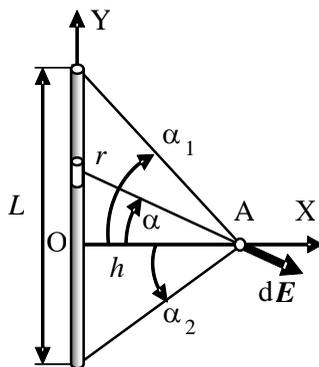


Рис. 1.9. К определению напряженности поля  $E$  отрезка прямой равномерно заряженной нити.

координаты  $y$  использовать угол  $\alpha$ . Из соотношения  $y = h \operatorname{tg} \alpha$  находим:

$$dy = \frac{h}{\cos^2 \alpha} d\alpha,$$

тогда:

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} \cos \alpha d\alpha,$$

$$dE_y = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} \sin \alpha d\alpha.$$

После интегрирования по углу  $\alpha$  в пределах от  $\alpha_1$  до  $-\alpha_2$ , под которыми из точки наблюдения А видны концы нити, для искомой напряженности электрического поля получим:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2),$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2),$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} \sin\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right).$$

Результат можно записать в векторной форме, введя единичные векторы  $\mathbf{e}_x$  и  $\mathbf{e}_y$  осей ОХ и ОУ соответственно:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} \{(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2)\mathbf{e}_x + (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)\mathbf{e}_y\}.$$

Проанализируем некоторые частные случаи.

1. Пусть длина нити много больше расстояния до точки наблюдения, т.е.  $L \gg h$ ; в этом случае  $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2$  и

$$E_x = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h},$$

$$E_y = 0;$$

таким образом, напряженность поля перпендикулярна нити.

2. Найдем напряженность в точке, равноудаленной от концов нити. В этом случае  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$  и

$$E_x = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} \sin \alpha,$$

$$E_y = 0.$$

*Примечание:* При необходимости можно выразить искомую напряженность электрического поля через координату  $y$  верхнего конца нити, заменив  $\alpha_1$  на  $\arctg \frac{y}{h}$  и  $\alpha_2$  на  $\arctg \frac{y-L}{h}$ .

$$\text{Ответ: } E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 h} \sin\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right),$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{h} \{(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2)\mathbf{e}_x + (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)\mathbf{e}_y\}.$$

**Задача 1.3.4.** На одной половине тонкого кольца радиуса  $R$  равномерно распределен положительный заряд с линейной плотностью  $\tau_1$ , а на другой половине – заряд того же знака с плотностью  $\tau_2$ . Найти вектор напряженности поля в центре кольца.

### Решение

Согласно принципу суперпозиции напряженность поля в центре кольца будет равна сумме напряженностей, создаваемых каждым зарядом. Выделим на первом полукольце бесконечно малый участок  $dl = R d\alpha$ , несущий заряд  $dq = \tau_1 dl$  (рис. 1.10). Заряд  $dq$  считаем точечным, и напряженность создаваемого им в центре кольца (в точке  $O$ ) поля  $dE$  находим по формуле (1.4):

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau_1 d\alpha}{R}.$$

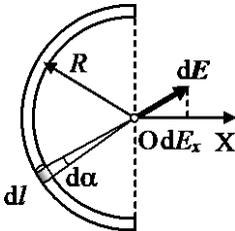


Рис. 1.10. Определение напряженности поля в центре заряженного полукольца.

Из соображений симметрии ясно, что в суммарную напряженность поля войдет только проекция напряженности на ось  $X$ , проведенную через центр кольца перпендикулярно диаметру полукольца:  $dE_x = dE \cos\alpha$ . В итоге получаем:

$$E_1 = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \frac{\tau_1 \cos\alpha d\alpha}{R} = \frac{\tau_1}{2\pi\epsilon_0 R}.$$

От второго полукольца напряженность поля будет направлена в противоположную сторону, так как оба заряда одного знака. Поэтому окончательно:

$$E = \frac{|\tau_1 - \tau_2|}{2\pi\epsilon_0 R}.$$

Если  $\tau_1 = \tau_2$ , то  $E = 0$ . Напряженность в центре равномерно заряженного кольца равна нулю.

$$\text{Ответ: } E = \frac{|\tau_1 - \tau_2|}{2\pi\epsilon_0 R} e_x.$$

**Задача 1.3.5.** Вычислить напряженность электрического поля в произвольной точке на оси тонкого кольца радиуса  $R$ , на котором равномерно распределен заряд  $q$ .

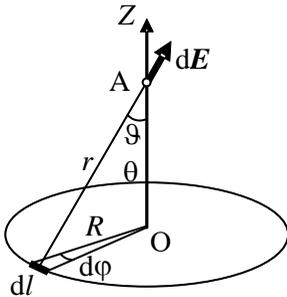


Рис. 1.11. К определению напряженности поля на оси равномерно заряженного кольца.

### Решение

Расположим начало координат в центре кольца и направим ось  $Z$  вдоль оси кольца (рис. 1.11.). Выберем произвольную точку  $A$  на оси кольца с координатой  $z$  и найдем напряженность электрического поля  $E$  в этой точке.

На кольце выделяем участок бесконечно малой длины  $dl = R d\varphi$ , на котором находится заряд

$$dq = \tau dl, \text{ где } \tau = \frac{q}{2\pi R} \text{ — линейная}$$

плотность заряда на кольце. Заряд  $dq$  рассматриваем как точечный.

Он создает в точке  $A$  поле напряженностью

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2} \cdot \frac{r}{r},$$

где  $r = \sqrt{R^2 + z^2}$  — расстояние от заряда до точки  $A$ .

Из соображений симметрии ясно, что для напряженности поля, создаваемого всем кольцом, будет отлична от нуля только ее проекция на ось  $Z$ .

Поскольку  $dE_z = dE \cos \vartheta$  и  $\cos \vartheta = \frac{z}{r}$ , т.е.

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qRz}{2\pi Rr^3} d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qz}{2\pi(R^2 + z^2)^{3/2}} d\varphi,$$

получим после интегрирования по  $\varphi$  в пределах от 0 до  $2\pi$ :

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}; \mathbf{E} = E_z \mathbf{e}_z.$$

Так как напряженность поля при  $z = 0$  равна нулю, растет с увеличением  $z$ , не меняет знака и при  $z \rightarrow \infty$  стремится к нулю, это означает, что она проходит через максимум в некоторой точке.

Чтобы найти  $(E_z)_{\max}$ , используем условие экстремума  $\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$ , из

которого находим  $z_{\max} = \frac{R}{\sqrt{2}}$ . Максимальное значение напряженности равно:

$$E_{\max} = E_z(z_{\max}) = \frac{q}{6\sqrt{3}\pi\epsilon_0 R^2}.$$

При  $z \gg R$  поле мало отличается от поля точечного заряда  $q$ , расположенного в центре кольца.

**Ответ:**  $E = E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}; \mathbf{E} = E_z \mathbf{e}_z.$

**Задача 1.3.6.** Определить напряженность электрического поля на оси тонкого диска радиуса  $R_0$ , заряженного равномерно с поверхностной плотностью  $\sigma$ .

### Решение

Выберем ось  $Z$  совпадающей с осью диска (рис. 1.12). Малый элемент поверхности диска, находящийся на расстоянии  $R$  от центра, имеет площадь  $dS = R d\varphi dR$ , где  $\varphi$  – полярный угол. Заряд на нем можно считать точечным; он равен  $dq = \sigma dS = \sigma R dR d\varphi$ .

Напряженность поля от этого заряда в точке  $A$  с координатой  $z$  будет равна:

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma R dR d\varphi}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r},$$

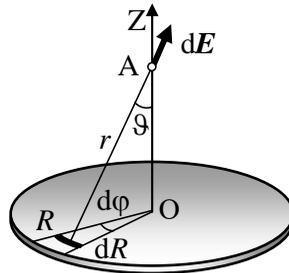


Рис. 1.12. К определению напряженности поля на оси равномерно заряженного диска.

где  $r = \sqrt{R^2 + z^2}$ .

Разложим  $d\mathbf{E}$  на две составляющие – параллельную и перпендикулярную оси  $Z$ . Последняя при суммировании по площади диска в силу симметрии задачи даст нуль, а первая будет равна  $dE_z = dE \cos \vartheta$ , где  $\cos \vartheta = \frac{z}{r}$ . Тогда:

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma z R dR d\varphi}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

и

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{R_0} \int_0^{2\pi} \frac{R dR d\varphi}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{R_0^2 + z^2}} \right) = \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (1 - \cos \vartheta). \end{aligned}$$

При  $R_0 \rightarrow \infty$  (или  $z \rightarrow 0$ )  $E_z \rightarrow \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ , т.е. напряженность

электрического поля стремится к величине напряженности поля равномерно заряженной бесконечной плоскости.

*Примечание.* Тот же результат можно получить проще, используя решение задачи 1.3.5. Для этой цели выделим в плоскости диска малое кольцо радиуса  $r$ , которое будет нести заряд  $dq = \sigma 2\pi r dr$ , и которое, согласно решению задачи 1.3.5, создаст на оси диска напряженность поля, равную по величине

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{z dq}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \frac{z r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Интегрируя это выражение по  $r$  от нуля до  $R_0$ , получим искомый ответ.

$$\text{Ответ: } E = E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{R_0^2 + z^2}} \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (1 - \cos \vartheta).$$

**Задача 1.3.7.** Заряд равномерно распределен по поверхности полусферы радиуса  $R$  с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ . Определить вектор напряженности электрического поля в центре полусферы.

## Решение

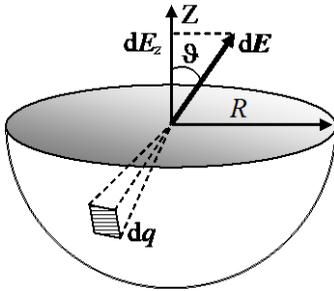


Рис. 1.13. Определение напряженности поля  $E$  в центре заряженной полусферы.

В сферической системе координат площадь элемента поверхности равна  $dS = R^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$ . Элементарный заряд на этой площади, который мы будем рассматривать как точечный (рис. 1.13.), будет  $dq = \sigma R^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$  и напряженность поля, создаваемого им в центре полусферы, равна:

$$dE = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi .$$

Разложим напряженность этого поля на составляющую, направленную по перпендикуляру к плоскости сечения сферы (по оси  $Z$ ):

$$dE_z = dE \cos \vartheta = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \sin \vartheta \cos \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi ,$$

и на составляющую, лежащую в плоскости сечения сферы. Последняя в силу симметрии задачи при суммировании даст нуль, а нормальная составляющая и есть искомая напряженность поля:

$$E_z = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \sin \vartheta \cos \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} .$$

$$E = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} e_z .$$

$$\text{Ответ: } E = E_z = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} ; E = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} e_z .$$

**Задача 1.3.8.** Сфера радиуса  $r$  заряжена с поверхностной плотностью заряда  $\sigma = (ar)$ , где  $a$  – постоянный вектор,  $r$  – радиус-вектор точки сферы относительно её центра (рис. 1.14.). Найти напряженность электрического поля в центре сферы.

## Решение

Выберем за ось  $Z$  вертикаль, проведенную через центр сферы параллельно вектору  $a$ , а начало координат поместим в центр сферы (рис. 1.14.). В соответствии с условием задачи поверхностная плотность заряда будет распределена по закону:

$$\sigma(\vartheta) = ar \cos \vartheta,$$

где  $\vartheta$  – полярный угол точки наблюдения (рис. 1.14).

Заряд элементарного элемента поверхности сферы площади  $dS = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$  равен

$$dq = \sigma dS = ar^3 \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta d\varphi,$$

где  $\varphi$  – азимутальный угол). Напряженность поля от этого заряда в центре сферы равна:

$$d\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r},$$

а ее модуль –

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} ar \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

Проекции  $d\mathbf{E}$  на ось  $Z$  и на ось  $Y$  соответственно равны:

$$dE_z = -dE \cos \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = -\frac{ar}{2\epsilon_0} \sin \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta,$$

$$dE_y = -dE \sin \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = -\frac{ar}{2\epsilon_0} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta d\vartheta.$$

Интегрирование полученных выражений по углу  $\vartheta$  дает проекции искомой напряженности электрического поля в центре неоднородно заряженной сферы:

$$E_z = -\frac{ar}{2\epsilon_0} \int_0^{\pi} \sin \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta = -\frac{ar}{3\epsilon_0},$$

$$E_y = -\frac{ar}{2\epsilon_0} \int_0^{\pi} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta d\vartheta = 0.$$

Вспоминая, что ось  $Z$  направлена вдоль вектора  $\mathbf{a}$ , можно ответ записать в векторном виде:

$$\mathbf{E} = -\frac{r}{3\epsilon_0} \mathbf{a}.$$

2-ой способ.

Как и в предыдущем варианте решения, за ось  $Z$  выберем вертикаль, проведенную через центр сферы  $O$  параллельно вектору  $\mathbf{a}$ , а начало координат поместим в центр сферы. В соответствии с

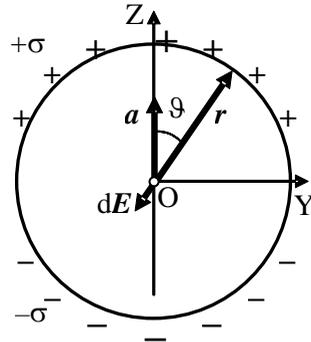


Рис. 1.14. К определению напряженности электрического поля в центре неравномерно заряженной сферы.

условием задачи поверхностная плотность заряда будет распределена по закону:

$$\sigma(\vartheta) = ar \cos \vartheta,$$

где  $\vartheta$  – полярный угол точки наблюдения (рис. 1.15).

Это распределение имеет осевую симметрию, поэтому сферическую поверхность можно разбить на кольца, ограниченные окружностями, которые соответствуют радиус-векторам  $r$  и  $r + dr$ , составляющим углы  $\vartheta$  и  $\vartheta + d\vartheta$ , соответственно (рис. 1.15). Площадь такого кольца равна  $dS = 2\pi r \sin \vartheta r d\vartheta$ , а заряд –

$$dq = \sigma dS = 2\pi ar^3 \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta.$$

Величина напряженности поля от кольцевого заряда в центре сферы, т.е. на расстоянии  $z = r \cos \vartheta$  от плоскости кольца равна (см. задачу 1.3.5):

$$\begin{aligned} dE_z &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dqz}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2\pi ar^3 \sin \vartheta r \cos^2 \vartheta d\vartheta}{r^3} = \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi ar \cos^2 \vartheta d(\cos \vartheta). \end{aligned}$$

Интегрирование полученного выражения по углу  $\vartheta$  дает модуль искомой напряженности электрического поля в центре неоднородно заряженной сферы:

$$E_z = -\frac{ar}{2\epsilon_0} \int_0^\pi \cos^2 \vartheta d(\cos \vartheta) = -\frac{ar}{3\epsilon_0}.$$

Поскольку ось  $Z$  направлена вдоль вектора  $\mathbf{a}$ , ответ можно записать в векторном виде следующим образом:

$$\mathbf{E} = -\frac{r}{3\epsilon_0} \mathbf{a}.$$

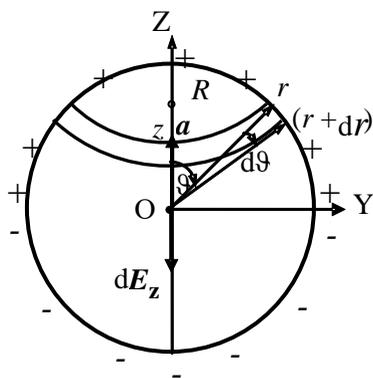


Рис. 1.15. К определению напряженности электрического поля в центре неравномерно заряженной сферы (2-й способ).

$$\text{Ответ: } E = -\frac{r}{3\varepsilon_0} a.$$

**Задача 1.3.9.** Тонкое кольцо радиуса  $R$  заряжено с линейной плотностью  $\tau = \tau_0 \cos \varphi$  (начало полярной системы координат в центре кольца). Найти напряженность поля в центре и в произвольной точке на оси кольца.

### Решение

С учетом симметрии системы рассмотрим четыре участка кольца длиной  $dl = R d\varphi$  каждый, расположенных на концах двух взаимно перпендикулярных диаметров (рис. 1.16, на котором стрелками показаны напряженности

$$dE_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{R^2},$$

создаваемые точечными зарядами  $dq = \tau dl$ , находящимися на каждом участке  $dl$ ).

Видно, что при их сложении будет отлична от нуля только проекция на ось  $X$ :

$$dE_x = -4dE_1 \cos \varphi = -\frac{1}{\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\tau_0}{R} \cos^2 \varphi d\varphi = dE.$$

Интегрируя это выражение в пределах от  $0$  до  $\pi/2$ , получим значение напряженности в центре кольца:

$$E = -\frac{\tau_0}{4\varepsilon_0 R} i,$$

(здесь учтено и направление вектора  $E$ , а  $i$  – орт оси  $X$ ).

В точке на оси кольца, отстоящей от плоскости кольца на расстоянии  $z$ , условия симметрии те же, поэтому опять будет отлична от нуля только проекция  $E$  на ось  $X$ . Но теперь (см. рис. 1.17)

$$dE_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{z^2 + R^2},$$

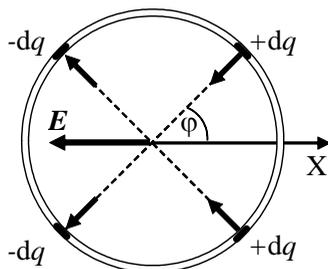


Рис. 1.16. К вычислению напряженности поля  $E$  в плоскости неравномерно заряженного кольца.

$$\begin{aligned} dE_x &= -4dE_1 \cos \varphi \cos \alpha = -4 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{z^2 + R^2} \cos \varphi \cos \alpha = \\ &= -\frac{1}{\pi\epsilon_0} \frac{\tau_0 R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \cos^2 \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

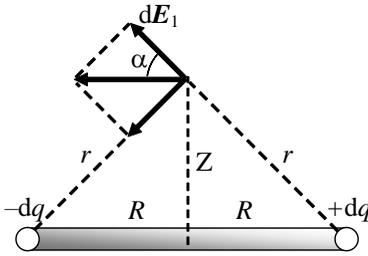


Рис. 1.17. К вычислению напряженности поля  $E$  в плоскости неравномерно заряженного кольца.

Вычисляя интеграл по  $\varphi$  в пределах от 0 до  $\frac{\pi}{2}$  и учитывая направление вектора  $E$ , находим:

$$E = -\frac{\tau_0 R^2}{4\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} i,$$

**Ответ:** 
$$E = -\frac{\tau_0 R^2}{4\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} i.$$

#### 1.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 1.4.1.** Два положительных заряда  $q_1$  и  $q_2$  находятся в точках с радиус-векторами  $r_1$  и  $r_2$ . Найти величину отрицательного заряда  $q_3$  и радиус-вектор  $r_3$  точки, в которую его необходимо поместить, чтобы сила, действующая на каждый из этих трех зарядов, была равна нулю.

**Ответ:** 
$$q_3 = -\frac{q_1 q_2}{(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2})^2}, \quad r_3 = \frac{r_1 \sqrt{q_2} + r_2 \sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}}.$$

**Задача 1.4.2.** Три одинаковых одноименных заряда  $q$  расположены в вершинах равностороннего треугольника. Какой заряд  $Q$  противоположного знака нужно поместить в центр этого

треугольника, чтобы результирующая сила, действующая на каждый заряд, была равна нулю?

$$\text{Ответ: } Q = \frac{q}{\sqrt{3}}.$$

**Задача 1.4.3.** Тонкая непроводящая палочка длиной  $L = 0,08$  м равномерно заряжена так, что её полный заряд равен  $q = 3,5 \cdot 10^{-7}$  Кл. Какой точечный заряд  $Q$  нужно поместить на расстоянии  $d = 0,06$  м от середины палочки на её продолжении, чтобы на него действовала сила  $F = 0,12$  Н?

$$\text{Ответ: } Q = F \frac{4\pi\epsilon_0}{q} \left( d^2 - \frac{L^2}{4} \right) \approx 7,6 \cdot 10^{-8} \text{ Кл.}$$

**Задача 1.4.4** ([2], 3.2). С какой силой взаимодействовали бы два медных шарика, каждый массы 1 г, находясь на расстоянии 1 м друг от друга, если бы суммарный заряд всех электронов в них отличался на 1 % от суммарного заряда всех ядер?

$$\text{Ответ: около } 2 \cdot 10^{15} \text{ Н.}$$

**Задача 1.4.5** ([2], 3.3). Два небольших одинаково заряженных шарика, каждый массы  $m$ , подвешены к одной точке на шелковых нитях длины  $l$ . Расстояние между шариками  $x < l$ . Найти скорость утечки зарядов  $dq/dt$  с каждого шарика, если скорость их сближения меняется по закону  $v = a/\sqrt{x}$ , где  $a$  – постоянная.

$$\text{Ответ: } dq/dt = (3a/2) \sqrt{2\pi\epsilon_0 mg/l}.$$

**Задача 1.4.6** ([2], 3.6). Положительный точечный заряд 50 мкКл находится на плоскости XY в точке с радиус-вектором  $\mathbf{r}_0 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ , где  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{j}$  – орты осей OX и OY. Найти напряженность электрического поля и ее модуль в точке с радиус-вектором  $\mathbf{r} = 8\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$ . Здесь  $r_0$  и  $r$  – в метрах.

$$\text{Ответ: } \mathbf{E} = 2,7\mathbf{i} - 3,6\mathbf{j}, E = 4,5 \text{ кВ/м.}$$

**Задача 1.4.7** ([2], 3.7). В вершинах квадрата с диагональю  $2l$  находятся точечные заряды  $q$  и  $-q$ . Найти модуль напряженности электрического поля в точке, отстоящей на расстояние  $x$  от центра

квадрата и расположенной симметрично относительно вершин квадрата.

$$\text{Ответ: } E = q/l[\sqrt{2} \pi \epsilon_0 (l^2 + x^2)^{3/2}].$$

**Задача 1.4.8.** Тонкое полукольцо радиуса  $R = 20$  см заряжено равномерно зарядом  $q = 0,7$  нКл. Найти модуль вектора напряженности электрического поля в центре кривизны этого полукольца.

$$\text{Ответ: } E = \frac{q}{2\pi^2 \epsilon_0 R^2} = 100 \text{ В/м.}$$

**Задача 1.4.9.** Точечный заряд  $q$  находится в центре тонкого кольца радиуса  $R$ , по которому равномерно распределен заряд  $(-q)$ . Найти модуль вектора напряженности электрического поля на оси кольца в точке, отстоящей от центра кольца на расстояние  $x \gg R$ .

$$\text{Ответ: } E = \frac{3qR^2}{8\pi\epsilon_0 x^4}.$$

**Задача 1.4.10** ([2], 3.12). Тонкое непроводящее кольцо радиуса  $R$  заряжено с линейной плотностью  $\lambda = \lambda_0 \cos\phi$ , где  $\lambda_0$  – постоянная,  $\phi$  – азимутальный угол. Найти модуль напряженности электрического поля:

а) в центре кольца;

б) на оси кольца в зависимости от расстояния  $x$  до его центра.

Исследовать полученное выражение при  $x \gg R$ .

$$\text{Ответ: а) } E = \lambda_0 / (4\epsilon_0 R);$$

$$\text{б) } E = \lambda_0 R^2 / [4\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}],$$

$$\text{при } x \gg R \quad E \approx p / (4\pi\epsilon_0 x^3), \text{ где } p = \pi R^2 \lambda_0.$$

**Задача 1.4.11.** Система состоит из тонкого заряженного проводящего кольца радиуса  $R$  и очень длинной нити, равномерно заряженной с линейной плотностью  $\tau$ , расположенной на оси кольца так, что один из её концов совпадает с центром кольца. Кольцо имеет заряд  $q$ . Найти силу взаимодействия кольца и нити.

$$\text{Ответ: } F = \frac{\tau q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

**Задача 1.4.12.** Из равномерно заряженной плоскости вырезали круг радиуса  $R$  и сдвинули его перпендикулярно плоскости на расстояние  $L$ . Найти напряженность электрического поля в точке, находящейся на оси выреза посередине между кругом и плоскостью. Поверхностная плотность заряда на круге и плоскости одинаковая и равна  $\sigma$ .

$$\text{Ответ: } E\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \frac{2L}{\sqrt{L^2 + 4R^2}} - 1 \right).$$

**Задача 1.4.13.** Два длинных тонких провода, расположенных параллельно на расстоянии  $d$  друг от друга, равномерно заряжены с линейной плотностью  $+\tau$  и  $(-\tau)$  соответственно. Определить напряженность электрического поля в точке, лежащей в плоскости симметрии на расстоянии  $h$  от плоскости, в которой лежат провода.

$$\text{Ответ: } E = \frac{2\tau d}{\pi\epsilon_0(4h^2 + d^2)}.$$

**Задача 1.4.14.** Шар радиуса  $R$  сферически симметрично заряжен по объему зарядом  $Q$  так, что  $\rho(r) \sim r^2$ . Определить напряженность электрического поля в точках А и В, если  $r_A = 0,5R$ , а  $r_B = 2R$ .

$$\text{Ответ: } E_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{8R^2}; \quad E_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{4R^2}.$$

**Задача 1.4.15.** Имеются два сферических распределения зарядов с объёмными плотностями заряда  $+\rho$  и  $-\rho$  с центрами в точках  $O_1$  и  $O_2$ , сдвинутых относительно друг друга на вектор  $\mathbf{a}$ , такой, что  $a < |O_1O_2| < R$ , где  $R$  – радиус сфер. Найти напряженность электрического поля в пространстве перекрытия зарядов.

$$\text{Ответ: } \mathbf{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{a}.$$

**Задача 1.4.16** ([2], 3.13). Находящийся в вакууме тонкий прямой стержень длины  $2a$  заряжен равномерно зарядом  $q$ . Найти модуль напряженности электрического поля как функцию расстояния  $r$  от центра стержня до точки прямой:

а) перпендикулярной к стержню и проходящей через его центр;

б) совпадающей с осью стержня, если  $r > a$ .

Исследовать полученные выражения при  $r \gg a$ .

Ответ: а)  $E = q/[4\pi\epsilon_0 r \sqrt{a^2 + r^2}]$ ;

б)  $E = q/[4\pi\epsilon_0 (r^2 - a^2)]$ .

В обоих случаях при  $r \gg a$   $E \approx q/4\pi\epsilon_0 r^2$ .

**Задача 1.4.17** ([2], 3.15). Равномерно заряженная нить, на единицу длины которой приходится заряд  $\lambda$ , имеет конфигурации, показанные на рис. 1.18. Радиус закругления  $R$  значительно меньше длины нити. Воспользовавшись результатом решения предыдущей задачи, найти модуль напряженности электрического поля в точке  $O$  для конфигураций (а) и (б).

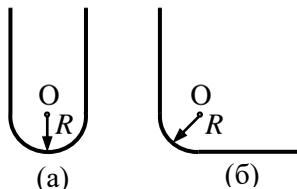


Рис. 1.18. К вычислению напряженности поля  $E$  в точке  $O$  для конфигураций (а) и (б).

Ответ: а)  $E = \lambda \sqrt{2} / (4\pi\epsilon_0 R)$ ;

б)  $E = 0$ .

**Задача 1.4.18.** Поверхностная плотность заряда на сфере радиуса  $R$  зависит от полярного угла  $\vartheta$  как  $\sigma = \sigma_0 \cos \vartheta$ , где  $\sigma_0$  – положительная постоянная. Показать, что такое распределение заряда можно представить как результат малого сдвига друг относительно друга двух равномерно заряженных шаров радиуса  $R$ , заряды которых равны по модулю и противоположны по знаку. Воспользовавшись этим представлением, найти вектор напряженности электрического поля внутри данной сферы.

Ответ:  $E = -\frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \mathbf{k}$ , где  $\mathbf{k}$  – орт оси  $Z$ , от которой

отсчитывается угол  $\vartheta$ . Поле внутри данной сферы однородно.

**Задача 1.4.19.** Бесконечно длинная цилиндрическая поверхность круглого сечения заряжена неравномерно с поверхностной плотностью  $\sigma = \sigma_0 \cos\varphi$ , где  $\varphi$  – угол цилиндрической системы координат, отсчитываемый от заданного радиуса (оси X) в плоскости перпендикулярного сечения цилиндра (рис. 1.19). Найти модуль и направление вектора напряженности электрического поля на оси цилиндра Z.

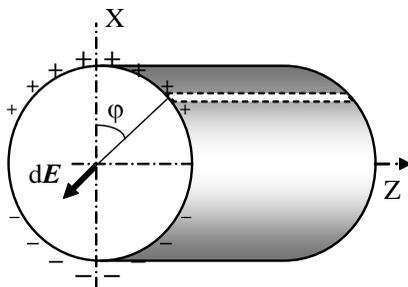


Рис. 1.19. К вычислению напряженности модуля электрического поля  $E$  на оси цилиндра.

*Указание.* Выделить на поверхности цилиндра узкие полосы, параллельные оси Z, на которых плотность заряда будет постоянна (см. рис. 1.19). Для нахождения электрического поля, создаваемого такой полосой на оси цилиндра, воспользоваться результатом задачи 1.3.3, где была найдена напряженность поля от бесконечного линейного заряда.

$$\text{Ответ: } E_x = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}.$$

## Глава 2

## ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА ГАУССА

## 2.1. Теоретический материал

**Поток  $d\Phi_E$  напряженности электрического поля  $E(\mathbf{r})$**  через физически бесконечно малый элемент поверхности (настолько малый, что можно считать элемент плоским, а напряженность электрического поля одинаковой в любой точке этого элемента) площадью  $dS$  называется физическая величина, равная:

$$d\Phi_E \equiv \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS = E(\mathbf{r}) \cos \alpha dS = E_n(\mathbf{r}) dS, \quad (2.1)$$

где  $d\mathbf{S} \equiv \mathbf{n} dS$ ,  $\mathbf{n}$  – нормаль к поверхности.

Поток  $\Phi_E$  напряженности электрического поля  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  через произвольную двухстороннюю поверхность  $S$  складывается из потоков напряженности поля через физически бесконечно малые элементы  $d\mathbf{S}$  этой поверхности и равен:

$$\Phi_E = \int_S d\Phi_E = \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.2)$$

Единица измерения –  $[\Phi_E] = \text{В} \cdot \text{м}$ .

**Электростатическая теорема Гаусса в интегральной форме.**

Поток  $\Phi_E$  (вектора) напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  через произвольную замкнутую поверхность  $S$  равен отношению полного заряда  $q$ , охватываемого этой поверхностью, к электрической постоянной  $\epsilon_0$ :

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (2.3)$$

**Граничные условия для нормальной составляющей напряженности электрического поля.**

Граничные условия – связь между одинаковыми характеристиками поля двух сред по обе стороны границы их раздела.

Граничные условия для нормальной составляющей напряженности электрического поля:

$$\mathbf{E}_{2n} - \mathbf{E}_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{n}, \quad (2.4)$$

где  $\sigma(\mathbf{r})$  – поверхностная плотность заряда на границе раздела двух сред,  $E_{1n}$  и  $E_{2n}$  – нормальные составляющие напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  по обе стороны этой границы, при этом нормаль  $\mathbf{n}$  к поверхности раздела двух сред направлена от первой ко второй среде.

**Векторный дифференциальный оператор "набла"** в декартовой системе координат:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (2.5)$$

**Дивергенция векторного поля  $\mathbf{a}(\mathbf{r})$**  по определению равна:

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(\mathbf{r}) \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi_a}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S} \mathbf{a}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V}, \quad (2.6)$$

где  $\Delta \Phi_a$  – поток вектора  $\mathbf{a}(\mathbf{r})$  через достаточно малую замкнутую поверхность  $\Delta S$ , которая охватывает (ограничивает) малый объем  $\Delta V$ .

В декартовой системе координат дивергенция выражается через векторный дифференциальный оператор набла:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = (\nabla \mathbf{a}) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (2.7)$$

**Формула Остроградского-Гаусса** для произвольного векторного поля  $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ :

$$\oint_S \mathbf{a}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{a}(\mathbf{r}) dV, \quad (2.8)$$

где  $S$  – произвольная замкнутая поверхность, охватывающая (ограничивающая) объем  $V$ .

**Электростатическая теорема Гаусса в дифференциальной (локальной) форме.** Дивергенция напряженности электрического поля  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  равна отношению объемной плотности заряда  $\rho(\mathbf{r})$  к электрической постоянной  $\varepsilon_0$ :

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}. \quad (2.9)$$

## 2.2. Основные типы задач (классификация)

2.1. Вычисление напряженности электрического поля, создаваемого непрерывным распределением зарядов с плоскостной конфигурацией.

2.2. Вычисление напряженности электрического поля, создаваемого непрерывным распределением зарядов с цилиндрической симметрией.

2.3. Вычисление напряженности электрического поля, создаваемого непрерывным распределением зарядов со сферической симметрией.

## 2.3. Методы решения и примеры решения задач

### Задачи типа 2.1

*Вычисление напряженности электрического поля, создаваемого непрерывным распределением зарядов с плоскостной конфигурацией.*

**Метод решения.** К задачам этого типа относятся случаи, когда заряды распределены по бесконечным плоскостям с постоянной поверхностной плотностью  $\sigma$ , или же заряды распределены в плоских слоях либо с постоянной объемной плотностью  $\rho$ , либо неравномерно (по известному закону) в направлении, перпендикулярном слоям. Такие задачи решаются с помощью электростатической теоремы Гаусса (2.3), причем в качестве замкнутой поверхности выбирается прямой цилиндр, боковая поверхность которого перпендикулярна заряженным плоскостям.

**Задача 2.3.1.** Найти в произвольной точке напряженность электрического поля, создаваемого положительным зарядом, равномерно распределенным по бесконечной плоскости с поверхностной плотностью  $\sigma$ .

### Решение

Поскольку плоскость бесконечная, распределение зарядов и поля обладает осевой симметрией относительно

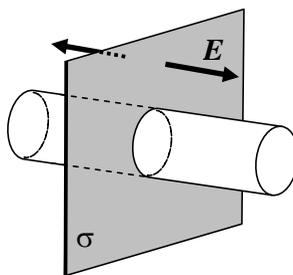


Рис. 2.1. К определению напряженности поля, создаваемого равномерно заряженной плоскостью.

любой линии, перпендикулярной плоскости. Линии напряженности поля везде направлены по нормали к плоскости и, следовательно, параллельны друг другу, а модуль напряженности одинаков во всех точках и не зависит от расстояния до плоскости.

Ввиду вышесказанного целесообразно применить электростатическую теорему Гаусса в интегральной форме. Для этого рассмотрим прямой цилиндр, ось которого перпендикулярна заряженной плоскости, а сам цилиндр симметрично расположен относительно нее (рис. 2.1).

Поток вектора  $\mathbf{E}$  через боковую поверхность такого цилиндра равен нулю, так как линии напряженности везде параллельны образующим цилиндра. Потоки вектора напряженности  $\mathbf{E}$  через основания цилиндра одинаковы и равны  $ES$ , где  $S$  – площадь основания цилиндра. Заряд, находящийся внутри замкнутой поверхности этого цилиндра, равен  $\sigma S$ . Согласно электростатической теореме Гаусса имеем:

$$2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0},$$

откуда находим искомую напряженность электрического поля:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Этот же результат получится и для отрицательного заряда. В этом случае силовые линии поля начинаются в бесконечности и заканчиваются на заряженной плоскости.

Полученный результат можно использовать также для определения напряженности поля вблизи равномерно заряженной пластины конечных размеров, когда расстояние от точки наблюдения до пластины много меньше ее размеров и точка наблюдения находится достаточно далеко от краев пластины. Кроме того, полученное решение можно распространить и на произвольные (неплоские) поверхности, если радиус кривизны вблизи точки, в которой определяется напряженность, много больше расстояния от поверхности до точки наблюдения, и на неравномерно заряженные поверхности, если характерный размер неоднородности в распределении плотности заряда значительно превышает расстояние до точки наблюдения. Это типичный пример придания физического смысла результатам расчета напряженности поля от объекта бесконечной протяженности.

Отметим, что на заряженной поверхности напряженность поля  $E$  не определена (испытывает скачок). Это связано с выбором модели поверхности как двумерного объекта (не имеющего толщины). В реальных материалах электрическое поле вблизи заряженной поверхности меняется очень быстро на расстояниях порядка нескольких атомных слоев. В этой области модель равномерно заряженной поверхности неверна, и требуется учитывать реальное распределение заряженных частиц, из которых состоят ее атомы и молекулы. В дальнейшем, говоря о скачке напряженности, будем иметь в виду именно такую картину.

**Ответ:** 
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

**Задача 2.3.2.** Две бесконечные параллельные друг другу плоскости равномерно заряжены с поверхностными плотностями заряда  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Найти распределение напряженности поля: а) когда заряды одного знака, б) когда заряды разных знаков.

### Решение

Напряженности полей, создаваемых каждой плоскостью, найдены в задаче 2.3.1. Используем полученные там решения и принцип суперпозиции. На рис.2.2. схематически показаны векторы напряженности полей от каждой плоскости для случаев а) и б); при этом положительным направлением напряженности считается направление слева направо (именно это направление будем считать положительным направлением оси X).

а) В области 1 поля  $E_1$  и  $E_2$  сонаправлены, поэтому

$$E_{(1)} = -E_1 - E_2 = -(E_1 + E_2).$$

В области 2 направления полей противоположны, поэтому

$$E_{(2)} = -E_2 + E_1.$$

Аналогично в области 3 имеем:

$$E_{(3)} = E_1 + E_2.$$

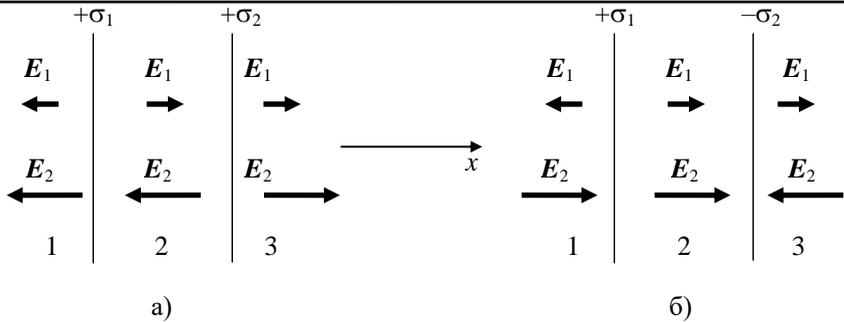


Рис.2.2. Напряженности электрических полей, создаваемых двумя равномерно заряженными плоскостями: а) заряды плоскостей одного знака; б) заряды плоскостей противоположных знаков.

Если плотности зарядов одинаковы и равны  $\sigma$ , то модули векторов напряженностей вдоль оси X будут:

$$E_{(1)} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad E_{(2)} = 0, \quad E_{(3)} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

б) Рассмотрение аналогично пункту а). Находим:

$$E_{(1)} = E_2 - E_1; \quad E_{(2)} = E_1 + E_2; \quad E_{(3)} = E_1 - E_2.$$

В случае одинаковых по модулю зарядов имеем:

$$E_{(1)} = E_{(3)} = 0, \quad E_{(2)} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Как и в задаче 2.3.1, полученные результаты можно использовать для пластин конечных размеров в точках пространства, находящиеся достаточно близко к плоскостям пластин и отстоящих достаточно далеко от краев пластин. Фактически расстояния между пластинами должны быть малыми по сравнению с размерами пластин, а точка наблюдения находится далеко от краев пластин. В противном случае отклонения от полученных результатов становятся существенными (поле искажается за счет краевых эффектов).

**Ответ:** а)  $E_{(1)} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad E_{(2)} = 0, \quad E_{(3)} = \frac{\sigma}{\epsilon_0};$

б)  $E_{(1)} = E_{(3)} = 0, \quad E_{(2)} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$

**Задача 2.3.3.** В бесконечной тонкой плоскости, заряженной равномерно с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ , вырезано круглое отверстие радиусом  $R$ . Найти вектор напряженности электрического поля на оси этого отверстия (рис. 2.3; для наглядности плоскость показана в виде тонкой пластины).

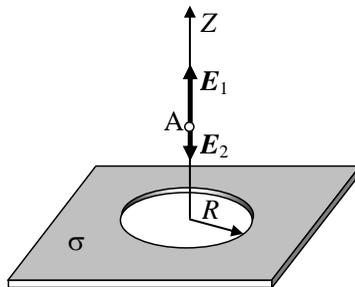


Рис. 2.3. К нахождению поля  $E$  на оси отверстия, вырезанного в заряженной плоскости.

### Решение

Используя принцип суперпозиции, искомую напряженность электрического поля в точке  $A$  на оси отверстия можно представить как сумму напряженностей поля  $E_1$ , создаваемого целой бесконечной плоскостью, и поля  $E_2$  от диска радиуса  $R$ , заряженного с той же по величине плотностью заряда, но противоположного знака.

Напряженность поля, создаваемого бесконечной плоскостью, известна из решения задачи 2.3.1, согласно которому  $E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ .

Модуль напряженности поля на оси диска известен из решения задачи 1.3.6 и равен

$$E_2 = \frac{(-\sigma)}{2\varepsilon_0} \left( 1 - \frac{z_0}{\sqrt{R^2 + z_0^2}} \right),$$

где  $z_0$  – расстояние от точки наблюдения до плоскости. Окончательный ответ получаем, складывая её с напряженностью поля плоскости:

$$E = E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{z_0}{\sqrt{R^2 + z_0^2}}$$

и вектор напряженности

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{z_0}{\sqrt{R^2 + z_0^2}} e_z$$

$$\text{Ответ: } E = E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{z_0}{\sqrt{R^2 + z_0^2}},$$

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{z_0}{\sqrt{R^2 + z_0^2}} \mathbf{e}_z.$$

**Задача 2.3.4.** Определить напряженность электрического поля  $E$  внутри и вне безграничного плоского слоя толщиной  $2h$ , в котором равномерно распределен положительный заряд с объемной плотностью  $\rho$ .

### Решение

В силу симметрии задачи вектор напряжённости электрического поля в каждой точке будет направлен перпендикулярно плоскости слоя.

Для применения электростатической теоремы Гаусса выбираем цилиндр с площадью основания  $S$  и длиной образующей  $2x$ , расположенный симметрично относительно центральной плоскости слоя (рис. 2.4).

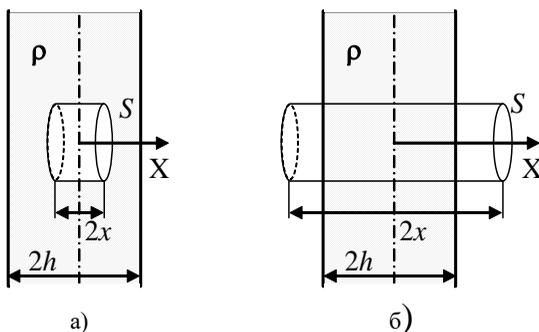


Рис. 2.4. К определению напряженности поля, создаваемого равномерно заряженным плоским слоем: а) вычисление внутри слоя; б) вычисление вне слоя.

Если  $x < h$ , то с помощью теоремы Гаусса определяется напряженность поля внутри заряженного слоя, если  $x > h$  – снаружи.

Рассуждения аналогичны тем, что проводились в задаче 2.3.1.

При  $x < h$  (рис. 2.4а) для потока напряженности электрического поля  $E(x)$  запишем:

$$2E(x)S = \frac{2\rho Sx}{\varepsilon_0},$$

откуда для искомой напряженности электрического поля внутри заряженного слоя получим:

$$E(x) = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}.$$

При  $x > h$  (рис. 2.4б) для потока напряженности электрического поля  $E(x)$  будем иметь:

$$2E(x)S = \frac{2\rho Sh}{\varepsilon_0}.$$

Следовательно, для искомой напряженности электрического поля вне заряженного слоя получим:

$$E(x) = \frac{\rho h}{\varepsilon_0}.$$

Как видим, внутри заряженного слоя величина напряженности поля нарастает от центра слоя по линейному закону, а вне слоя поле становится однородным, как в случае бесконечной заряженной плоскости. Как и в задаче 2.3.1, решение справедливо и для конечного слоя при соблюдении условий, указанных в задаче 2.3.1.

**Ответ:**  $E(x) = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}$  при  $x < h$ ;

$$E(x) = \frac{\rho h}{\varepsilon_0} \text{ при } x > h.$$

### Задачи типа 2.2

*Вычисление напряженности электрического поля, создаваемого непрерывным распределением зарядов с цилиндрической (осевой) симметрией.*

**Метод решения.** Такие задачи решаются с помощью электростатической теоремы Гаусса (2.3), причем в качестве замкнутой поверхности выбирается цилиндр соответствующего радиуса, соосный с заряженным цилиндрическим телом.

**Задача 2.3.5.** Поверхность бесконечного круглого цилиндра радиуса  $R$  заряжена равномерно с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Найти напряженность электрического поля в произвольной точке.

## Решение

В силу симметрии задачи вектор напряжённости  $E$  везде направлен по нормали к боковой поверхности цилиндра.

Для применения электростатической теоремы Гаусса в интегральной форме выбираем в качестве поверхности коаксиальный цилиндр произвольного радиуса  $r$  и конечной высоты  $h$  (рис. 2.5.). Если  $r < R$ , то внутри такого цилиндра зарядов нет. Следовательно, в любой точке внутри равномерно заряженной бесконечной цилиндрической поверхности  $E_{\text{внутри}} = 0$ .

Если  $r > R$ , то заряд внутри цилиндра равен  $2\pi R h \sigma$ , а поток вектора напряженности  $E$  через поверхность цилиндра радиуса  $r$  равен  $2\pi r h E$ . По теореме Гаусса

$$2\pi r h E(r) = \frac{2\pi R h \sigma}{\varepsilon_0},$$

откуда напряженность поля вне цилиндра равна:

$$E(r) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r},$$

где  $r$  – расстояние от оси цилиндра до точки наблюдения, или в векторной форме:

$$E(r) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \mathbf{r}.$$

На заряженной поверхности цилиндра напряженность поля не определена (испытывает скачок от  $E = 0$  вблизи поверхности внутри цилиндра до  $E(R) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$  вблизи его поверхности снаружи).

Полученные результаты применимы и для цилиндров конечных размеров, если можно пренебречь краевыми эффектами.

Если, сохраняя заряд, устремить радиус цилиндра  $R$  к нулю, то в пределе получим тонкую нить с линейной плотностью заряда  $\tau = 2\pi R \sigma$  и формула для  $E(r)$  становится:

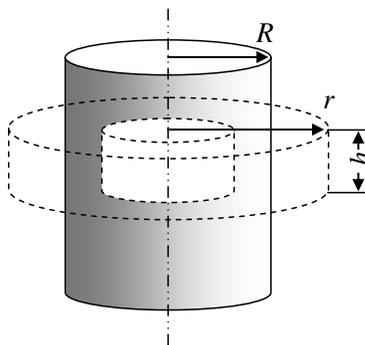


Рис. 2.5. К определению напряженности поля круглого цилиндра, равномерно заряженного по поверхности..

$$E(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{r^2} r.$$

Этот результат можно получить сразу из теоремы Гаусса, так как заряд внутри вспомогательного цилиндра равен в этом случае  $\tau h$ , а поток вектора  $E$  через боковую поверхность цилиндра

$$2\pi r h E(r); \text{ поэтому } E(r) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}.$$

Этот результат уже был получен в задаче 1.3.3 как предельный случай напряженности поля от нити конечной длины.

**Ответ:**  $E(r) = 0$  при  $r < R$ ;

$$E(r) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} r \text{ при } r > R.$$

**Задача 2.3.6.** В круглом бесконечном цилиндре радиуса  $R$  равномерно распределен положительный заряд с объемной плотностью  $\rho$ . Найти модуль напряженности электрического поля в произвольной точке.

### Решение

Для применения теоремы Гаусса выбираем поверхность в виде цилиндра, как в задаче 2.3.5. (рис. 2.5). Если  $r < R$ , то заряд внутри цилиндра равен

$$q = \rho \pi r^2 h,$$

а поток  $\Phi$  вектора  $E$  через его поверхность составляет:

$$\Phi = 2\pi r h E.$$

По теореме Гаусса получаем:

$$E_{\text{внутри}} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r.$$

Внутри заряженного по объему цилиндра поле нарастает от оси цилиндра по линейному закону, достигая на его поверхности значения  $\frac{\rho R}{2\epsilon_0}$ . Напряженность поля является здесь непрерывной

функцией от  $r$ , так как нет заряженных поверхностей с плотностью  $\sigma \neq 0$ .

Если  $r > R$ , то заряд внутри цилиндра равен:

$$q = \rho \pi R^2 h,$$

поток вектора  $E$  будет:

$$\Phi = 2\pi rhE,$$

и по теореме Гаусса:

$$E_{\text{вне}} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \frac{1}{r}.$$

Устремляя здесь  $r \rightarrow R$ , убеждаемся в непрерывности функции  $E(r)$ .

**Ответ:** для  $r < R$ :  $E_{\text{внутри}} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r$ ;

для  $r > R$ :  $E_{\text{вне}} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \frac{1}{r}$ .

**Задача 2.3.7.** Внутри бесконечно длинного круглого цилиндра радиуса  $R_0$ , заряженного равномерно с объёмной плотностью  $\rho$ , имеется круглая цилиндрическая полость радиуса  $R_1$  ( $R_1 < R_0$ ), ось которой параллельна оси цилиндра и находится от неё на расстоянии  $a$  (рис. 2.6). Найти напряженность электрического поля в полости.

### Решение

Для решения данной задачи целесообразно использовать решение задачи 2.3.6. и принцип суперпозиции. Искомое поле в полости можно представить как сумму полей сплошного цилиндра, заряженного с плотностью  $+\rho$ , и сплошного цилиндра, совпадающего с полостью, заряженного с плотностью  $(-\rho)$ .

Сначала найдем напряженность поля цилиндра, заряженного с плотностью  $+\rho$ . Воспользуемся результатом задачи 2.3.6, согласно которому напряженность поля внутри такого цилиндра будет равна:

$$E_1 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \mathbf{r},$$

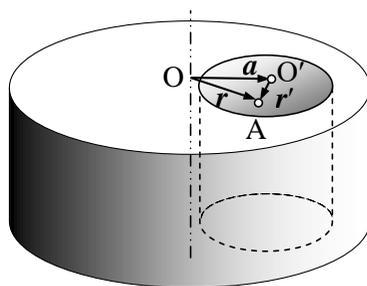


Рис. 2.6. К вычислению напряженности поля  $\mathbf{E}$  в цилиндрической полости внутри заряженного цилиндра.

где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор точки, проведенный в перпендикулярном сечении от оси цилиндра. Аналогично, напряженность поля внутри цилиндра, совпадающего с полостью, будет:

$$\mathbf{E}_2 = \frac{(-\rho)}{2\varepsilon_0} \mathbf{r}',$$

где  $\mathbf{r}'$  – радиус-вектор точки А, проведенный от оси полости.

Напряженность поля в произвольной точке А полости будет равна сумме полученных полей:

$$\mathbf{E}_a = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\rho \mathbf{a}}{2\varepsilon_0},$$

где вектор  $\mathbf{a} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  определяет смещение оси полости относительно оси цилиндра.

Следует отметить, что поле внутри полости однородно, то есть не зависит от  $\mathbf{r}'$ .

**Ответ:**  $\mathbf{E}_a = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \mathbf{a}.$

**Задача 2.3.8.** Две длинные параллельные нити равномерно заряжены с одинаковой линейной плотностью заряда  $\tau$ . Найти максимальное значение модуля напряженности поля в плоскости симметрии этой системы. Расстояние между нитями  $d$ .

### Решение

Плоскость симметрии системы параллельна нитям и отстоит от каждой из них на расстояние  $d/2$ . Напряженность поля, создаваемая каждой нитью, вычислена в задаче 2.3.5: она направлена радиально от нити, а модуль ее равен

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}.$$

где  $r$  – расстояние от нити до произвольной точки А, расположенной в плоскости симметрии. Пусть точка А находится на расстоянии  $x$  от линии, проведенной через две нити перпендикулярно плоскости симметрии (на рис. 2.7 показана

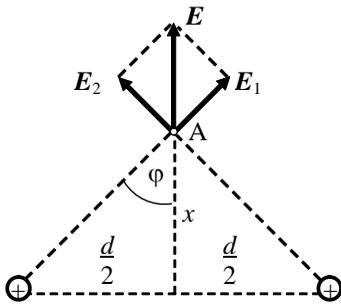


Рис. 2.7. К вычислению напряженности поля от двух заряженных нитей.

плоскость, перпендикулярная к нитям).

Используя принцип суперпозиции, определим напряженность поля  $E$  в точке А. Из рисунка видно, что

$$E = 2E_1 \cos \varphi = \frac{\tau}{\pi \epsilon_0} \frac{x}{r^2} = \frac{\tau}{\pi \epsilon_0} \frac{x}{x^2 + (d/2)^2},$$

где  $\cos \varphi = \frac{x}{r}$ .

Максимальное значение  $E$  находим из условия  $\frac{dE}{dx} = 0$ , откуда:

$$x = \frac{d}{2}; E_{\max} = \frac{\tau}{\pi \epsilon_0 d}.$$

**Ответ:**  $E_{\max} = \frac{\tau}{\pi \epsilon_0 d}.$

### Задачи типа 2.3

*Вычисление напряженности электрического поля, создаваемого непрерывным распределением зарядов со сферической (точечной) симметрией.*

**Метод решения.** Такие задачи решаются с помощью электростатической теоремы Гаусса (2.3), причем в качестве замкнутой поверхности выбирается сфера соответствующего радиуса, концентрическая с заряженными сферическими телами.

**Задача 2.3.9.** На поверхности сферы радиуса  $R$  равномерно распределен положительный заряд с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Найти напряженность электрического поля в произвольной точке.

#### Решение

Система имеет сферическую симметрию. Для применения теоремы Гаусса выберем в качестве поверхности Гаусса концентрическую сферу радиуса  $r$ .

При  $r < R$  заряда внутри этой поверхности нет. Значит, в любой точке внутри равномерно заряженной сферы  $E = 0$ .

При  $r > R$  весь заряд  $q = 4\pi R^2 \sigma$  находится внутри поверхности Гаусса, а поток вектора  $E$  через неё равен:

$$\Phi = 4\pi r^2 E.$$

По теореме Гаусса находим:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}.$$

Поле вне равномерно заряженной сферы совпадает с полем точечного заряда  $q$ , расположенного в центре сферы.

На заряженной поверхности напряженность поля не определена (испытывает скачок от  $E = 0$  внутри до  $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$  снаружи). Физический смысл такого поведения функции  $E(r)$  объяснен в решении задачи 2.3.1.

**Ответ:** для  $r < R$ :  $E_{\text{внутри}} = 0$ ;

$$\text{для } r > R: E_{\text{вне}} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}.$$

**Задача 2.3.10.** Шар радиуса  $R$  равномерно заряжен с объемной плотностью  $\rho$ . Найти модуль напряженности поля в произвольной точке.

### Решение

Система имеет сферическую симметрию. Для применения теоремы Гаусса выберем в качестве поверхности Гаусса концентрическую сферу радиуса  $r$ .

При  $r < R$  заряд внутри этой сферы равен:

$$q = (4/3)\pi r^3 \rho,$$

а поток  $\Phi$  вектора  $\mathbf{E}$  через её поверхность –

$$\Phi = 4\pi r^2 E.$$

По теореме Гаусса:

$$4\pi r^2 E_{\text{внутри}} = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\epsilon_0},$$

откуда

$$E_{\text{внутри}}(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r.$$

Таким образом, внутри равномерно заряженного шара поле растет от центра шара по линейному закону, достигая на поверхности шара значения:

$$E = \frac{\rho R}{3\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2},$$

где  $Q$  – полный заряд, размещенный в шаре.

При  $r > R$  рассуждения ничем не отличаются от проведенных в задаче 2.3.9. Поле снаружи равномерно заряженного шара совпадает с полем точечного заряда, расположенного в центре шара и равного по величине полному заряду шара. Функция  $E(r)$  непрерывна, так как нет поверхностей, несущих поверхностный заряд.

**Ответ:** для  $r < R$ :  $E_{\text{внутри}}(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$ ;

для  $r > R$ :  $E_{\text{вне}}(r) = \frac{R^3 \rho}{3\epsilon_0 r^2}$ .

**Задача 2.3.11.** Внутри шара, равномерно заряженного с объемной плотностью  $+\rho$ , сделана сферическая полость, центр которой смещен относительно центра шара на вектор  $\mathbf{a}$ . Найти напряженность поля внутри полости.

### Решение

Если представить себе полость как шар, равномерно заполненный зарядом с плотностью  $(-\rho)$ , то поле в полости можно определить как суперпозицию полей этих двух равномерно заряженных шаров. Эти поля найдены в задаче 2.3.10.

Выберем начало координат в центре  $O$  большого шара (рис.2.8) и проведем в произвольную точку  $A$  полости радиус-вектор  $\mathbf{r}$ . Центр полости  $O'$  определим радиус-вектором  $\mathbf{a}$ . Соединим  $O'$  с точкой  $A$  вектором  $\mathbf{r}'$ . Из построения ясно, что  $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{r}'$ . Согласно результатам задачи 2.3.10 в точке  $A$  имеем:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

откуда  $\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{a}$ .

Поле внутри полости однородно.

**Ответ:**  $\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{a}$ .

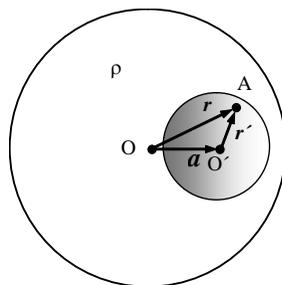


Рис. 2.8. К вычислению напряженности поля  $\mathbf{E}$  в сферической полости внутри заряженного шара.

**Задача 2.3.12.** В сфере, заряженной равномерно с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ , вырезано круглое отверстие, малое по сравнению с радиусом сферы. Найти напряженность поля в центре этого отверстия.

### Решение

Ввиду малых размеров отверстия можно считать, что вырезанная часть сферы эквивалентна диску малого радиуса. Согласно принципу суперпозиции поле в центре отверстия можно представить как сумму поля сферы и поля, созданного диском, равным отверстию и заряженным с поверхностной плотностью  $(-\sigma)$ .

Поле сплошной сферы определено в задаче 2.3.10 и равно  $E_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ .

Напряженность поля в центре диска определена в задаче 1.3.6 и равна:

$$E_2 = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

В итоге напряженность поля в центре отверстия будет:

$$E = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

**Ответ:**  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ .

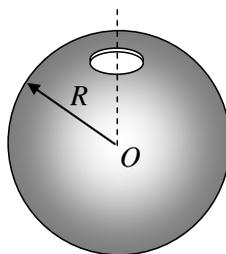


Рис.2.9. Заряженная сфера с вырезанным малым отверстием.

## 2.4 Задачи для самостоятельного решения

**Задача 2.4.1.** Из равномерно заряженной плоскости вырезали круг радиуса  $R$  и сдвинули его перпендикулярно плоскости на расстояние  $L$ . Найти напряженность электрического поля в точке, находящейся на оси выреза посередине между кругом и плоскостью. Поверхностная плотность заряда на круге и плоскости одинаковая и равна  $\sigma$ .

$$\text{Ответ: } E\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left( \frac{2L}{\sqrt{L^2 + 4R^2}} - 1 \right).$$

**Задача 2.4.2.** Два длинных тонких провода расположены параллельно на расстоянии  $d$  друг от друга, равномерно заряжены с линейной плотностью  $+\tau$  и  $(-\tau)$  соответственно. Определить напряженность электрического поля в точке, лежащей в плоскости симметрии на расстоянии  $h$  от плоскости, в которой лежат провода.

$$\text{Ответ: } E = \frac{2\tau d}{\pi\varepsilon_0(4h^2 + d^2)}.$$

**Задача 2.4.3.** Шар радиуса  $R$  сферически симметрично заряжен по объему зарядом  $Q$  так, что  $\rho(r) \sim r^2$ . Определить напряженность электрического поля в точках  $A$  и  $B$ , если  $r_A = 0,5R$ , а  $r_B = 2R$ .

$$\text{Ответ: } E_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{8R^2};$$

$$E_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{4R^2}.$$

**Задача 2.4.4.** Имеются два сферических распределения зарядов с объёмными плотностями заряда  $+\rho$  и  $-\rho$  с центрами в точках  $O_1$  и  $O_2$ , сдвинутых относительно друг друга на вектор  $\mathbf{a}$ , такой, что  $a < |O_1O_2| < R$ , где  $R$  – радиус сфер. Найти напряженность электрического поля в пространстве перекрытия зарядов.

$$\text{Ответ: } \mathbf{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \mathbf{a}.$$

**Задача 2.4.5.** Шар радиуса  $R$  имеет положительный заряд, объёмная плотность которого зависит от расстояния  $r$  до его центра по закону  $\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right)$ , где  $\rho_0$  – постоянная. Найти:

а) модуль вектора напряженности электрического поля внутри и вне шара как функцию расстояния  $r$ ;

б) максимальное значение напряженности электрического поля  $E_{\max}$  и соответствующее ему расстояние  $r_m$ .

Ответ: а)  $E = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0} \left(1 - \frac{3r}{4R}\right)$  при  $r < R$ ,  $E = \frac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 r^2}$  при  $r > R$ ;

б)  $E_{\max} = \frac{\rho_0 R}{9\varepsilon_0}$  при  $r = r_m = \frac{2}{3}R$ .

**Задача 2.4.6.** Пространство заполнено электрическим зарядом с объёмной плотностью  $\rho = \rho_0 e^{-\alpha r^3}$ , где  $\rho_0$  и  $\alpha$  – положительные константы, а  $r$  – расстояние от центра данной системы. Найти модуль напряженности электрического поля как функцию  $r$ .

Ответ:  $E = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0 \alpha r^2} (1 - e^{-\alpha r^3})$ .

**Задача 2.4.7.** Поле создано двумя равномерно заряженными концентрическими сферами с радиусами  $R_1 = 5$  см и  $R_2 = 8$  см. Заряды сфер соответственно равны  $q_1 = 2$  нКл и  $q_2 = -1$  нКл. Определить напряженность электрического поля в точках, лежащих от центра сфер на расстояниях: 1)  $r_1 = 3$  см; 2)  $r_2 = 6$  см; 3)  $r_3 = 10$  см.

Ответ:  $E_1 = 0$ ;  $E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1}{r_2^2} = 5$  кВ/м;

$E_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 + q_2}{r_3^2} = 0,9$  кВ/м.

**Задача 2.4.8.** Пространство между двумя концентрическими сферами с  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ) заряжено с объёмной плотностью заряда  $\rho = \frac{\alpha}{r^2}$ . Найти напряженность электрического поля во всём пространстве.

Ответ:  $E = 0$  при  $r < R_1$ ;

$E(r) = \frac{\alpha}{\varepsilon_0 r^2} \left(1 - \frac{R_1}{r}\right) r$  при  $R_1 < r < R_2$ ;

$E(r) = \frac{\alpha}{\varepsilon_0} \cdot \frac{R_2 - R_1}{r^3} r$  при  $r > R_2$ .

**Задача 2.4.9.** Найти вектор напряженности электрического поля в центре шара радиуса  $R$ , объёмная плотность заряда которого  $\rho = ar$ , где  $a$  – постоянный вектор, а  $r$  – радиус-вектор, проведенный из центра шара.

Ответ: 
$$\mathbf{E} = -\frac{R^2}{6\epsilon_0} \mathbf{a}.$$

## Глава 3

## РАБОТА СИЛ И ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

## 3.1 Теоретический материал

**Свойство потенциальности электростатического поля.** Работа силы электростатического поля по перемещению пробного заряда не зависит от формы траектории, а зависит только от начального и конечного положений пробного заряда в поле.

**Разность потенциалов электростатического поля** – физическая величина, равная отношению работы электростатических сил при перемещении (по произвольной траектории) пробного заряда  $q$  из одной точки (т. 1) в другую (т. 2) к величине пробного заряда:

$$\varphi_{12} \equiv \frac{A_{12}}{q} = \int_1^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}. \quad (3.1)$$

Единица измерения –  $[\varphi_{12}] = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} \equiv \text{В}$ .

**Электрическое напряжение**  $U_{12}$  – физическая величина, равная отношению работы электрических (не обязательно электростатических) сил при перемещении пробного заряда  $q$  из одной точки (т. 1) вдоль заданного контура в другую (т. 2) к величине пробного заряда (характеристика двух точек токовой цепи или контура):

$$U_{12} \equiv \frac{A_{12}}{q} = \int_1^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}. \quad (3.2)$$

В потенциальных электростатических полях электрическое напряжение совпадает с разностью потенциалов  $U_{12} = \varphi_{12}$ .

**Потенциал (точки) электростатического поля** – физическая величина, равная отношению работы электростатических сил при перемещении пробного заряда  $q$  из данной точки поля (с радиус-вектором  $\mathbf{r}$ ) в произвольно выбранную точку (с радиус-вектором  $\mathbf{r}_0$ ), принятую за ноль отсчета потенциала поля (*нормировка потенциала поля*), к величине пробного заряда:

$$\varphi(\mathbf{r}) \equiv \frac{A_{r_0}}{q} = \int_r^{r_0} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \varphi_{r_0}. \quad (3.3)$$

Единица измерения –  $[\varphi] = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} \equiv \text{В}$ .

**Нормировкой потенциала поля** называется выбор точки пространства, в которой потенциал поля принимается равным нулю.

*Разность потенциалов* двух точек (т. 1 и т. 2) электростатического поля *связана с потенциалами этих точек*:

$$\varphi_{12} = \int_1^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_1^{r_0} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{r_0}^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (3.4)$$

**Потенциал электростатического поля точечного заряда** при нормировке потенциала на бесконечности ( $\varphi(\infty) = 0$ ) равен:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r}, \quad (3.5)$$

где  $r$  – расстояние от точки наблюдения до точечного заряда  $q$ .

**Потенциал электростатического поля дискретно распределенного заряда** (рис. 3.1а):

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}. \quad (3.6)$$

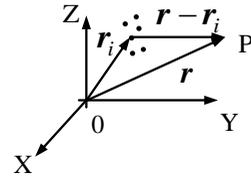


Рис.3.1а. Дискретно распределенный заряд.

**Потенциал электростатического поля линейно распределенного заряда** (рис. 3.1б):

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{L'} \frac{\lambda(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dL'. \quad (3.7)$$

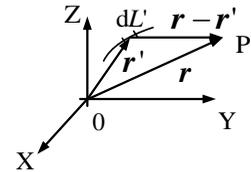


Рис.3.1б. Линейно распределенный заряд.

**Потенциал электростатического поля поверхностно распределенного заряда** (рис. 3.1в):

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS'. \quad (3.8)$$

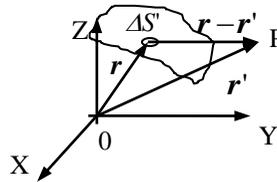


Рис.3.1в. Поверхностно распределенный заряд.

**Потенциал электростатического поля объемно распределенного заряда** (рис. 3.1г):

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (3.9)$$

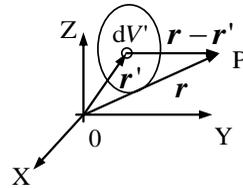


Рис.3.1г. Объемно распределенный заряд.

**Градиент скалярной функции**  $a(\mathbf{r}) \equiv a(x, y, z)$  (скалярного поля) по определению равен:

$$\text{grad} a(\mathbf{r}) \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S} a(\mathbf{r}) dS}{\Delta V}, \quad (3.10)$$

где  $d\mathbf{S} \equiv n dS$ ,  $n$  – внешняя нормаль к малой замкнутой поверхности  $\Delta S$ , которая охватывает (ограничивает) малый объем  $\Delta V$ .

**Градиент** выражается через векторный дифференциальный оператор набла  $\text{grad} a(\mathbf{r}) \equiv \nabla a(\mathbf{r})$  и его можно найти:

*в декартовой системе координат:*

$$\text{grad} a = \frac{\partial a}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial a}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial a}{\partial z} \mathbf{k}; \quad (3.11)$$

*в цилиндрической системе координат:*

$$\text{grad} a = \frac{\partial a}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial a}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial a}{\partial z} \mathbf{e}_z; \quad (3.12)$$

*в сферической системе координат:*

$$\text{grad} a = \frac{\partial a}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial a}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi. \quad (3.13)$$

Производная скалярной функции  $a(\mathbf{r}) \equiv a(x, y, z)$  по любому направлению (вдоль направления, задаваемого единичным вектором  $\mathbf{n}_u$ ) равна проекции градиента функции на это направление:

$$\frac{da(x, y, z)}{du} = \mathbf{n}_u \cdot \text{grad} a(\mathbf{r}) = \frac{\partial a}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial a}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial a}{\partial z} \cos \gamma, \quad (3.14)$$

где  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  и  $\cos \gamma$  – направляющие косинусы вектора  $\mathbf{n}_u$ .

**Локальная связь между потенциалом и напряженностью электрического поля**

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad}\varphi(\mathbf{r}) = -\left(\frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial z}\mathbf{k}\right). \quad (3.15)$$

**Эквипотенциальная поверхность** – поверхность равного потенциала (результат объединения точек поля с равным потенциалом).

**Свойства эквипотенциальных поверхностей:**

- 1) через любую точку электрического поля можно провести эквипотенциальную поверхность;
- 2) эквипотенциальные поверхности не пересекаются в области пространства, где напряженность поля отлична от нуля;
- 3) эквипотенциальные поверхности замкнуты (непрерывны вследствие непрерывности потенциала) или уходят в бесконечность;
- 4) если эквипотенциальные поверхности проводить так, что потенциал получает одно и то же приращение, то эквипотенциальные поверхности ближе друг к другу там, где больше напряженность поля;
- 5) эквипотенциальные поверхности перпендикулярны силовым линиям электрического поля.

**Циркуляция векторного поля  $\mathbf{a}(\mathbf{r})$**  вдоль произвольного замкнутого контура  $L$ :

$$\oint_L \mathbf{a}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \equiv \oint_L \mathbf{a}(l) \cdot d\mathbf{l} = \oint_L a_l(l) dl, \quad (3.16)$$

где  $l$  – координата точки на контуре и  $d\mathbf{l} = d\mathbf{r}$ ,  $dl = |d\mathbf{l}| = |d\mathbf{r}|$ ,  $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}(l)$ .

**Ротор векторного поля  $\mathbf{a}(\mathbf{r})$**  называется вектор, проекция которого на направление нормали  $\mathbf{n}$  к произвольно ориентированному в пространстве плоскому элементу поверхности  $\Delta S$  равна:

$$(\text{rot } \mathbf{a}(\mathbf{r}))_n \equiv \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{a}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}}{\Delta S}, \quad (3.17)$$

где направление обхода контура  $\Delta L$ , охватывающего (ограничивающего) поверхность  $\Delta S$  (площадью  $\Delta S$ ), согласовано с направлением нормали  $\mathbf{n}$  по правилу буравчика.

Ротор выражается через векторный дифференциальный оператор набла  $\text{rot } \mathbf{a} = [\nabla \mathbf{a}]$  и в декартовой системе координат имеет вид

определителя (детерминанта) квадратной матрицы третьего порядка:

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = [\nabla \mathbf{a}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}. \quad (3.18)$$

**Формула Стокса** для произвольного векторного поля  $\mathbf{a}(\mathbf{r})$  :

$$\oint_L \mathbf{a}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{a}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}, \quad (3.19)$$

где направление обхода контура  $L$ , охватывающего (ограничивающего) поверхность  $S$ , согласовано с направлением нормали  $\mathbf{n}$  по правилу буравчика.

**Теорема о циркуляции напряженности электростатического поля в интегральной форме.** Циркуляция напряженности электростатического поля  $\mathbf{E}$  по любому замкнутому контуру  $L$  равна нулю:

$$\oint_L \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (3.20)$$

**Теорема о циркуляции напряженности электростатического поля в дифференциальной (локальной) форме.** Ротор напряженности электрического поля  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  в любой точке пространства равен нулю:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.21)$$

Теорема о циркуляции напряженности электростатического поля в интегральной и дифференциальной (локальной) формах является следствием потенциальности электростатического поля.

### 3.2. Основные типы задач (классификация)

3.1. Определение потенциала или разности потенциалов в поле заданного распределения зарядов.

3.2. Определение потенциала или разности потенциалов, если задана или легко вычисляется напряженность поля.

3.3. Построение картины силовых линий и эквипотенциальных поверхностей для заданной системы неподвижных зарядов.

### 3.3. Методы решения и примеры решения задач

#### Задачи типа 3.1

*Определение потенциала или разности потенциалов в поле заданного распределения зарядов*

**Метод решения** – прямое суммирование потенциалов в заданной точке от точечных зарядов (3.6) и непрерывно распределенных зарядов (3.7-3.9). Этот метод универсален, т.е. применим к любому распределению зарядов. Если заряды распределены в конечной области пространства, то в дальнейшем (если не оговорено другое условие) будем полагать равным нулю значение потенциала в бесконечно удаленной точке. Потенциал  $\varphi(\mathbf{r})$  – скалярная функция, поэтому суммирование выполняется *алгебраически*, что значительно упрощает расчет по сравнению с вычислением напряженности поля  $E(\mathbf{r})$ , когда вклады от разных зарядов складываются *векторно*.

**Задача 3.3.1.** Найти потенциал поля, создаваемого равномерно заряженной с линейной плотностью  $\tau$  нитью длины  $2L$ .

#### Решение

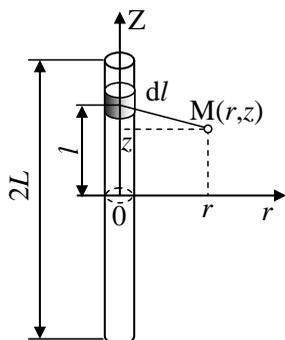


Рис. 3.2. К нахождению потенциала поля, создаваемого заряженной нитью.

Поместим начало координат в центре нити и направим ось  $Z$  вдоль нити. Система зарядов аксиально симметрична, поэтому для расчетов выберем цилиндрическую систему координат  $(r, \varphi, z)$ , в которой потенциал в произвольной точке  $M$  зависит только от переменных  $r$  и  $z$  (см. рис. 3.2; для наглядности на рисунке нить показана в виде тонкого цилиндра). Выделяем на нити на расстоянии  $l$  от центра физически бесконечно малую область с зарядом  $dq = \tau dl$ , который можно считать точечным.

Его расстояние до точки  $M(r, z)$  равно  $\sqrt{r^2 + (l - z)^2}$ , а создаваемый им потенциал определяется формулой (3.5):

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau dl}{\sqrt{r^2 + (l - z)^2}}.$$

Потенциал, создаваемый всей нитью, равен

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{dl}{\sqrt{r^2 + (l-z)^2}} = \\ &= \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \left| \frac{z+L + \sqrt{r^2 + (z+L)^2}}{z-L + \sqrt{r^2 + (z-L)^2}} \right|. \end{aligned} \quad (3.22)$$

*Анализ результата и дополнительные выводы.*

1. При удалении на очень большое расстояние ( $z \rightarrow \infty$  или  $r \rightarrow \infty$ ) система выглядит как точечный заряд. Если в полученном результате сделать предельный переход  $z \rightarrow \infty$  или  $r \rightarrow \infty$ , то должен получиться потенциал точечного заряда. Выполним такой предельный переход.

Если ввести переменную  $R = \sqrt{z^2 + r^2}$ , то любой из упомянутых двух предельных переходов выполняется, если  $R \rightarrow \infty$ . Тогда при очень больших значениях  $R$  ( $R \gg L$ ) имеем:

$$\begin{aligned} \sqrt{r^2 + (z \pm L)^2} &\approx R \pm \frac{zL}{R}, \\ \ln \frac{z+L+R + \frac{zL}{R}}{z-L+R - \frac{zL}{R}} &= \ln \left( \frac{1 + \frac{L + \frac{zL}{R}}{R+z}}{1 - \frac{L - \frac{zL}{R}}{R+z}} \right) = \\ &= \ln \left( 1 + \frac{L + \frac{zL}{R}}{R+z} \right) - \ln \left( 1 - \frac{L - \frac{zL}{R}}{R+z} \right) \approx \\ &\approx \frac{L + \frac{zL}{R}}{R+z} - \frac{-L - \frac{zL}{R}}{R+z} = \frac{2L + 2\frac{zL}{R}}{R+z} \approx \frac{2L}{R}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что на больших расстояниях от нити потенциал приближенно равен потенциалу поля точечного заряда:

$$\varphi \approx \frac{2L\tau}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R},$$

где  $q = 2L\tau$  — полный заряд нити.

2. Если  $L \rightarrow \infty$ , то потенциал стремится к бесконечности. Потенциал остается ограниченной функцией, если только все заряды сосредоточены в области конечных размеров, а здесь заряды имеются в бесконечно удаленной области. В этом случае непосредственный физический смысл имеет только разность потенциалов в любых двух точках. В случае бесконечной нити разность потенциалов находим из (3.22) для точек 1 и 2, удаленных от оси нити на расстояния  $r$  и  $R$  ( $r < R$ ):

$$\Delta\varphi_{12} = \varphi(r) - \varphi(R) = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R}. \quad (3.23)$$

Поясним сказанное расчетом. При  $L \rightarrow \infty$  потенциал не зависит от  $z$  и в (3.22) можно положить  $z = 0$ . Кроме того,  $r \ll L$  и

$$\sqrt{L^2 + r^2} \approx L \left( 1 + \frac{r^2}{2L} \right), \quad \frac{L + \sqrt{L^2 + r^2}}{-L + \sqrt{L^2 + r^2}} \approx 1 + \frac{4L}{r^2}.$$

Из (3.22) находим:

$$\begin{aligned} \varphi(r) - \varphi(R) &\approx \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \left[ \ln \left( 1 + \frac{4L}{r^2} \right) - \ln \left( 1 + \frac{4L}{R^2} \right) \right] \approx \\ &\approx \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{R^2}{r^2} = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R}. \end{aligned}$$

В случае бесконечной нити задачу можно отнести к типу 3.3. В главе 2 получено выражение для напряженности поля бесконечной равномерно заряженной нити:  $E = E_r = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}$ . Согласно (3.4)

$$\varphi(r) - \varphi(R) = -\int_R^r E dr = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R},$$

что совпадает с (3.23).

3. Компоненты напряженности поля можно найти из (3.22), вычисляя градиент потенциала, т.е. используя (3.15). Ввиду аксиальной симметрии системы целесообразно расчет выполнить в цилиндрических координатах, где:

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r}.$$

Проекция  $E_\varphi$  в данном случае равна нулю. Желательно выполнить этот расчёт и сравнить результат с результатом, полученным в задаче 1.3.3.

$$\text{Ответ: } \varphi(r, z) = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \left| \frac{z + L + \sqrt{r^2 + (z + L)^2}}{z - L + \sqrt{r^2 + (z - L)^2}} \right|.$$

**Задача 3.3.2.** На тонком кольце радиуса  $R$  распределен по произвольному закону заряд  $q$ . Определить потенциал поля в точке  $A$ , расположенной на оси кольца на расстоянии  $h$  от его плоскости.

### Решение

Потенциал бесконечно удаленной точки будем считать равным нулю. На кольце выделим дугу бесконечно малой длины  $dl$ . Заряд  $dq$  этого участка рассматриваем как точечный. В точке наблюдения  $A$  он создает потенциал

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{r},$$

где  $r = \sqrt{R^2 + h^2}$ .

Суммирование всех таких вкладов при любом распределении заряда на кольце дает ответ:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{\sqrt{R^2 + h^2}}.$$

В частности, в центре кольца

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R}.$$

Эти результаты можно было сразу записать без всяких вычислений, так как все части распределенного заряда находятся на одном и том же расстоянии от центра кольца.

$$\text{Ответ: } \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{\sqrt{R^2 + h^2}}.$$

**Задача 3.3.3.** Тонкий диск радиуса  $R$  заряжен равномерно с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Определить потенциал поля в точке  $A$ ,

расположенной на оси диска на расстоянии  $h$  от его плоскости. Рассмотрим случаи, когда  $R \gg h$ ,  $R \ll h$ ,  $\frac{R}{h} \rightarrow \infty$ .

### Решение

Учитывая условия цилиндрической симметрии распределения заряда, выделим на диске кольцевую область между окружностями радиусов  $r$  и  $r + dr$ . Находящийся на ней заряд  $dq = \sigma 2\pi r dr$  создает в точке наблюдения А потенциал  $d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dq}{l}$ , где  $l = \sqrt{r^2 + h^2}$ .

Искомый потенциал есть сумма всех таких вкладов:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{r^2 + h^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2 + h^2} - h).$$

*Анализ результата и дополнительные выводы.*

1. В центре диска  $h = 0$  и потенциал равен:

$$\varphi = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}.$$

2. На большом расстоянии от плоскости диска (при  $h \gg R$ )

имеем при разложении по малой величине  $\frac{R}{h}$  в первом порядке:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma\pi R^2}{h} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{h}.$$

Это означает, что с ростом  $h$  потенциал становится все ближе к потенциалу точечного заряда, равного заряду диска и расположенному в центре диска.

3. Вблизи плоскости диска (при  $h \ll R$ ) при разложении по малой величине  $\frac{h}{R}$  в первом порядке имеем:

$$\varphi = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{h}{R}\right).$$

4. При  $R/h \rightarrow \infty$  должен получиться потенциал бесконечной заряженной плоскости (т.е. линейно зависящий от расстояния  $h$  до плоскости). Однако такому предельному переходу препятствует выбранная нормировка потенциала, приемлемая только для заряда, распределенного в конечной области пространства. В этом случае

за нуль потенциала следует принять его значение в какой-либо произвольной точке, не лежащей в бесконечности. Если положить  $\varphi = 0$  при  $h = 0$ , то получим закон изменения потенциала в однородном поле, соответствующем полю бесконечной заряженной плоскости. Вопрос о нормировке не возникает, если требуется вычислить разность потенциалов в двух точках, отстоящих от плоскости на расстояниях  $h_1$  и  $h_2$ . В этом случае независимо от нормировки имеем:

$$\Delta\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(h_1 - h_2),$$

что и соответствует однородному полю от бесконечной заряженной плоскости.

**Ответ:** 
$$\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{R^2 + h^2} - h).$$

**Задача 3.3.4.** Найти потенциал  $\varphi$  на краю тонкого диска радиуса  $R$ , по которому равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью  $\sigma$ .

### Решение

Поиск подхода к решению приводит к выводу, что наиболее целесообразно использовать полярную систему координат  $(r, \alpha)$ , начало которой расположено в точке  $A$ , а угол  $\alpha$  отсчитывать от диаметра, проходящего через точку  $A$  (рис. 3.3). Элемент площади в этой системе равен  $dS = r dr d\alpha$ . На нем находится заряд  $dq = \sigma dS$ , который создает в точке  $A$  потенциал

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{r} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} dr d\alpha.$$

Интегрируя это выражение по  $r$  в пределах от нуля до  $r = 2R \cos\alpha$ , найдем вклад в потенциал от всех точек диска, находящихся внутри угла  $d\alpha$ . Интегрируя затем по углу  $\alpha$  в пределах от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$ , найдем потенциал точки  $A$ :

$$\varphi = \frac{\sigma R}{\pi\varepsilon_0}.$$

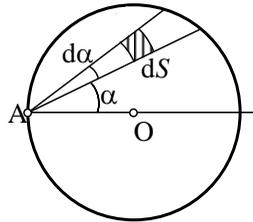


Рис. 3.3. К нахождению потенциала поля на краю заряженного диска.

Потенциал в точке на краю диска в  $\pi/2$  раз, т.е. приблизительно в полтора раза, меньше потенциала в центре диска. Это и понятно: потенциал в центре диска равен работе по перемещению единичного заряда из бесконечности в центр диска. При смещении заряда из центра диска к его краю работу совершает само поле, и потенциальная энергия заряда уменьшается.

**Ответ:** 
$$\varphi = \frac{\sigma R}{\pi \epsilon_0}.$$

**Задача 3.3.5.** Два коаксиальных кольца одинакового радиуса  $R$  заряжены равномерно зарядами  $q_1$  и  $q_2$ . Плоскости колец находятся на расстоянии  $h$  друг от друга. Найти потенциал в произвольной точке  $A$  на оси колец.

### Решение

Из симметрии задачи следует, что начало координат  $O$  следует поместить в средней точке между кольцами, а ось  $x$  направить вдоль оси колец (рис. 3.4).

Точка  $A$  с координатой  $x$  отстоит от плоскости верхнего кольца на расстояние  $x_1 = x - h/2$ , а от нижнего кольца — на  $x_2 = x + h/2$ . Каждое кольцо создает в точке  $A$  потенциал, вычисленный в задаче 3.3.2:

$$\varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_i}{\sqrt{R^2 + x_i^2}}, \text{ где } i = 1, 2.$$

Согласно принципу суперпозиции

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2.$$

Отсюда получается ответ:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{\sqrt{R^2 + (x - h/2)^2}} + \frac{q_2}{\sqrt{R^2 + (x + h/2)^2}} \right).$$

**Ответ:** 
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{\sqrt{R^2 + (x - h/2)^2}} + \frac{q_2}{\sqrt{R^2 + (x + h/2)^2}} \right).$$

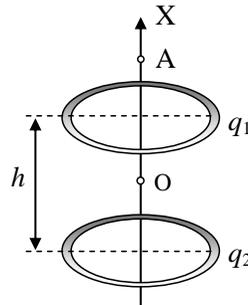


Рис. 3.4. К нахождению потенциала электростатического поля на оси двух заряженных коаксиальных колец.

*Анализ результата и дополнительные выводы*

1. Если  $q_1 = q_2$ , то функция  $\varphi(x)$  четная и распределение потенциала симметрично. В точке О потенциал равен удвоенному потенциалу от одного кольца.

Если  $q_1 = -q_2$ , то функция  $\varphi(x)$  нечетная, график ее имеет вид антисимметричной функции, а в точке О имеем  $\varphi = 0$ .

2. При большом удалении от колец, когда  $x \gg h$ ,  $R$  ( $x > 0$ ), имеем при разложении в первом порядке по малым значениям  $h/x$  и  $R/x$ :

$$\frac{1}{\sqrt{R^2 + (x + h/2)^2}} \approx \frac{1}{x} \left( 1 - \frac{h}{2x} \right).$$

В этом случае

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1 + q_2}{x} + \frac{(q_1 - q_2)h}{2x^2} \right).$$

Первое слагаемое является потенциалом точечного заряда, равного полному заряду системы  $q_1 + q_2$ , расположенного в центре между кольцами. Второе слагаемое представляет собой потенциал системы двух точечных близко расположенных зарядов – точечного диполя, расположенного в той же точке, с вектором дипольного момента, направленным вдоль оси X и равным по величине

$$p = \frac{h}{2}(q_1 - q_2) \quad (\text{см. Главу 4}).$$

Радиус колец слабо влияет на поле, давая поправку только второго порядка малости. В случае  $q_1 = q_2$  поле системы двух колец видится с большого расстояния как поле точечного заряда  $2q$ , а дипольное слагаемое (т.е. слагаемое второго порядка малости) отсутствует. В случае  $q_1 = -q_2$  система электронейтральна и с большого расстояния выглядит как диполь с моментом  $p = qh$ , ориентированным вдоль оси X.

3. Если кольца расположены очень близко друг к другу ( $h \ll R$ ), то в области между кольцами  $x \ll R$ . В этой области при

$$q_1 = q_2 \text{ потенциал поля на оси } \varphi = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R} \text{ сохраняется постоянным}$$

в линейном приближении по малым параметрам  $x/R$  и  $h/R$ . Поправки к постоянному потенциалу существуют только за счет слагаемых второго порядка малости. Поле в этой области будет очень слабым, напряженность его будет близка к нулю. При  $q_1 = -q_2$  имеем в низшем порядке по малым параметрам  $x/R$  и  $h/R$ :

$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qxh}{R^3}$ . Линейная зависимость потенциала от координаты говорит о том, что поле в этом случае однородное. Величина напряженности поля невелика, так как определяется малым параметром  $h/R$ .

### Задачи типа 3.2

*Определение потенциала или разности потенциалов, если задана или легко вычисляется напряженность поля, и решение обратной задачи*

**Метод решения.** Если напряженность поля известна (или легко вычисляется) и при этом зависит лишь от одной координаты, целесообразно для вычисления потенциала (и разности потенциалов) использовать связь потенциала с напряженностью поля (3.15). Например, для поля, зависящего от одной декартовой координаты  $x$

из (3.15) находим:  $E(x) = -\frac{d\varphi}{dx}$ . Интегрируя это уравнение, получа-

ем  $\varphi(x)$ . Те же соображения работают и в случае сферических или цилиндрических координат. При интегрировании появятся произвольные постоянные, которые надо доопределить с помощью нормировки потенциала и условия его непрерывности. Результаты задач, представленных в данном разделе, будут неоднократно использоваться в дальнейшем.

**Задача 3.3.6.** Бесконечный плоский слой толщиной  $2h$  равномерно заряжен по объему с плотностью  $\rho > 0$ . Найти потенциал поля в произвольной точке.

### Решение

В задаче 2.3.4 было получено значение напряженности поля от такого слоя: если начало координат поместить в центральной плоскости слоя и отсчитывать координату  $x$  вдоль нормали к плоскости слоя, то внутри слоя ( $x \leq h$ ) напряжённость поля растет по линей-

ному закону  $E = \frac{\rho}{\epsilon_0}x$ , а вне слоя ( $x \geq h$ ) поле однородно и его

напряжённость равна  $E = \frac{\rho h}{\epsilon_0}$ . Из условий симметрии ясно, что до-

статочно рассмотреть только область  $x > 0$ , а решение для области  $x < 0$  легко записать на основе полученного результата.

Используя (3.15), находим:

$$d\varphi = -Edx,$$

откуда для области  $x \leq h$  получаем:

$$\varphi(x) = -\frac{\rho x^2}{2\varepsilon_0} + C_1.$$

Аналогично для  $x \geq h$  имеем:

$$\varphi(x) = -\frac{\rho hx}{\varepsilon_0} + C_2,$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные постоянные, появляющиеся при интегрировании.

Поскольку слой имеет бесконечные размеры, нельзя положить равным нулю потенциал в бесконечно удаленной точке. Наиболее естественный способ нормировки потенциала в данной системе – положить  $\varphi = 0$  в любой точке средней плоскости слоя, где  $x = 0$ . Сразу находим, что при такой нормировке  $C_1 = 0$ . Постоянную  $C_2$  определим теперь из условия непрерывности потенциала на границе слоя. Имеем при  $x = h$ :

$$-\frac{\rho h^2}{\varepsilon_0} + C_2 = -\frac{\rho h^2}{2\varepsilon_0},$$

откуда  $C_2 = \frac{\rho h^2}{2\varepsilon_0}$ .

Итак, внутри слоя потенциал убывает по квадратичному закону:

$$\varphi(x) = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}x^2,$$

а снаружи – по линейному:

$$\varphi(x) = -\frac{\rho h}{2\varepsilon_0}(2x - h).$$

Убывание потенциала связано с тем, что при удалении пробного положительного заряда от центральной плоскости слоя поле совершает положительную работу, и потенциальная энергия заряда уменьшается.

Ввиду плоской симметрии системы распределение потенциала при  $x < 0$  найдем, заменяя в полученных формулах  $x$  на  $|x|$ . Если

уменьшать толщину слоя до нуля, сохраняя его заряд, то в результате получим плоскость, заряженную равномерно с поверхностной плотностью  $\sigma = 2\rho h$ , создающую в пространстве потенциал

$$\varphi(x) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}x = -\frac{\rho h}{\varepsilon_0}x,$$

соответствующий однородному полю с напряженностью  $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ .

**Ответ:** 1)  $|x| < h$ :  $\varphi(x) = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}x^2,$

2)  $|x| \geq h$ :  $\varphi(x) = -\frac{\rho h}{2\varepsilon_0}(2|x| - h).$

**Задача 3.3.7.** Шар радиуса  $R$  равномерно заряжен с объемной плотностью  $\rho$ . Найти значение потенциала в произвольной точке.

### Решение

Из симметрии системы следует, что для решения целесообразно выбрать сферическую систему координат. Напряженность поля равномерно заряженного шара вычислена в задаче 2.3.10:

внутри шара

$$E_{\text{внутри}} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}r,$$

вне шара

$$E_{\text{вне}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2},$$

где  $q$  – полный заряд шара, равный  $\frac{4}{3}\pi R^3\rho$ .

Напряженность поля зависит только от одной координаты  $r$ . В этом случае из (3.15) находим  $E(r) = -\frac{d\varphi}{dr}$  и, интегрируя это уравнение, получаем

$$\varphi_{\text{внутри}}(r) = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}r^2 + C_1,$$

$$\varphi_{\text{вне}}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r} + C_2.$$

В данной задаче заряды сосредоточены в ограниченной области пространства, поэтому можно положить равным нулю потенциал бесконечно удаленной точки. Тогда  $C_2 = 0$ , а постоянная  $C_1$  определяется из условия непрерывности потенциала при  $r = R$ :

$$-\frac{\rho}{6\epsilon_0}R^2 + C_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R},$$

откуда

$$C_1 = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}.$$

Физический смысл константы  $C_1$  – это потенциал в центре шара при нашей нормировке. Итак, внутри шара потенциал убывает по квадратичному закону

$$\varphi_{\text{внутри}}(r) = \frac{\rho}{6\epsilon_0}(3R^2 - r^2),$$

а снаружи – как потенциал точечного заряда  $q$ , расположенного в центре шара.

Если, сохраняя заряд  $q$  и его симметричное распределение, перенести его весь на поверхность шара, то напряженность поля и потенциал во внешней области не изменятся. Потенциал любой точки на поверхности останется равным  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R}$ . Но во внутренней области теперь поле отсутствует, работа по перемещению пробного заряда с поверхности шара в его центр не совершается, и потенциал в любой точке внутри получившейся заряженной сферы будет одним и тем же – потенциалом поверхности сферы.

**Ответ:** 1)  $r < R$ :  $\varphi_{\text{внутри}}(r) = \frac{\rho}{6\epsilon_0}(3R^2 - r^2)$ ;

2)  $r > R$ :  $\varphi_{\text{вне}}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r}$ .

**Задача 3.3.8.** Шаровой слой между сферами радиусов  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ) заряжен с плотностью  $\rho = a/r^2$ . Найти потенциал поля в произвольной точке.

## Решение

Распределение заряда сферически симметрично (рис. 3.5), поэтому поле во внешней области совпадает с полем точечного заряда, равного полному заряду слоя  $q$  и расположенного в центре сфер.

Полный заряд слоя  $R_1 < r < R_2$  найдем, суммируя его по зарядам бесконечно тонких слоев от  $r$  до  $r + dr$ . Учитывая, что заряд такого слоя  $dq = \rho dV = \rho 4\pi r^2 dr = 4\pi a dr$ , и вычисляя интеграл по  $r$  в пределах от  $R_1$  до  $R_2$ , получаем:

$$q = 4\pi a \int_{R_1}^{R_2} dr = 4\pi a(R_2 - R_1).$$

Принимая нормировку потенциала на нуль в бесконечности, находим потенциал в области  $r \geq R_2$ :

$$\varphi_3(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r} = \frac{a}{\epsilon_0} \cdot \frac{R_2 - R_1}{r}.$$

Отсюда потенциал сферы радиуса  $R_2$  будет равен:

$$\varphi(R_2) = \frac{a}{\epsilon_0} \left( 1 - \frac{R_1}{R_2} \right).$$

Электрическое поле **внутри слоя**  $E_2(r)$  определяется суммарным зарядом, находящимся внутри сферы радиуса  $r$ . Этот заряд равен

$$q(r) = 4\pi a \int_{R_1}^r dr = 4\pi a(r - R_1).$$

По теореме Гаусса создаваемая им напряженность поля равна:

$$E_2(r) = \frac{q(r)}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{a}{\epsilon_0 r} \left( 1 - \frac{R_1}{r} \right).$$

Потенциал внутри слоя  $\varphi_2(r)$  находим по (3.4):

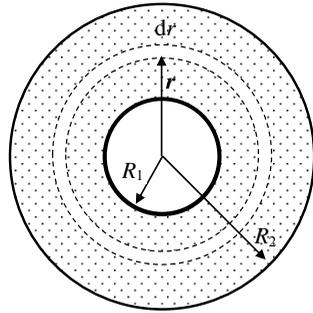


Рис. 3.5. Шаровой слой со сферически симметричным распределением заряда.

$$\begin{aligned}\varphi_2(r) &= \varphi(R_2) - \int_{R_2}^r E_2(r) dr = \\ &= \frac{a}{\varepsilon_0} \left( 1 - \frac{R_1}{R_2} \right) - \frac{a}{\varepsilon_0} \int_{R_2}^r \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{R_1}{r} \right) dr = \frac{a}{\varepsilon_0} \left( 1 - \frac{R_1}{r} - \ln \frac{r}{R_2} \right).\end{aligned}$$

Внутри сферы радиуса  $R_1$  зарядов нет, поэтому напряженность поля внутри нее равна нулю, а потенциал постоянен и равен его значению на сфере радиуса  $R_1$ :

$$\varphi(r < R_1) = \varphi_2(R_1) = \frac{a}{\varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

$$\text{Ответ: } 1) \varphi_1 = \frac{a}{\varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad \text{при } r \leq R_1;$$

$$2) \varphi_2 = \frac{a}{\varepsilon_0} \left( 1 - \frac{R_1}{r} + \ln \frac{R_2}{r} \right) \quad \text{при } R_1 \leq r \leq R_2;$$

$$3) \varphi_3(r) = \frac{a}{\varepsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{r} \quad \text{при } r \geq R_2.$$

**Задача 3.3.9.** Бесконечно длинный круговой цилиндр радиуса  $R$  равномерно заряжен с объемной плотностью заряда  $\rho$ . Найти потенциал в произвольной точке пространства, считая, что потенциал на поверхности цилиндра равен нулю.

### Решение

Напряженность поля такого цилиндра была определена в главе 2 (задача 2.3.6). Ввиду цилиндрической симметрии системы целесообразно использовать для решения цилиндрическую систему координат  $(r, \varphi, z)$ , у которой ось  $Z$  направлена по оси цилиндра, а начало координат расположено в произвольной точке на оси цилиндра. Учитывая, что на поверхности цилиндра потенциал, согласно условию, равен нулю, можно применить формулу (3.4), которая в нашем случае примет вид:

$$\varphi(r) - \varphi(R) = \varphi(r) = - \int_R^r E dr = \int_r^R E dr.$$

Учитывая, что **внутри цилиндра** (при  $r \leq R$ )  $E_1 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}r$ , нахо-

дим потенциал в этой области:

$$\varphi_1(r) = \int_r^R \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r dr = \frac{\rho}{4\varepsilon_0} (R^2 - r^2) = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right),$$

где  $\tau = \pi R^2 \rho$  – заряд, приходящийся на единицу длины цилиндра.

Вне цилиндра (при  $r \geq R$ )

$$E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r},$$

и для потенциала в этой области имеем:

$$\varphi_2(r) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \int_r^R \frac{dr}{r} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \ln \frac{R}{r} = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r}{R}.$$

Внутри цилиндра потенциал убывает по квадратичному закону, а снаружи – как логарифм расстояния от поверхности цилиндра.

Сохраняя цилиндрическую симметрию, перенесем весь заряд на поверхность цилиндра, сохраняя линейную плотность заряда  $\tau = \pi R^2 \rho$ . Внутри заряженной цилиндрической поверхности заряда нет и напряженность поля равна нулю. Значит, потенциал во внутренней области равен нулю (при нормировке потенциала, указанной в условии). Потенциал вне цилиндра опять, как и прежде, будет равен:

$$\varphi_2(r) = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r}{R}.$$

Если уменьшать радиус цилиндрической поверхности, то в пределе она превратится в бесконечную прямую нить, заряженную с постоянной линейной плотностью  $\tau$ . Из-за неопределенности значения  $\ln(r/R)$  при  $r \rightarrow 0$  и  $R \rightarrow 0$  нельзя полагать равным нулю значение потенциала на нити. Поэтому для нормировки потенциала придется использовать какое-либо другое условие, т.е. положить равным нулю значение потенциала в произвольно выбранной точке. Отметим, что физический смысл имеет только разность потенциалов в точках, удаленных от нити на заданные расстояния  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ), а такая разность потенциалов равна

$$\Delta\varphi_{12} = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

и от нормировки не зависит.

$$\text{Ответ: } \varphi_1 = \frac{\rho}{4\varepsilon_0}(R^2 - r^2) \quad \text{при } r \leq R;$$

$$\varphi_2 = -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \ln \frac{r}{R} \quad \text{при } r \geq R.$$

### Задачи типа 3.3

*Построение картины силовых линий и эквипотенциальных поверхностей для заданной системы неподвижных зарядов*

**Метод решения.** Обычно рассматриваются достаточно простые конфигурации, когда условия симметрии в достаточной мере определяют характер силовых линий и эквипотенциальных поверхностей. Хорошо, если задача сводится к построению плоской картины. Иногда из общих соображений удается сделать вывод о расположении поверхностей, на которых потенциал равен нулю, иногда приходится выполнить расчет для получения уравнения эквипотенциальной поверхности. В любом случае картина силовых линий и эквипотенциальных поверхностей должна соответствовать свойствам силовых линий и эквипотенциальных поверхностей, изложенным в теоретическом материале Главы 1 и данной Главы 3. Силовые линии должны начинаться на положительных зарядах (или приходить из бесконечности) и заканчиваться на отрицательных зарядах (или уходить на бесконечность). Принимаем во внимание, что вблизи точечных зарядов силовые линии расходятся радиально и равномерно. Во всех точках следим, чтобы силовые линии и эквипотенциальные поверхности были взаимно перпендикулярными. Силовые линии нигде не должны пересекаться друг с другом. Густота линий характеризует напряженность поля в данной области. Вблизи точечного заряда эквипотенциальные поверхности будут сферами (на плоскости – окружностями). Если заряды расположены в ограниченной области, то на больших расстояниях от них эквипотенциальные поверхности также будут сферами.

**Задача 3.3.10.** Начертить схему силовых линий и эквипотенциальных поверхностей для системы двух точечных зарядов  $+q$  и  $-q$ , находящихся на некотором расстоянии  $d$  друг от друга.

### Решение

Потенциал любой точки плоскости, относительно которой заряды расположены симметрично, равен нулю, так как любая такая точка равноудалена от зарядов  $+q$  и  $-q$ . Значит, силовые линии вблизи этой плоскости нулевого потенциала направлены по нормали к ней. Напряженность поля в точках этой плоскости убывает по мере удаления точек от зарядов. Поэтому густота линий будет максимальной вблизи силовой линии, соединяющей заряды.

Схематически картина силовых линий (сплошные линии) и сечения эквипотенциальных поверхностей (пунктир) представлены на рис. 3.6.

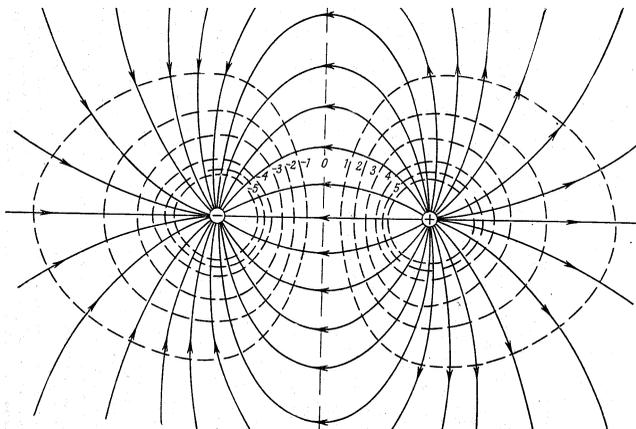


Рис. 3.6. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности системы из двух одинаковых по величине и противоположных по знаку зарядов.

**Задача 3.3.11.** Проанализировать картину силовых линий и эквипотенциальных поверхностей для системы двух одинаковых положительных зарядов, находящихся на некотором расстоянии друг от друга.

### Решение

Из соображений симметрии ясно, что силовые линии не могут пересекать плоскость симметрии данной системы зарядов. Следовательно, приближаясь к этой плоскости, силовые линии должны изгибаться, сближаясь, и затем расходиться, уходя на бесконечность. С удалением от зарядов картина силовых линий приближается к таковой для точечного заряда величиной  $2q$ .

Напряженность поля равна нулю в центральной точке и в бесконечности и не меняет знака при удалении от центральной точки. Это означает, что в некоторой промежуточной точке плоскости она достигает максимума, и именно там густота линий будет наибольшей. Направление на эту точку (точка А на рис. 3.7) задается углом, для которого  $\operatorname{tg} \varphi = 1/2$  ( $\varphi$  – угол, отсчитываемый от линии, проведенной через заряды). Картина силовых линий показана на рис. 3.7. Картину эквипотенциальных поверхностей легко представить, учитывая, что они в каждой точке перпендикулярны силовым линиям. На больших расстояниях от зарядов эквипотенциальные поверхности будут сферами.

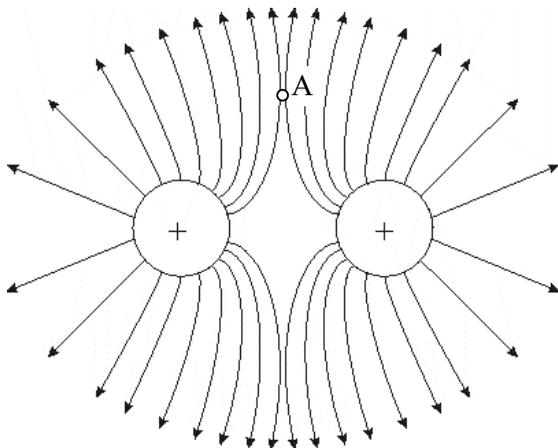


Рис. 3.7. Силовые линии системы из двух одинаковых положительных зарядов.

**Задача 3.3.12.** Начертить схему силовых линий и эквипотенциальных поверхностей для системы двух точечных зарядов  $+q$  и  $+2q$ , находящихся на расстоянии  $d$  друг от друга.

### Решение

Ввиду цилиндрической симметрии системы достаточно рассмотреть картину силовых линий в плоскости, проходящей через заряды. Поскольку оба заряда положительные, все силовые линии начинаются на зарядах и заканчиваются на бесконечности. Отсюда ясно, что на выделенной плоскости должна существовать линия, которую силовые линии не пересекают.

Силловые линии от каждого заряда на подходе к этой разграничительной линии изгибаются и уходят на бесконечность, асимптотически приближаясь к ней. На отрезке, соединяющем заряды  $+q$  и  $+2q$  разграничительная линия проходит через точку  $A$ , в которой напряженность поля равна нулю. Точка  $A$  отстоит от заряда  $q$  на расстояние  $a = d(\sqrt{2} - 1)$ .

Около каждого заряда картина близка к картине силовых линий положительного заряда: силовые линии выходят из каждого заряда симметрично, а эквипотенциальные поверхности на выделенной плоскости выглядят как окружности. В то же время понятно, что на очень больших расстояниях от зарядов эквипотенциальные линии вновь становятся почти окружностями. Ясно, что внутренняя часть должна отделяться от внешней части некоторой эквипотенциальной линией, проходящей через точку  $A$ . Потенциал поля в точке  $A$  равен

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{a} + \frac{2q}{d-a} \right).$$

На линии, соединяющей заряды  $+q$  и  $+2q$ , находим точки  $B$  и  $O$ , в которых потенциал равен потенциалу точки  $A$ . Разграничительная эквипотенциальная линия проходит через точки  $A$ ,  $B$ , и  $O$ . Общая картина изображена на рис. 3.8.

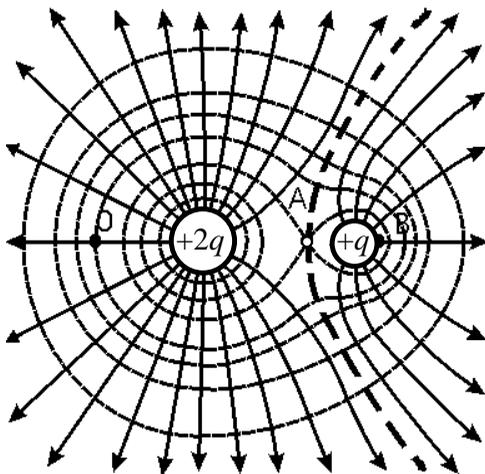


Рис. 3.8. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности системы из двух неодинаковых положительных зарядов.

**Задача 3.3.13.** Начертить схему силовых линий и эквипотенциальных поверхностей для тонкого стержня длины  $2a$ , равномерно заряженного с линейной плотностью заряда  $\tau$ .

### Решение

Учитывая свойства симметрии системы, поместим начало координат в центр стержня, а ось  $Z$  направим вдоль стержня. Все силовые линии должны начинаться на стержне и уходить в бесконечность. Ясно, что достаточно рассмотреть картину в плоскости  $XZ$  при  $x > 0$  и  $z > 0$ .

Силовая линия, выходящая из центра стержня, совпадает с положительным направлением оси  $X$ , а силовая линия, выходящая из конца стержня, пойдет вдоль оси  $Z$ .

На большом расстоянии от стержня эквипотенциальные линии становятся близкими к дугам окружностей. Для анализа картины вблизи начала координат можно воспользоваться решением задачи 3.3.1. Общая картина силовых линий схематически представлена на рис. 3.9. Поведение эквипотенциальных поверхностей легко представить, учитывая, что они в каждой точке перпендикулярны силовым линиям.

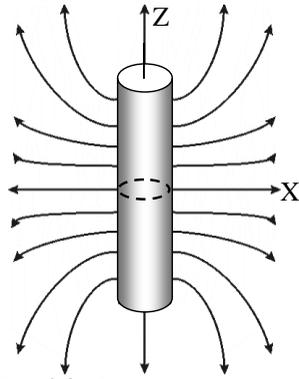


Рис. 3.9. Силовые линии равномерно заряженного тонкого стержня.

### 3.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 3.4.1.** Два коаксиальных тонких металлических кольца радиуса  $R$  расположены на расстоянии  $a$  друг от друга. Заряды колец  $+q$  и  $-q$  соответственно. Найти разность потенциалов между центрами колец.

$$\text{Ответ: } \Delta\varphi = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (a/R)^2}} \right).$$

**Задача 3.4.2.** Найти потенциал в центре полусферы радиуса  $R$ , заряженной равномерно с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ .

$$\text{Ответ: } \varphi = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}.$$

**Задача 3.4.3.** Бесконечно длинная нить заряжена равномерно с линейной плотностью заряда  $\tau = 0,4$  мкКл/м. Вычислить разность потенциалов между точками 1 и 2, если точка 2 находится в  $\eta = 2$  раз дальше от нити, чем точка 1.

$$\text{Ответ: } \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln \eta \approx 5 \text{ кВ.}$$

**Задача 3.4.4.** Три плоскости расположены параллельно друг другу на расстоянии  $h$  одна от другой. Каковы разности потенциалов между плоскостями, если на первой находится равномерно распределенный заряд с поверхностной плотностью заряда  $+\sigma_1$ , на второй  $+\sigma_2$  и на третьей  $(-\sigma_3)$ .

$$\text{Ответ: } \Delta\varphi_{12} = \frac{h}{2\varepsilon_0}(\sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_3), \quad \Delta\varphi_{23} = \frac{h}{2\varepsilon_0}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3),$$

$$\Delta\varphi_{13} = \Delta\varphi_{12} + \Delta\varphi_{23}.$$

**3.4.5.** Шар радиуса  $R$  заряжен по объёму зарядом  $Q$  так, что объёмная плотность заряда  $\rho \sim r^2$ . Определить разность потенциалов  $\Delta\varphi_{AB}$  между точками  $A$  и  $B$ , если они отстоят от центра на расстояния  $r_A = 0,5R$ , а  $r_B = 2R$  соответственно.

Указание: см. задачу 2.4.3.

$$\text{Ответ: } \Delta\varphi_{AB} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \frac{R^4 - r_A^4}{4R^5} + \frac{1}{R} - \frac{1}{r_B} \right] = \frac{47Q}{256\pi\varepsilon_0 R}.$$

**Задача 3.4.6.** Шар радиуса  $R$  заряжен с объёмной плотностью заряда  $\rho(r) = \alpha r$  (где  $r$  – расстояние от центра шара, а  $\alpha$  – известная постоянная) и поверхностной плотностью заряда  $\sigma_0$ . Найти распределение потенциала во всём пространстве.

$$\text{Ответ: } 1) r \geq R: \quad \varphi_1(r) = \frac{R^2}{\varepsilon_0 r} \left( \sigma_0 + \frac{\alpha R^2}{4} \right);$$

$$2) r \leq R: \quad \varphi_2(r) = \frac{R}{\varepsilon_0} \left( \sigma_0 + \frac{\alpha R^2}{4} \right) + \frac{\alpha}{12\varepsilon_0} (R^3 - r^3).$$

**Задача 3.4.7.** Заряд с объёмной плотностью  $\rho = 3 \text{ мкКл/м}^3$  равномерно распределен внутри сферического слоя, ограниченного сферическими поверхностями с радиусами  $R_1 = 3 \text{ см}$  и  $R_2 = 5 \text{ см}$ . Найти разность потенциалов  $\Delta\varphi_{12}$  между поверхностями слоя.

$$\text{Ответ: } \Delta\varphi_{12} = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} \left( 3R_1^2 - R_2^2 - \frac{2R_1^3}{R_2} \right) \approx 50 \text{ В.}$$

**Задача 3.4.8.** Бесконечный цилиндр радиуса  $R$  заряжен так, что объёмная плотность заряда  $\rho$  убывает по линейному закону в зависимости от  $r$ , причем  $\rho(R) = 0$ , а полный заряд на единицу длины цилиндра равен  $Q$ . Определить напряженность электрического поля  $E$  в точках  $r_1 = R/3$  и  $r_2 = (3/2)R$  и разность потенциалов  $\Delta\varphi_{12}$ .

$$\text{Ответ: } 1) E(r_1) = \frac{7Q}{18\pi\varepsilon_0 R} \quad 2) E_2(r_2) = \frac{Q}{3\pi\varepsilon_0 R}$$

$$3) \Delta\varphi_{12} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0} \left( \ln \frac{3}{2} + \frac{56}{81} \right).$$

**Задача 3.4.9.** Принимая Землю за шар радиуса  $R = 6400 \text{ км}$ , определить заряд  $Q$  Земли, если напряженность электрического поля у поверхности Земли составляет  $E = 130 \text{ В/м}$ . Определить потенциал  $\varphi$  поверхности Земли, принимая  $\varphi_\infty = 0$ .

$$\text{Ответ: } Q = 4\pi\varepsilon_0 R\varphi = 5,92 \cdot 10^5 \text{ Кл; } \varphi = ER = 8,2 \cdot 10^8 \text{ В.}$$

**Задача 3.4.10.** Заряды распределены равномерно по поверхности двух концентрических сфер с радиусами  $R_1 = 10 \text{ см}$  и  $R_2 = 20 \text{ см}$ , причем поверхностные плотности электрического заряда на обеих сферах одинаковы. Найти плотность заряда  $\sigma$ , если потенциал в центре сфер равен  $300 \text{ В}$ , а на бесконечности равен нулю.

$$\text{Ответ: } \sigma = \frac{\varphi_0 \varepsilon_0}{R_1 + R_2} = 9 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м}^2.$$

**Задача 3.4.11.** Две концентрические сферы с радиусами  $R$  и  $2R$  заряжены равномерно зарядами одного знака: внутренняя – одним микрокулоном, внешняя – двумя микрокулонами. На расстоянии  $3R$  от центра сфер потенциал  $\varphi = 9000 \text{ В}$ . Найти  $R$ .

$$\text{Ответ: } R = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 + q_2}{\varphi} \right) = 1 \text{ м.}$$

**Задача 3.4.12.** Две концентрические сферы с радиусами  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ) получили заряды  $Q_1$  и  $Q_2$  соответственно, которые распределились равномерно по их поверхностям. Найти потенциал на расстоянии  $r$  от центра сфер.

$$\begin{aligned} \text{Ответ: } r \leq R_1, & \quad \varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2} \right); \\ R_1 \leq r \leq R_2, & \quad \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_2}{R_2} + \frac{Q_1}{r} \right); \\ r \geq R_2, & \quad \varphi_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 + Q_2}{r}. \end{aligned}$$

**Задача 3.4.13.** Две коаксиальные цилиндрические поверхности с радиусами  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ) равномерно заряжены с поверхностными плотностями заряда  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  соответственно. Вычислить напряженность электрического поля и потенциал этой системы зарядов, считая, что на оси цилиндров потенциал  $\varphi_0 = 0$ .

*Ответ:*

$$\begin{aligned} r < R_1: & \quad E_0 = 0, \quad \varphi_0 = 0; \\ R_1 < r < R_2: & \quad E_1 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\sigma_1 R_1}{r}, \quad \varphi_1 = -\frac{1}{\epsilon_0} \sigma_1 R_1 \ln \frac{r}{R_1}; \\ r > R_2: & \quad E_2 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2}{r}, \quad \varphi_2 = -\frac{1}{\epsilon_0} \left( \sigma_1 R_1 \ln \frac{R_2}{R_1} + \sigma_2 R_2 \ln \frac{r}{R_2} \right). \end{aligned}$$

**Задача 3.4.14** ([2], 3.28). Имеются два тонких кольца радиуса  $R$  каждое, оси которых совпадают. Заряды колец равны  $q$  и  $-q$ . Найти разность потенциалов между центрами колец, отстоящими друг от друга на расстояние  $l$ , если  $R = 30$  см,  $l = 52$  см,  $q = 0,4$  мкКл.

$$\text{Ответ: } \Delta\varphi = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (l/R)^2}} \right) = 12 \text{ кВ.}$$

**Задача 3.4.15** ([3], 108). Две концентрические сферы имеют радиусы  $R_1 = 10$  см и  $R_2 = 20$  см. На каждой из них равномерно распределён заряд  $q = +1,2$  нКл. Чему равна разность потенциалов  $U$  между ними, и какова напряжённость поля внутри сфер и снаружи?

$$\text{Ответ: } U = \frac{q(R_2 - R_1)}{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2} = 540 \text{ В.}$$

**Задача 3.4.16** ([2], 3.30). Тонкое кольцо радиуса  $R = 25$  см имеет заряд  $q = 5$  мкКл, неравномерно распределённый по кольцу. Найти работу электрических сил при перемещении точечного заряда  $q_1 = 10$  мкКл из центра кольца по произвольному пути в точку, находящуюся на оси кольца на расстоянии  $l = 50$  см от его центра.

$$\text{Ответ: } A = \frac{qq_1}{4\pi\epsilon_0 R} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (l/R)^2}} \right) = 0,10 \text{ Дж.}$$

**Задача 3.4.17** ([2], 3.35). Найти напряжённость электрического поля, потенциал которого имеет вид  $\varphi = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})$ , где  $\mathbf{a}$  – постоянный вектор,  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор точки поля.

$$\text{Ответ: } E = -a.$$

**Задача 3.4.18** ([2], 3.36). Определить напряжённость электрического поля, потенциал которого зависит от координат  $x, y$  по закону: а)  $\varphi = a(x^2 - y^2)$ ; б)  $\varphi = axy$ , где  $a$  – постоянная.

$$\text{Ответ: а) } E = -2a(xi - yj); \text{ б) } E = -2a(yi + xj).$$

**Задача 3.4.19** ([2], 3.37). Потенциал электрического поля имеет вид  $\varphi = \alpha(xy - z^2)$ , где  $\alpha$  – постоянная величина. Найти проекцию напряжённости электрического поля в точке  $M(2, 1, -3)$  на направление вектора  $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 3\mathbf{k}$ .

$$\text{Ответ: } E_a = -\frac{\alpha(y - 6z)}{\sqrt{10}} = -6,0\alpha.$$

**Задача 3.4.20** ([2], 3.48). Найти потенциал следующих электрических полей:

$$\text{а) } E = -a(yi + xj); \text{ б) } E = 2axyi + a(x^2 - y^2)j;$$

$$\text{в) } E = 2ayi + (ax + bz)j + byk, \text{ где } a \text{ и } b \text{ – постоянные.}$$

Ответ: а)  $\varphi = -axy + const$ ; б)  $\varphi = -ay(y^2/3 - x^2) + const$  ;  
в)  $\varphi = -y(ax + bz) + const$  .

## Глава 4

## УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА И ЛАПЛАСА. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ДИПОЛЬ И ЕГО ПОЛЕ

### 4.1 Теоретический материал

**Локальная связь между потенциалом и напряженностью электрического поля** задается выражением:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad}\varphi(\mathbf{r}) = -\left( \frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial\varphi(\mathbf{r})}{\partial z} \mathbf{k} \right). \quad (4.1)$$

**Оператор Лапласа**  $\Delta$  – скалярный дифференциальный оператор, равный скалярному произведению двух векторных дифференциальных операторов набла  $\nabla$ :

$$\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \text{div}(\text{grad}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (4.2)$$

**Уравнение Пуассона:**

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}. \quad (4.3)$$

**Уравнение Лапласа:**

$$\Delta\varphi = 0. \quad (4.4)$$

**Теорема единственности в электростатике**

Решение уравнения Пуассона (Лапласа) с заданными граничными условиями для потенциала  $\varphi(\mathbf{r})$  является единственным. Можно найти лишь одну функцию  $\varphi(\mathbf{r})$ , которая удовлетворяет уравнению Пуассона (Лапласа) и этим граничным условиям.

**Электрический диполь** – это совокупность двух равных по величине и противоположных по знаку точечных электрических зарядов, разнесенных в пространстве (расстояние между зарядами гораздо больше их линейных размеров).

**Моментом электрического диполя (электрический дипольный момент)** называется величина, равная

$$\mathbf{p} \equiv q\mathbf{l}, \quad (4.5)$$

где  $\mathbf{l}$  – вектор, проведенный из точки расположения отрицательного заряда  $-q$  в точку расположения положительного заряда  $q$ . Единица измерения –  $[p] = \text{Кл}\cdot\text{м}$ .

**Точечный (элементарный) электрический диполь** – диполь, расстоянием между зарядами которого можно пренебречь. Это рас-

стояние гораздо меньше расстояния от диполя до точек наблюдения (при расчете поля диполя) или характерных линейных размеров неоднородности электрического поля в месте расположения диполя (при расчете силы и момента сил, действующих на диполь во внешнем поле).

**Электрический дипольный момент нейтральной** ( $\sum_i q_i = 0$ )

**дискретной системы зарядов** равен:

$$\mathbf{p} \equiv \sum_i q_i \mathbf{r}_i, \quad (4.6)$$

где суммирование ведется по всем точечным зарядам  $q_i$ , входящим в состав системы. При этом  $\mathbf{r}_i$  – радиус-вектор заряда  $q_i$  относительно произвольной системы отсчета.

**Для линейно распределенных зарядов** ( $\int_L \lambda(\mathbf{r}) d l = 0$ ):

$$\mathbf{p} = \int_L \lambda(\mathbf{r}) \mathbf{r} d l. \quad (4.7)$$

**Для поверхностно распределенных зарядов** ( $\int_S \sigma(\mathbf{r}) d S = 0$ ):

$$\mathbf{p} = \int_S \sigma(\mathbf{r}) \mathbf{r} d S. \quad (4.8)$$

**Для объемно распределенных зарядов** ( $\int_V \rho(\mathbf{r}) d V = 0$ ):

$$\mathbf{p} = \int_V \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} d V. \quad (4.9)$$

Заметим, что электрические дипольные моменты нейтральных систем зарядов не зависят от выбора системы отсчета, относительно которой рассматривается распределение зарядов.

**Напряженность электрического поля точечного электрического диполя** равна

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3(\mathbf{p}\mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{p}}{r^5}, \quad (4.10)$$

где  $\mathbf{p}$  – дипольный момент электрического диполя,  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор точки наблюдения относительно диполя.

**Потенциал электрического поля точечного электрического диполя** (при нормировке потенциала на бесконечности ( $\varphi(\infty) = 0$ )) равен:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}, \quad (4.11)$$

где  $\mathbf{p}$  – дипольный момент электрического диполя,  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор точки наблюдения относительно диполя.

## 4.2. Основные типы задач (классификация)

4.1. Обратная задача электростатики: найти распределение зарядов, создающих заданные значения потенциала или разности потенциалов.

4.2. Определение напряженности поля, в создании которого участвуют электрические диполи.

## 4.3. Методы решения и примеры решения задач

### Задачи типа 4.1

*Обратная задача электростатики: найти распределение зарядов, создающих заданные значения потенциала или разности потенциалов*

**Метод решения.** Прямое использование уравнения Пуассона (4.3). Следует использовать запись оператора Лапласа в системе координат, наиболее подходящей из условий симметрии. Если в условии задачи задана разность потенциалов, то можно использовать формулу (4.1) и условия симметрии, чтобы определить распределение напряженности поля и потенциала во всем пространстве.

**Задача 4.3.1.** Потенциал поля внутри заряженного шара зависит только от расстояния до его центра как  $\varphi = ar^2 + b$ , где  $a$  и  $b$  – постоянные. Найти распределение объемного заряда  $\rho(r)$  внутри шара.

### Решение

Это пример обратной задачи. Из сферической симметрии системы следует, что оператор Лапласа надо записать в сферических координатах – тогда остается зависимость только от одной переменной  $r$ :

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r}.$$

Выполняя дифференцирование, находим:

$$\Delta\varphi = ба.$$

Из уравнения Пуассона следует ответ:

$$\rho = -ба\varepsilon_0.$$

*Замечание 1.* Задачу можно также легко решить в декартовых координатах, если в заданное выражение для  $\varphi(r)$  подставить  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  и воспользоваться выражением (4.2) для оператора Лапласа в декартовых координатах.

*Замечание 2.* Каков смысл постоянных  $a$  и  $b$ ? Величина  $a$  определяет объёмную плотность заряда  $\rho$  и отличается от неё только численным множителем. Объёмная плотность  $\rho$  заряда внутри шара постоянна. При положительном заряде коэффициент  $a$  отрицателен, что соответствует убыванию потенциала в направлении от центра шара к его поверхности. Параметр  $b$  равен значению потенциала в центре шара. Его величину можно найти из условия непрерывности потенциала при  $r = R$ :

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R} = aR^2 + b,$$

откуда  $b = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$ . Величина  $b$  зависит от плотности распределения заряда и от радиуса шара.

**Ответ:**  $\rho = -ба\varepsilon_0$ .

**Задача 4.3.2.** В бесконечном слое толщины  $d$  находится равномерно распределенный объёмный заряд. Разность потенциалов между границами слоя равна  $\Delta\varphi$ . При каком значении объёмной плотности  $\rho$  заряда напряженность поля вблизи одной из границ будет равна нулю? Какова будет при этом напряженность поля у другой границы?

### Решение

Поскольку распределение заряда симметрично относительно центральной плоскости слоя, то потенциал обеих поверхностей слоя одинаков. Таким образом, сам распределенный в плоском слое заряд не может создать разность потенциалов на своих границах. Следовательно, должно присутствовать внешнее однородное поле в направлении нормали к слою, напряженность которого можно представить в виде:

$$E_0 = \frac{\Delta\varphi}{d}.$$

Напряженность поля вблизи одной из границ будет равна нулю, если напряжённость этого внешнего поля равна по величине напряжённости поля, создаваемого на этой пластине распределенным зарядом, и противоположна ей по направлению. На границе слоя напряженность поля от распределенного заряда равна:

$$E = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0} \quad (\text{см. задачу 2.3.4, глава 2}).$$

Из равенства  $E = E_0$  находим:

$$\rho = \frac{2\varepsilon_0 \Delta\varphi}{d^2}.$$

На второй границе напряжённость внешнего поля сонаправлена с напряжённостью поля распределенного заряда. Поэтому напряженность поля вблизи второй границы равна  $\frac{2\Delta\varphi}{d}$ .

**Ответ:**  $\rho = \frac{2\varepsilon_0 \Delta\varphi}{d^2}.$

### Задачи типа 4.2

*Определение напряженности поля, в создании которого участвуют электрические диполи*

**Метод решения:** использование определения диполя или дипольного момента системы зарядов (4.5) – (4.9) и выражения для напряженности поля диполя (4.10).

**Задача 4.3.3.** Используя полярную систему координат с ортами  $e_r$  и  $e_\varphi$ , начало координат которой совпадает с точечным электрическим диполем с моментом  $p$ , найти в произвольной точке А с полярными координатами  $(r, \varphi)$  компоненты и модуль вектора напряженности.

**Решение**

Поместим начало координат в точку нахождения диполя и направим полярную ось  $\varphi = 0$  вдоль вектора  $\mathbf{p}$  (рис. 4.1). Используем для расчета формулу (4.10) теоретического материала, отсчитывая угол  $\varphi$  от направления вектора  $\mathbf{p}$ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3(\mathbf{p}\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right].$$

Поскольку в выбранной системе координат

$$\mathbf{p}\mathbf{r} = pr \cos\varphi, \mathbf{p}\mathbf{e}_r = p \cos\varphi, \mathbf{p}\mathbf{e}_\varphi = -p \sin\varphi, \mathbf{r}\mathbf{e}_\varphi = 0,$$

находим из проекций вектора напряжённости  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  (4.10) на оси координат:

$$E_r = \frac{p \cos \varphi}{2\pi\epsilon_0 r^3},$$

$$E_\varphi = \frac{p \sin \varphi}{4\pi\epsilon_0 r^3},$$

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\varphi^2} = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3 \cos^2 \varphi + 1}.$$

При этом  $\mathbf{E} = E_r \mathbf{e}_r + E_\varphi \mathbf{e}_\varphi$ .

Вектор  $\mathbf{E}$  составляет с направлением  $\mathbf{r}$  угол  $\alpha$ , такой, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{E_\varphi}{E_r} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi.$$

**Ответ:**  $E_r = \frac{p \cos \varphi}{2\pi\epsilon_0 r^3}, \quad E_\varphi = \frac{p \sin \varphi}{4\pi\epsilon_0 r^3},$

$$E = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3 \cos^2 \varphi + 1}.$$

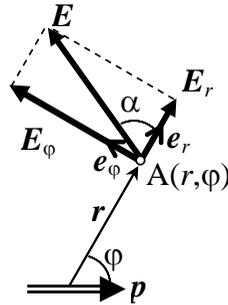


Рис.4.1. Компоненты напряженности поля диполя в полярных координатах.

**Задача 4.3.4.** Два точечных диполя с одинаковыми по величине дипольными моментами  $p$  находятся на расстоянии  $R$  друг от друга и ориентированы взаимно перпендикулярно. Найти напряженность поля в точке  $O$ , расположенной посередине между диполями.

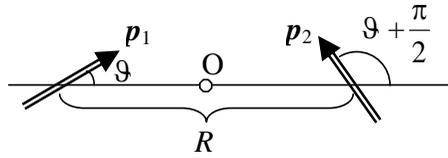


Рис. 4.2а. Система двух взаимно перпендикулярных диполей.

Дипольный момент  $p_1$  одного из диполей направлен под углом  $\vartheta$  относительно прямой, соединяющей диполи (рис. 4.2а).

### Решение

Используем решение и обозначения задачи 4.3.3. Для первого диполя угол  $\varphi_1$  между векторами  $p_1$  и  $r_1$  равен  $\varphi_1 = 2\pi - \vartheta$  (см. рис. 4.2б), поэтому для проекций напряженности на оси полярной системы координат получаем:

$$E_{r1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2p_1 \cos \vartheta}{r_1^3},$$

$$E_{\varphi1} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p_1 \sin \vartheta}{r_1^3}.$$

Знак «-» в  $E_{\varphi1}$  показывает, что эта компонента направлена противоположно орту  $e_{\varphi1}$  (см. рис. 4.2б).

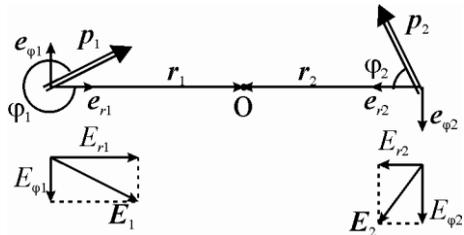


Рис.4.2б. Напряженности полей  $E_1$  и  $E_2$ , создаваемые диполями  $p_1$  и  $p_2$  в точке  $O$ .

Аналогично для второго диполя имеем ( $\varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \vartheta$ ):

$$E_{r2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2p_2 \sin \vartheta}{r_2^3},$$

$$E_{\varphi2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p_2 \cos \vartheta}{r_2^3}.$$

Так как направления векторов  $E_1$  и  $E_2$  не зависят от выбранной системы координат, то используя принцип суперпозиции в точке  $O$  ( $r_1 = r_2 = r = R/2$ ) и учитывая, что  $p_1 = p_2 = p$  имеем:

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{2p \cos \vartheta}{r^3} - \frac{2p \sin \vartheta}{r^3} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{16p}{R^3} (\cos \vartheta - \sin \vartheta),$$

$$E_{\varphi} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{p \cos \vartheta}{r^3} + \frac{p \sin \vartheta}{r^3} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{8p}{R^3} (\cos \vartheta + \sin \vartheta),$$

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_{\varphi}^2} = \frac{2p}{\pi\epsilon_0 R^3} \sqrt{5 - 6 \cos \vartheta \sin \vartheta}.$$

*Замечание.* При фиксированном  $R$  максимальное значение модуля напряженности  $E_{\max}$  соответствует углу  $\vartheta = \frac{3\pi}{4}$  или  $\frac{7\pi}{4}$ . Минимальное значение  $E_{\min}$  соответствует  $\vartheta = \frac{\pi}{4}$  или  $\frac{5\pi}{4}$ . При этом

$$E_{\min} = 2\sqrt{2} \frac{p}{\pi\epsilon_0 R^3}, \text{ а } E_{\max} \text{ вдвое больше.}$$

**Ответ:**  $E = \frac{2p}{\pi\epsilon_0 R^3} \sqrt{5 - 6 \cos \vartheta \sin \vartheta}.$

**Задача 4.3.5.** В каких точках на расстоянии  $R$  от точечного диполя с моментом  $p$  величина напряженности электростатического поля будет иметь максимальное и минимальное значение?

**Решение**

Выберем систему отсчета так, чтобы диполь находился в начале координат, а вектор  $p$  был параллелен оси  $Y$  (рис. 4.3).

Из формулы (4.10) для напряжённости поля точечного диполя:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3(\mathbf{pr})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right],$$

следует, что при постоянном значении  $R$  величина напряженности  $E$  будет определяться значением полярного угла  $\vartheta$ , и во всех точках круга, полученного в результате сечения сферы с радиусом  $R$  плоскостью  $y = \text{const}$ , будет иметь постоянное значение. При этом вектор  $E$  определяется разностью двух векторов, один из которых направлен по радиусу, а второй параллельно  $p$ .

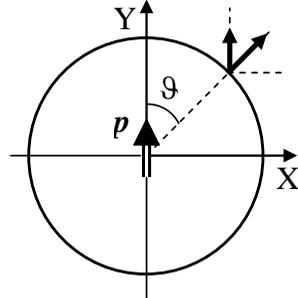


Рис.4.3. Декартова система координат для изучения поля диполя.

Найдем проекции этой разности векторов на координатные оси:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3p}{R^3} \cos \vartheta \sin \vartheta,$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3p \cos^2 \vartheta}{R^3} - \frac{p}{R^3} \right\} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p}{R^3} (3\cos^2 \vartheta - 1).$$

$$\text{В результате } E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p}{R^3} \sqrt{3\cos^2 \vartheta + 1}.$$

Разумеется, эту формулу можно было сразу взять из решения задачи 4.3.3, где она была получена в полярных координатах.

Анализ функции  $f(\vartheta) = 3\cos^2 \vartheta + 1$  на экстремум показывает, что

$$E_{\max} = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 R^3} \text{ при } \vartheta = 0, \pi;$$

$$E_{\min} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 R^3} \text{ при } \vartheta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}.$$

$$\text{Ответ: } E_{\max} = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 R^3} \text{ при } \vartheta = 0, \pi;$$

$$E_{\min} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 R^3} \text{ при } \vartheta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}.$$

**Задача 4.3.6.** Точечный электрический диполь с моментом  $p = 10^{-12}$  Кл·м равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega$  относительно оси, перпендикулярной его дипольному моменту и проходящей через его центр. Найти мгновенное значение напряженности электрического поля в точке М, лежащей в плоскости вращения диполя на расстоянии  $x_0 = 2$  см от него в момент  $t = T/6$ , где  $T$  – период вращения. Угол поворота  $\varphi$  отсчитывается от направления от диполя на точку М. В начальный момент ( $t = 0$ ) положить  $\varphi = 0$ .

### Решение

В задаче 4.3.3 получена общая формула для вычисления модуля напряженности при заданном полярном угле  $\varphi$ :

$$E = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3\cos^2 \varphi + 1}.$$

Здесь надо применить эту формулу в точке  $r = 2$  см в момент времени  $t = T/6$ , когда  $\varphi = \omega T = \pi/3$ . Остается только подставить все известные численные значения и получить ответ:  $E = \frac{9\sqrt{13}}{16} 10^3$  В/м.

*Замечание.* Приведенное решение, использующее формулы электростатики для нахождения переменного электрического поля от вращающегося диполя, асимптотически справедливо только на малых расстояниях  $r$  от диполя, удовлетворяющих условию  $r \ll c/\omega$ , где  $c$  – скорость света (электромагнитной волны). В общем случае надо учитывать излучение электромагнитных волн вращающимся диполем [1, §61; 2, §99].

**Ответ:**  $E = \frac{9\sqrt{13}}{16} 10^3$  В/м.

**Задача 4.3.7.** Пластины плоского конденсатора, имеющие вид тонких дисков, заряжены зарядами  $+q$  и  $(-q)$  соответственно. Расстояние между пластинами  $l$  много меньше размеров самих пластин. В дипольном приближении найти напряженность электрического поля на расстоянии  $r$  от конденсатора, много большем его размеров. Распределение заряда на пластинах считать равномерным.

**Решение**

Поскольку полный заряд системы равен нулю, дипольный момент можно считать относительно любой точки, в качестве которой удобно взять центр нижней пластины. Ввиду симметрии системы относительно оси  $Z$  (см. рис.4.4) вектор дипольного момента  $\mathbf{p}$  будет иметь только  $z$ -компоненту  $p_z$ .

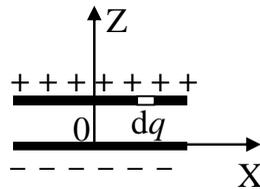


Рис. 4.4. Заряженный плоский конденсатор.

Учитывая, что при постоянной

плотности заряда  $\sigma$  заряд малого участка пластины пропорционален его площади:

$$dq = \sigma dS,$$

из (4.8) находим:

$$p = p_z = \int_S z dq(\mathbf{r}) = \int_S z \sigma dS = l \sigma \int_S dS = l \sigma S = lq.$$

Интегрирование проводится только по верхней пластине, поскольку на нижней  $z = 0$ .

Таким образом, плоский аксиально симметричный заряженный конденсатор на больших расстояниях от него эквивалентен диполю с моментом  $p = ql$ . Напряженность поля диполя в произвольной точке с полярными координатами  $(r, \varphi)$  была найдена в задаче 4.3.3, откуда получаем:

$$E(r, \varphi) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3\cos^2 \varphi + 1} = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3\cos^2 \varphi + 1},$$

где угол  $\varphi$  отсчитывается от оси  $Z$ . На больших расстояниях от конденсатора создаваемое им электрическое поле близко к полю точечного диполя и убывает по закону  $E(r) \sim \frac{1}{r^3}$ .

$$\text{Ответ: } E(r, \varphi) = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3\cos^2 \varphi + 1}.$$

**Задача 4.3.8.** Два точечных заряда  $q$  и  $q' = -nq$  ( $n > 1$ ) расположены на расстоянии  $d$  друг от друга. Доказать, что одна из эквипотенциальных поверхностей такой системы есть сфера. Определить радиус этой сферы и положение ее центра.

### Решение

Свяжем систему координат с положением зарядов, а именно, поместим начало координат  $O$  в точку, где находится заряд  $q$ , а ось  $X$  направим по линии, соединяющей заряды. Пусть заряд  $q'$  находится в точке  $A$ . Ввиду осевой симметрии системы достаточно рассмотреть картину в какой-либо плоскости, содержащей отрезок  $OA$ .

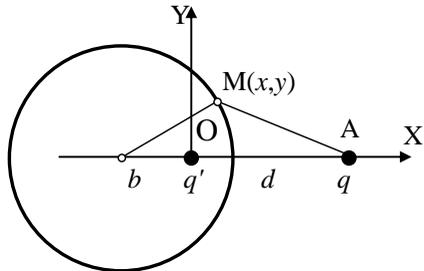


Рис.4.5. К нахождению эквипотенциальной поверхности двух точечных зарядов разного знака.

Вычислим потенциал в произвольной точке  $M(x, y)$  этой плоскости (см. рис. 4.5):

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q'}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{q}{\sqrt{(d-x)^2 + y^2}} \right). \quad (4.12)$$

Примем потенциал в точке М равным нулю.

Из уравнения (4.12) и условия  $\varphi(x, y) = 0$  получим:

$$\begin{aligned} q^2(x^2 + y^2) &= q'^2(d^2 + x^2 + y^2 - 2xd); \\ (q^2 - q'^2)x^2 + (q^2 - q'^2)y^2 + 2q'^2xd - q'^2d^2 &= 0; \\ y^2 + \left(x + \frac{q'^2d}{q^2 - q'^2}\right)^2 &= \frac{q'^2q^2d^2}{(q^2 - q'^2)^2}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Получившееся уравнение кривой в плоскости ХУ является уравнением окружности, центр которой находится в точке с координатой

$$b = -\frac{q'^2d}{q^2 - q'^2} = -\frac{d}{n^2 - 1}$$

Записывая уравнение (4.13) через координату  $x_1 = x - b$ , получаем уравнение окружности в стандартном виде:

$$y^2 + x_1^2 = R,$$

$$\text{где } R = \left| \frac{q'q}{q^2 - q'^2} \right| d = \frac{nd}{n^2 - 1}.$$

$$\text{Ответ: } R = \frac{nd}{n^2 - 1}, \quad b = -\frac{d}{n^2 - 1}.$$

#### 4.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 4.4.1** ([2], 3.49). Потенциал поля в некоторой области пространства зависит только от координаты  $x$  как  $\varphi = -ax^3 + b$ , где  $a$  и  $b$  – некоторые постоянные. Найти распределение объёмного заряда  $\rho(x)$ .

$$\text{Ответ: } \rho(x) = 6\epsilon_0 ax.$$

**Задача 4.4.2**. Точечный диполь с электрическим моментом  $\mathbf{p}$ , ориентированный в положительном направлении оси  $Z$ , находится в начале координат. Для точки, отстоящей от диполя на расстояние  $r$ , найти проекцию вектора напряженности электрического поля  $E_z$  и проекцию  $E_{\perp}$  на плоскость, перпендикулярную оси  $Z$ . В каких точках  $\mathbf{E} \perp \mathbf{p}$ ?

$$\text{Ответ: } E_z = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3\cos^2\vartheta - 1}{r^3}, \quad E_{\perp} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3\sin\vartheta\cos\vartheta}{r^3};$$

$E \perp p$  в точках, лежащих на поверхности конуса с осью вдоль  $Z$  и углом полураствора  $\vartheta$ , для которого  $\cos\vartheta = 1/\sqrt{3}$  ( $\vartheta = 54,7^\circ$ ),

$$\text{в этих точках } E = E_{\perp} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p\sqrt{2}}{r^3}.$$

**Задача 4.4.3** ([2], 3.41). Две параллельные тонкие нити равномерно заряжены с линейной плотностью  $\lambda$  и  $-\lambda$ . Расстояние между нитями  $l$ . Найти потенциал и модуль напряжённости электрического поля на расстоянии  $r \gg l$  под углом  $\theta$  к вектору  $l$  (см. рис. 4.10).

$$\text{Ответ: } \varphi = \frac{\lambda l}{2\pi\epsilon_0} \cos\vartheta, \quad E = \frac{\lambda l}{2\pi\epsilon_0 r^2}.$$

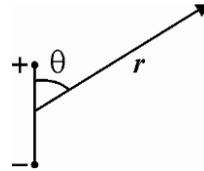


Рис. 4.10. К нахождению напряжённости поля двух заряженных нитей.

**Задача 4.4.4.** В центре полукольца радиуса  $R$  находится точечный заряд  $-q$ . Полукольцо имеет полный заряд  $+q$ , распределенный по закону  $\tau(\vartheta) \sim \cos\vartheta$ , где  $\tau$  – линейная плотность заряда,  $\vartheta$  – угол между радиусом-вектором рассматриваемой точки и осью симметрии системы  $Z$  (см. рис. 4.11). В дипольном приближении найти напряженность электрического поля на оси  $Z$  на расстоянии  $z$  от системы ( $z \gg R$ ).

$$\text{Ответ: } E(z) = \frac{1}{8} \cdot \frac{qR}{\epsilon_0 z^3}.$$

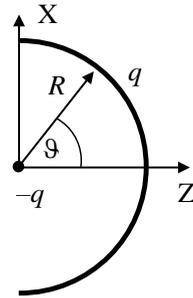


Рис. 4.11. Взаимное расположение точечного заряда и полукольца.

**Задача 4.4.5** ([2], 3.46 (б, в)). Диполь с моментом  $p$  находится на расстоянии  $r$  от длинной нити, заряженной равномерно с линейной плотностью  $\lambda$ . Найти силу  $F$ , действующую на диполь, если вектор  $p$  ориентирован:

- по радиус-вектору  $r$ ;
- перпендикулярно нити и радиус-вектору  $r$ .

$$\text{Ответ: а) } \mathbf{F} = -\frac{\lambda p}{2\pi\epsilon_0 r^2}; \text{ б) } \mathbf{F} = \frac{\lambda p}{2\pi\epsilon_0 r^2}.$$

**Задача 4.4.6.** Найти модуль дипольного момента  $p$  тонкого стержня длины  $l$ , линейная плотность заряда которого зависит от расстояния  $x$  до одного из его концов как  $\lambda = a(2x - l)$ , где  $a$  – положительная постоянная.

$$\text{Ответ: } p = \frac{al^3}{6}.$$

## Глава 5

## ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

## 5.1. Теоретический материал

**Свободные заряды** в веществе – это заряды (носители заряда), которые под действием электрического поля могут перемещаться в веществе на макроскопические расстояния.

**Проводники** – это тела, в которых имеются свободные заряды, а это означает, что при наложении электрического поля возникает направленное движение этих зарядов, то есть электрический ток.

**Внутри проводника** напряженность электростатического поля (в отсутствие сторонних сил) равна нулю:  $E(\mathbf{r}) = 0$ , следовательно, и  $\operatorname{div} E = 0$ .

**Объемная плотность свободных зарядов** внутри любого (в том числе заряженного и помещенного во внешнее постоянное электрическое поле) проводника (в отсутствие сторонних сил) равна нулю:  $\rho(\mathbf{r}) = 0$ .

**Потенциал проводника в электростатическом поле.** Любой (в том числе заряженный и помещенный во внешнее постоянное электрическое поле) проводник (в отсутствие сторонних сил) представляет собой эквипотенциальную область – его *объем и поверхность являются эквипотенциальными*.

**Явление электрической (электростатической) индукции** – это пространственное перераспределение зарядов проводника под действием внешнего (постоянного) электрического поля. В любом статическом поле поверхностные заряды распределяются так, чтобы внутри проводника сохранялись условия  $E = 0$  и  $\rho = 0$ .

**В точке непосредственно у поверхности однородного проводника напряженность электростатического поля равна:**

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \mathbf{n}, \quad (5.1)$$

где  $\sigma$  – поверхностная плотность заряда и  $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль к поверхности проводника.

Чем меньше радиус кривизны поверхности, тем больше поверхностная плотность заряда и напряженность электрического поля вблизи этой поверхности (при неизменном полном заряде проводника).

**Заземление** – соединение данного проводника с очень большим проводником, потенциал которого можно считать неизменным при переходе заряда от него на данный проводник. В качестве такого большого проводника обычно подразумевается Земля. Обычно потенциал заземленного проводника принимается равным нулю.

### **Свойства замкнутой проводящей оболочки.**

Замкнутая проводящая оболочка (в отсутствие сторонних сил) разделяет все пространство на внутреннюю и внешнюю части, в электростатическом отношении не зависящие друг от друга:

- внешнее электростатическое поле (внешние заряды) и заряды на поверхности проводника не создают никакого электрического поля внутри замкнутой проводящей однородной оболочки (в полости проводника);

- заряды внутри замкнутой проводящей оболочки (в полости) и заряды, индуцированные на ее внутренней поверхности, не создают никакого электрического поля вне полости.

Замкнутая проводящая оболочка *экранирует пространство в полости от внешнего электростатического поля* (внешних зарядов).

*Заземленная замкнутая проводящая оболочка экранирует внешнее пространство* от неподвижных зарядов, находящихся в объеме, окруженной этой оболочкой.

## **5.2. Основные типы задач (классификация)**

5.1. Вычисление потенциала проводника в присутствии других заряженных тел.

5.2. Вычисление распределения зарядов на поверхностях системы плоских проводников, для которых заданы величины их зарядов.

5.3. Нахождение распределения потенциала в пространстве, в котором расположена система из нескольких проводников, для которых заданы величины их зарядов или значения потенциалов.

## **5.3. Методы решения и примеры решения задач**

### **Задачи типа 5.1**

*Вычисление потенциала проводника в присутствии других заряженных тел*

**Метод решения.** Рассматривается как поле заряженных тел, так и поле зарядов, появляющихся на поверхностях проводников вследствие электростатической индукции. Используется определение потенциала, условие его непрерывности во всем пространстве и принцип суперпозиции.

**Задача 5.3.1.** Точечный заряд  $q$  находится на расстоянии  $d$  от центра незаряженного изолированного проводящего шара радиуса  $R < d$  (см. рис. 5.1). Найти потенциал шара  $\varphi_0$ , считая равным нулю потенциал на бесконечности.

### Решение

Попытка определить потенциал, вычисляя работу при приближении заряда  $q$  к шару, встречается с трудностями учета поля зарядов, появляющихся на поверхности шара за счет электростатической индукции. Но потенциал всего шара одинаков, поэтому найдем его в самой удобной точке – в центре. Потенциал создается зарядом  $q$  и индуцированными на поверхности шара зарядами. В центре шара вклад заряда  $q$  в потенциал равен  $\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{d}$ , а вклад индуцированных зарядов в потенциал равен нулю, т.к. все эти заряды находятся на одинаковом расстоянии  $R$  от центра шара, а их сумма равна нулю. Потенциал шара равен потенциалу его центра, т.е.

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{d}.$$

**Замечание.** Если на шаре имеется свой заряд  $Q$ , то от этого заряда добавляется вклад в потенциал  $\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R}$ , и потенциал шара становится равным  $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( \frac{q}{d} + \frac{Q}{R} \right)$ .

$$\text{Ответ: } \varphi_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{d}.$$

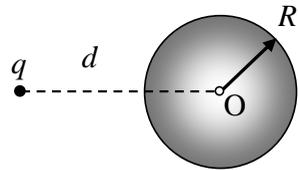


Рис. 5.1. Взаимное расположение проводящего шара и точечного заряда.

**Задача 5.3.2.** Проводящая сфера радиуса  $R$ , на которой находится заряд  $Q$ , имеет малое отверстие. Как будет меняться потенциал сферы, если точечный заряд  $q$  перемещать из бесконечности через отверстие внутрь неё?

### Решение

Вклад собственного заряда  $Q$  в потенциал сферы постоянен и равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R}.$$

Для случая, когда за-

ряд  $q$  находится вне сферы на расстоянии  $r > R$  от ее центра, потенциал сферы определен в задаче 5.3.1 и равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( \frac{q}{r} + \frac{Q}{R} \right).$$

Как только заряд окажется внутри сферы, на её внутренней поверхности возникнет индукционный заряд  $-q$  (распределённый неравномерно), а на внешней поверхности сферы – равномерно распределённый заряд  $+q$ , и потенциал сферы станет равным

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( \frac{q+Q}{R} \right).$$

Потенциал при дальнейшем движении заряда  $q$  внутри сферы изменяться не будет. Это следует из того, что независимо от положения заряда  $q$  внутри сферы поле вне сферы остаётся постоянным и не зависит от перемещения заряда внутри сферы. В этом случае работа по перемещению пробного заряда из бесконечности на поверхность сферы, а, следовательно, и потенциал сферы, будут постоянными.

**Ответ:** при  $r \geq R$ :  $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( \frac{q}{r} + \frac{Q}{R} \right)$ ;

при  $r \leq R$ :  $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( \frac{q+Q}{R} \right)$ .

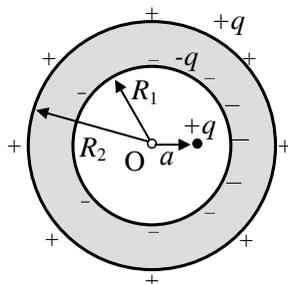


Рис. 5.2. Взаимное расположение проводящего сферического слоя и точечного заряда  $q$ .

**Задача 5.3.3.** Точечный заряд  $q$  находится на расстоянии  $a$  от центра  $O$  незаряженного сферического проводящего слоя, внут-

ренний и наружный радиусы которого равны  $R_1$  и  $R_2$  соответственно (см. рис. 5.2). Найти потенциал  $\varphi_0$  в точке  $O$ , если  $a < R_1$ . Принять  $\varphi_\infty = 0$ .

### Решение

Вследствие электростатической индукции на внутренней поверхности слоя появится заряд  $(-q)$ , а на его внешней поверхности  $+q$ . Таким образом, в потенциал в центре сферического слоя вносят вклад три источника электрического поля: заряд  $+q$ , равномерно распределенный по внешней поверхности слоя с радиусом  $R_2$ , заряд  $(-q)$ , распределенный неравномерно по внутренней поверхности слоя с радиусом  $R_1$ , и заряд  $q$ , расположенный от центра на расстоянии  $a$ .

Разобьем внутреннюю поверхность слоя на небольшие части, каждая из которых имеет заряд  $\Delta q_i$ . Так как все индуцированные заряды на внутренней поверхности расположены от центра на одинаковом расстоянии  $R_1$ , то их вклад в потенциал составит:

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{\Delta q_i}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_1} \sum_i \Delta q_i = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R_1}.$$

Аналогично вклад в потенциал зарядов на внешней поверхности  $\varphi_2 = +\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R_2}$ . В итоге потенциал в точке  $O$  будет равен:

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot q \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{a} \right)$$

**Ответ:** 
$$\varphi_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{a} \right).$$

### Задачи типа 5.2

*Вычисление распределения зарядов на поверхностях системы плоских проводников, для которых заданы величины их зарядов.*

**Метод решения.** Рассматривается как поле заряженных тел, так и поле зарядов, появляющихся на поверхностях проводников вследствие электростатической индукции. Используется условие равенства нулю напряженности электрического поля внутри проводника.

**Задача 5.3.4.** Две изолированные тонкие металлические пластины с зарядами  $Q_1 > 0$  и  $Q_2 > 0$  расположены параллельно друг другу на расстоянии  $d$  (рис. 5.3). Площадь каждой пластины  $S$ . Считая, что линейные размеры пластин много больше расстояния  $d$  и толщины пластин, найти плотности зарядов на всех четырех поверхностях пластин и разность потенциалов между ними.

### Решение

Поскольку размеры пластин велики по сравнению с их толщиной, можно пренебречь зарядами на торцах пластин. Так как внутри металлических пластин  $E = 0$ , то как заряды  $Q_1$  и  $Q_2$ , так и индуцированные заряды равномерно распределятся на четырех плоскостях с поверхностными плотностями  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Напряженности электрических полей, создаваемых этими зарядами, направлены перпендикулярно поверхностям пластин и равны:

$$E_i = \frac{\sigma_i}{2\varepsilon_0},$$

где  $\sigma_i$  – суммарная поверхностная плотность зарядов  $Q_1$ ,  $Q_2$  и индуцированных зарядов на  $i$ -той поверхности пластин.

По принципу суперпозиции в любой точке пространства напряженности полей от всех 4-х заряженных поверхностей пластин складываются. Тогда суммарная напряженность поля  $E$  в произвольной точке будет равна:

$$E = \sum_{i=1}^4 E_i = E_1 + E_2 + E_3 + E_4.$$

Так как сумма индуцированных зарядов в каждой из пластин равна нулю, можно записать:

$$(\sigma_1 + \sigma_2)S = Q_1, \quad (5.2)$$

$$(\sigma_3 + \sigma_4)S = Q_2. \quad (5.3)$$

Возьмем воображаемый прямой цилиндр, основания которого находятся внутри соответствующих пластин (на рис. 5.3 и 5.4 он изображен пунктиром). Применяем к поверхности цилиндра теорему Гаусса:

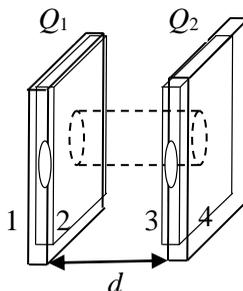


Рис. 5.3. Взаимное расположение двух тонких металлических пластин.

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sigma_2 S_0 + \sigma_3 S_0.$$

Здесь  $S_0$  – площадь оснований цилиндра.

Поток вектора  $\mathbf{E}$  через боковую поверхность цилиндра равен нулю, т.к. вектор  $\mathbf{E}$  параллелен этой поверхности. Кроме того, поток вектора  $\mathbf{E}$  через основания цилиндра равен нулю, т.к.  $\mathbf{E} = 0$  внутри металлической пластины. Поэтому

$$\sigma_2 S_0 + \sigma_3 S_0 = 0,$$

откуда  $\sigma_2 = -\sigma_3$ . (5.4)

Следовательно, внутри каждой пластины поля, создаваемые поверхностями 2 и 3, взаимно скомпенсированы. Так как в толще пластин  $\mathbf{E} = 0$ , то поля от поверхностей 1 и 4 тоже должны быть скомпенсированы, что возможно, если

$$\sigma_1 = \sigma_4. \quad (5.5)$$

Между пластинами напряженности электрических полей  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_4$  направлены в противоположные стороны, поэтому  $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_4 = 0$ , а  $\mathbf{E}_2$  и  $\mathbf{E}_3$  сонаправлены и равны по величине (рис. 5.4), откуда модуль напряженности поля в этом пространстве равен:

$$E = 2E_2 = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0}.$$

Разность потенциалов между пластинами составляет:

$$U = Ed = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} d. \quad (5.6)$$

Записывая совместно уравнения (5.2) – (5.5), получаем систему:

$$\begin{cases} \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{Q_1}{S}, \\ \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{Q_2}{S}. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим:

$$\sigma_1 = \frac{Q_1 + Q_2}{2S}, \quad \sigma_2 = \frac{Q_1 - Q_2}{2S}.$$

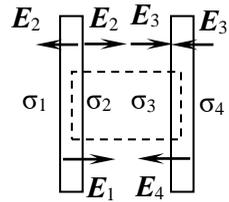


Рис. 5.4. Направление векторов напряженности электрических полей от боковых поверхностей пластин.

$$\sigma_3 = -\frac{Q_1 - Q_2}{2S}, \quad \sigma_4 = \frac{Q_1 + Q_2}{2S}.$$

Применяя формулу (5.5), получаем:

$$U = \frac{Q_1 - Q_2}{2S\epsilon_0} d.$$

**Ответ:**  $\sigma_1 = \frac{Q_1 + Q_2}{2S}, \quad \sigma_2 = \frac{Q_1 - Q_2}{2S}, \quad \sigma_3 = -\frac{Q_1 - Q_2}{2S},$

$$\sigma_4 = \frac{Q_1 + Q_2}{2S}, \quad U = \frac{Q_1 - Q_2}{2S\epsilon_0} d.$$

### Задачи типа 5.3

*Нахождение распределения потенциала в пространстве, в котором расположена система из нескольких проводников, для которых заданы величины их зарядов или значения потенциалов.*

**Метод решения.** Использование формул для определения потенциала и условия его непрерывности. Если в задаче распределение электростатического поля обладает элементами симметрии, то, пользуясь теоремой Гаусса, можно найти напряженность поля в изучаемом пространстве, а затем путём интегрирования рассчитать потенциал в заданной точке.

**Задача 5.3.5.** Металлический шар радиуса  $R_1$ , обладающий положительным зарядом  $q$ , окружен расположенным концентрически незаряженным металлическим шаровым слоем с внутренним радиусом  $R_2$  и внешним  $R_3$ . Построить графики зависимостей напряженности поля  $E$  и потенциала  $\varphi$  от расстояния до центра шара. Принять  $\varphi_\infty = 0$ .

#### Решение

Напряженность поля находим по теореме Гаусса, используя в качестве вспомогательных поверхностей концентрические сферы произвольного радиуса  $r$  (на рис. 5.5 такая поверхность  $S$  для области  $r > R_3$  изображена пунктиром, стрелками показано направление вектора напряженности  $E$ ).

За счет электростатической индукции на внутренней поверхности слоя радиуса  $R_2$  по-

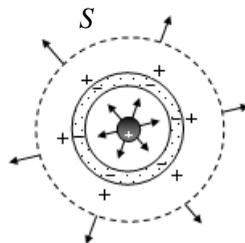


Рис. 5.5. Металлический шар внутри проводящего шарового незаряженного слоя.

явится заряд  $(-q)$  (все силовые линии поля заряда  $q$  должны заканчиваться на отрицательных зарядах). Из закона сохранения заряда следует, что на внешней поверхности слоя радиуса  $R_3$  должен появиться заряд  $+q$ . По теореме Гаусса находим напряженность электрического поля:

$$r > R_3 : \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2};$$

$$R_2 < r < R_3 : \quad E = 0;$$

$$R_1 < r < R_2 : \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2};$$

$$r < R_1 : \quad E = 0.$$

График зависимости  $E(r)$  изображен на рис. 5.6. Отметим, что на тех поверхностях, где есть индуцированные заряды, напряженность не определена (испытывает скачок). Это связано с выбором модели поверхности как не имеющей толщины. В реальных материалах электрическое поле вблизи заряженной поверхности меняется очень быстро на расстояниях порядка нескольких атомных слоев. В этой области модель не имеющей толщины поверхности

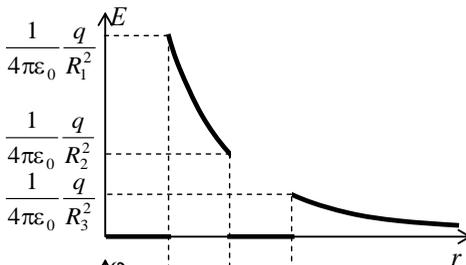


Рис. 5.6. Зависимость модуля напряженности  $E$  от расстояния  $r$  до центра шара.

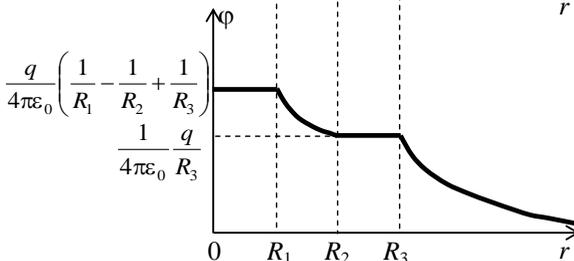


Рис. 5.7. Зависимость потенциала  $\varphi$  от расстояния  $r$  до центра шара.

оказывается слишком грубой и требует уточнения с учетом свойств составляющих ее атомов и молекул.

Для расчета потенциала используем его связь с напряженностью поля и условие его непрерывности. С учетом  $\varphi_\infty = 0$  получаем

следующий ответ:

$$r \geq R_3 \quad : \quad \varphi_1(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r};$$

$$R_2 \leq r \leq R_3: \quad \varphi_2(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R_3} \text{ — потенциал постоянен;}$$

$$R_1 \leq r \leq R_2: \quad \varphi_3(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q}{r} + C.$$

Константа  $C$  определяется из условия непрерывности потенциала при  $r = R_2$ :

$$\varphi_2(R_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R_3} = \varphi_3(R_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R_2} + C,$$

откуда

$$C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot q \left( \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Итак, в области  $R_1 \leq r \leq R_2$  имеем:

$$\varphi_3(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot q \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right).$$

При  $r \leq R_1$  потенциал остается постоянным и равным

$$\varphi_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot q \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right).$$

График зависимости  $\varphi(r)$  представлен на рис. 5.7.

**Замечание.** Разумеется, ответ можно получить сразу, если использовать известные формулы для потенциала сферы радиуса  $R$ :

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r} \text{ при } r \geq R;$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R} = \text{const при } r \leq R$$

и принцип суперпозиции.

$$\text{Ответ: } r > R_3: \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}, \quad \varphi_1(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r};$$

$$R_2 < r < R_3: \quad E = 0, \quad \varphi_2(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R_3};$$

$$R_1 < r < R_2: \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}, \quad \varphi_3(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right);$$

$$r < R_1: E = 0 \quad , \quad \varphi_4 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right).$$

**Задача 5.3.6.** В условиях задачи 5.3.5. внешняя поверхность сферического слоя заземлена (рис. 5.8). Найти потенциал шара во всем пространстве.

### Решение

Земля является бесконечно большим проводящим телом. При соединении внешней поверхности шарового слоя с Землей все заряды с его внешней поверхности "уходят" на Землю, и остается только заряд на внутренней поверхности оболочки, а внешняя поверхность не заряжена. При этом суммарный заряд шарового слоя и шара внутри него:

$$Q_{\Sigma} = Q + (-Q) = 0,$$

поэтому вне шарового слоя  $E = 0$  (по теореме Гаусса).

Внутри шарового слоя поле останется таким же, как в задаче 5.5.

$$r < R_1: \quad E = 0$$

$$R_1 < r < R_2: \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2};$$

$$r \geq R_2: \quad E = 0.$$

Определим распределение потенциала в этом случае. Считая, как и ранее, потенциал на бесконечности равным нулю, получаем:

$$r \geq R_2: \quad \varphi_1(r) = 0;$$

$$R_1 \leq r \leq R_2: \quad \varphi_2(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r} + C.$$

Константа  $C$  определяется из условия непрерывности потенциала при  $r = R_2$ :

$$\varphi_1(R_2) = 0 = \varphi_2(R_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R_2} + C,$$

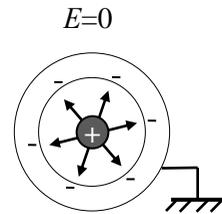


Рис. 5.8. Взаимное расположение металлического шара и заземленного проводящего шарового слоя.

$$\text{откуда } C = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R_2}.$$

Итак, в области  $R_1 \leq r \leq R_2$  имеем:

$$\varphi_2(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right).$$

При  $r \leq R_1$  потенциал остается постоянным и равным

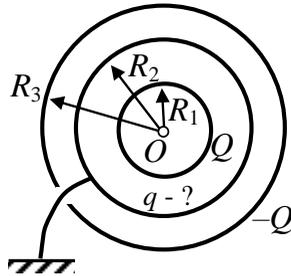
$$\varphi_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

$$\text{Ответ: } r \leq R_1: \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

$$R_1 \leq r \leq R_2: \quad \varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right);$$

$$r \geq R_2: \quad \varphi = 0;$$

**Задача 5.3.7.** Имеются три концентрические проводящие сферы 1–3 с радиусами  $R_1 < R_2 < R_3$ . Сферы 1 и 3 несут заряды соответственно  $+Q$  и  $-Q$ . Средняя сфера 2 заземлена проводником, искажающим действием которого на поле можно пренебречь (рис. 5.9). Найти заряд  $q$  заземленной сферы 2.



### Решение

Пусть заряд, индуцированный на сфере 2, равен  $q$ . Считаем потенциал Земли равным нулю, поэтому и потенциал  $\varphi_2$  заземленной сферы тоже равен нулю:

Рис. 5.9. Взаимное расположение трех концентрических проводящих сфер.

$$\begin{aligned} 0 = \varphi_2 &= -\int_{R_2}^{\infty} E(r) dr = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_2}^{R_3} \frac{q+Q}{r^2} dr - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_3}^{\infty} \frac{q+Q-Q}{r^2} dr = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left( \frac{1}{r} \right) \Big|_{R_3}^{\infty} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (q+Q) \left( \frac{1}{r} \right) \Big|_{R_2}^{R_3} = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{R_3} + \frac{Q}{R_2} + \frac{q}{R_2} - \frac{Q}{R_3} - \frac{q}{R_3} \right).$$

Отсюда

$$\frac{q}{R_2} = Q \left( \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} \right) \text{ или } q = Q \left( \frac{R_2}{R_3} - 1 \right) < 0.$$

*Замечание.* При решении этой задачи можно воспользоваться известными формулами для потенциала заряженной сферы и сразу записать потенциал средней заземленной сферы как суперпозицию потенциалов, создаваемых тремя сферами:

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q}{R_2} + \frac{q}{R_2} - \frac{Q}{R_3} \right) = 0,$$

откуда сразу получаем ответ:

$$q = Q \left( \frac{R_2}{R_3} - 1 \right).$$

Отметим, что теперь, зная заряды всех сфер, можно легко найти зависимости  $E(r)$  и  $\varphi(r)$ .

**Ответ:**  $q = Q \left( \frac{R_2}{R_3} - 1 \right) < 0.$

**Задача 5.3.8.** Имеются три незаряженные концентрические сферы 1-3 с радиусами  $R_1 < R_2 < R_3$ . На вторую сферу помещают заряд  $+Q$ , а сферы 1 и 3 соединяют проводником, искажающим действием которого можно пренебречь (рис. 5.10). Найти зависимости  $E(r)$  и  $\varphi(r)$  и построить их графики.

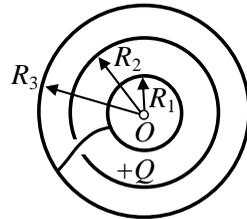


Рис. 5.10. Система из трёх концентрических сфер, в которой внутренняя и внешняя сферы соединены проводником.

### Решение

Для решения задачи нужно сначала узнать заряды сфер 1 и 3. Пусть на сфере с радиусом  $R_1$  индуцируется заряд  $q_1$ , на сфере с радиусом  $R_3$  — заряд  $q_2$ . Тогда  $q_1 + q_2 = 0$ ,  $\varphi_1 = \varphi_3$  и, следовательно,

$$0 = |\Delta\varphi_{13}| = \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{q_1}{r^2} dr + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_3}^{\infty} \frac{q_1 + Q}{r^2} dr =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (Q + q_1) \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ Q \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) + q_1 \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_3} \right) \right] = \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( Q \frac{R_3 - R_2}{R_2 R_3} + q_1 \frac{R_3 - R_1}{R_1 R_3} \right) E
 \end{aligned}$$

Отсюда

$$q_1 = -q_2 = -Q \frac{R_3 - R_2}{R_3 - R_1} \cdot \frac{R_1}{R_2},$$

при этом  $|q_1| < |Q|$ .

Зная заряды всех сфер, можно по аналогии с задачей 5.3.4 найти зависимости  $E(r)$  и  $\varphi(r)$  и построить их графики (рис. 5.11).

**Замечание.** Для определения зарядов сфер 1, 3 проще воспользоваться готовыми формулами для потенциала сферы и сразу найти потенциал каждой сферы как суперпозицию потенциалов, создаваемых тремя сферами:

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{R_2} + \frac{Q}{R_2} + \frac{q_2}{R_3} \right),$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R_3},$$

$$q_1 = -q_2, \varphi_1 = \varphi_3.$$

Отсюда  $\frac{q_1}{R_1} + \frac{Q}{R_2} - \frac{q_1}{R_3} = \frac{Q}{R_3}$  и  $q_1 = -Q \frac{R_3 - R_2}{R_3 - R_1} \cdot \frac{R_1}{R_2}$ .

**Ответ:**

$$\underline{r < R_1}: \quad E(r) = 0; \quad \varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{R_2} + \frac{Q}{R_2} + \frac{q_2}{R_3} \right) \varphi(r);$$

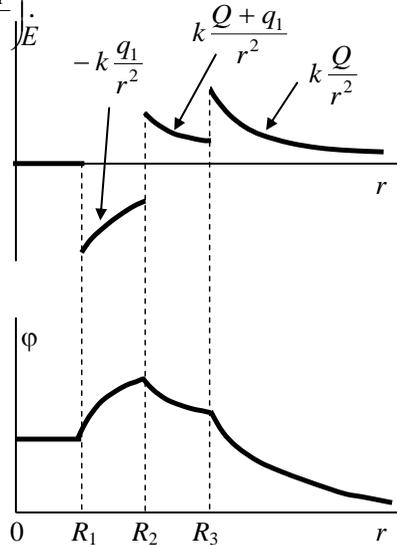


Рис. 5.11. Зависимость модуля напряженности  $E$  и потенциала  $\varphi$  от расстояния  $r$  до центра сфер.

$$\begin{aligned} \underline{R_1 < r < R_2}: \quad E(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{r^2}; \quad \varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r} + \frac{Q}{R_2} - \frac{q_1}{R_3} \right); \\ \underline{R_2 < r < R_3}: \quad E(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q + q_1}{r^2}; \quad \varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q + q_1}{r}; \\ \underline{r > R_3}: \quad E(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}; \quad \varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}. \end{aligned}$$

#### 5.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 5.4.1.** Заряды распределены равномерно по поверхности двух концентрических сфер с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , причем поверхностные плотности зарядов на обеих сферах одинаковы. Найти плотность заряда  $\sigma$ , если потенциал в центре сфер равен  $\varphi_0$ , а на бесконечности равен нулю.

$$\text{Ответ: } \sigma = \frac{\epsilon_0 \varphi_0}{R_1 + R_2}.$$

**Задача 5.4.2.** Две концентрические проводящие сферы с радиусами  $R$  и  $2R$  заряжены так, что на внутренней сфере заряд  $q$ , а на внешней  $2q$ . На расстоянии  $3R$  от центра сфер потенциал равен  $\varphi$ . Найти  $R$ .

$$\text{Ответ: } R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{\varphi}.$$

**Задача 5.4.3.** Внутри незаряженного металлического шара радиуса  $R$  имеется произвольно расположенная относительно центра сферическая полость радиуса  $r$ , в которой расположен неподвижный точечный заряд  $q$  на расстоянии  $a$  от центра полости. Найти потенциал  $\varphi$  электрического поля в центре полости.

$$\text{Ответ: } \varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right).$$

**Задача 5.4.4.** Незаряженные концентрические металлические сферы имеют радиусы  $R_1$  и  $R_2$ . Между сферами помещен на расстоянии  $r$  от центра точечный заряд  $+q$ . Найти разность потенциалов между сферами.

$$\text{Ответ: } \Delta\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right).$$

**Задача 5.4.5.** Найти потенциал  $\varphi(r)$ , создаваемый двумя концентрическими металлическими сферами с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , заряженными зарядами  $q_1$  и  $q_2$  соответственно ( $R_1 < R_2$ ).

$$\begin{aligned} \text{Ответ: } R_2 \leq r: \quad \varphi(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 + q_2}{r}; \\ R_1 \leq r \leq R_2: \quad \varphi(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_2}{R_2} + \frac{q_1}{r} \right); \\ r \leq R_1: \quad \varphi(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{R_1} + \frac{q_2}{R_2} \right). \end{aligned}$$

**Задача 5.4.6.** Три концентрические металлические сферы имеют радиусы  $R_1, R_2, R_3$  соответственно. На внутренней сфере заряд  $+Q$ , на внешней  $+2Q$ , средняя – не заряжена. Определить:

- распределение потенциала во всём пространстве;
- поверхностную плотность зарядов  $\sigma$  на внешних поверхностях всех сфер. Считать  $\varphi(\infty) = 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Ответ: } r \geq R_3: \quad \varphi(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3Q}{r}, \quad \sigma_3 = \frac{3Q}{4\pi R_3^2}; \\ R_1 \leq r \leq R_3: \quad \varphi &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{2}{R_3} + \frac{1}{r} \right), \quad \sigma_2 = \frac{Q}{4\pi R_2^2}; \\ r \leq R_1: \quad \varphi &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{2}{R_3} + \frac{1}{R_1} \right), \quad \sigma_1 = \frac{Q}{4\pi R_1^2}. \end{aligned}$$

**Задача 5.4.7.** Три концентрические металлические сферы имеют радиусы  $R, 2R, 3R$  соответственно. На средней сфере заряд  $+Q$ . В ней проделано отверстие, через которое проволокой соединены первоначально незаряженные внешняя и внутренняя сферы. Найти распределение потенциала во всем пространстве, считая  $\varphi(\infty) = 0$ .

*Ответ:*

$$3R < r: \quad \varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r};$$

$$2R < r < 3R: \quad \varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3}{4r} + \frac{1}{12R} \right);$$

$$R < r < 2R: \quad \varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{4r} + \frac{7}{12R} \right) \quad \varphi = kQ \left( -\frac{1}{4r} + \frac{7}{12R} \right);$$

$$r < R: \quad \varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{3R}.$$

**Задача 5.4.8** ([3], 108). Две проводящие концентрические сферы имеют радиусы  $R_1 = 10$  см и  $R_2 = 20$  см. На каждой из них равномерно распределен заряд  $q = +1,7 \cdot 10^{-8}$  Кл. Чему равна разность потенциалов  $V$  между ними и какова напряженность поля внутри сфер и снаружи?

$$\text{Ответ: } V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \cong 750 \text{ В};$$

$$\text{внутри первой сферы} \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2},$$

$$\text{вне второй сферы} \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2q}{r^2}$$

( $r$  – расстояние до центра сфер).

**Задача 5.4.9** ([3], 106). Две удаленные от остальных тел одинаковые металлические пластины площадью  $S$ , находящиеся друг от друга на очень малом по сравнению с их линейными размерами расстоянии  $d$ , заряжены: одна зарядом  $+q$ , а другая  $+2q$ . Какова разность потенциалов  $V$  между ними?

$$\text{Ответ: } V = \frac{qd}{2\epsilon_0 S}.$$

**Задача 5.4.10** ([2], 3.65б). Четыре большие металлические пластины расположены на малом расстоянии  $d$  друг от друга (см. рис. 5.12). Крайние пластины соединены проводником, а на

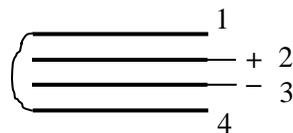


Рис. 5.12. Схема соединения металлических пластин.

внутренние пластины подана разность потенциалов  $\Delta\varphi$ . Найти: суммарный заряд на единицу площади каждой пластины.

$$\text{Ответ: } |\sigma_1| = \sigma_4 = \varepsilon_0 \Delta\varphi / 2d, \\ \sigma_2 = |\sigma_3| = 3\varepsilon_0 \Delta\varphi / 2d.$$

**Задача 5.4.11** ([3], 93). Из трех параллельных металлических пластинок А, В и С крайние А и В неподвижны и соединены с гальванической батареей (см. рис. 5.13), поддерживающей разность потенциалов  $V$  между ними постоянной. Средняя пластинка С сначала находится в контакте с верхней пластинкой А. Затем с помощью изолирующей ручки она перемещается по направлению к нижней пластинке. Пренебрегая краевыми эффектами, найти напряженности полей  $E_1$  и  $E_2$  в зазорах между пластинками в зависимости от переменного расстояния  $x$  между пластинками А и С, если сумма зазоров между пластинками равна  $d$ .

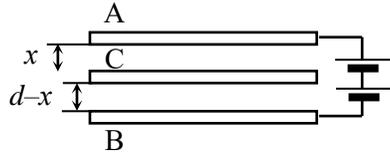


Рис. 5.13. Схема расположения металлических пластинок.

$$\text{Ответ: } E_1 = Vx / d^2, E_2 = V(x + d) / d^2.$$

**Задача 5.4.12** ([3], 85). Из трех concentрических бесконечно тонких металлических сфер с радиусами  $R_1 < R_2 < R_3$ , находящихся в вакууме, крайние заземлены, а средней сообщен электрический заряд  $Q$ . Найти напряженность электрического поля во всем пространстве.

$$\text{Ответ: } E = 0 \text{ при } r < R_1 \text{ и } R_3 < r < \infty;$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \cdot \frac{R_1(R_2 - R_3)}{R_2(R_3 - R_1)} \text{ при } R_1 < r < R_2;$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \cdot \frac{R_3(R_2 - R_1)}{R_2(R_3 - R_1)} \text{ при } R_2 < r < R_3.$$

## Глава 6

## МЕТОД ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

## 6.1. Теоретический материал

**Силовая линия** (*линия напряженности*) электрического поля – воображаемая направленная линия в пространстве, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением напряженности электрического поля в этой точке (в случае переменных электрических полей в данный момент времени).

**Свойства силовых линий электрического поля:**

- 1) через любую точку электрического поля (где  $E(r) \neq 0$ ) можно провести силовую линию;
- 2) силовые линии не пересекаются;
- 3) силовые линии электростатического поля начинаются на положительных зарядах или в бесконечности и заканчиваются на отрицательных зарядах или в бесконечности;

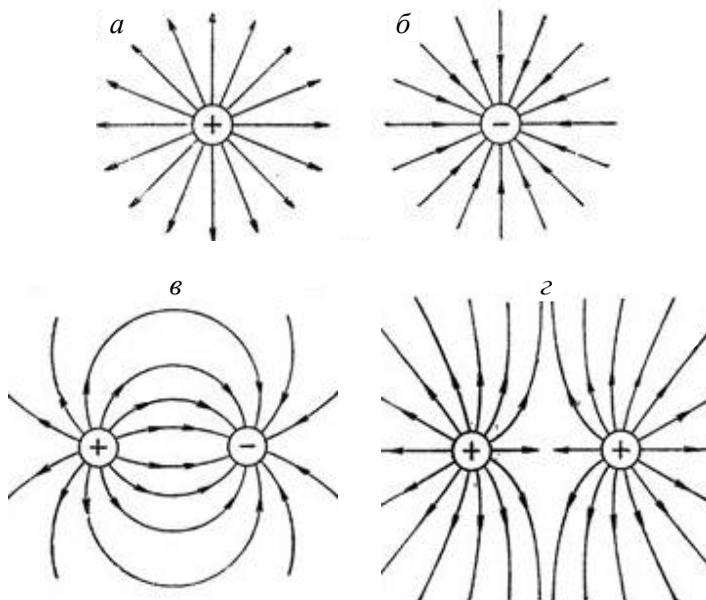


Рис. 6.1. Картины силовых линий положительного точечного заряда (а), отрицательного точечного заряда (б), двух разноименных (в) и одноименных (г) (одинаковых по модулю) точечных зарядов.

4) силовые линии проводятся гуще там, где модуль напряженности поля больше.

*Картины силовых линий* положительного и отрицательного точечных зарядов приведены на рис. 6.1 (а и б).

*Картины силовых линий* двух разноименных и одноименных (одинаковых по модулю) точечных зарядов приведены на рис. 6.1 (в и г).

**Эквипотенциальная поверхность** – поверхность равного потенциала (результат объединения точек поля с равным потенциалом).

**Свойства эквипотенциальных поверхностей:**

1) через любую точку электрического поля можно провести эквипотенциальную поверхность;

2) эквипотенциальные поверхности не пересекаются в области пространства, где напряженность поля отлична от нуля;

3) эквипотенциальные поверхности замкнуты (непрерывны вследствие непрерывности потенциала) или уходят в бесконечность;

4) если эквипотенциальные поверхности проводить так, что потенциал получает одно и то же приращение, то эквипотенциальные поверхности ближе друг к другу там, где больше напряженность поля;

5) эквипотенциальные поверхности перпендикулярны силовым линиям электрического поля.

**Теорема единственности в электростатике.**

Решение уравнения Пуассона (Лапласа) с заданными граничными условиями для потенциала  $\varphi(\mathbf{r})$  является единственным. Можно найти лишь одну функцию  $\varphi(\mathbf{r})$ , которая удовлетворяет уравнению Пуассона (Лапласа) и этим граничным условиям.

**Метод электростатических изображений (или метод зеркальных отображений)** – способ действий, позволяющий в некоторых случаях получить очень простые решения для поля зарядов, распределенных по поверхности проводников. Метод основывается на теореме единственности в электростатике и состоит в подборе таких дополнительных фиктивных зарядов – "изображений", которые вместе с заданными зарядами создавали бы поле, у которого одна из эквипотенциальных поверхностей совпала бы с поверхностью данного проводника. В области вне проводника поле фиктивных зарядов полностью моделирует поле, создаваемое поверхност-

ными зарядами, расположенными на проводнике, так что поле вне проводника полностью совпадает с полем исходной системы.

В курсе общей физики обычно рассматриваются два случая, приведенных ниже.

### Точечный заряд $q$ около проводящей плоскости

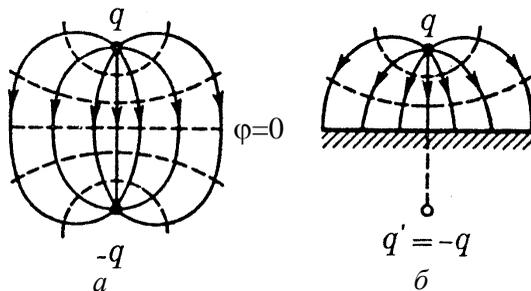


Рис. 6.2. Картина силовых линий двух разноименных точечных зарядов  $q$  и  $(-q)$  (а) и точечного заряда  $q$  над проводящей плоскостью с потенциалом  $\varphi = 0$  (б).

На рис. 6.2 (а) видно, что поле двух противоположных по знаку, но одинаковых по величине зарядов имеет плоскую эквипотенциальную поверхность с потенциалом  $\varphi = 0$  (пунктир) посередине между зарядами. Если поместить на нее проводящую плоскость, то поле не изменится, и получится показанная на рис. 6.3 (б) система, а фиктивный заряд  $q'$  будет зеркальным отображением заданного заряда  $q$  (подробно этот случай рассмотрен далее в задаче 6.3.2).

### Точечный заряд $q$ около проводящей сферы (шара)

Среди эквипотенциальных поверхностей системы двух противоположных по знаку и неравных по величине зарядов  $q$  и  $q'$  существует одна сферическая поверхность, потенциал которой  $\varphi = 0$  (см. задачу 4.3.8 главы 4). Это позволяет решить данную задачу (подробное решение приведено ниже в задаче 6.3.5).

Пусть имеется проводящая заземленная сфера (или шар) радиуса  $r$  (потенциал сферы равен нулю) и заряд  $q$  на расстоянии  $b > r$  от ее центра (рис. 6.3). Чтобы обеспечить совпадение эквипотенциальной поверхности  $\varphi = 0$  с заданной сферой, нужно поместить дополнительный фиктивный заряд—"изображение" величиной  $q' = -qr/b$  на расстоянии  $a = r^2/b$  от центра сферы на прямой, проведенной через заряд  $q$  и центр сферы  $O$  (см. далее решение задачи 6.3.5). Поле этих двух зарядов *вне сферы* (и только вне сферы) полностью совпадает с исходным полем, создаваемым зарядом  $q$  и

поверхностными зарядами на сфере. Поле внутри сферы при этом равно нулю

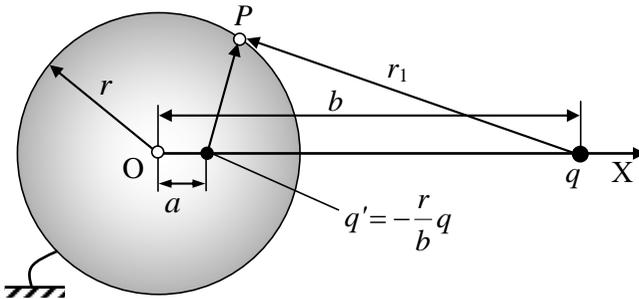


Рис. 6.3. Взаимное расположение точечного заряда  $q$ , заземленного металлического шара и заряда-"изображения"  $q'$ .

Разумеется, задача может быть обращена. Если внутри заземленной сферы находится на расстоянии  $a$  от центра заряд  $q'$ , то поле внутри сферы совпадет с полем системы двух зарядов:  $q'$  и заряда-"изображения"  $q = -bq'/r$ , расположенного на расстоянии  $b = r^2/a$  в соответствии с тем же рисунком.

## 6.2. Основные типы задач (классификация)

6.1. Определение силы взаимодействия точечного заряда, диполя или заряженного тела с проводящей плоскостью, а также нахождение напряженности и потенциала электрического поля такой системы и поверхностной плотности индуцированных на плоскости зарядов.

6.2. Вычисление силы взаимодействия точечного заряда с проводящей сферой, а также определение напряженности и потенциала электрического поля такой системы.

## 6.3. Методы решения и примеры решения задач

### Задачи типа 6.1

*Определение силы взаимодействия точечного заряда, диполя или заряженного тела с проводящей плоскостью, а также нахождение напряженности и потенциала электрического поля такой системы и поверхностной плотности индуцированных на плоскости зарядов.*

**Метод решения.** Применение метода электростатических изображений. Замена полей, создаваемых зарядами на поверхности плоского проводника, полем одного (или более) фиктивного точечного заряда позволяет легко вычислить силу взаимодействия, применяя закон Кулона. Чтобы определить плотность индуцированных зарядов, надо найти напряженность поля, создаваемого этой системой точечных зарядов в произвольной точке на поверхности проводника, и затем применить формулу (5.1) из главы 5 для напряженности электрического поля вблизи поверхности проводника:  $\mathbf{E} = (\sigma / \epsilon_0) \mathbf{n}$ .

**Задача 6.3.1.** На расстоянии  $h$  от проводящей бесконечной плоскости находится точечный заряд  $q$ . Определить модуль напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  в точке А, отстоящей от плоскости и от заряда на расстояние  $h$ .

### Решение

Строим заряд-"изображение"  $-q$  в соответствии с теоретическим материалом (рис. 6.4). Напряженность поля в точке А есть векторная сумма напряженностей  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$  от зарядов  $q$  и  $-q$ . Из геометрии задачи следует:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{h^2}, \quad E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{5h^2}.$$

По теореме косинусов:

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 - 2 E_1 E_2 \cos\vartheta,$$

где  $\cos\vartheta = \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ .

Отсюда получаем:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{5h^2} \sqrt{26 - 2\sqrt{5}}.$$

**Ответ:**  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{5h^2} \sqrt{26 - 2\sqrt{5}}.$

**Задача 6.3.2.** На расстоянии  $h$  от заземленной проводящей бесконечной плоскости находится точечный заряд  $q$ . Определить плотность индуцированного заряда в произвольной точке на плоскости.

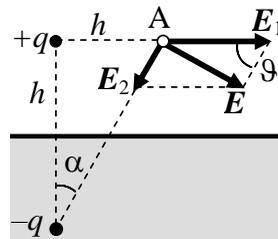


Рис. 6.4. К решению задачи 6.3.1: определение напряженности поля, создаваемого точечным зарядом  $+q$  над бесконечной проводящей плоскостью.

## Решение

Потенциал заземленной бесконечной плоскости считаем равным нулю. Проведем от заряда  $q$  перпендикуляр к проводящей плоскости и на его продолжении поместим заряд-«изображение» ( $-q$ ) на таком же расстоянии  $h$  от границы проводника (рис. 6.5). Поверхность нулевого потенциала системы зарядов  $q$  и ( $-q$ ) будет совпадать с поверхностью проводящей плоскости. Тогда в соответствии с теоремой единственности поле системы двух зарядов  $q$  и ( $-q$ ) над проводящей плоскостью будет полностью совпадать с полем исходной системы. Таким образом, мы заменили плоскость с индуцированными на ней зарядами зарядом-«изображением» ( $-q$ ).

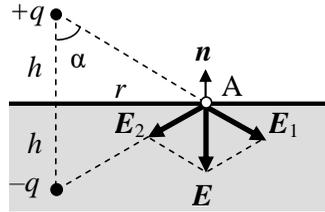


Рис. 6.5. К расчету поверхностной плотности заряда, индуцированного на бесконечной проводящей плоскости.

Благодаря симметрии системы положение произвольной точки  $A$  на плоскости можно задать всего одним параметром – расстоянием  $r$  этой точки от основания перпендикуляра, опущенного от заряда  $q$  на плоскость. Расстояние от точки  $A$  плоскости до заряда  $q$  равно  $\sqrt{r^2 + h^2}$ , а модуль напряженности поля этого заряда

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{h^2 + r^2}.$$

Учитывая, что  $E_1 = E_2$ , находим напряженность  $E$  в точке  $A$ , суммируя векторы  $E_1$  и  $E_2$ :

$$E = 2E_1 \cos\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2q}{h^2 + r^2} \cdot \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2qh}{(h^2 + r^2)^{3/2}},$$

$$E = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2qh}{(h^2 + r^2)^{3/2}} \mathbf{n},$$

где  $\mathbf{n}$  – единичный вектор нормали к проводящей плоскости (см. рис. 6.5).

Следовательно, вектор  $E$  направлен перпендикулярно плоскости в сторону отрицательного заряда-«изображения». Вблизи проводника

$$E = E_n = \sigma / \epsilon_0.$$

Приравнявая оба выражения для  $E$ , находим:

$$\sigma(r) = -\frac{qh}{2\pi(h^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Для проверки полученного результата вычислим полный заряд  $q'$ , индуцированный на плоскости. Он должен быть равен  $-q$ , так как все силовые линии, исходящие из заряда  $q$ , заканчиваются на плоскости. Чтобы вычислить  $q'$ , рассмотрим на плоскости кольцо, лежащее между окружностями радиусов  $r$  и  $r + dr$ . Площадь этого кольца равна  $2\pi r dr$ , и на нем находится заряд

$$dq' = \sigma(r) \cdot 2\pi r dr.$$

Интегрируя по  $r$  в пределах от нуля до бесконечности, находим полный заряд  $q'$ :

$$\begin{aligned} q' &= \int_0^{\infty} \sigma(r) 2\pi r dr = -qh \int_0^{\infty} \frac{r dr}{(r^2 + h^2)^{3/2}} = \\ &= -\frac{1}{2}qh \left( -\frac{2}{\sqrt{r^2 + h^2}} \right) \Big|_0^{\infty} = -q. \end{aligned}$$

**Ответ:**  $\sigma(r) = -\frac{qh}{2\pi(r^2 + h^2)^{3/2}}.$

**Задача 6.3.3.** Точечный заряд  $q$  помещен на биссектрисе прямого двугранного угла между двумя большими заземленными проводящими плоскостями

(рис. 6.6). Используя метод электростатических изображений, найти систему точечных зарядов, которые моделируют электрическое поле заряда  $q$  и проводящих плоскостей.

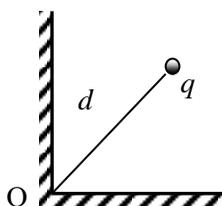


Рис. 6.6. Взаимное расположение двугранного угла, образованного проводящими плоскостями, и точечного заряда.

### Решение

Применяя метод электростатических изображений, найдем систему точечных зарядов, моделирующих электрическое поле в области нахождения заряда  $q$ . Для этого будем последовательно отражать заряд  $q$  относительно поверхностей двугранного угла, меняя при этом знак заряда. Конечная совокупность точечных зарядов должна обеспечивать равенство нулю потенциала всех точек

проводника. При этом заряды-"изображения" расположатся на окружности с центром в точке  $O$ .

Получаем систему четырех точечных зарядов, расположенных, как показано на рис. 6.7.

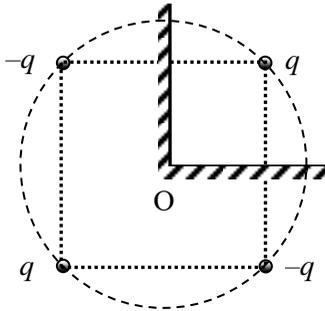


Рис. 6.7. Схема расположения точечного заряда  $q$  и его электростатических изображений.

*Замечание.* Конечную систему зарядов в таких задачах можно получить для двугранных углов, величина которых  $\varphi = \pi/n$ , где  $n$  – целое число. При этом полное число точечных зарядов будет равно  $2n$ . Например, для угла  $\varphi = \pi/3$  получится система из 6 точечных зарядов (3 положительных и 3 отрицательных); для угла  $\varphi = \pi/4$  – система из 8 точечных зарядов и т.д.

**Ответ:** система точечных зарядов показана на рис. 6.7.

**Задача 6.3.4.** Точечный электрический диполь находится над бесконечной заземленной металлической пластиной на расстоянии  $d$  от нее. Дипольный момент  $\mathbf{p}$  перпендикулярен пластине и направлен от неё (рис. 6.8). Найти напряженность электрического поля в точке  $A$ , находящейся между плоскостью и диполем на расстоянии  $a$  от плоскости.

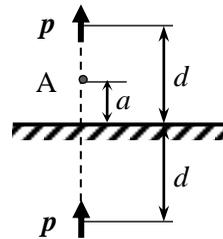


Рис. 6.8. Взаимное расположение точечного диполя и диполя-"изображения".

### Решение

Электрическое поле в точке  $A$  создается точечным диполем и зарядами, индуцированными на металлической пластине. Применяя метод электростатических изображений, заменим пластину фиктивным диполем-"изображением", который вместе с реальным точечным диполем создает электрическое поле, совпадающее над плоскостью с полем системы "точечный диполь - металлическая пластина". Так как диполь состоит из точечных от-

рицательного и положительного зарядов, то отражая эти заряды относительно заземленной плоскости и меняя при этом их знак, получим, что дипольный момент диполя-"изображения" направлен также, как у реального диполя (рис. 6.8). При этом поверхность пластины имеет нулевой потенциал, что соответствует условию задачи.

Напряженность поля точечного диполя выражается формулой:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3(\mathbf{p}\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right].$$

Для реального диполя в точке А дипольный момент  $\mathbf{p}$  направлен противоположно  $\mathbf{r}$ , и расстояние от него до т. А равно  $(d-a)$ . Тогда напряженность поля, создаваемого этим диполем в т.А, составляет:

$$\begin{aligned} E_1(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{3p}{r^3} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3p}{r^3} - \frac{p}{r^3} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2p}{(d-a)^3}. \end{aligned}$$

Для диполя-"изображения"  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{r}$  сонаправлены, расстояние до т. А от него составляет  $(d+a)$ . Напряженность поля, создаваемого диполем-"изображением" в т. А, равна:

$$E_2(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3p}{r^3} - \frac{p}{r^3} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2p}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2p}{(d+a)^3}.$$

Напряженности полей обоих диполей в т. А сонаправлены, поэтому искомая напряженность электрического поля равна:

$$E_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{2p}{(d-a)^3} + \frac{2p}{(d+a)^3} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4pd(d^2 + 3a^2)}{(d^2 - a^2)^3}.$$

Вектор  $\mathbf{E}_A$  направлен от металлической пластины.

**Ответ:**  $E_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4pd(d^2 + 3a^2)}{(d^2 - a^2)^3}$ , вектор  $\mathbf{E}_A$  направлен от

металлической пластины.

**Задача 6.3.5.** Тонкое проволочное кольцо радиуса  $R$  имеет заряд  $q$ . Кольцо расположено параллельно безграничной проводящей плоскости на расстоянии  $h$  от последней. Найти: а) поверхностную плотность заряда в точке плоскости на оси кольца; б) напряженность и потенциал электрического поля в центре кольца.

## Решение

Воспользуемся результатом решения задачи 1.3.5, в которой получено значение модуля напряженности электрического поля на оси заряженного кольца на произвольном расстоянии  $z$  от его плоскости:

$$E(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Заряд-"изображение" имеет вид заряженного отрицательно кольца, расположенного симметрично реальному кольцу относительно плоскости. Напряженность и потенциал электрического поля в центре кольца находим, суммируя вклады от заряда  $q$  и заряда-"изображения".

а) Рассмотрим точку плоскости, через которую проходит ось кольца. Для нее  $z = h$ , и векторы напряженности от двух колец направлены одинаково. Поэтому суммарная напряженность равна:

$$E = 2E(h) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qh}{(R^2 + h^2)^{3/2}}.$$

Искомую плотность заряда найдем из формулы (5.1) главы 5:

$$\sigma = \epsilon_0 E(h) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{qh}{(R^2 + h^2)^{3/2}}.$$

б) Напряженность в центре кольца создается только зарядом-изображением. Для этой точки  $z = 2h$  и модуль напряженности равен:

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qh}{(R^2 + 4h^2)^{3/2}}.$$

Для случая  $q > 0$  вектор  $\mathbf{E}$  направлен вдоль оси кольца в сторону плоскости. При  $q < 0$  направление  $\mathbf{E}$  противоположно: от плоскости.

Задача о потенциале для точек на оси системы двух колец решена в главе 3 (см. задачу 3.3.5). В общий ответ, полученный при нормировке потенциала  $\varphi_\infty = 0$ ,

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{\sqrt{R^2 + (x-h)^2}} + \frac{q_2}{\sqrt{R^2 + (x+h)^2}} \right),$$

надо подставить  $q_1 = q$ ,  $q_2 = -q$ ,  $x = h$ .

В итоге получаем:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + 4h^2}} \right),$$

где  $\varphi$  – потенциал средней точки кольца относительно проводящей плоскости (или, что эквивалентно, относительно бесконечно удаленной точки).

В этом частном случае, когда заряды  $q_1$  и  $q_2$  равны по величине и противоположны по знаку, потенциал в точке  $x = 0$  тоже равен нулю. Это означает, что вся проводящая плоскость имеет равный нулю потенциал.

**Ответ:** а)  $\sigma = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{qh}{(R^2 + h^2)^{3/2}};$

б)  $E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qh}{(R^2 + 4h^2)^{3/2}};$   $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + 4h^2}} \right).$

### Задачи типа 6.2

*Вычисление силы взаимодействия точечного заряда с проводящей сферой, а также определение напряженности и потенциала электрического поля такой системы.*

**Метод решения.** Применение метода электростатических изображений. Замена поля, создаваемого зарядами на поверхности сферы, полем одного (или более) фиктивного точечного заряда, как описано в теоретическом материале, позволяет вычислить силу взаимодействия, применяя закон Кулона.

**Задача 6.3.5.** Точечный заряд  $q$  находится на расстоянии  $b$  от центра заземленного металлического шара радиуса  $r$  ( $b > r$ ). Определить силу притяжения  $F$  между зарядом и шаром. Какую минимальную работу  $A$  надо совершить, чтобы перенести заряд в бесконечно удаленную точку?

### Решение

Как было показано в задаче 4.3.8 главы 4, для двух разноименных точечных зарядов  $q$  и  $q'$ , расположенных на расстоянии  $d$  друг от друга, поверхностью нулевого потенциала является сфера радиуса

$$r = \frac{qq'd}{q'^2 - q^2}, \quad (6.1)$$

центр которой смещен на расстояние

$$a = -\frac{q'^2 d}{q'^2 - q^2} \quad (6.2)$$

от отрицательного заряда вдоль оси X, направленной от заряда  $q'$  к заряду  $q$ .

Поверхность заземленного шара имеет нулевой потенциал, как и весь шар в целом. Поместим точечный заряд  $q'$  на расстоянии  $a$  от центра шара так, чтобы поверхность нулевого потенциала зарядов  $q$  и  $q'$  совпала с поверхностью шара (рис. 6.9).

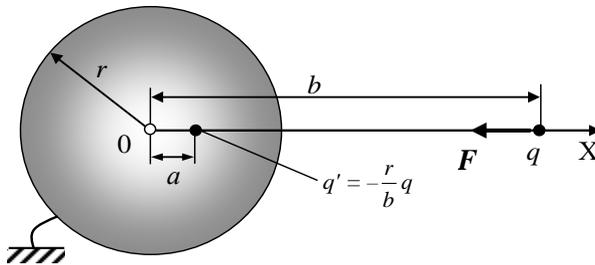


Рис. 6.9. Взаимное расположение точечного заряда  $q$ , заземленного металлического шара и заряда-«изображения»  $q'$ .

Поделив почленно уравнение (6.2) на уравнение (6.1), получаем:  $\frac{a}{r} = -\frac{q'}{q}$ , откуда

$$q' = -q \frac{a}{r}. \quad (6.3)$$

Подставляя  $q'$  и  $d = (b-a)$  в формулу (6.2), находим:

$$a = -\frac{b-a}{1 - r^2/a^2}. \quad (6.4)$$

Решая получившееся уравнение (6.4) относительно  $a$ , определяем:

$$a = \frac{r^2}{b}. \quad (6.5)$$

Подставляя (6.5) в (6.3), окончательно получаем величину  $q'$ :

$$q' = -q \frac{r}{b}. \quad (6.6)$$

Поскольку поле, создаваемое индуцированными на шаре зарядами, вне шара эквивалентно полю заряда-"изображения"  $q'$ , то искомая сила взаимодействия между шаром и зарядом  $q$  равна силе притяжения зарядов  $q$  и  $q'$  в соответствии с законом Кулона. Следовательно, эта сила  $F$  равна:

$$F = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|qq'|}{(b-a)^2} e_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{brq^2}{(b^2-r^2)^2} e_x,$$

где  $e_x$  – единичный орт оси ОХ.

Вычислим минимальную работу, которую надо совершить, чтобы перенести заряд  $q$  в бесконечно удаленную точку. Чтобы работа была минимальна, заряд должен двигаться без ускорения, поэтому внешняя сила должна быть равна силе, действующей на заряд  $q$  со стороны заряда-"изображения"  $q'$  и противоположно ей направлена. При удалении заряда от шара за счет внешней силы будет также изменяться и положение (координата  $x$ ) заряда-"изображения". Учитывая, что внешняя сила направлена по оси Х, и выполняя интегрирование, находим величину ее работы, необходимой для полного разведения зарядов:

$$A = \int_b^{\infty} F(x)dx = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_b^{\infty} \frac{rq^2 x dx}{(x^2-r^2)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{rq^2}{2(b^2-r^2)}.$$

Эта работа положительна, поскольку совершена внешней силой против сил притяжения зарядов.

$$\text{Ответ: } F = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{brq^2}{(b^2-r^2)^2} e_x; A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{rq^2}{2(b^2-r^2)}.$$

**Задача 6.3.7.** Точечный заряд  $q$  находится на расстоянии  $b$  от центра изолированного незаряженного металлического шара радиуса  $r$ . Определить силу притяжения  $F$  между зарядом и шаром.

### Решение

Если шар изолирован, то его потенциал равен  $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{b}$  (см.

задачу 5.3.1). Поскольку заряд-"изображение"  $q' = -\frac{qr}{b}$  обеспечивает равенство потенциала сферы нулю, то для увеличения ее по-

потенциала до нужного значения надо добавить в центр шара точечный заряд  $q''$  такой, чтобы потенциал сферы стал равен  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{b}$ .

Величина заряда  $q''$  должна удовлетворять соотношению:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q''}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{b},$$

откуда  $q'' = q \frac{r}{b}$ .

В области вне шара электростатическое поле будет в точности совпадать с полем, созданным тремя точечными зарядами:  $q$ ,  $q''$  и зарядом-"изображением"  $q' = -\frac{qr}{b}$ .

К этому же выводу можно прийти и по-иному: поток вектора  $\mathbf{E}$  через поверхность шара должен равняться нулю, т.к. шар не заряжен. Отсюда по теореме Гаусса следует, что сумма зарядов, размещаемых внутри шара для моделирования внешнего поля, также должна равняться нулю:

$$q'' + q' = 0,$$

что опять приводит к равенству:  $q'' = q(r/b)$ .

Теперь вычисляем силу, действующую на заряд  $q$ , как сумму двух сил со стороны точечных зарядов  $q'$  и  $q''$ :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2.$$

Первое слагаемое соответствует притяжению зарядов  $q$  и  $q'$ :

$$\mathbf{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qq'}{(b-a)^2} \mathbf{e}_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{brq^2}{(b^2-r^2)^2} \mathbf{e}_x,$$

где  $\mathbf{e}_x$  – орт оси  $OX$ , направленной от центра шара к точечному заряду.

Второе слагаемое выражает силу отталкивания зарядов  $q$  и  $q''$ :

$$\mathbf{F}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qq''}{b^2} \mathbf{e}_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{rq^2}{b^3} \mathbf{e}_x.$$

Хотя заряды  $q'$  и  $q''$  одинаковы по модулю, в итоге получается сила притяжения, поскольку заряд  $q'$  находится к заряду  $q$  ближе, чем заряд  $q''$ . Окончательно получаем:

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} rq^2 \left( \frac{b}{(b^2-r^2)^2} - \frac{1}{b^3} \right) \mathbf{e}_x.$$

*Замечание.* Можно дополнительно вычислить и работу, необходимую для удаления заряда  $q$  на бесконечность. Она вычисляется аналогично расчету, приведенному в задаче 6.3.6. В данном случае она равна  $A = k \frac{r^3 q^2}{2b^2(b^2 - r^2)}$ . Как и следовало ожидать, она меньше,

чем в случае заземленного шара предыдущей задачи, потому что тогда за счет заземления на шаре появлялся отличный от нуля индуцированный заряд противоположного знака, и требовалась дополнительная работа по преодолению его силы притяжения.

$$\text{Ответ: } F = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} r q^2 \left( \frac{b}{(b^2 - r^2)^2} - \frac{1}{b^3} \right) e_x.$$

**Задача 6.3.8.** Точечный заряд  $q > 0$  находится на расстоянии  $b$  от центра изолированного металлического шара радиуса  $r$ , обладающего зарядом  $Q > 0$ . Определить напряженность электрического поля в точке В, находящейся на расстоянии  $l > b$  от центра шара на линии, соединяющей центр шара с точечным зарядом  $q$ .

### Решение

В данном случае потенциал шара будет равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{b} + \frac{Q}{r} \right) \quad (\text{см. задачу 5.3.1}).$$

Поскольку заряд-"изображение"  $q' = -\frac{qr}{b}$  обеспечивает равенство потенциала сферы нулю, то для обеспечения нужного потенциала поверхности шара надо добавить в центр шара точечный заряд  $q'''$  такой, чтобы потенциал сферы стал равен  $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{b} + \frac{Q}{r} \right)$ . Следовательно, величина заряда  $q'''$  должна удовлетворять соотношению:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q'''}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{b} + \frac{Q}{r} \right),$$

$$\text{откуда } q''' = Q + q \frac{r}{b}. \quad (6.7)$$

Величину  $q'''$  можно вычислить и по-другому: поток вектора  $E$  через поверхность шара определяется зарядом шара  $Q$ , поэтому

сумма зарядов, размещаемых нами внутри шара для моделирования внешнего поля, также должна равняться  $Q$ :

$$q''' + q' = Q,$$

откуда опять получаем:  $q''' = Q + q \frac{r}{b}$ .

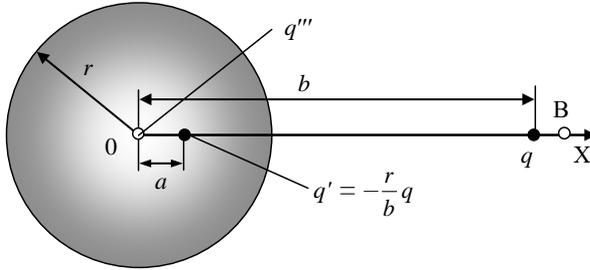


Рис. 6.10. Взаимное расположение точечного заряда, изолированного проводящего шара и зарядов-"изображений"  $q'$  и  $q'''$ .

Таким образом, в области вне металлического шара электростатическое поле будет в точности совпадать с полем, созданным тремя точечными зарядами:  $q$ ,  $q'''$  и зарядом-"изображением"  $q' = -\frac{qr}{b}$  (см. рис. 6.10).

Напряженность электрического поля в точке В найдем по принципу суперпозиции как сумму напряженностей полей точечных зарядов  $q$ ,  $q'$  и  $q'''$ :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_q + \mathbf{E}_{q'} + \mathbf{E}_{q'''} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{(l-b)^2} - \frac{qr}{b(l-r^2/b)^2} + \frac{Q+qr/b}{b^2} \right] \mathbf{e}_x,$$

где  $\mathbf{e}_x$  – единичный орт оси ОХ. При выводе формулы учтено, что  $a = r^2/b$

$$\text{Ответ: } \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{(l-b)^2} - \frac{qr}{b(l-r^2/b)^2} + \frac{Q+qr/b}{b^2} \right] \mathbf{e}_x.$$

#### 6.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 6.4.1.** Точечный заряд  $q$  помещен на расстоянии  $R/2$  от центра заземлённой тонкостенной металлической сферы радиуса

$R$ , на которой расположен заряд  $Q$ . Определить модуль силы  $F$ , действующей на заряд  $q$ .

$$\text{Ответ: } F = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{8q^2}{9R^2}.$$

**Задача 6.4.2.** очечный заряд  $q$  находится на расстоянии  $r$  от центра  $O$  заряженного проводящего сферического слоя, внутренний и наружный радиусы которого равны, соответственно,  $a$  и  $b$ . Найти полный заряд  $Q$  слоя, если потенциал в точке  $O$  равен  $\phi$ . Учсть, что  $r < a$ .

$$\text{Ответ: } Q = q \left( \frac{b}{a} - \frac{b}{r} - 1 \right) - 4\pi\epsilon_0 b\phi.$$

**Задача 6.4.3** ([2], 3.54). Два точечных заряда,  $q$  и  $-q$ , расположены на расстоянии  $l$  друг от друга и на одинаковом расстоянии  $l/2$  от проводящей плоскости с одной стороны от неё. Найти модуль силы, действующей на каждый заряд.

$$\text{Ответ: } F = (2\sqrt{2} - 1) \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 l^2}.$$

**Задача 6.4.4** ([2], 3.56). Точечный заряд  $q = \text{мкКл}$  находится между двумя проводящими взаимно перпендикулярными полуплоскостями. Расстояние от заряда до каждой полуплоскости  $l = 5,0$  см. Найти модуль силы, действующей на заряд.

$$\text{Ответ: } F = (2\sqrt{2} - 1) \frac{q^2}{32\pi\epsilon_0 l^2} = 3,3 \text{ Н}.$$

**Задача 6.4.5** ([2], 3.59). Тонкая бесконечно длинная нить имеет заряд  $\lambda$  на единицу длины и расположена параллельно проводящей плоскости. Расстояние между нитью и плоскостью равно  $l$ . Найти: а) модуль силы, действующей на единицу длины нити; б) распределение поверхностной плотности заряда  $\sigma(x)$  на плоскости (здесь  $x$  – расстояние от прямой на плоскости, где  $\sigma$  максимальна).

$$\text{Ответ: а) } F_1 = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0 l}; \text{ б) } \sigma = \frac{l\lambda}{\pi(l^2 + x^2)}.$$

**Задача 6.4.6** ([2], 3.60). Очень длинная нить ориентирована перпендикулярно к проводящей плоскости и не доходит до этой плоскости на расстояние  $l$ . Нить заряжена равномерно с линейной плотностью  $\lambda$ . Пусть точка  $O$  – след нити на плоскости. Найти поверхностную плотность индуцированного заряда на плоскости: а) в точке  $O$ ; б) в зависимости от расстояния  $r$  до точки  $O$ .

$$\text{Ответ: а) } \sigma = \frac{\lambda}{2\pi l}; \text{ б) } \sigma(r) = \frac{\lambda}{2\pi\sqrt{l^2 + r^2}}.$$

**Задача 6.4.7** ([2], 3.61). Тонкое проволочное кольцо радиуса  $R$  имеет заряд  $q$ . Кольцо расположено параллельно проводящей плоскости на расстоянии  $l$  от неё. Найти поверхностную плотность индуцированного заряда в точке плоскости, расположенной симметрично относительно кольца.

$$\text{Ответ: } \sigma = \frac{lq}{2\pi(l^2 + R^2)^{3/2}}.$$

**Задача 6.4.8** ([3], 22). Точечный заряд  $q$  находится между двумя металлическими плоскостями, образующими между собой двугранный угол  $60^\circ$ . Найти предел, к которому стремится напряженность электрического поля  $E$ , когда точка наблюдения приближается к ребру двугранного угла, всё время оставаясь между металлическими плоскостями. Как изменится результат, если заряд будет не точечным?

*Ответ:*  $E \rightarrow 0$ . Ответ не изменится, если заряд будет не точечным.

**Задача 6.4.9** ([3], 60). Два одинаковых положительных заряда  $q$  находятся на одинаковом расстоянии  $d$  от безграничной проводящей плоскости по одну сторону от неё. Расстояние между зарядами равно  $2d$ . Найти модуль напряженности поля на середине расстояния между зарядами.

$$\text{Ответ: } E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4q}{5\sqrt{5}d^2}.$$

**Задача 6.4.10** ([3], 38). Металлический шар радиуса  $R$  соединен очень тонкой проволокой с Землей. На расстоянии  $d = 2R$  от центра этого шара находится электрический заряд  $+q$ . Чему равен

отрицательный заряд  $Q$  шара? Поверхность Земли и все остальные предметы можно считать достаточно удаленными, а влиянием соединяющей проволоки пренебречь.

*Ответ:*  $Q = q/2$ .

**Задача 6.4.11** ([3], 39). Точечный заряд  $q$  находится на расстоянии  $d$  от центра заряженного проводящего шара  $Q$ . Каков заряд шара, если известно, что сила взаимодействия между зарядами равна нулю?

*Ответ:*  $Q = q\alpha \cdot \frac{1 - (1 - \alpha^2)^2}{(1 - \alpha^2)^2}$ , где  $\alpha = r/d$ .

**Задача 6.4.12** ([3], 41). Точечный заряд  $q$  находится на расстоянии  $d$  от центра незаряженного проводящего шара радиуса  $R$ . Какой заряд протечет по проводнику, если заземлить шар?

*Ответ:*  $q' = -qR/d$ .

**Задача 6.4.13** ([3], 42). Заземленный шар радиуса  $R$  находится вблизи точечного заряда  $q$ , расстояние между зарядом и центром шара  $d$ . Определить максимальную и минимальную поверхностные плотности наведенного на шаре заряда.

*Ответ:*  $\sigma_1 = \frac{-q}{4\pi(d+R)^2} \left( \frac{d}{R} - 1 \right)$ ,  $\sigma_2 = \frac{-q}{4\pi(d-R)^2} \left( \frac{d}{R} + 1 \right)$ .

## Глава 7

## ЭЛЕКТРОЕМОСТЬ. ПРОСТЫЕ КОНДЕНСАТОРЫ И ИХ СОЕДИНЕНИЯ

### 7.1. Теоретический материал

**Уединенный проводник** – проводник, расстояние от которого до других тел достаточно велико, чтобы пренебречь электрическим полем зарядов на этих телах по сравнению с полем, создаваемым зарядами проводника.

**Емкостью (электрической емкостью, электроёмкостью) уединенного проводника** называется физическая величина, равная отношению заряда  $Q$  уединенного проводника к его потенциалу  $\varphi$  при нормировке на бесконечность:

$$C \equiv \frac{Q}{\varphi}. \quad (7.1)$$

В системе единиц СИ электроёмкость измеряется в фарадах [Ф]:  $[C] = \frac{[Q]}{[\varphi]} = \frac{\text{Кл}}{\text{В}} \equiv \text{Ф}$ .

Емкость уединенного проводника зависит только от его размеров и формы и не зависит от заряда  $Q$  и его потенциала  $\varphi$ .

**Простой конденсатор** – это совокупность двух заряженных проводников (обкладок), электрическое поле между которыми не зависит от окружающей среды (от величины и расположения внешних по отношению к этим проводникам зарядов). Заряды на обкладках конденсатора противоположного знака и равны по величине. Силовые линии поля, начинаясь на одной обкладке конденсатора, заканчиваются на другой.

На практике конденсаторы конструируются так, чтобы все электрическое поле было в максимальной степени сконцентрировано в области между обкладками, а краевые эффекты были бы минимальны. Это достигается выбором геометрии обкладок – например, это плоские пластины, или скрученные в рулон проводящие ленты, разделенные очень тонким диэлектрическим слоем.

**Емкостью (электрической емкостью, электроёмкостью) простого конденсатора** называется физическая величина, равная отношению положительного заряда  $Q$  на обкладке проводника (заряду конденсатора) к напряжению (разности потенциалов) между обкладками конденсатора  $U$ :

$$C \equiv \frac{q}{U}. \quad (7.2)$$

$$\text{Единица измерения: } [C] = \frac{[Q]}{[U]} = \frac{\text{Кл}}{\text{В}} \equiv \text{Ф}.$$

Емкость простого конденсатора зависит только от его размеров, формы, взаимного расположения обкладок конденсатора и не зависит от заряда  $Q$  и напряжения  $U$ .

Если между обкладками конденсатора вакуум, то:

1) **емкость плоского конденсатора** равна

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}, \quad (7.3)$$

где  $S$  – площадь пластин,  $d$  – расстояние между пластинами конденсатора ( $d \ll \sqrt{S}$ ).

2) **емкость цилиндрического конденсатора** равна:

$$C = 2\pi\varepsilon_0 \frac{h}{\ln(r_2/r_1)}, \quad (7.4)$$

где  $r_1$  и  $r_2$  – радиусы внутренней и внешней обкладок,  $h$  – длина обкладок конденсатора ( $d \ll r_2 - r_1$ ).

3) **емкость сферического конденсатора** равна:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}, \quad (7.5)$$

где  $r_1$  и  $r_2$  – радиусы внутренней и внешней обкладок сферического конденсатора.

**Емкость батареи параллельно соединенных конденсаторов.** Параллельное соединение конденсаторов – соединение, при котором разности потенциалов между их обкладками одинаковы (см. рис. 7.1):

Емкость батареи параллельно соединенных конденсаторов равна сумме емкостей этих конденсаторов:

$$C = \sum_i C_i. \quad (7.6)$$

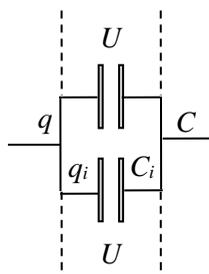


Рис. 7.1. Параллельное соединение конденсаторов.

**Емкость батареи последовательно соединенных конденсаторов.** Последовательное соединение конденсаторов – соединение, при котором заряды всех конденсаторы одинаковы (см. рис. 7.2):

Обратная величина емкости батареи последовательно соединенных конденсаторов равна сумме обратных величин емкостей этих конденсаторов:

$$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}. \quad (7.7)$$

Следовательно, *емкость батареи последовательно соединенных конденсаторов* равна:

$$C = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{C_i}}.$$

**Свойство эквипотенциальных точек.** Разъединение или соединение проводником эквипотенциальных точек не меняет электростатическое состояние системы.

## 7.2. Основные типы задач (классификация)

- 7.1. Расчет емкостей простых конденсаторов.
- 7.2. Расчет емкостей батарей конденсаторов при их различных соединениях.
- 7.3. Перезарядка конденсаторов при изменении способа их соединения.

## 7.3. Методы решения и примеры решения задач

### Задачи типа 7.1

*Расчет емкостей простых конденсаторов*

**Метод решения.** Полагая, что на обкладках конденсатора (или на двух телах, емкость которых определяется) находятся равные по величине и противоположные по знаку заряды  $q$  и  $(-q)$ , находим разность потенциалов  $U$  между обкладками (или телами) и используем определение емкости (формула (7.2):  $C \equiv q/U$ ).

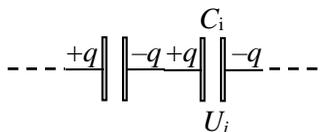


Рис. 7.2. Последовательное соединение конденсаторов.

**Задача 7.3.1.** Получить формулу для емкости сферического конденсатора с радиусами внутренней и внешней обкладок  $R_1$  и  $R_2$  соответственно.

### Решение

Способ 1. Пусть на внутренней сфере находится заряд  $Q$ . По теореме Гаусса напряженность поля  $E$  в пространстве между сферами равна:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2},$$

где  $r$  – расстояние до центра сфер (см. рис. 7.3).

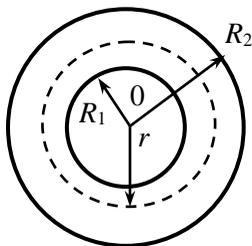


Рис. 7.3. Сферический конденсатор (в разрезе). Пунктиром показана воображаемая сфера радиуса  $r$  для расчета напряженности поля в конденсаторе по теореме Гаусса.

Разность потенциалов между обкладками составляет:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

По определению электроемкости  $C = \frac{Q}{\Delta\varphi}$ , поэтому для емкости сферического конденсатора получаем:

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Способ 2. Разобьем пространство между обкладками конденсатора на сферические слои радиусом  $r$  и малой толщиной  $dr$ . Считая напряженность электрического поля внутри выделенного слоя постоянной, можно применить для емкости  $C_r$  такого элементарного конденсатора формулу:

$$C_r = \frac{\epsilon_0 S_r}{d_r},$$

где  $S_r = 4\pi r^2$  – площадь поверхности сферического слоя,  $d_r = dr$  – его толщина.

Получившиеся элементарные конденсаторы соединены последовательно, поэтому для вычисления емкости всего сферического конденсатора воспользуемся формулой (7.7):

$$\frac{1}{C} = \sum_r \left( \frac{1}{C_r} \right) \rightarrow \frac{1}{C} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{\epsilon_0 4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right),$$

откуда получаем емкость сферического конденсатора:

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

**Ответ:**  $C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$

**Задача 7.3.2.** Расстояние между обкладками плоского конденсатора с площадью пластин  $S$  равно  $d$ . В пространство между обкладками конденсатора вносится металлическая пластина такой же площади толщиной  $h$ , поверхность которой параллельна обкладкам и находится на расстоянии  $b$  от одной из них (рис. 7.4). Обкладки конденсатора имеют потенциалы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2 < \varphi_1$ . Найти потенциал  $\varphi_0$  металлической пластины.

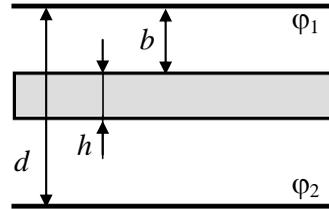


Рис. 7.4. Плоский воздушный конденсатор с металлической пластиной внутри.

имеют потенциалы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2 < \varphi_1$ . Найти потенциал  $\varphi_0$  металлической пластины.

### Решение

Внутри металлической пластины  $E_0 = 0$ , а вне неё поле одномерно и имеет напряженность:

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d - h}.$$

Изменение потенциала при переходе от верхней обкладки к пластине вычисляем как взятую с обратным знаком работу электрического поля напряженностью  $E$  по перемещению единичного положительного заряда на расстояние  $b$ :

$$\Delta\varphi = -bE.$$

Следовательно, потенциал металлической пластины равен:

$$\varphi_0 = \varphi_1 + \Delta\varphi = \varphi_1 - b \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d - h} = \varphi_1 - \frac{b}{d - h} (\varphi_1 - \varphi_2).$$

**Ответ:**  $\varphi_0 = \varphi_1 - \frac{b}{d-h}(\varphi_1 - \varphi_2)$ .

**Задача 7.3.3.** Определить приближенно емкость  $C$  системы из двух одинаковых металлических шаров радиуса  $R$ , находящихся на очень большом по сравнению с  $R$  расстоянии друг от друга (см. рис. 7.5).

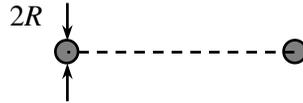


Рис. 7.5. Взаимное расположение двух металлических шаров.

### Решение

Поместим на шарах заряды  $+q$  и  $-q$ . Условие большого расстояния между шарами позволяет пренебречь перераспределением зарядов на шарах за счет электростатической индукции и считать это распределение равномерным. Тогда потенциал плоскости симметрии системы, перпендикулярной линии, проведенной через центры шаров, равен нулю. Потенциалы шаров относительно этой плоскости равны:

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R} = -\varphi_2,$$

а разность потенциалов

$$\Delta\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2q}{R}.$$

Исходя из определения емкости  $C = \frac{q}{\Delta\varphi}$ , получаем:

$$C = 2\pi\epsilon_0 R.$$

Эта величина вдвое меньше емкости уединенного шара  $C_1 = 4\pi\epsilon_0 R$ .

**Ответ:**  $C = 2\pi\epsilon_0 R$ .

**Задача 7.3.4.** Два длинных провода радиусом  $a$  каждый расположены параллельно друг другу. Расстояние между их осями равно  $b$  ( $b \gg a$ ). Найти емкость участка проводов длиной  $h$ .

### Решение

Чтобы воспользоваться формулой (7.2), необходимо вычислить разность потенциалов между проводами, если поместить на них равные по величине и противоположные по знаку заряды. Пусть на

одном проводе находится заряд с линейной плотностью  $+\sigma$ , а на втором – с линейной плотностью  $-\sigma$  (рис. 7.6). Провода считаем бесконечно длинными цилиндрами. Напряженность поля в точке А, находящейся вне проводов на расстоянии  $r$  от оси первого провода, равна

$$E = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0 r} + \frac{\sigma a}{\varepsilon_0 (b - r)},$$

где  $r$  – расстояние от левого провода.

Потенциал в точке А равен

$$\varphi(r) = -\int E dr = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0} \ln \frac{r}{(b - r)} + \text{const.}$$

Потенциал первого провода  $\varphi_1$  получим, полагая  $r = a$ :  $\varphi_1 = \varphi(a)$ ; для второго, полагая  $r = b - a$ :  $\varphi_2 = \varphi(b - a)$ . Разность потенциалов равна:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\sigma a}{\varepsilon_0} \ln \frac{b - a}{a},$$

а заряд  $q$ , приходящийся на участок провода длиной  $h$ , равен  $qh = 2\pi\sigma ah$ .

Используя формулу (7.2) при  $b \gg a$ , находим ёмкость участка проводов длиной  $h$ :

$$C = \frac{qh}{\Delta\varphi} = \frac{\pi\varepsilon_0 h}{\ln \frac{b - a}{a}} \approx \frac{\pi\varepsilon_0 h}{\ln \frac{b}{a}}.$$

*Замечание.* При решении задачи не учитывалось перераспределение поверхностных зарядов на проводах за счет электростатической индукции. Это приближение оправдано при большом расстоянии между проводами ( $b \gg a$ ).

**Ответ:** 
$$C = \frac{qh}{\Delta\varphi} = \frac{\pi\varepsilon_0 h}{\ln \frac{b - a}{a}} \approx \frac{\pi\varepsilon_0 h}{\ln \frac{b}{a}}.$$

### Задачи типа 7.2

*Расчет ёмкостей батарей конденсаторов при их различных соединениях.*

**Метод решения.** Использование формул (7.6) и (7.7) для

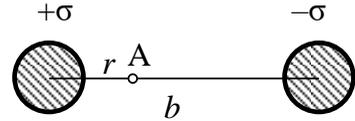


Рис. 7.6. К определению ёмкости системы из двух длинных проводов.

параллельного и последовательного соединения конденсаторов, а также свойств эквипотенциальных точек: их можно соединять и разъединять без изменения электростатического состояния системы.

**Задача 7.3.5.** Плоский конденсатор емкостью  $C$  состоит из двух пластин, находящихся друг от друга на расстоянии  $d = 0,5$  мм. Как изменится емкость конденсатора, если:

а) его поместить в изолированную металлическую коробку ("экранировать"), стенки которой будут находиться на расстоянии  $d_1 = 0,25$  мм от пластин (рис. 7.7);

б) если коробку соединить с одной из пластин конденсатора?

При расчётах искажением поля у краев конденсатора пренебречь.

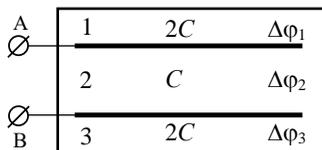


Рис. 7.7. Плоский конденсатор внутри металлической коробки.

### Решение

Потенциал коробки есть величина постоянная, поэтому работа по перемещению единичного положительного заряда от нижней плоскости коробки до верхней по любому пути равна нулю. Иными словами,

$$\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 + \Delta\varphi_3 = 0, \quad (7.8)$$

где индексами 1, 2, 3 отмечены последовательно проходимые промежутки между всеми пластинами (рис. 7.7).

Пусть  $C$  – емкость неэкранированного конденсатора. Так как емкость плоского конденсатора равна  $C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$ , из условия задачи следует, что емкости каждого из конденсаторов, образованных внутренней пластиной и пластиной коробки, равны:

$$C_1 = C_3 = 2C.$$

Из симметрии системы следует, что разности потенциалов  $\Delta\varphi_1$  и  $\Delta\varphi_3$  равны между собой. Тогда из уравнения (7.8) получаем:

$$\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_3 = -\frac{\Delta\varphi_2}{2}. \quad (7.9)$$

Так как верхняя и нижняя стенки коробки имеют одинаковый потенциал, конденсаторы 1 и 3 можно считать соединенными последовательно. Заряд таких конденсаторов равен заряду каждого

из них. Суммарная разность потенциалов на этих конденсаторах равна разности потенциалов между обкладками конденсатора 2, что согласуется с формулой (7.9). Следовательно, конденсатор 2 подключен параллельно конденсаторам 1 и 3. Эквивалентная схема имеет вид, показанный на рис. 7.8 (работа при обходе всего контура равна нулю).

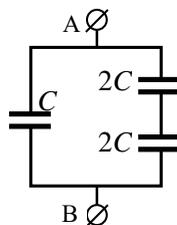


Рис. 7.8. Эквивалентная схема конденсатора, находящегося внутри металлической коробки.

Используя формулы сложения емкостей, находим ответ: суммарная емкость  $C_{AB}$  (т.е. емкость конденсатора  $C$ , заключенного в коробку) равна:

$$C_{AB} = C + C = 2C.$$

Если коробку соединить с одной из пластин конденсатора, то это эквивалентно удалению одного из последовательно соединенных конденсаторов с емкостью  $2C$  (соединение проводом без геометрического перемещения). Суммарная емкость при этом станет равна:

$$C_{AB} = C + 2C = 3C.$$

**Ответ:** а)  $C_{AB} = 2C$ ; б)  $C_{AB} = 3C$ .

**Задача 7.3.6.** Батарея из четырех одинаковых конденсаторов включена один раз по схеме а), а другой раз – по схеме б) (рис. 7.9). В каком случае емкость батареи будет больше? Если емкости конденсаторов различны, то какому соотношению они должны удовлетворять, чтобы при переключении со схемы а) на схему б) емкость батареи не менялась?

### Решение

Построим эквивалентные схемы, используя точки с одинаковыми потенциалами (рис. 7.10). Теперь легко сразу дать ответ на первый вопрос:

$$C_a = C + \frac{1}{3}C = \frac{4}{3}C, \quad C_b = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C = C.$$

Видим, что  $C_a > C_b$ .

Емкость батареи не будет зависеть от схемы подключения, если

$$C_4 + C_{123} = C_{12} + C_{34},$$

где

$$C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}; \quad C_{34} = \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4}; \quad C_{123} = \frac{C_1 C_2 C_3}{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_1 C_3}.$$

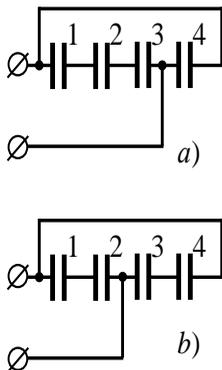


Рис. 7.9. Две схемы соединения конденсаторов в батарее.

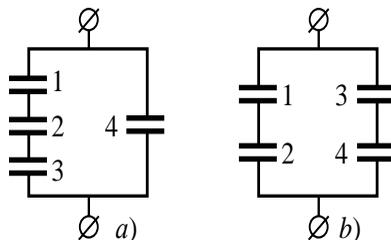


Рис. 7.10. Эквивалентные схемы батареи конденсаторов, изображенных на рис. 7.9.

Отсюда следует ответ на второй вопрос: емкость схем *a)* и *b)* будет одинакова, если

$$C_4 + \frac{C_1 C_3 C_3}{C_{12} + C_{23} + C_{13}} = \frac{C_1 C_2 (C_3 + C_4) + C_3 C_4 (C_1 + C_2)}{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)}.$$

**Ответ:**  $C_a > C_b$ ; емкость батареи не будет зависеть от схемы подключения, если

$$C_4 + \frac{C_1 C_3 C_3}{C_{12} + C_{23} + C_{13}} = \frac{C_1 C_2 (C_3 + C_4) + C_3 C_4 (C_1 + C_2)}{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)}.$$

**Задача 7.3.7.** Два конденсатора, емкости которых  $C_1$  и  $C_2$ , соединены последовательно и присоединены к источнику ЭДС  $\mathcal{E}$ . Определить напряжение на каждом конденсаторе и находящиеся на них заряды после установления равновесия.

### Решение

При последовательном соединении заряды  $q$  на конденсаторах будут одинаковыми, а сумма напряжений равна ЭДС подключенного источника. Поэтому

$$\Delta\varphi_1 = \frac{q}{C_1}, \quad \Delta\varphi_2 = \frac{q}{C_2},$$

$$\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 = \varepsilon.$$

Решая эту систему уравнений, получаем:

$$\Delta\varphi_1 = \varepsilon \frac{C_2}{C_1 + C_2} ; \Delta\varphi_2 = \varepsilon \frac{C_1}{C_1 + C_2} ; q = \varepsilon \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

**Ответ:**  $\Delta\varphi_1 = \varepsilon \frac{C_2}{C_1 + C_2} ; \Delta\varphi_2 = \varepsilon \frac{C_1}{C_1 + C_2} ; q = \varepsilon \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$

**Задача 7.3.8.** Одинаковые конденсаторы, ёмкостью  $C$  каждый, соединены в форме куба, как показано на рис. 7.11. Определить электроёмкость системы между точками 1 и 7.

**Решение**

Решение задачи основано на свойствах эквипотенциальных точек: их можно соединять и разъединять, не меняя электростатического состояния системы.

Из симметрии задачи следует, что точки 2, 4 и 5 имеют одинаковый потенциал, как и точки 3, 6 и 8, поэтому их можно соединить. Получившаяся эквивалентная схема представлена на рис. 7.12.

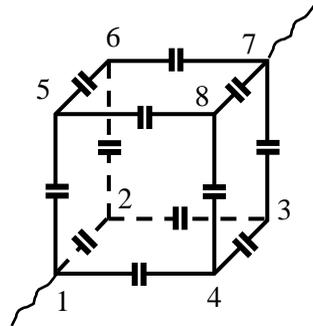


Рис. 7.11. Схема соединения конденсаторов.

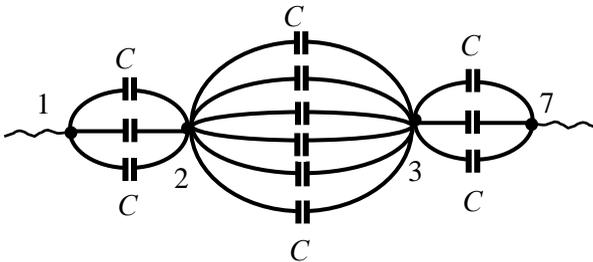


Рис. 7.12. Эквивалентная схема соединения конденсаторов, изображенных на рис. 7.11.

Теперь легко рассчитать общую ёмкость  $C_{17}$ . Звенья 1-2 и 3-7 состоят из трех параллельно соединенных конденсаторов, поэтому ёмкость каждого звена равна  $C_{12} = C_{37} = 3C$ . Так как эти звенья соединены последовательно, их суммарная ёмкость составляет  $3C/2$ .

Звено 2-3 состоит из 6 параллельно соединенных звеньев, поэтому его емкость равна  $C_{23} = 6C$ .

По правилу вычисления емкостей последовательно соединенных конденсаторов определяем искомую емкость системы между точками 1 и 7:

$$\frac{1}{C_{17}} = \frac{1}{6C} + \frac{1}{3C/2} = \frac{5}{6C},$$

откуда:

$$C_{17} = \frac{6}{5}C.$$

**Ответ:**  $C_{17} = (6/5)C$ .

### Задачи типа 7.3

*Перезарядка конденсаторов при изменении способа их соединения*

**Метод решения.** Использование формул (7.6) и (7.7) для параллельного и последовательного соединения конденсаторов, а также закона сохранения заряда для электрически изолированных систем.

**Задача 7.3.9.** Четыре одинаковых конденсатора соединены, как показано на рис. 7.13, и присоединены к батарее с ЭДС  $\mathcal{E}$ . Ключ  $K_2$  сначала разомкнут, а ключ  $K_1$  замкнут. Затем размыкают ключ  $K_1$  и замыкают ключ  $K_2$ . Какова будет разность потенциалов на каждом конденсаторе, если ЭДС батареи  $\mathcal{E} = 9\text{ В}$ ?

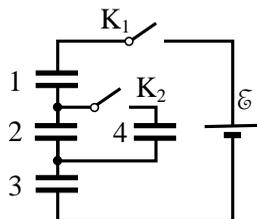


Рис. 7.13. Схема соединения конденсаторов.

### Решение

В первом положении три последовательно соединенных конденсатора замкнуты на ЭДС  $\mathcal{E}$ . На каждом конденсаторе будет напряжение  $U_n = (1/3)\mathcal{E}$  и заряд  $q = (1/3)C\mathcal{E}$ .

После переключения ключей заряды на конденсаторах 1 и 3 останутся неизменными (следовательно, и напряжения не изменятся), а заряд конденсатора 2 распределится поровну на два одинаковых конденсатора 2 и 4. Поэтому напряжение на конденсаторах 2 и

4 станет равным  $U_k = (1/6)\mathcal{E}$ .

Итак, разности потенциалов будут равны:

$$U_1 = 3 \text{ В}; U_2 = 1,5 \text{ В}; U_3 = 3 \text{ В} \text{ и } U_4 = 1,5 \text{ В}.$$

**Ответ:**  $U_1 = 3 \text{ В}; U_2 = 1,5 \text{ В}; U_3 = 3 \text{ В} \text{ и } U_4 = 1,5 \text{ В}.$

**Задача 7.3.10.** В схеме, приведенной на рис. 7.14, известны емкости конденсаторов  $C_1, C_2, C_3$  и  $C_4$  и ЭДС источника  $\mathcal{E}$ . В начальный момент все конденсаторы разряжены, ключи  $K_1$  и  $K_2$  разомкнуты. Сначала замыкают ключ  $K_1$ , а через некоторое время замыкают ключ  $K_2$ . Какой заряд протечет по сопротивлению  $R$  до установления равновесного состояния системы?

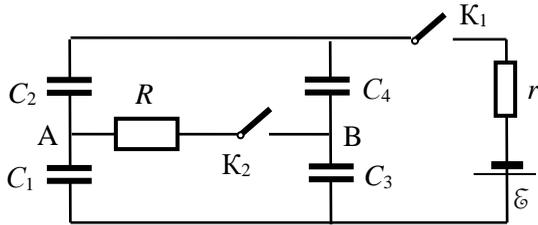


Рис. 7.14. Схема соединения элементов цепи.

### Решение

После замыкания ключа  $K_1$ , но до замыкания ключа  $K_2$  схема будет выглядеть, как показано на рис. 7.15. При этом напряжения на конденсаторах после достижения равновесного состояния системы будут удовлетворять условию:

$$U_1 + U_2 = U_3 + U_4 = \mathcal{E}.$$

При этом суммарный заряд пластин конденсаторов 3 и 4, обведенных штрих-пунктирным овалом, будет равен нулю, так как выделенная система пластин представляет собой электрически изолированную систему, следовательно, заряд этой системы не изменится, а ранее конденсаторы не были заряжены. С учетом знаков зарядов пластин можно записать:

$$q_4 - q_3 = 0. \tag{7.8}$$

$$\text{Аналогично } q_2 - q_1 = 0. \tag{7.9}$$

Учитывая соотношения (7.8) и (7.9), находим суммарный заряд пластин конденсаторов, обведенных пунктирным прямоугольником на рис. 7.15:

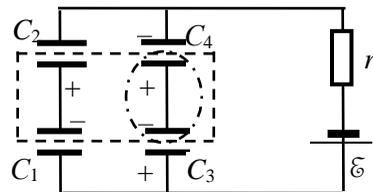


Рис. 7.15. Схема соединения элементов цепи после замыкания ключа  $K_1$ .

$$q_2 + q_4 - q_1 - q_3 = 0. \quad (7.10)$$

После замыкания ключа  $K_2$  будет происходить изменение заряда и напряжения конденсаторов, и по сопротивлению  $R$  будет протекать ток, пока потенциалы точек А и В (см. рис. 7.14) не станут равными.

Со временем в системе установится равновесное состояние, и схема соединения конденсаторов примет вид, показанный на рис. 7.16.

Поскольку обведенная пунктирным прямоугольником на рис. 7.16 и на рис. 7.15 система пластин конденсаторов электрически изолирована, полный заряд этих пластин после замыкания ключа  $K_2$  по-прежнему будет равен нулю:

$$q'_2 + q'_4 - q'_1 - q'_3 = 0 \quad (7.11)$$

(штрихами будем обозначать новые заряды конденсаторов после установления равновесного состояния).

Из равенства (7.11) следует, что суммарный заряд конденсаторов 1 и 3 равен суммарному заряду конденсаторов 2 и 4:

$$q'_2 + q'_4 = q'_1 + q'_3 = q. \quad (7.12)$$

Определим этот заряд. Общая емкость параллельно соединенных конденсаторов 1 и 3 равна  $(C_1 + C_3)$ , а конденсаторов 2 и 4  $(C_2 + C_4)$ . Используя напряжения на конденсаторах  $U = q/C$ , для всей схемы получаем уравнение:

$$\frac{q}{C_1 + C_3} + \frac{q}{C_2 + C_4} = \mathcal{E},$$

откуда находим заряд  $q$ :

$$q = \frac{(C_1 + C_3)(C_2 + C_4)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4} \mathcal{E}. \quad (7.13)$$

Так как напряжения на конденсаторах 1 и 3 одинаковы:

$$\frac{q'_1}{C_1} = \frac{q'_3}{C_3}, \quad (7.14)$$

с учетом соотношения (7.12) находим новый заряд конденсатора 1:

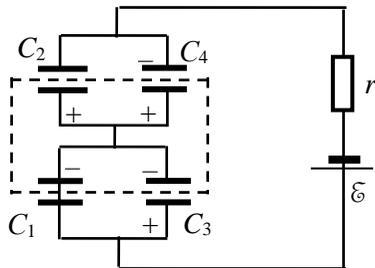


Рис. 7.16. Схема соединения элементов цепи после замыкания ключа  $K_1$ .

$$q'_1 + \frac{C_3}{C_1} q'_1 = q \rightarrow q'_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_3} q . \quad (7.15)$$

Аналогично определяем новый заряд конденсатора 2:

$$q'_2 = \frac{C_2}{C_2 + C_4} q . \quad (7.16)$$

Поскольку до замыкания ключа  $K_2$  заряды конденсаторов 1 и 2 были одинаковы (см. формулу (7.9)), различие зарядов возникло из-за того, что часть заряда перетекла с пластины одного конденсатора на пластину другого через сопротивление  $R$  после замыкания ключа  $K_2$  до установления равновесного состояния. Следовательно, искомый заряд, протекший по сопротивлению  $R$ , с учетом формулы (7.13) равен:

$$\Delta q = |q'_1 - q'_2| = \left| \frac{C_1}{C_1 + C_3} - \frac{C_2}{C_2 + C_4} \right| q = \frac{|C_1 C_4 - C_2 C_3|}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4} \varepsilon .$$

**Ответ:**  $\Delta q = \frac{|C_1 C_4 - C_2 C_3|}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4} \varepsilon .$

### 7.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 7.4.1.** Конденсатор  $C_3$  был предварительно заряжен посторонним источником до напряжения  $U_0$ , после чего его отключили от источника и подключили в разрыв цепи (рис. 7.17) в указанной полярности. Найти заряд  $q$ , прошедший через источник ЭДС цепи. ЭДС источника  $\varepsilon$ ,  $C_1 = C_2 = C_3 = C$ .

**Ответ:**  $q = C(\varepsilon - U_0) / 3 .$

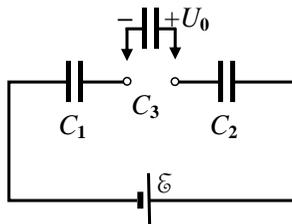


Рис. 7.17. Схема подключения конденсатора  $C_3$  к цепи.

**Задача 7.4.2.** Плоский конденсатор находится во внешнем однородном электрическом поле напряжённости  $E$ , перпендикулярном пластинам. Площадь каждой из пластин конденсатора  $S$ . Какой заряд окажется на каждой из обкладок, если их соединить друг с другом проводником?

**Ответ:**  $q = \pm \varepsilon_0 E S .$

**Задача 7.4.3.** В схеме, показанной на рис. 7.18, сначала замыкают ключ  $K_1$ , а затем (после его размыкания) замыкают ключ  $K_2$ . Определить напряжения  $U_1$  и  $U_2$  на конденсаторах  $C_1$  и  $C_2$ , если ЭДС батарей соответственно равны  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$ .

$$\text{Ответ: } U_1 = \frac{C_1 \mathcal{E}_1 + C_2 \mathcal{E}_2}{C_1 + C_2};$$

$$U_2 = \frac{C_1 (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)}{C_1 + C_2}.$$

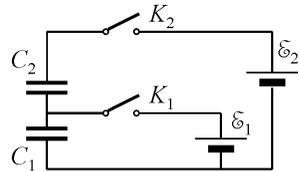


Рис. 7.18. Схема включения конденсаторов.

**Задача 7.4.4.** Обкладки плоского конденсатора соединены проводником друг с другом и заземлены (рис. 7.19). Между обкладками вставлена тонкая пластина с зарядом  $q$ , параллельная обкладкам конденсатора и имеющая ту же площадь. Какой заряд  $\Delta q$  протечёт по проводнику, соединяющему обкладки, если пластину передвинуть на расстояние  $x$ ? Расстояние между обкладками  $d$ .

$$\text{Ответ: } \Delta q = \frac{qx}{d}.$$

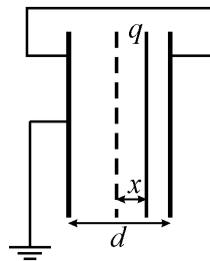


Рис. 7.19. Конденсатор с металлической заряженной пластиной.

**Задача 7.4.5** ([2], 3.115а). Четыре одинаковые металлические пластины расположены в воздухе на расстоянии  $d = 1,00$  мм друг от друга. Площадь каждой пластины  $S = 220$  см<sup>2</sup>. Найти емкость системы между точками А и В, если пластины соединены так, как показано на рис. 7.20.

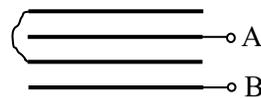


Рис. 7.20. Схема соединения металлических пластин.

$$\text{Ответ: } C = 2\epsilon_0 S / 3d = 0,13 \text{ нФ}.$$

**Задача 7.4.6** ([3], 113). Плоский конденсатор имеет емкость 600 пФ. Насколько она изменится, если ввести между обкладками параллельно им медный лист, толщина которого равна  $1/4$  расстояния между обкладками?

$$\text{Ответ: емкость увеличится на } 200 \text{ пФ}.$$

**Задача 7.4.7** ([3], 120). Показать, что формулы для емкости цилиндрического и сферического конденсаторов переходят в формулу для емкости плоского конденсатора при малых разностях между радиусами внутренней и внешней обкладок.

*Ответ:* если  $R_2 = R_1 + \Delta R$ , то  $\ln(R_2 / R_1) = \ln(1 + \Delta R / R_1) \approx \Delta R / R_1$  и емкость цилиндрического конденсатора  $C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln(R_2 / R_1)} \approx \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\Delta R / R_1} = \frac{\epsilon_0 S}{\Delta R}$ ; для сферического конденсатора доказательство аналогичное.

**Задача 7.4.8** ([3], 146). Показать, что взаимная емкость двух концентрических сферических поверхностей, достаточно удаленных от поверхности Земли и других проводников, при заземленной внутренней сфере может быть выражена формулой

$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_2^2}{R_2 - R_1}$ , где  $R_2$  и  $R_1$  – соответственно радиусы внешней и внутренней сфер.

*Ответ:* при заземлении внутренней сферы систему можно рассматривать как параллельно соединенные сферический конденсатор и внешнюю сферу, имеющую емкость  $C = 4\pi\epsilon_0 R_2$  относительно бесконечно удаленной сферы.

**Задача 7.4.9** ([2], 3.117). В схеме, показанной на рис. 7.21, найти разность потенциалов между точками А и В, если ЭДС  $\mathcal{E} = 110$  В и отношение емкостей  $C_2/C_1 = \eta = 2,0$ .

*Ответ:*  $U = \frac{\mathcal{E}}{1 + 3\eta + \eta^2} = 10$  В.

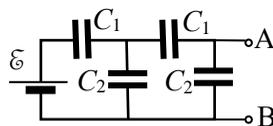


Рис. 7.21. Схема соединения конденсаторов.

**Задача 7.4.10** ([2], 3.119). В некоторой цепи имеется участок АВ, показанный на рис. 7.22. ЭДС источника  $\mathcal{E} = 10$  В, емкости конденсаторов  $C_1 = 1,0$  мкФ,  $C_2 = 2,0$  мкФ и разность потенциалов  $\varphi_A - \varphi_B = 5,0$  В. Найти напряжение на каждом конденсаторе.

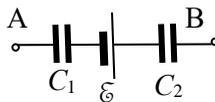


Рис. 7.22. Схема соединения конденсаторов.

Ответ:  $U_1 = q / C_1 = 10 \text{ В}$ ,  $U_2 = q / C_2 = 5 \text{ В}$ , где

$$q = \frac{(\varphi_A - \varphi_B + \mathcal{E})C_1C_2}{C_1 + C_2}.$$

**Задача 7.4.11** ([2], 3.120). В схеме, показанной на рис. 7.23, найти разность потенциалов между левой и правой обкладкой каждого конденсатора.

Ответ:

$$U_1 = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{1 + C_1 / C_2}, U_2 = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{1 + C_2 / C_1}.$$

**Задача 7.4.12** ([2], 3.121). Найти заряд каждого конденсатора в цепи, показанной на рисунке к задаче 7.4.11.

$$\text{Ответ: } q = \frac{|\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2|C_1C_2}{C_1 + C_2}.$$

**Задача 7.4.13** ([2], 3.126). Найти разность потенциалов  $\varphi_A - \varphi_B$  между точками А и В схемы, показанной на рис. 7.24.

$$\text{Ответ: } \varphi_A - \varphi_B = \frac{C_2\mathcal{E}_2 - C_1\mathcal{E}_1}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

**Задача 7.4.14** ([3], 125). Четыре одинаковых конденсатора соединены, как показано на рис. 7.25, и присоединены к батарее  $\mathcal{E}$ . Ключ  $K_2$  сначала разомкнут, а ключ  $K_1$  замкнут. Затем размыкают ключ  $K_1$  и замыкают ключ  $K_2$ . Какова будет разность потенциалов на каждом конденсаторе, если ЭДС батареи  $\mathcal{E} = 9 \text{ В}$ ?

$$\text{Ответ: } V_1 = 3 \text{ В}, V_2 = 1,5 \text{ В}, V_3 = 3 \text{ В}, \\ V_4 = 1,5 \text{ В}.$$

**Задача 7.4.15**. Решить предыдущую задачу 7.4.14 при условии, что ключ  $K_1$  замыкают и размыкают при замкнутом ключе  $K_2$ .

$$\text{Ответ: } V_1 = 3,6 \text{ В}, V_2 = 1,8 \text{ В}, V_3 = 3,6 \text{ В}, V_4 = 1,8 \text{ В}.$$

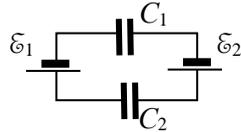


Рис. 7.23. Схема соединения конденсаторов.

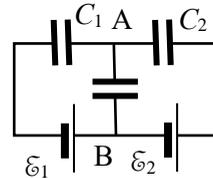


Рис. 7.24. Схема соединения конденсаторов.

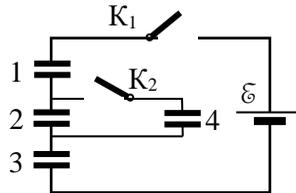


Рис. 7.25. Схема соединения конденсаторов.

**ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ ПОЛЯ  
В ДИЭЛЕКТРИКАХ.  
ПОНДЕРОМОТОРНЫЕ СИЛЫ  
И ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ.  
ПОСТОЯННЫЙ ТОК**

**2**

- **ОДНОРОДНЫЙ ДИЭЛЕКТРИК  
В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ.  
ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ**
- **НЕОДНОРОДНЫЙ ДИЭЛЕКТРИК  
В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ.  
КОНДЕНСАТОРЫ С ДИЭЛЕКТРИКАМИ**
- **ДИЭЛЕКТРИКИ С ЗАДАННЫМ СТАТИЧЕСКИМ  
СОСТОЯНИЕМ ПОЛЯРИЗАЦИИ**
- **ЭНЕРГИЯ И РАБОТА ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ**
- **ПОНДЕРОМОТОРНЫЕ СИЛЫ  
В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ**
- **ТОКИ В СПЛОШНЫХ ПРОВОДЯЩИХ СРЕДАХ**
- **РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА.  
ПРАВИЛА КИРХГОФА, МЕТОДЫ  
КОНТУРНЫХ ТОКОВ И УЗЛОВЫХ  
ПОТЕНЦИАЛОВ**

## Глава 8

# ОДНОРОДНЫЙ ДИЭЛЕКТРИК В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

### 8.1. Теоретические вопросы

**Свободные заряды** – заряды (носители заряда), которые могут перемещаться в веществе на макроскопические расстояния.

**Связанные заряды** – заряды (носители заряда) в веществе, которые под действием электрического поля могут перемещаться лишь на микроскопические (порядка атомных) расстояния.

**Диэлектрики** – тела, в которых нет свободных зарядов и поэтому в них нет токов проводимости.

**Явление электрической поляризации диэлектрика** – это пространственное перераспределение связанных зарядов диэлектрика под действием внешнего электрического поля, которое приводит к образованию или упорядочению дипольных моментов внутри диэлектрика.

#### **Основные механизмы электрической поляризации.**

В неполярных диэлектриках, молекулы (атомы) которых не имеют собственных дипольных моментов, поляризация возникает в результате смещения электронной оболочки и атомных ядер при внесении диэлектрика в поле.

В полярных диэлектриках, молекулы которых имеют собственные дипольные моменты, поляризация связана с ориентацией дипольных моментов в электрическом поле.

В ионных диэлектриках кристаллическая решетка состоит из ионов противоположного знака. При наложении поля происходит относительное смещение двух противоположно заряженных подрешеток – поляризация.

В сегнетоэлектриках существует спонтанная (самопроизвольная) поляризация.

Общее для всех диэлектриков то, что в результате поляризации в объеме диэлектрика возникают преимущественно ориентированные в пространстве электрические диполи.

**Вектор (электрической) поляризации** – это электрический дипольный момент единицы объема диэлектрика:

$$\mathbf{P} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mathbf{p}_i}{\Delta V}; [\mathbf{P}] = \frac{\text{Кл} \cdot \text{м}}{\text{м}^3} = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}. \quad (8.1)$$

Здесь  $\mathbf{p}_i$  – электрические дипольные моменты молекул; суммирование ведется по молекулам, находящимся в физически бесконечно малом объеме диэлектрика  $\Delta V$ .

**Теорема Гаусса для вектора поляризации в интегральной форме.** Поток вектора поляризации  $\mathbf{P}$  через любую замкнутую поверхность  $S$  равен связанному заряду  $q'$  внутри поверхности, взятому с обратным знаком:

$$\oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = -q'. \quad (8.2)$$

**Теорема Гаусса для вектора поляризации в дифференциальной форме:**

$$\text{div } \mathbf{P} = -\rho', \quad (8.3)$$

где  $\rho'$  – объемная плотность связанных зарядов.

**Граничное условие для нормальных составляющих векторов поляризации.** Если направить нормаль  $\mathbf{n}$  к поверхности раздела двух сред от среды 1 к среде 2, то:

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma' \text{ или } (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot \mathbf{n} = -\sigma', \quad (8.4)$$

где  $\sigma'$  – поверхностная плотность связанных зарядов.

**Электрическая индукция** – это физическая величина, равная сумме напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$ , умноженной на электрическую постоянную  $\varepsilon_0$ , и вектора поляризации  $\mathbf{P}$ :

$$\mathbf{D} \equiv \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}; [\mathbf{D}] = [\mathbf{P}] = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}. \quad (8.5)$$

**Теорема Гаусса для электрической индукции в интегральной форме.** Поток электрической индукции через любую замкнутую поверхность  $S$  равен свободному (стороннему для диэлектрика) заряду  $q$ , охватываемому этой поверхностью:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q. \quad (8.6)$$

**Теорема Гаусса для электрической индукции в дифференциальной форме:**

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho, \quad (8.7)$$

где  $\rho$  – объемная плотность свободных зарядов.

**Граничное условие для нормальных составляющих векторов электрической индукции.** Если направить нормаль  $n$  к поверхности раздела двух сред от среды 1 к среде 2, то:

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \text{ или } (D_2 - D_1) \cdot n = \sigma, \quad (8.8)$$

где  $\sigma$  – поверхностная плотность свободных зарядов.

**Граничное условие для нормальных составляющих напряженности электрического поля.** Если направить нормаль  $n$  к поверхности раздела двух сред от среды 1 к среде 2, то:

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma + \sigma'}{\epsilon_0} \text{ или } (E_2 - E_1) \cdot n = \frac{\sigma + \sigma'}{\epsilon_0}. \quad (8.9)$$

**Граничное условие для тангенциальных составляющих напряженности электрического поля:**

$$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0. \quad (8.10)$$

**Материальное уравнение** – уравнение, связывающее материальный вектор (вектор электрической поляризации) с полевым вектором электрического поля (напряженностью поля):

$$P = P(E),$$

или материально-полевой вектор (вектор электрической индукции) с полевым вектором электрического поля (напряженностью поля):

$$D = D(E).$$

Для линейных изотропных сред материальные уравнения имеют вид:

$$P(r) = \epsilon_0 \chi(r) E(r), \quad (8.11)$$

$$D(r) = \epsilon_0 \epsilon(r) E(r), \quad (8.12)$$

где  $\chi(r)$  – диэлектрическая восприимчивость диэлектрика, зависящая от свойств диэлектрика и внешних условий;

$\epsilon(r) = 1 + \chi(r)$  – диэлектрическая проницаемость диэлектрика.

**Закон преломления силовых линий электрического поля.**

На произвольной границе раздела двух линейных изотропных диэлектриков в отсутствие свободных зарядов на поверхности раздела для линий напряженности электрического поля (рис. 8.1):

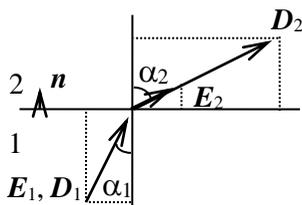


Рис. 8.1. Преломление силовых линий на границе раздела двух диэлектриков.

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \quad (8.13)$$

**Взаимосвязь свободных и связанных зарядов в однородном изотропном диэлектрике.** Для однородного линейного изотропного диэлектрика с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  :

$$q' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} q, \quad (8.14)$$

где  $q'$  и  $q$  – связанный и свободный заряды внутри любой замкнутой поверхности, расположенной в области однородного диэлектрика;

$$\rho'(\mathbf{r}) = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \rho(\mathbf{r}), \quad (8.15)$$

где  $\rho'(\mathbf{r})$  и  $\rho(\mathbf{r})$  – объемные плотности связанного и свободного зарядов внутри любой замкнутой поверхности, расположенной в области однородного диэлектрика.

## 8.2 Основные типы задач (классификация)

8.1. Определение плотности поверхностных  $\sigma'$  и объемных  $\rho'$  поляризационных зарядов в диэлектрике, а также вектора поляризации  $\mathbf{P}$ .

8.2. Определение напряженности  $\mathbf{E}$ , потенциала  $\varphi$  и вектора индукции  $\mathbf{D}$  в системах с однородными диэлектриками.

## 8.3 Методы решения и примеры решения задач.

### Задачи типа 8.1

*Определение плотности поверхностных  $\sigma'$  и объемных  $\rho'$  поляризационных зарядов в диэлектрике, а также вектора поляризации  $\mathbf{P}$ .*

**Методы решения.** Использование формул (8.2) – (8.5), (8.11), (8.12). Эффективный прием – приравнять выражения для напряженности поля в диэлектрике, записанные в «микроскопическом» представлении (через известную диэлектрическую проницаемость диэлектрика) и в «макроскопическом» представлении (как суперпозицию напряженностей полей от сторонних и связанных зарядов).

**Задача 4.3.1** Металлическая сфера радиуса  $R$ , имеющая заряд  $q$ , расположена в безграничной однородной диэлектрической среде с проницаемостью  $\varepsilon$ . Определить вектор поляризации  $\mathbf{P}(r)$  в произвольной точке среды, а также плотности поверхностных  $\sigma'$  и объемных  $\rho'$  связанных зарядов в диэлектрике.

### Решение

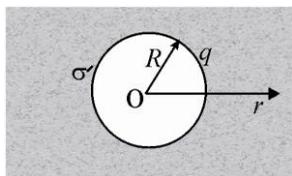


Рис. 8.2. Металлическая заряженная сфера в диэлектрической среде.

Распределение всех зарядов в рассматриваемой системе обладает сферической симметрией, поэтому силовые линии электростатического поля направлены вдоль радиуса сферы, и модуль напряжённости поля зависит только от расстояния  $r$  до центра сферы.

Поместим начало системы координат в центр заряженной сферы. Внутри произвольной сферы радиуса  $r < R$  зарядов нет, поэтому по теореме Гаусса напряженность электрического поля там равна нулю.

Снаружи сферы ( $r > R$ ) электрическое поле представляет собой суперпозицию двух полей: поля самой заряженной сферы и поля связанных зарядов, индуцированных в диэлектрической среде. Поэтому, для того, чтобы воспользоваться теоремой Гаусса для напряжённости электрического поля в этой области нужно знать величину и распределение связанных зарядов в веществе. Однако, можно воспользоваться теоремой Гаусса для вектора индукции электростатического поля  $\mathbf{D}$  (8.6), поскольку в ней фигурируют только свободные заряды, размещённые на сфере:

$$D(r) \cdot 4\pi r^2 = q.$$

Связь векторов электрической индукции и напряжённости поля даётся соотношением (8.12):

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}.$$

Таким образом, в произвольной точке, находящейся на расстоянии  $r > R$  от центра сферы, напряженность поля в диэлектрике будет равна:

$$E(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon \varepsilon_0} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \cdot \frac{q}{\varepsilon r^2},$$

или в векторной форме:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{\epsilon r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Для нахождения поляризации диэлектрика используем связь векторов  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{E}$  (8.11):

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = (\epsilon - 1)\epsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r}) = (\epsilon - 1)\epsilon_0 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{\epsilon r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{(\epsilon - 1)q}{4\pi\epsilon r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

В данной задаче диэлектрик изотропный и сторонних зарядов внутри него нет, поэтому объемная плотность связанных зарядов в нем равна нулю:

$$\rho' = 0.$$

В этом можно убедиться, используя выражение (8.3) и вычислив дивергенцию вектора  $\mathbf{P}$  в сферических координатах:

$$\rho' = -\operatorname{div}\mathbf{P} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(r^2 P) = 0.$$

Связанные заряды будут индуцироваться в диэлектрике только вблизи поверхности сферы. Для нахождения поверхностной плотности связанных зарядов  $\sigma'$  воспользуемся граничными условиями для вектора поляризации (8.4), так как нормальная компонента вектора  $\mathbf{P}$  испытывает на границе раздела скачок, равный поверхностной плотности связанного заряда:

$$\sigma' = P_{1n} - P_{2n}.$$

В данной задаче внутри сферы поляризация равна нулю, и так как вектор  $\mathbf{P}$  направлен перпендикулярно границе раздела сред (поверхности сферы), то:

$$\sigma' = 0 - \frac{(\epsilon - 1)q}{4\pi\epsilon R^2} = -\frac{(\epsilon - 1)}{\epsilon} \sigma = -\frac{(\epsilon - 1)}{\epsilon} \cdot \frac{q}{4\pi R^2}.$$

*Замечание 1.* Полный связанный заряд, образовавшийся на сферической границе диэлектрика, равен:

$$q' = 4\pi R^2 \sigma' = -\frac{\epsilon - 1}{\epsilon} q.$$

Результат справедлив для сферы любого радиуса  $R$ . Если устремить  $R$  к нулю, то зависимость  $\mathbf{P}(r)$  не изменится, а полный поверхностный связанный заряд будет оставаться постоянным.

*Замечание 2.* Если диэлектрик не безграничный, а представляет собой шаровой слой, внешний радиус которого равен  $R_1 > R$ , то на внешней границе диэлектрика появляется связанный заряд  $-q'$ , равный по величине и противоположный по знаку

связанному заряду  $q'$ , находящемуся на внутренней поверхности слоя. Равенство этих зарядов следует из теоремы Гаусса для вектора  $\mathbf{P}$ : если в качестве поверхности  $S$  взять концентрическую сферу, радиус которой превышает  $R_1$ , то полный связанный заряд внутри этой сферы должен равняться нулю, так как в этой области  $\mathbf{P} = 0$ . За пределами диэлектрического слоя поле совпадает с полем точечного заряда  $q$ , расположенного в центре сферы.

$$\text{Ответ: } \mathbf{P}(r) = \frac{(\varepsilon - 1)q}{4\pi\varepsilon r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}; \quad \sigma' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \cdot \frac{q}{4\pi R^2}; \quad \rho' = 0.$$

**Задача 8.3.2.** В плоский конденсатор параллельно обкладкам вставлена диэлектрическая пластинка из материала с проницаемостью  $\varepsilon$  (рис. 8.3). Определить модуль вектора поляризации  $\mathbf{P}$  и плотности поверхностных  $\sigma'$  и объемных  $\rho'$  связанных зарядов в пластинке. Заряд конденсатора  $q$ , площадь пластин  $S$ .

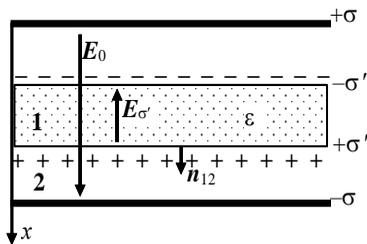


Рис. 8.3. Направления векторов электрического поля конденсатора  $\mathbf{E}_0$  и поляризованной диэлектрической пластины  $\mathbf{E}_{\sigma'}$ .

### Решение

В плоском конденсаторе (рис. 8.3) поле считаем однородным (краевыми эффектами, как обычно, пренебрегаем). Из симметрии системы следует, что векторы всех полей направлены перпендикулярно к пластинам (т.е. по оси  $X$  на рис. 8.3), поляризованность диэлектрика однородна, поэтому объемная плотность связанных зарядов равна нулю.

Напряженность поля внутри диэлектрика  $E$  можно выразить двумя способами аналогично задаче 8.3.1. С учетом выбранного направления оси  $X$  и указанных на рис. 4.3 знаков зарядов имеем:

$$E = E_0 - E_{\sigma'} = \frac{E_0}{\varepsilon} \quad \text{или} \quad \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon},$$

где  $E_0 = \sigma/\varepsilon_0$  – напряженность в отсутствие диэлектрика,  $\sigma = q/S$  – плотность свободного заряда на пластинах конденсатора. Отсюда находим:

$$\sigma' = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \sigma.$$

Вектор поляризации  $\mathbf{P}$  определим из (8.11):  $\mathbf{P} = \alpha \varepsilon_0 \mathbf{E}$ , где  $\alpha = \varepsilon - 1$ , а  $\mathbf{E}$  – напряженность поля внутри диэлектрика:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \sigma,$$

а направление вектора  $\mathbf{P}$  совпадает с направлением поля в конденсаторе. Этот же результат можно получить непосредственно из граничного условия (8.4). В данном случае для нижней границы пластины можно записать (см. рис. 8.3):

$$\mathbf{P}_2 = 0, \quad \mathbf{n}_{12} \cdot \mathbf{P}_1 = \sigma' = \sigma \frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} > 0.$$

Положительность результата означает совпадение направлений векторов нормали  $\mathbf{n}_{12}$  и  $\mathbf{P}_1$ .

Эти рассуждения не зависят от толщины диэлектрической пластинки. Поэтому полученные выводы применимы и в том случае, когда диэлектрик занимает все пространство между пластинами конденсатора.

$$\text{Ответ: } P = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \sigma, \quad \sigma' = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \sigma, \quad \sigma = \frac{q}{S}$$

*Замечание.* Поле вектора электрической индукции  $\mathbf{D}$  внутри конденсатора однородно и определяется только свободными зарядами пластин:  $D = \sigma$ . Отсюда можно сразу найти поляризацию среды:

$$P = (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 E = (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \sigma.$$

**Задача 8.3.3.** Точечный заряд  $q$  находится в центре шара радиуса  $R$  из диэлектрика с проницаемостью  $\varepsilon_1$ . Шар окружен безграничным диэлектриком с проницаемостью  $\varepsilon_2$  (рис. 8.4). Найти поверхностную плотность связанных зарядов  $\sigma'$  на границе раздела этих диэлектриков.

## Решение

Согласно (8.4)

$$\sigma' = P_{1n} - P_{2n},$$

где  $\mathbf{P}_1$  и  $\mathbf{P}_2$  – векторы поляризации обоих диэлектриков у границы  $r = R$ . Величины  $P_1$  и  $P_2$  совпадают с выражениями для поляризации, полученными в задаче 8.3.1:

$$P_1(R) = \frac{q}{4\pi R^2} \left( \frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1} \right),$$

$$P_2(R) = \frac{q}{4\pi R^2} \left( \frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2} \right).$$

$$\text{Следовательно, } \sigma' = P_1(R) - P_2(R) = \frac{q}{4\pi R^2} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right).$$

$$\text{Ответ: } \sigma' = \frac{q}{4\pi R^2} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right).$$

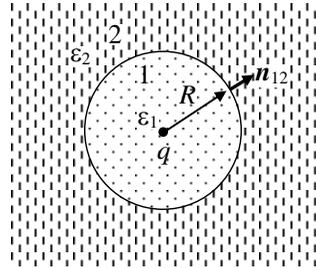


Рис. 8.4. Система, состоящая из точечного заряда  $q$ , диэлектрического шара и безграничного диэлектрика.

**Задача 8.3.4.** Между обкладками плоского конденсатора находятся две прилегающие друг к другу диэлектрические пластинки, проницаемости которых равны  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ . На пластинах конденсатора равномерно распределены заряды с поверхностной плотностью  $\sigma$  и  $-\sigma$ . Определить плотности  $\sigma'$  связанных зарядов на свободных поверхностях диэлектрических пластинок, а также на границе их раздела (рис. 8.5).

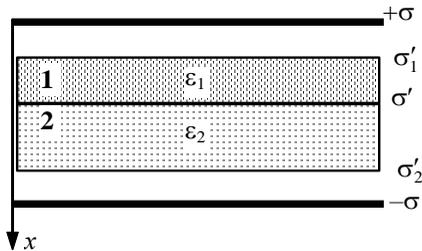


Рис. 8.5. Плоский конденсатор с двумя диэлектрическими прослойками.

## Решение

Для определения  $\sigma'$  используем граничное условие (8.4) для нормальных составляющих векторов поляризации  $\mathbf{P}_1$  и  $\mathbf{P}_2$ , а сами величины векторов  $P_1$  и  $P_2$  найдем из напряженностей соответствующих электрических полей (8.11).

Учитывая выбранное на рис. 8.5 направление оси  $X$  и знаки зарядов, получаем, что вне диэлектрических пластин  $E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ , а внутри пластинок 1 и 2

$$E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_1}, \quad E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_2},$$

откуда следует:

$$P_1 = \sigma \left( \frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1} \right), \quad P_2 = \sigma \left( \frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2} \right).$$

Используя (8.4), находим:

$$\sigma'_1 = -P_1 = -\sigma \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon_1} \right) < 0, \quad \sigma'_2 = P_2 = \sigma \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon_2} \right) > 0.$$

На границе раздела диэлектриков

$$\sigma' = -\sigma'_1 - \sigma'_2 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \sigma.$$

Это следует также из (8.2), если в качестве поверхности  $S$  взять поверхность внутри конденсатора, заключающую в себе оба диэлектрика (суммарный связанный заряд внутри такой поверхности должен быть равен нулю).

$$\text{Ответ: } \sigma'_1 = -\sigma \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon_1} \right), \quad \sigma'_2 = \sigma \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon_2} \right), \quad \sigma' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \sigma.$$

**Задача 8.3.5.** Однородный изотропный диэлектрик с проницаемостью  $\varepsilon$  заполняет все нижнее полупространство. В вакууме на расстоянии  $h$  от его поверхности находится точечный заряд  $q$ . Определить поверхностную плотность поляризационных (связанных) зарядов в произвольной точке границы раздела, а также полный связанный заряд на поверхности диэлектрика.

### Решение

Для ответа на первый вопрос используем непрерывность нормальной компоненты вектора индукции  $D_n$  (8.8) на границе раздела вакуум (среда 1) – диэлектрик (среда 2).

Рассмотрим напряженность поля в бесконечно малой окрестности произвольной точки  $A$ , лежащей на границе раздела

(рис. 8.6). Ввиду цилиндрической симметрии системы достаточно задать лишь радиус  $x$ , на котором точка А находится от основания перпендикуляра О, опущенного из точки нахождения заряда на плоскую границу диэлектрика.

Пусть  $\sigma'(x)$  – плотность связанного заряда в точке А. Вблизи точки А напряженность поля будет суперпозицией поля  $E_q$  стороннего точечного заряда  $q$  и поля  $E'$  от всех связанных зарядов, появившихся на границе.

Напряженность  $E_q$  направлена по радиус-вектору, проведенному от заряда  $q$  в точку А, и равна по модулю

$$E_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2},$$

где  $r^2 = x^2 + h^2$ .

Связанные заряды, очевидно, будут распределены на плоскости неравномерно.

Нормальная компонента напряженности поля ( $E'_{\perp}(x)$  на рис. 8.6) создается только поверхностными зарядами в непосредственной окрестности точки А и имеет величину

$$E'(x) = \frac{\sigma'}{2\epsilon_0}.$$

Напряженность поля от всех остальных связанных зарядов плоскости в этой точке направлена горизонтально вдоль плоскости ( $E'_{\parallel}$  на рис. 8.6).

В первой среде (в вакууме) нормальная компонента вектора индукции, в соответствии с выбранным направлением нормали, равна согласно (8.12)

$$D_{1n} = \epsilon_0 E_{1n} = \epsilon_0 E_q \cos \alpha - \frac{\sigma'}{2} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{qh}{r^3} - \frac{\sigma'}{2}.$$

Во второй среде (в диэлектрике)

$$D_{2n} = \epsilon_0 \epsilon E_{2n} = \epsilon \left( \epsilon_0 E_q \cos \alpha + \frac{\sigma'}{2} \right) = \epsilon \left( \frac{1}{4\pi} \frac{qh}{r^3} + \frac{\sigma'}{2} \right).$$

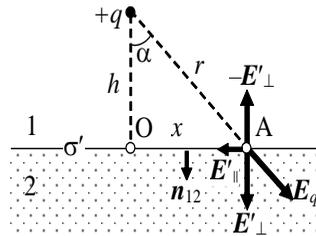


Рис. 8.6. Напряженности полей, создаваемых в точке А сторонним зарядом  $q$  и поляризационными зарядами диэлектрика.

Здесь учтено, что знак нормальных компонент напряженности поля  $E'_{\perp}(x)$  по обе стороны границы противоположен. Из условия  $D_{1n} = D_{2n}$  находим:

$$\sigma'(x) = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \cdot \frac{qh}{2\pi r^3} = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \cdot \frac{qh}{2\pi(x^2 + h^2)^{3/2}}.$$

Для вычисления величины полного связанного заряда  $q'$  выделяем на плоскости кольцевую область с центром в точке  $O$ , расположенную между окружностями радиусов  $x$  и  $x + dx$ . Площадь этой области  $dS = 2\pi x dx$ , на ней находится заряд  $dq' = \sigma' dS$ . Полный заряд  $q'$  найдем, интегрируя это выражение по  $x$  от нуля до бесконечности:

$$q' = -qh \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \int_0^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + h^2)^{3/2}} = -q \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}$$

*Замечание.* Рассмотрим случай, когда заряд  $q$  находится на границе. При  $h \rightarrow 0$  из полученного результата видно, что  $\sigma' \rightarrow 0$  во всех точках, кроме  $x = 0$ . Действительно, при этом в произвольной точке  $A(x)$  нормальная компонента вектора напряженности  $E_q$  обращается в нуль, ввиду чего условие непрерывности нормальной компоненты вектора  $D$  приводит к соотношению  $\frac{\sigma'}{2} = -\varepsilon \frac{\sigma'}{2}$ ,

которое может выполняться только при  $\sigma' = 0$ . Итак, если точечный заряд  $q$  находится на плоской границе раздела вакуума и безграничного диэлектрика, то  $\sigma' = 0$  везде, кроме точки  $x = 0$ .

Величина  $q'$  не зависит от  $h$ . Однако при  $h \rightarrow 0$  весь этот заряд собирается около точки  $x = 0$ . Поэтому напряженность поля можно вычислить как суперпозицию напряженностей полей двух точечных зарядов  $q$  и  $q'$ , расположенных в одной точке  $x = 0$ . Поскольку других зарядов нет, создаваемое ими во всем пространстве поле изотропно, то есть в диэлектрике его напряжённость такая же, как в вакууме:

$$E(r) = E_1(r) = E_2(r) = \frac{q + q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{1}{\varepsilon + 1} \cdot \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Это означает, что силовые линии вектора  $E$  расходятся из центра равномерно, а эквипотенциальные поверхности являются сферами.

Вектор электрической индукции  $\mathbf{D}$  легко получить из найденного выражения для  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{D}_1 = \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad D_1 = \frac{1}{\varepsilon + 1} \cdot \frac{q}{2\pi r^2},$$

$$\mathbf{D}_2 = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad D_2 = \frac{\varepsilon}{(\varepsilon + 1)} \cdot \frac{q}{2\pi r^2}.$$

Картина линий вектора индукции  $\mathbf{D}$ , в отличие от картины линий напряженности поля  $\mathbf{E}$ , несимметрична. Поскольку  $D_2 > D_1$ , силовые линии индукции, расходясь радиально от центра, имеют большую густоту в диэлектрике, чем в вакууме.

$$\text{Ответ: } \sigma'(x) = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \cdot \frac{qh}{2\pi(x^2 + h^2)^{3/2}}, \quad q' = -q \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}.$$

### Задачи типа 8.2

*Определение напряженности поля  $\mathbf{E}$ , потенциала  $\varphi$  и вектора индукции  $\mathbf{D}$  в системах с однородными диэлектриками*

**Методы решения.** Использование известного или ранее рассчитанного распределения связанных зарядов и вектора поляризации. Использование граничных условий (8.4), (8.8) – (8.10) и формул (8.6), (8.7) и (8.12).

**Задача 8.3.6.** Бесконечно большая пластина из однородного диэлектрика с проницаемостью  $\varepsilon$  заряжена равномерно сторонним зарядом с объемной плотностью  $\rho$ . Толщина пластины  $2d$ . Найти напряженность электрического поля и потенциал, создаваемые этой системой, а также объемную и поверхностную плотности связанного заряда.

### Решение

Из симметрии системы следует, что напряженность и потенциал зависят только от одной координаты, выбранной в направлении нормали к слою. Пусть это будет ось  $X$  декартовой системы координат с началом в центре слоя. Напряженность поля такой системы при  $\varepsilon = 1$  была вычислена в задаче 2.3.4 на основе теоремы Гаусса:

$$E(|x| < d) = \frac{\rho x}{\epsilon_0}, E(|x| > d) = \pm \frac{\rho d}{\epsilon_0}.$$

Напряженность поля внутри диэлектрика в  $\epsilon$  раз меньше:

$$E(|x| < d) = \frac{\rho x}{\epsilon_0 \epsilon}, E(|x| > d) = \pm \frac{\rho d}{\epsilon_0}.$$

На границе раздела имеются связанные заряды, поэтому напряженность испытывает здесь скачок. Распределение потенциала найдем, применяя формулу (3.4) из гл. 3:

$$\varphi(x) = \varphi(0) - \int_0^x E dx.$$

Если принять, что  $\varphi(0) = 0$ , получим:

$$\varphi(|x| \leq d) = -\frac{\rho x^2}{2\epsilon_0 \epsilon},$$

$$\varphi(x \geq d) = -\left( \frac{\rho d^2}{2\epsilon \epsilon_0} + \frac{\rho d}{\epsilon_0} (x - d) \right) = -\frac{\rho d}{\epsilon_0} \left( \frac{d}{2\epsilon} + x - d \right).$$

Используя (8.11), находим  $P = \epsilon_0(\epsilon - 1)E$  при  $x < d$  (и, конечно,  $P = 0$  при  $x > d$ ). Подставляя найденное значение  $E$ , получаем:

$$P(x) = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \rho x.$$

С помощью (8.3) устанавливаем величину объемной плотности связанного заряда:

$$\rho' = -\operatorname{div} \mathbf{P} = -\frac{dP}{dx} = -\frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \rho,$$

а с помощью (8.4) — поверхностной плотности связанного заряда:

$$\sigma' = -P_n(d) = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \rho d.$$

Графики зависимостей  $E(x)$  и  $\varphi(x)$  представлены на рис. 8.7.

**Ответ:**

при  $x < d$ :  $E(x) = \frac{\rho x}{\epsilon_0}, \varphi(x) = -\frac{\rho x^2}{2\epsilon_0 \epsilon};$

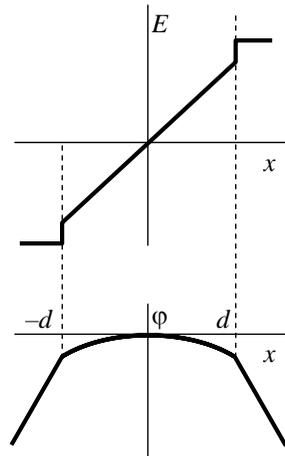


Рис. 8.7. Графики зависимостей  $E(x)$  и  $\varphi(x)$ .

$$\text{при } x > d: E(x) = \frac{\rho d}{\varepsilon_0}, \quad \varphi(x) = -\frac{\rho d}{\varepsilon_0} \left( \frac{d}{2\varepsilon} + x - d \right);$$

$$\rho' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \rho = \text{const}, \quad \sigma' = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \rho d.$$

**Задача 8.3.7.** Однородный диэлектрик с проницаемостью  $\varepsilon$  имеет вид сферического слоя с радиусами  $a$  и  $b$ , причем  $a < b$ . Найти распределение напряженности поля  $E(r)$  и потенциала  $\varphi(r)$ , если в объеме слоя равномерно размещен сторонний заряд с плотностью  $\rho$ .

### Решение

Из симметрии системы следует, что напряженность и потенциал будут функциями лишь одной переменной: расстояния  $r$  от центра симметрии. Вычислим напряженность поля по теореме Гаусса при  $\varepsilon = 1$ :

$$E_1 = 0 \quad \text{при } r < a,$$

$$E_2 = \rho \frac{r^3 - a^3}{3\varepsilon_0 r^2}, \quad \text{при } a < r < b,$$

$$E_3 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \text{при } r > b.$$

В записанных выражениях

$$q = \frac{4\pi}{3} \rho (b^3 - a^3) \quad \text{— полный заряд}$$

сферического слоя.

При наличии диэлектрика напряженности  $E_1$  и  $E_3$  не изменятся, а  $E_2$  будет в  $\varepsilon$  раз меньше. График зависимости  $E(r)$  представлен на рис. 8.8а.

Примем значение потенциала в бесконечно удаленной точке равным нулю. Тогда при  $r > b$ :

$$\varphi_3(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \rho \frac{b^3 - a^3}{3\varepsilon_0 r},$$

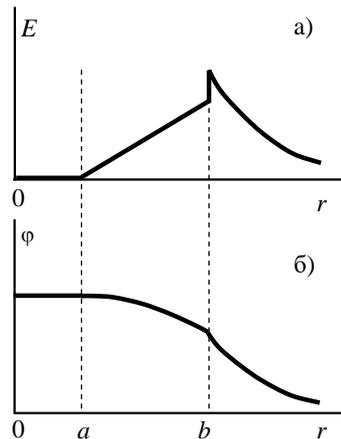


Рис. 8.8. Графики зависимостей  $E(r)$  и  $\varphi(r)$ .

при  $a < r < b$ :

$$\varphi_2(r) = - \int_b^r E_2 dr + \varphi_3(b),$$

при  $r < a$ :

$$\varphi_1 = \text{const.}$$

Из условия непрерывности потенциала следует, что

$$\varphi_1 = \varphi_2(a).$$

Вычисляя интеграл для  $\varphi_2$ , находим:

$$\varphi_2(r) = \frac{\rho}{3\epsilon\epsilon_0} \left( \frac{b^2}{2} (2\epsilon + 1) - \frac{a^3}{b} (\epsilon - 1) - \frac{r^2}{2} - \frac{a^3}{r} \right),$$

$$\varphi_1 = \frac{\rho}{3\epsilon\epsilon_0} \left( \frac{b^2}{2} (2\epsilon + 1) - \frac{a^3}{b} (\epsilon - 1) - \frac{3a^2}{2} \right)$$

График функции  $\varphi(r)$  представлен на рис. 8.8 б.

**Ответ:**

$$\text{при } r < a \quad E_1 = 0, \quad \varphi_1 = \frac{\rho}{3\epsilon\epsilon_0} \left( \frac{b^2}{2} (2\epsilon + 1) - \frac{a^3}{b} (\epsilon - 1) - \frac{3a^2}{2} \right).$$

$$\text{при } a < r < b \quad E_2 = \rho \frac{r^3 - a^3}{3\epsilon_0 r^2},$$

$$\varphi_2(r) = \frac{\rho}{3\epsilon\epsilon_0} \left( \frac{b^2}{2} (2\epsilon + 1) - \frac{a^3}{b} (\epsilon - 1) - \frac{r^2}{2} - \frac{a^3}{r} \right),$$

$$\text{при } r > b \quad E_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad \varphi_3(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \rho \frac{b^3 - a^3}{3\epsilon_0 r}.$$

**Задача 8.3.8.** Две параллельные пластины ничтожно малой толщины заряжены одноименно, причем поверхностная плотность заряда на верхней пластине  $\sigma_1 = 3 \text{ мкКл/м}^2$ , а на нижней  $\sigma_2 = 6 \text{ мкКл/м}^2$ . Расстояние между пластинами  $h = 1 \text{ см}$  мало по сравнению с линейными размерами пластин. Между пластинами вставлена плоскопараллельная парафиновая пластинка толщиной  $d = 5 \text{ мм}$  (рис. 8.9). Диэлектрическая проницаемость парафина  $\epsilon = 2$ . Определить напряженность поля  $E_1$  между пластинами вне диэлектрика, напряженность поля  $E_2$  внутри диэлектрика и разность потенциалов между пластинами.

## Решение

Поскольку на пластинах размещены одноименные заряды, векторы напряженности от пластин направлены навстречу друг другу и суммарная напряженность поля вне диэлектрика направлена от нижней пластины (где величина заряда больше) к верхней и равна

$$E_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\varepsilon_0} n,$$

где  $n$  – единичный вектор, направленный от пластины с большим зарядом к пластине с меньшим зарядом.

Внутри диэлектрика величина напряженности в  $\varepsilon$  раз меньше:

$$E_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\varepsilon_0\varepsilon} n.$$

Поле в пространстве между пластинами однородное, поэтому искомая разность потенциалов равна

$$\Delta\varphi = E_1(h - d) + E_2d.$$

Подставляя численные значения всех величин, находим приближенно:  $E_1 = 170$  кВ/м,  $E_2 = 85$  кВ/м,  $\Delta\varphi = 1,3$  кВ. Величины напряженности существенно меньше диэлектрической прочности воздуха, которая приблизительно равна 30 кВ/см.

*Замечание.* Определим силу, действующую на каждую пластину. Из определения напряженности следует, что силу можно рассчитать, если известен заряд, на который действует сила, и напряженность этого действующего поля. В случае данной задачи заряд первой пластины равен  $q_1 = \sigma_1 S$ , где  $S$  – площадь пластин. На этот заряд действует поле, создаваемое второй пластиной.

Напряженность этого поля равна  $E = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}$ . В итоге находим:

$$F = \frac{\sigma_1\sigma_2}{2\varepsilon_0} S.$$

Из численных данных можно найти лишь плотность действующей силы, т.е. силу, приходящуюся на единицу площади (электрическое давление). Она равна  $f = F/S = 0,5$  Па.

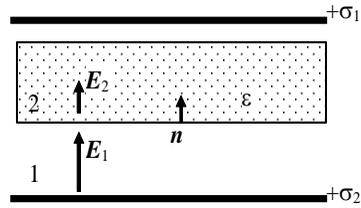


Рис. 8.9. Напряженности полей, вне диэлектрика  $E_1$  и внутри него  $E_2$ .

$$\text{Ответ: } E_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\varepsilon_0} = 170 \text{ кВ/м}, \quad E_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\varepsilon_0\varepsilon} = 85 \text{ кВ/м},$$

$$\Delta\varphi = E_1(h - d) + E_2d = 1,3 \text{ кВ}.$$

#### 8.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 8.4.1** ([3], 68). Какой наибольший заряд  $Q$  можно поместить на металлическом шаре радиуса  $R = 15$  см, если диэлектрическую прочность воздуха  $E$  принять равной  $30000$  В/см?

$$\text{Ответ: } Q = 4\pi\varepsilon_0 ER^2 = 75 \text{ мкКл}.$$

**Задача 8.4.2.** Бесконечно большая пластина из однородного диэлектрика с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  заряжена равномерно с объёмной плотностью  $\rho$ . Толщина пластины  $2d$ . Найти поверхностную и объёмную плотности связанного заряда.

$$\text{Ответ: } \rho' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\rho; \quad \sigma' = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\rho d.$$

**Задача 8.4.3** ([2], 3.79). Вблизи границы раздела стекло-вакуум напряжённость электрического поля в вакууме  $E_0 = 10,0$  В/м, причём угол между вектором  $E_0$  и нормалью  $n$  к границе раздела  $\alpha_0 = 30^\circ$ . Найти напряжённость  $E$  поля в стекле, угол  $\alpha$  между векторами  $E$  и  $n$ , а также поверхностную плотность зарядов вблизи этой точки.

$$\text{Ответ: } E = \frac{E_0}{\varepsilon} \sqrt{\cos^2 \alpha_0 + \varepsilon^2 \sin^2 \alpha_0} = 5,2 \text{ В/м}; \quad \text{tg } \alpha = \varepsilon \text{tg } \alpha_0;$$

$$\sigma' = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) E_0 \cos \alpha_0 = 64 \text{ пКл/м}^2.$$

**Задача 8.4.4** ([3], 63). Металлический шар несёт некоторый заряд. Его заключают в концентрическую оболочку из однородного диэлектрика с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ . Как изменится напряжённость поля внутри и вне оболочки?

*Ответ:* вне оболочки не изменится, а внутри уменьшится в  $\varepsilon$  раз.

**Задача 8.4.5** ([3], 75). Начертить графики зависимости напряжённости поля  $E$  и потенциала  $\varphi$  от расстояния  $r$  до центра шара для следующего случая: металлический шар радиуса  $R = 10$  см имеет заряд  $2$  мкКл и окружён концентрическим слоем диэлектрика с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon = 2$ , внешний радиус которого равен  $20$  см.

*Ответ:* рис. 8.10 (потенциал равен нулю на бесконечности).

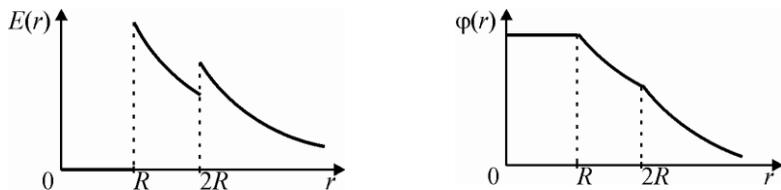


Рис. 8.10. Зависимости  $E(r)$  и  $\varphi(r)$ .

**Задача 8.4.6.** Сторонние заряды равномерно распределены с объёмной плотностью  $\rho > 0$  по шару радиуса  $R$  из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью  $\varepsilon$ . Найти:

а) модуль вектора напряжённости электрического поля как функцию расстояния  $r$  от центра шара; изобразить примерные графики зависимостей  $E(r)$  и  $\varphi(r)$ ;

б) объёмную и поверхностную плотности связанных зарядов.

*Ответ:* а)  $E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$  при  $r < R$ ;

$$E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \text{ при } r > R;$$

$$\text{б) } \rho' = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \rho, \quad \sigma' = \frac{\varepsilon - 1}{3\varepsilon} \rho R.$$

**Задача 8.4.7** ([2], 3.75). Точечный сторонний заряд  $q$  находится в центре диэлектрического шара радиуса  $a$  с проницаемостью  $\varepsilon_1$ . Шар окружён безграничным диэлектриком с проницаемостью  $\varepsilon_2$ . Найти поверхностную плотность связанных зарядов на границе раздела этих диэлектриков.

*Ответ:*  $\sigma' = \frac{q(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_2 a^2}$ .

**Задача 8.4.8** ([2], 3.78а). Однородный диэлектрик имеет вид сферического слоя с радиусами  $a$  и  $b$ , причём  $a < b$ . Изобразить примерные графики модуля напряжённости электрического поля  $E$  и потенциала  $\varphi$  как функций расстояния  $r$  от центра системы, если диэлектрик имеет положительный сторонний заряд, распределённый равномерно по внутренней поверхности слоя.

*Ответ:* см. рис. 8.10, где  $R = a$ ,  $2R = b$ .

**Задача 8.4.9** ([2], 3.81). Бесконечно большая пластина из однородного диэлектрика с проницаемостью  $\varepsilon$  заряжена равномерно сторонним зарядом с объёмной плотностью  $\rho$ . Толщина пластины  $2d$ . Найти:

а) модуль напряжённости и потенциал как функции расстояния  $l$  от середины пластины (потенциал в середине пластины положить равным нулю); взяв ось  $X$  перпендикулярно к пластине, изобразить примерные графики зависимостей проекции  $E_x(x)$  и потенциала  $\varphi(x)$ ;

б) поверхностную и объёмную плотности связанного заряда.

*Ответ:*

$$\text{а) } E(l < d) = \frac{\rho l}{\varepsilon \varepsilon_0}; \quad E(l > d) = \frac{\rho d}{\varepsilon_0}; \quad \varphi(l \leq d) = -\frac{\rho l^2}{2\varepsilon \varepsilon_0};$$

$$\varphi(l \geq d) = -\left(\frac{d}{2\varepsilon} + l - d\right) \frac{\rho d}{\varepsilon_0};$$

$$\text{б) } \sigma' = \frac{\rho d(\varepsilon - 1)}{\varepsilon}, \quad \rho' = -\frac{\rho(\varepsilon - 1)}{\varepsilon}.$$

**Задача 8.4.10.** Какова напряжённость поля  $E$  в воздушном зазоре плоского конденсатора, если разность потенциалов между пластинами  $V = 200$  В? Расстояние между пластинами равно  $d = 0,2$  см, и между ними находится лист стекла с  $\varepsilon = 7$  и толщиной  $h = 0,1$  см.

$$\text{Ответ: } E = \frac{\varepsilon V}{(d - h)\varepsilon + h} = 175 \text{ кВ/м.}$$

**Задача 8.4.11** Сферически симметричная система состоит из внутреннего проводника радиуса  $r_1$ , диэлектрической прослойки с проницаемостью  $\varepsilon$ , ограниченной радиусами  $r_2$  (внутренний) и  $r_3$  (внешний), и внешней тонкой проводящей сферы радиуса  $r_4$ . Внутренний проводник несёт заряд  $q_1$ , внешний – заряд  $q_2$ . Определить потенциал внутреннего проводника и поляризацию диэлектрической прослойки.

$$\text{Ответ: } \varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \frac{q_2}{r_4} + \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} \left( \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_2} \right) q_1 + \frac{q_1}{r_1} \right]; \quad P = \frac{(\varepsilon-1)q_1}{4\pi\varepsilon r^2}.$$

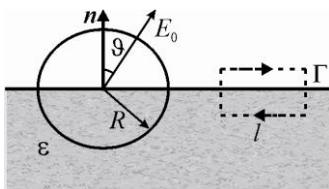


Рис. 8.11. Взаимная ориентация вектора  $E_0$ , диэлектрика, контура  $\Gamma$  и сферы.

найти:

а) поток вектора  $E$  через сферу радиуса  $R$  с центром на поверхности диэлектрика;

б) циркуляцию вектора  $D$  по контуру  $\Gamma$  длины  $l$ , плоскость которого перпендикулярна к поверхности диэлектрика и параллельна вектору  $E_0$ .

$$\text{Ответ: а) } \Phi_E = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} \pi R^2 E_0 \cos \vartheta;$$

$$\text{б) } \oint D dr = -\varepsilon_0(\varepsilon-1)E_0 \sin \vartheta.$$

**Задача 8.4.12** ([2], 3.80). У плоской поверхности однородного диэлектрика с проницаемостью  $\varepsilon$  напряжённость электрического поля в вакууме равна  $E_0$ , причём вектор  $E_0$  составляет угол  $\vartheta$  с нормалью к поверхности диэлектрика (рис 8.11). Считая поле внутри и вне диэлектрика однородным,

## Глава 9

**НЕОДНОРОДНЫЙ ДИЭЛЕКТРИК В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ. КОНДЕНСАТОРЫ С ДИЭЛЕКТРИКАМИ****9.1 Теоретический материал**

**Граничное условие для нормальных составляющих векторов электрической индукции.** Если направить нормаль  $n$  к поверхности раздела двух сред от среды 1 к среде 2, то:

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \text{ или } (D_2 - D_1) \cdot n = \sigma, \quad (9.1)$$

где  $\sigma$  – поверхностная плотность свободных зарядов.

**Граничное условие для нормальных составляющих напряженности электрического поля.** Если направить нормаль  $n$  к поверхности раздела двух сред от среды 1 к среде 2, то:

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma + \sigma'}{\epsilon_0} \text{ или } (E_2 - E_1) \cdot n = \frac{\sigma + \sigma'}{\epsilon_0}, \quad (9.2)$$

где  $\sigma$  и  $\sigma'$  – поверхностные плотности свободных и связанных зарядов.

**Граничное условие для тангенциальных составляющих напряженности электрического поля:**

$$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0. \quad (9.3)$$

**Материальные уравнения для электрического поля, диэлектрические восприимчивость и проницаемость.**

*Материальное уравнение* – уравнение, связывающее материальный вектор (вектор электрической поляризации) с полевым вектором электрического поля (напряженностью поля):

$$P = P(E),$$

или материально-полевой вектор (вектор электрической индукции) с полевым вектором электрического поля (напряженностью поля):

$$D = D(E).$$

Для линейных изотропных сред материальные уравнения имеют вид:

$$P(r) = \epsilon_0 \chi(r) E(r), \quad (9.4)$$

$$D(r) = \epsilon_0 \epsilon(r) E(r), \quad (9.5)$$

где  $\chi(\mathbf{r})$  – диэлектрическая восприимчивость диэлектрика, зависящая от свойств диэлектрика и внешних условий;  $\varepsilon(\mathbf{r}) = 1 + \chi(\mathbf{r})$  – диэлектрическая проницаемость диэлектрика.

## 9.2 Основные типы задач (классификация)

9.1. Нахождение напряжённости и потенциала электрического поля в системах с неоднородным диэлектриком.

9.2. Определение емкости конденсаторов, заполненных неоднородным диэлектриком.

## 9.3 Методы решения и примеры решения задач.

### Задачи типа 9.1

*Нахождение напряжённости и потенциала электрического поля в системах с неоднородным диэлектриком.*

**Методы решения.** Использование теоремы Гаусса для вектора электрической индукции (8.6) позволяет исключить из начального рассмотрения связанные заряды в диэлектриках. Для определения других характеристик электрического поля используют материальные уравнения (9.4) и (9.5), а также граничные условия (9.1) – (9.3). В ряде случаев удобно воспользоваться взаимосвязью свободных и связанных зарядов в однородном изотропном диэлектрике (9.6) – (9.7).

**Задача 9.3.1.** В центре сферического слоя диэлектрика с радиусами  $r_1$  и  $r_2$  помещен точечный заряд  $q$ . Проницаемость диэлектрика  $\varepsilon = \alpha r^2$ , где  $\alpha$  – постоянная величина, а  $r$  – расстояние до центра сферического слоя (рис. 9.1). Найти зависимость модуля векторов индукции электрического поля  $D$ , напряжённости  $E$ , а также поляризации диэлектрика  $P$  от расстояния  $r$ .

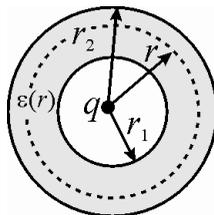


Рис. 9.1. Точечный заряд в центре диэлектрического слоя.

## Решение

Ввиду сферической симметрии векторы, характеризующие электрическое поле такой системы, не зависят от угловых переменных сферической системы координат, а зависят только от расстояния  $r$  до центра сферы.

Применяя теорему Гаусса для вектора индукции  $D$  поля точечного заряда  $q$ , находим модуль индукции  $D$  на расстоянии  $r$  от центра сферического слоя:

$$D(r) = \frac{q}{4\pi r^2}.$$

С учетом материального уравнения (9.5) для модуля напряженности электрического поля  $E$  получаем:

$$r < r_1, r > r_2: E = \frac{D}{\varepsilon \varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r^2};$$

$$r_1 < r < r_2: E = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon r^2}. \quad (9.6)$$

Используем материальное уравнение (9.4) для вектора поляризации  $P$  однородного изотропного диэлектрика:

$$P(r) = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E(r).$$

Подставляя в него выражение (9.6), находим зависимость модуля вектора поляризации  $P$  от расстояния  $r$  внутри диэлектрического слоя:

$$P(r) = \frac{(\varepsilon - 1)q}{4\pi \varepsilon r^2}.$$

Эти результаты верны при любом законе изменения проницаемости диэлектрика от расстояния до центра сферического слоя  $\varepsilon(r)$  (в том числе и при  $\varepsilon = \text{const}$ ).

Для заданной в задаче зависимости  $\varepsilon(r) = \alpha r^2$  для области внутри диэлектрика окончательно получим:

$$E = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 \alpha r^4}, \quad P = \frac{(\alpha r^2 - 1)}{4\pi \alpha r^4} q.$$

**Ответ:**  $D = \frac{q}{4\pi r^2},$

$$r < r_1, r > r_2: E = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r^2}, \quad r_1 < r < r_2: E = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 \alpha r^4},$$

$$r < r_1, r > r_2: P = 0, r_1 < r < r_2: P = \frac{(\alpha r^2 - 1)}{4\pi\alpha r^4} q.$$

**Задача 9.3.2.** Диэлектрическая проницаемость сферического диэлектрического слоя изменяется по закону  $\varepsilon = \frac{\alpha}{r}$ , где  $\alpha$  – известная постоянная, а  $r$  – расстояние до центра слоя (рис. 9.2). Внутренний радиус слоя равен  $R$ , а внешний  $2R$ . На внутренней поверхности диэлектрика равномерно размещён заряд  $+q$ . Принимая значение потенциала в центре слоя равным нулю, найти распределение потенциала во всем пространстве.

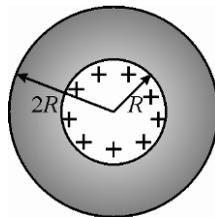


Рис. 9.2. Сферический слой из неоднородного диэлектрика.

### Решение

При  $0 \leq r \leq R$  напряжённость поля равна нулю, и потенциал также равен нулю согласно условию задачи.

Внутри слоя ( $R \leq r \leq 2R$ ) напряжённость электрического поля равна (см. задачу 9.2.1):

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\alpha\varepsilon_0 r}.$$

Тогда потенциал в этой области равен:

$$\varphi = \int_r^R E dr = \frac{q}{2\pi\alpha\varepsilon_0} \ln\left(\frac{R}{r}\right).$$

Так как суммарный поляризационный заряд диэлектрического слоя равен нулю, то снаружи слоя ( $2R \leq r$ ) напряжённость поля равна:

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

и в силу непрерывности потенциала на границе диэлектрика получим:

$$\varphi = \varphi(2R) + \int_{2R}^r E dr = \frac{q}{2\pi\alpha\varepsilon_0} \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{4R^2}\right).$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ответ: } 0 \leq r \leq R & \quad \varphi = 0; \\
 R \leq r \leq 2R & \quad \varphi = \frac{q}{2\pi\alpha\varepsilon_0} \ln\left(\frac{R}{r}\right); \\
 2R \leq r & \quad \varphi = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{4R^2} \right) \right).
 \end{aligned}$$

**Задача 9.3.3.** На пластинах плоского конденсатора находится заряд с плотностью  $\sigma$ , а внутри расположен диэлектрик, проницаемость которого меняется по закону  $\varepsilon = \alpha + \beta x^2$  от значения  $\varepsilon_1$  у одной пластины до значения  $\varepsilon_2$  у другой. Расстояние между пластинами  $d$ . Найти объёмную плотность связанных зарядов в диэлектрике в зависимости от расстояния  $x$  до второй пластины  $\rho'(x)$ .

### Решение

Согласно теореме Гаусса для вектора поляризации в дифференциальной форме (см. (8.3) в главе 8) объёмная плотность связанных зарядов в диэлектрике равна:

$$\rho' = -\operatorname{div} \mathbf{P}.$$

В данной задаче

$$\rho' = -\frac{dP}{dx}.$$

Определим константы в законе изменения диэлектрической проницаемости. Воспользуемся граничными условиями:

$$\varepsilon(0) = \varepsilon_1; \quad \varepsilon(d) = \varepsilon_2.$$

Получим:

$$\alpha = \varepsilon_1; \quad \beta = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d^2}.$$

В результате зависимость диэлектрической проницаемости внутри конденсатора от расстояния до одной из обкладок выражается соотношением:

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d^2} x^2.$$

Согласно граничному условию (9.1) для электрической индукции внутри диэлектрика она равна  $D = \sigma$  и постоянна. Тогда

модуль вектора поляризации диэлектрика в произвольной точке внутри конденсатора равен:

$$P = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E = \varepsilon_0(\varepsilon(x) - 1) \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon(x)} =$$

$$= \sigma \cdot \left( 1 - \frac{d^2}{\varepsilon_1 d^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)x^2} \right).$$

Окончательно получим:

$$\rho' = -\frac{dP}{dx} = -\frac{2\sigma d^2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)x}{(\varepsilon_1 d^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)x^2)^2}.$$

**Ответ:**  $\rho' = -\frac{2\sigma d^2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)x}{(\varepsilon_1 d^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)x^2)^2}.$

## Задачи типа 9.2

*Определение емкости конденсаторов, заполненных неоднородным диэлектриком*

### **Методы решения:**

1) Использование эквивалентных схем, которые представляют неоднородно заполненный диэлектриком конденсатор как систему соединенных между собой конденсаторов, заполненных диэлектриком однородно. После этого применяются формулы сложения емкостей конденсаторов при последовательном и параллельном их соединении.

2) Исходя из зарядов на проводниках ( $\pm q$  в случае конденсатора), найти индукцию электрического поля  $D$ , потом напряжённость поля  $E$  и разность потенциалов  $\Delta\varphi$ . Емкость конденсатора равна  $C = q/\Delta\varphi$ .

**Задача 9.3.4.** Пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено двумя слоями диэлектриков. Толщина слоя первого диэлектрика с проницаемостью  $\varepsilon_1$  равна  $h_1$ , толщина слоя второго диэлектрика с проницаемостью  $\varepsilon_2$  равна  $h_2$  (рис. 9.3). Площадь

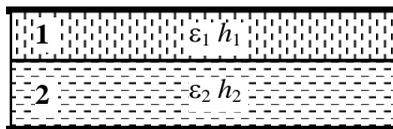


Рис. 9.3. Конденсатор, заполненный двумя слоями диэлектриков.

каждой обкладки равна  $S$ . Найти емкость  $C$  конденсатора.

### Решение

Способ 1. Пусть на пластины конденсатора помещены заряды  $+q$  и  $-q$ . Тогда напряженность поля в первом диэлектрике равна

$$E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_1 \varepsilon_0},$$

а во втором

$$E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_2 \varepsilon_0}.$$

Разность потенциалов между пластинами

$$\Delta\varphi = E_1 h_1 + E_2 h_2,$$

следовательно,

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 S}{h_2 \varepsilon_1 + h_1 \varepsilon_2}.$$

Способ 2. Плоская граница между диэлектриками является эквипотенциальной поверхностью. Поэтому систему можно рассматривать как два последовательно соединенных плоских конденсатора с емкостями

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}{h_1} \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S}{h_2}.$$

Применяя формулу сложения емкостей  $1/C = 1/C_1 + 1/C_2$ , получаем такой же ответ.

**Ответ:** 
$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 S}{h_2 \varepsilon_1 + h_1 \varepsilon_2}.$$

**Задача 9.3.5.** Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено диэлектриком, проницаемость которого меняется по линейному закону от значения  $\varepsilon_1$  у одной пластины до значения  $\varepsilon_2$  ( $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ ) у другой. Расстояние между пластинами  $d$ , площадь каждой пластины равна  $S$ . Найти емкость  $C$  конденсатора.

### Решение

Способ 1. Учитывая симметрию системы, направим ось  $X$  декартовой системы координат по нормали к плоскости пластин конденсатора, а начало отсчета  $0$  выберем в точке пересечения оси

X с пластиной, около которой проницаемость диэлектрика наименьшая (см. рис. 9.4).

Идея решения задачи состоит в том, чтобы заданный конденсатор рассмотреть как систему последовательно соединенных плоских конденсаторов с бесконечно малыми расстояниями  $\Delta x$  между их обкладками. В таком объеме диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon$  можно считать постоянной и для вычисления емкости применить обычную формулу емкости плоского конденсатора.

Выделим такой тонкий слой  $\Delta x$  на произвольном расстоянии  $x$  от начала координат. Обратная емкость такого тонкого конденсатора равна

$$\Delta\left(\frac{1}{C}\right) = \frac{\Delta x}{\varepsilon_0 \varepsilon(x) S},$$

где  $\varepsilon(x) = \varepsilon_2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x/d)$ . При последовательном соединении конденсаторов суммируются величины, обратные емкостям, что для непрерывного распределения конденсаторов в пределе  $\Delta x \rightarrow dx$  сводится к интегрированию по всем  $x$  от нуля до  $d$ :

$$\frac{1}{C} = \int_0^d \frac{dx}{C(x)}$$

Учитывая, что  $dx = \frac{d}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} d\varepsilon$ , получаем:

$$\frac{1}{C} = \frac{d}{\varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) S} \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{d}{\varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) S} \ln \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

Способ 2. Пусть на обкладках конденсатора находятся заряды  $\pm q$ , и поверхностная плотность заряда  $\sigma = \pm q/S$ . Тогда  $D = \sigma$ , и далее получаем:

$$E(x) = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon(x)} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\varepsilon_2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x/d)},$$

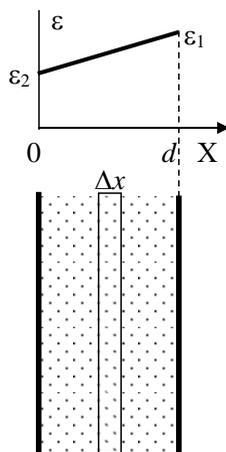


Рис. 9.4 Зависимость диэлектрической проницаемости от координаты в конденсаторе.

$$\Delta\varphi = \int_0^d E(x)dx = \frac{\sigma d}{\epsilon_0(\epsilon_1 - \epsilon_2)} \ln \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2},$$

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{\epsilon_0(\epsilon_1 - \epsilon_2)S}{d \ln(\epsilon_1/\epsilon_2)}.$$

**Ответ:**  $C = \frac{\epsilon_0(\epsilon_1 - \epsilon_2)S}{d \ln(\epsilon_1/\epsilon_2)}.$

**Задача 9.3.6.** Первоначально в плоском воздушном конденсаторе, заряженном и отсоединенном от источника ЭДС, напряженность поля равна  $E_0$ . Затем половину пространства между пластинами конденсатора заполняют однородным диэлектриком с проницаемостью  $\epsilon$  так, что плоская граница диэлектрика параллельна пластинам конденсатора (рис. 9.5а).

а) Найти модули векторов  $E$  и  $D$  внутри и вне диэлектрика.

б) Ответить на те же вопросы, если диэлектрик занимает все расстояние между пластинами в половине объема конденсатора (рис. 9.5б).

**Решение**

В случае а) из результатов задачи 8.3.2 следует, что напряженность поля в воздушном промежутке  $E_1 = E_0 = \sigma/\epsilon_0$  не изменится, а в диэлектрике станет меньше в  $\epsilon$  раз за счет поля появившихся связанных зарядов:

$$E_2 = E_0/\epsilon.$$

Распределение сторонних зарядов на обкладках конденсатора не изменилось, поэтому не изменятся и силовые линии вектора индукции  $D$ . Из условия непрерывности  $D_n$  на границе диэлектрика заключаем, что в любой точке внутри конденсатора  $D_1 = D_2 = \epsilon_0 E_0$ . Разность потенциалов между обкладками уменьшилась и стала равной

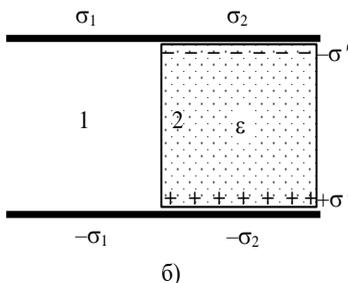
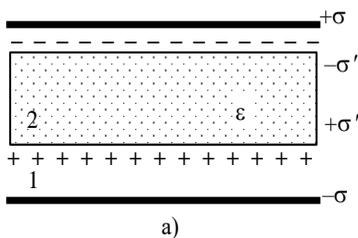


Рис. 9.5. Конденсаторы, частично заполненные диэлектриками.

$$\Delta\varphi = \frac{d}{2} E_0 \left( \frac{1}{\varepsilon} + 1 \right)$$

вместо первоначальной  $\Delta\varphi_0 = E_0 d$ , где  $d$  – расстояние между пластинами конденсатора. Такой результат связан с тем, что электрическое поле втягивает диэлектрик внутрь конденсатора и совершает работу, что приводит к уменьшению потенциальной энергии системы, пропорциональной разности потенциалов.

В случае б) произойдет перераспределение сторонних зарядов на пластинах конденсатора так, чтобы напряженность поля в воздушном промежутке и в диэлектрике стала одинаковой:  $E_1 = E_2 = E$ . К этому выводу можно прийти, рассматривая разность потенциалов между пластинами, которая равна  $\Delta\varphi = Ed$  независимо от пути перехода от одной пластины к другой – через воздушный промежуток или через диэлектрик. В обозначениях рис. 9.5б

$$E = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_2 - \sigma'}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Отсюда получаем, что

$$\varepsilon\sigma_1 = \sigma_2.$$

По условию задачи, диэлектрик заполняет половину объема конденсатора. Поэтому по закону сохранения заряда исходная плотность заряда равна:

$$\sigma = \varepsilon_0 E_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}.$$

Таким образом:

$$\sigma_1 = \frac{2\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon + 1}, \quad E = \frac{2E_0}{\varepsilon + 1}.$$

Следовательно,

$$D_1 = \frac{2}{\varepsilon + 1} \varepsilon_0 E_0 \quad \text{и} \quad D_2 = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon + 1} \varepsilon_0 E_0.$$

Разность потенциалов равна

$$\Delta\varphi = Ed = \frac{2}{\varepsilon + 1} E_0 d;$$

она меньше, чем была первоначально. Как и в предыдущем случае, в процессе заполнения конденсатора диэлектриком ponderomotorные силы со стороны электрического поля совершают работу, и потенциальная энергия системы уменьшается.

**Ответ:** а)  $E_1 = E_0$ ,  $E_2 = \frac{E_0}{\varepsilon}$ ;  $D_1 = D_2 = \varepsilon_0 E_0$ ;

б)  $E_1 = E_2 = \frac{2E_0}{\varepsilon + 1}$ ;  $D_1 = \frac{2}{\varepsilon + 1} \varepsilon_0 E_0$ ,  $D_2 = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon + 1} \varepsilon_0 E_0$ .

**Задача 9.3.7.** Решить предыдущую задачу, считая, что конденсатор с самого начала подключен к источнику ЭДС и разность потенциалов между обкладками не меняется.

### Решение

Разность потенциалов между обкладками вначале равна  $\Delta\varphi = E_0 d$  и в дальнейшем не меняется. В случае а) после внесения диэлектрика в конденсатор напряженность поля в диэлектрике  $E_2$  будет в  $\varepsilon$  раз меньше напряженности  $E_1$  поля в воздушном промежутке:  $E_2 = \frac{E_1}{\varepsilon}$ . Если выразить  $\Delta\varphi$  через  $E_1$  и  $E_2$ , то получим:

$$\Delta\varphi = \frac{d}{2}(E_1 + E_2) = E_1 \frac{d}{2} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Учитывая неизменность  $\Delta\varphi$ , находим отсюда:

$$E_1 = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon + 1} E_0, \quad E_2 = \frac{2}{\varepsilon + 1} E_0.$$

Из материального уравнения для вектора  $\mathbf{D}$  (9.5) получаем:

$$D_1 = D_2 = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon + 1} \varepsilon_0 E_0.$$

В случае б) напряженности  $E_1$  и  $E_2$  одинаковы (как и в предыдущей задаче). Из постоянства  $\Delta\varphi$  сразу следует вывод:  $E_1 = E_2 = E_0$ . Следовательно:

$$D_1 = \varepsilon_0 E_0 \text{ и } D_2 = \varepsilon_0 \varepsilon E_0.$$

**Ответ:** а)  $E_1 = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon + 1} E_0$ ,  $E_2 = \frac{2}{\varepsilon + 1} E_0$ ,  $D_1 = D_2 = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon + 1} \varepsilon_0 E_0$ .

б)  $E_1 = E_2 = E_0$ ,  $D_1 = \varepsilon_0 E_0$ ,  $D_2 = \varepsilon_0 \varepsilon E_0$ .

**Задача 9.3.8.** Сферический конденсатор наполовину заполнен жидким диэлектриком с проницаемостью  $\varepsilon = 7$  (рис. 9.6). Радиусы поверхностей: внутренней  $R_1 = 5$  см, внешней  $R_2 = 6$  см.

Определить емкость конденсатора, пренебрегая искривлением линий поля на границе диэлектрика.

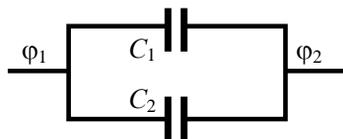
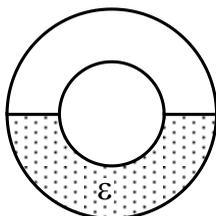


Рис. 9.6. Сферический конденсатор, частично заполненный жидким диэлектриком. Рис. 9.7 Эквивалентная схема к рис. 9.6.

### Решение

Обкладки конденсатора являются эквипотенциальными поверхностями, поэтому конденсатор можно рассматривать как систему двух параллельно включенных конденсаторов (рис. 9.7), у которых одна пара обкладок имеет потенциал  $\varphi_1$  внешней поверхности рассматриваемого сферического конденсатора, а вторая пара – потенциал внутренней поверхности  $\varphi_2$ . Так как диэлектрик заполняет сферический конденсатор наполовину, емкости  $C_1$  и  $C_2$  равны:

$$C_1 = \frac{2\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}, \quad C_2 = \epsilon C_1.$$

Отсюда получаем:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{2\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} (\epsilon + 1).$$

**Ответ:**  $C = \frac{2\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} (\epsilon + 1).$

### 9.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 9.4.1.** Между пластинами плоского конденсатора, площадь которых  $S$ , помещен слоистый диэлектрик, состоящий из  $n$  слоёв вещества с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_1$  и из  $n$  слоёв с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_2$ . Слои чередуются, и каждый имеет толщину  $d$ . Найти ёмкость конденсатора  $C$ .

Ответ:  $C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 S}{nd(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$ .

**Задача 9.4.2.** Найти напряженность электрического поля между обкладками сферического конденсатора, пространство между которыми заполнено однородными диэлектриками с диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ . Диэлектрики граничат между собой вдоль поверхности конуса с вершиной в центре  $O$  (см. рис. 9.8). Телесный угол конуса, заполненного первым диэлектриком, равен  $\Omega_1$ , а заполненного вторым диэлектриком –  $\Omega_2$  ( $\Omega_1 + \Omega_2 = 4\pi$ ). Заряд на внутренней обкладке равен  $Q$ . Найти также ёмкость конденсатора, если радиусы шаровых обкладок равны  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ).

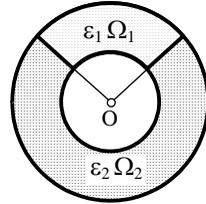


Рис. 9.8. Сферический конденсатор с двумя диэлектриками.

Ответ:  $E = \frac{Q}{\varepsilon_0(\varepsilon_1 \Omega_1 + \varepsilon_2 \Omega_2)} \frac{1}{r^2}$ ;

$$C = \varepsilon_0(\varepsilon_1 \Omega_1 + \varepsilon_2 \Omega_2) \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

**Задача 9.4.3** ([3], 114). Металлический шар радиуса 5 см окружён шаровым слоем диэлектрика ( $\varepsilon = 7$ ) толщиной 1 см и помещён concentрично в металлической сфере с внутренним радиусом 7 см. Чему равна емкость  $C$  такого конденсатора?

Ответ:  $C = 35$  см.

**Задача 9.4.4** ([3], 140). Какова напряжённость поля  $E$  в воздушном зазоре плоского конденсатора, если разность потенциалов между пластинами  $V = 200$  В? Расстояние между пластинами  $d = 0,2$  см, и между ними находится лист стекла ( $\varepsilon = 7$ ) толщиной  $h = 0,1$  см

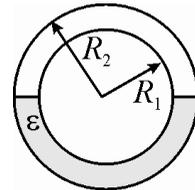


Рис. 9.9. Сферический конденсатор, заполненный диэлектриком наполовину.

Ответ:  $E = \frac{\varepsilon V}{(d - h)\varepsilon + h} \approx 1750$  В/см.

**Задача 9.4.5** ([3], 141). Сферический конденсатор наполовину заполнен диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon = 7$  (рис. 9.9). Радиусы поверхностей: внутренней  $R_1 = 5$  см, внешней  $R_2 = 6$  см. Определить емкость  $C$  конденсатора, пренебрегая искривлением линий поля на границе диэлектрика.

$$\text{Ответ: } C = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon + 1)R_1R_2}{2(R_2 - R_1)}.$$

**Задача 9.4.6** ([3], 143). Найти напряжённость поля  $E$  между обкладками цилиндрического конденсатора, пространство между которыми заполнено однородными диэлектриками с диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  (рис. 9.10). Диэлектрики граничат между собой вдоль плоскостей, пересекающихся на оси цилиндра  $O$ . Двугранные углы, образуемые ими в диэлектриках, равны соответственно  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  ( $\varphi_1 + \varphi_2 = 2\pi$ ). Длина конденсатора равна  $l$ , а заряд на внутренней обкладке  $Q$ . Найти также емкость  $C$  конденсатора, если радиусы его обкладок  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ).

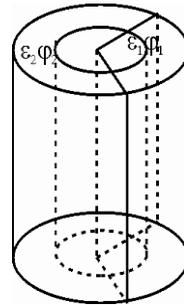


Рис. 9.10. Цилиндрический конденсатор с двумя диэлектриками.

$$\text{Ответ: } E = \frac{4\pi}{\varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_2} \cdot \frac{Q}{lr};$$

$$C = \frac{\varepsilon_1\varphi_1 + \varepsilon_2\varphi_2}{4\pi \ln(R_2/R_1)} \cdot l.$$

**Задача 9.4.7** Обкладкам плоского конденсатора сообщаются заряды  $+q$  и  $-q$ . Зазор между обкладками ширины  $d$  заполнен изотропным веществом, диэлектрическая проницаемость которого  $\varepsilon(x)$  изменяется в перпендикулярном к обкладкам направлении  $x$  по линейному закону. В непосредственной близости к положительно заряженной обкладке  $\varepsilon = \varepsilon_1$ , в непосредственной близости к отрицательной обкладке  $\varepsilon = \varepsilon_2$ . Найти объёмную плотность связанных зарядов  $\rho'$  как функцию  $x$ . Определить суммарный связанный заряд  $q'$ , возникающий внутри диэлектрика. Площадь

каждой обкладки равна  $S$ .

$$\text{Ответ: } \rho' = -\frac{q}{\varepsilon^2 S} \cdot \frac{d\varepsilon}{dx} = -\frac{q}{\varepsilon^2 S} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d},$$

$$q' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} q.$$

**Задача 9.4.8.** Пространство между обкладками цилиндрического конденсатора с радиусами  $R_1$ ,  $R_3$  ( $R_1 < R_3$ ), заполнено средой с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ , которая зависит от расстояния от центра следующим образом:  $\varepsilon = \varepsilon_1$  при  $R_1 < r < R_2$ , и  $\varepsilon = \varepsilon_2$  при  $R_2 < r < R_3$ . Определить плотность поверхностного поляризованного заряда  $\sigma_{12}$  на границе раздела этих сред, если разность потенциалов между обкладками этого конденсатора равна  $V_0$ .

$$\text{Ответ: } \sigma_{12} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)V_0}{R_2[\varepsilon_2 \ln(R_2/R_1) + \varepsilon_1 \ln(R_3/R_2)]}.$$

**Задача 9.4.9** ([3], 65). Между двумя параллельными проводящими пластинками, заряженными равными разноимёнными зарядами, помещают диэлектрическую пластинку (рис. 9.11). Изменится ли напряжённость поля в точке А после внесения пластинки?

*Ответ:* увеличится, так как поверхностная плотность заряда на металлической пластинке напротив диэлектрика возрастёт.

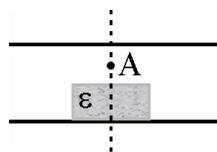


Рис. 9.11. Диэлектрическая пластина в плоском конденсаторе.

## Глава 10

## ДИЭЛЕКТРИКИ С ЗАДАНЫМ СТАТИЧЕСКИМ СОСТОЯНИЕМ ПОЛЯРИЗАЦИИ

## 10.1. Теоретический материал

При заполнении всего пространства между эквипотенциальными поверхностями *однородным изотропным диэлектриком* с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  напряженность  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  и потенциал  $\varphi(\mathbf{r})$  электрического поля в этом пространстве уменьшатся в  $\varepsilon$  раз:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{E}_0(\mathbf{r})}{\varepsilon}, \quad (10.1)$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\varphi_0(\mathbf{r})}{\varepsilon}, \quad (10.2)$$

а электрическая индукция  $\mathbf{D}(\mathbf{r})$  поля останется той же:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \mathbf{D}_0(\mathbf{r}).$$

Здесь  $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$ ,  $\varphi_0(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{D}_0(\mathbf{r})$  – напряженность, потенциал и электрическая индукция поля до заполнения пространства диэлектриком.

В рассмотренном случае электрическая индукция  $\mathbf{D}(\mathbf{r})$  определяется только свободными зарядами.

**Электрическое поле в полостях диэлектрика, измерение напряженности поля и электрической индукции в диэлектрике.**

А. Полость – длинный физически бесконечно тонкий цилиндр с боковой поверхностью, параллельной напряженности поля  $\mathbf{E}$  (см. рис. 11.1).

Из граничных условий для тангенциальной составляющей напряженности поля следует:

$$\mathbf{E}_{\text{цил}} = \mathbf{E} \quad \text{и} \quad \mathbf{D}_{\text{цил}} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon}.$$

Как видим, измерение напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  сводится к измерению напряженности поля  $\mathbf{E}_{\text{цил}}$  в цилиндрической полости.

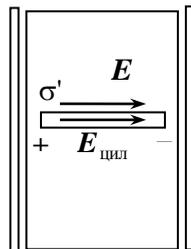


Рис. 11.1. Электрическое поле в тонкой цилиндрической полости.

Б. Полость – широкий физически бесконечно тонкий диск с основаниями, перпендикулярными напряженности поля  $\mathbf{E}$  (см. рис. 10.2).

Из граничных условий для нормальной составляющей индукции получаем:

$$D_{\text{диск}} = D \text{ и } E_{\text{диск}} = \varepsilon E .$$

Так как в полости  $D = D_{\text{диск}} = \varepsilon_0 E_{\text{диск}}$ , то измерение электрической индукции поля  $D$  сводится к измерению напряженности электрического поля  $E_{\text{диск}}$  в полости в виде диска.

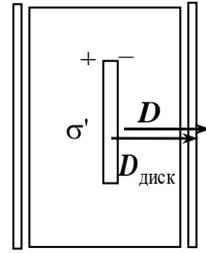


Рис. 10.2. Электрическое поле в широкой полости в форме тонкого диска.

### Электрическое поле в шаровой полости диэлектрика.

Пусть шаровая полость имеет физически бесконечно малые размеры (в том числе физически бесконечно малый объем), так, что ее появление не меняет поляризацию окружающего его диэлектрика (см. рис. 10.3).

Напряженность поля внутри шаровой полости равна:

$$E_{\text{шар}} = E + \frac{P}{3\varepsilon_0}, \quad (10.3)$$

где  $E' = \frac{P}{3\varepsilon_0}$  – поле, создаваемое поверхностными поляризационными зарядами внутри шаровой полости

однородно поляризованного диэлектрика (поле Лоренца).

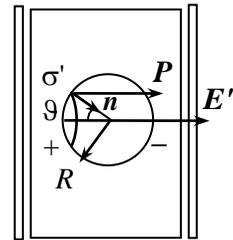


Рис. 10.3. Электрическое поле в шаровой полости.

**Электрическое поле внутри ограниченного в пространстве диэлектрика.** Рассмотрим ограниченный в пространстве диэлектрик, помещенный во внешнее поле напряженностью  $E_0$ . Диэлектрик поляризуется с вектором поляризации  $P$  (в общем случае разным в различных точках диэлектрика). На поверхности диэлектрика возникают поляризационные заряды, которые создают поле напряженностью  $E'$  (деполяризующее поле). В соответствии с принципом суперпозиции полей напряженность электрического поля внутри ограниченного в пространстве диэлектрика равна:

$$E = E_0 + E'.$$

Однородный изотропный диэлектрик эллиптической формы во внешнем однородном поле поляризуется однородно – напряжен-

ность поля  $\mathbf{E}$  и вектор поляризации  $\mathbf{P}$  всюду в диэлектрическом эллипсоиде постоянны (см. рис. 10.4). При этом

$$E_{\alpha} = E_{0\alpha} + E'_{\alpha} = E_{0\alpha} - n_{\alpha} \frac{P_{\alpha}}{\epsilon_0}, \quad (10.4)$$

где  $\alpha = x, y, z$  или:

$$E_x = E_{0x} - n_x \frac{P_x}{\epsilon_0},$$

$$E_y = E_{0y} - n_y \frac{P_y}{\epsilon_0},$$

$$E_z = E_{0z} - n_z \frac{P_z}{\epsilon_0}.$$

Здесь  $X, Y, Z$  – главные оси эллипсоида,  $n_x, n_y, n_z$  – **факторы формы**, причем

$$n_x + n_y + n_z = 1. \quad (10.5)$$

Заметим, что в общем случае неравенства факторов формы между собой направление напряженности поля  $\mathbf{E}$  и вектора поляризации  $\mathbf{P}$  в диэлектрике не совпадает с направлением напряженности внешнего поля  $\mathbf{E}_0$ , за исключением случаев, когда внешнее поле направлено вдоль одной из осей эллипсоида.

Рассмотрим часто встречающиеся частные случаи тел эллиптической формы.

**А. Длинный тонкий цилиндр** (стержень) (см. рис. 10.5).

Для составляющей напряженности электрического поля вдоль оси цилиндра  $Z$  запишем граничные условия для тангенциальной составляющей:

$$E_z = E_{0z}.$$

Но  $E_z = E_{0z} - n_z \frac{P_z}{\epsilon_0}$ , следовательно,

$$n_z = 0,$$

а значит, в соответствии с условием  $n_x + n_y + n_z = 1$  и симметрией цилиндра:

$$n_y = n_z = 1/2 \quad (10.6)$$

и  $E_x = E_{0x} - \frac{P_x}{2\epsilon_0}$ ,  $E_y = E_{0y} - \frac{P_y}{2\epsilon_0}$ .

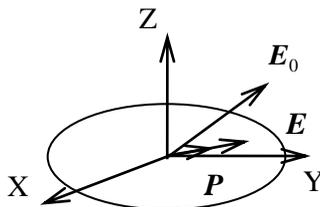


Рис. 10.4. Направления векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{P}$  в однородном изотропном диэлектрике эллиптической формы, находящемся во внешнем поле с напряженностью  $\mathbf{E}_0$ .

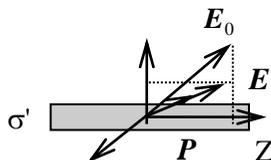


Рис. 10.5. Направления векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{P}$  в длинном тонком стержне, находящемся во внешнем поле с напряженностью  $\mathbf{E}_0$ .

Б. **Широкий тонкий диск** (см. рис. 10.6).

Для составляющей электрической индукции поля вдоль нормали к диску (оси диска  $Z$ ) воспользуемся граничными условиями для нормальной составляющей:

$$\begin{aligned} D_z &= D_{0z} . \\ E_z &= \frac{E_{0z}}{\varepsilon} = E_{0z} - E_{0z} + \frac{E_{0z}}{\varepsilon} = E_{0z} - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} E_{0z} = \\ &= E_{0z} - (\varepsilon - 1) E_z = E_{0z} - \frac{P_z}{\varepsilon_0} . \end{aligned}$$

Следовательно:

$$n_z = 1, \quad (10.7)$$

а значит, в соответствии с условием  $n_x + n_y + n_z = 1$  и симметрией цилиндра:

$$n_x = n_y = 0 \quad (10.8)$$

и

$$E_x = E_{0x}, E_y = E_{0y}.$$

В. **Шар** (см. рис. 10.7).

При произвольной ориентации шара относительно внешнего поля:

$$E_i = E_{0i} - n_i \frac{P_i}{\varepsilon_0} .$$

Из соображений симметрии и в соответствии с условием  $n_x + n_y + n_z = 1$ :

$$n_x = n_y = n_z = 1/3. \quad (10.9)$$

Следовательно:

$$E_i = E_{0i} - \frac{P_i}{3\varepsilon_0} . \quad (10.10)$$

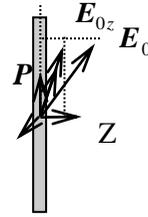


Рис. 10.6. Направления векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{P}$  в широком тонком диске, находящемся во внешнем поле с напряженностью  $E_0$ .

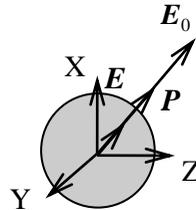


Рис. 10.7. Направления векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{P}$  в диэлектрическом шаре, находящемся во внешнем поле с напряженностью  $E_0$ .

## 10.2 Основные типы задач (классификация)

10.1. Определение напряженности электрического поля внутри и вне диэлектрических плоских пластин, имеющих заданное статическое состояние поляризации.

10.2. Расчет напряженности электрического поля в диэлектриках цилиндрической формы, имеющих заданное статическое состояние поляризации.

10.3. Определение напряженности электрического поля в диэлектриках сферической формы, а также их поляризации во внешних электрических полях.

### 10.3 Методы решения и примеры решения задач.

#### Задачи типа 10.1

*Определение напряженности электрического поля внутри и вне диэлектрических плоских пластин, имеющих заданное статическое состояние поляризации.*

**Метод решения.** Использование формул  $\rho' = -\operatorname{div} \mathbf{P}$  и  $\sigma' = -n_{12}(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) = P_{1n} - P_{2n}$  для определения объемной  $\rho'$  и поверхностной  $\sigma'$  плотности связанных зарядов в пластинах, связи поверхностной плотности зарядов с напряженностью электрического поля  $E = \sigma_{\text{сумм}} / \epsilon_0$ , а также граничных условий и материальных уравнений для векторов  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{P}$ .

**Задача 10.3.1.** Пластина из электрета<sup>1</sup> толщины  $h$  помещена внутри плоского воздушного конденсатора, обкладки которого соединены между собой. Вектор поляризации пластинки  $\mathbf{P}$  направлен по нормали к ее плоскости. Определить напряженность и индукцию электрического поля внутри и вне пластинки. Расстояние между обкладками конденсатора равно  $d$ .

#### Решение

На поверхностях пластинки существуют связанные заряды с плотностью  $\sigma' = \pm P$  (рис. 10.8). За счет электростатической индукции на обкладках конденсатора появляются заряды противоположных знаков с некоторой поверхностной плотностью  $\sigma$ . Известно,

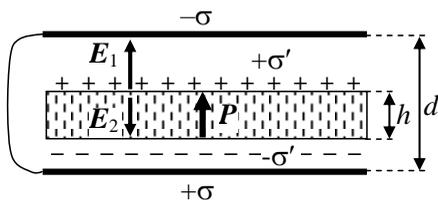


Рис. 10.8. Система, состоящая из конденсатора и пластинки из электрета.

<sup>1</sup> **Электреты** – поляризованные диэлектрики, состоящие из жестких электрических диполей, которые сохраняют поляризацию длительное время.

что на поляризацию электрета внешнее поле влияет слабо, поэтому изменением вектора поляризации  $\mathbf{P}$  за счет поля индуцированных зарядов можно пренебречь.

Так как обкладки конденсатора соединены, их потенциалы равны, поэтому можно записать:

$$E_1(d - h) + E_2h = 0, \quad (10.11)$$

где  $E_1$  – напряженность поля вне пластины,  $E_2$  – внутри, причем модули напряженностей равны:

$$E_1 = \sigma / \varepsilon_0, \quad (10.12)$$

$$E_2 = (\sigma - \sigma') / \varepsilon_0. \quad (10.13)$$

С учетом направлений напряженностей  $E_1$  и  $E_2$  и величины поверхностной плотности связанных зарядов  $\sigma' = P$  уравнение (10.11) запишется в виде:

$$E_1(d - h) + (E_1 - P / \varepsilon_0)h = 0,$$

откуда определяем напряженность поля вне пластины:

$$E_1 = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{h}}{\varepsilon_0 d}.$$

Из уравнения (10.11) находим напряженность поля в пластине:

$$E_2 = -\frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{d} - h}{\varepsilon_0 d}.$$

Теперь можно, используя формулу (10.12), найти величину поверхностной плотности индуцированных на обкладках конденсатора зарядов (положительный заряд – на нижней обкладке, отрицательный – на верхней):

$$\sigma = \pm P \frac{h}{d}.$$

Внутри конденсатора свободные заряды отсутствуют, поэтому линии вектора  $\mathbf{D}$  непрерывно проходят от нижней обкладки конденсатора до верхней параллельно вектору  $\mathbf{P}$ . Вектор  $\mathbf{D}_1$  в воздушном промежутке находим из материального уравнения  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}$ :

$$\mathbf{D}_1 = \varepsilon_0 \mathbf{E}_1 = \mathbf{P} \cdot \frac{h}{d}.$$

Для вектора  $\mathbf{D}_2$  в электрете материальное уравнение  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}$  неприменимо, поэтому нужно использовать общее определение вектора электростатической индукции:

$$D_2 = \varepsilon_0 E_2 + P = P \cdot \frac{h}{d}.$$

Разумеется,  $D_1 = D_2$ , что следует из условия непрерывности нормальной компоненты вектора индукции на границе диэлектрик-воздух.

**Ответ:** вне пластинки:  $E_1 = \frac{P}{\varepsilon_0} \cdot \frac{h}{d}$ ;

внутри пластины:  $E_2 = -\frac{P}{\varepsilon_0} \cdot \frac{d-h}{d}$ ;  $D_1 = D_2 = P \cdot \frac{h}{d}$ .

**Задача 10.3.2.** Вектор поляризации большой плоской незаряженной пластины из диэлектрика имеет вид  $P = P_0(1 - x/d)$ , где  $P_0$  – вектор, перпендикулярный к пластине,  $x$  – расстояние от нижней поверхности пластины,  $d$  – её толщина (рис. 10.9). Пренебрегая краевыми эффектами, найти напряженность электрического поля внутри пластины, разность потенциалов между её поверхностями и объемную плотность связанных зарядов в диэлектрике.



Рис. 10.9. Диэлектрическая пластина с заданным вектором поляризации  $P$ .

### Решение

В пластине создается деполяризующее электрическое поле с напряженностью

$$E(x) = -\frac{P}{\varepsilon_0} = -P_0 \frac{d-x}{\varepsilon_0 d}.$$

Поскольку  $E = -\nabla\varphi$ , разность потенциалов между поверхностями пластины находим интегрированием:

$$\Delta\varphi = -\int_0^d E(x) dx = \frac{P_0}{\varepsilon_0 d} \int_0^d (d-x) dx = \frac{P_0 d^2}{2\varepsilon_0 d} = \frac{P_0 d}{2\varepsilon_0}.$$

Для нахождения объемной плотности связанных зарядов  $\rho'$  воспользуемся формулой:  $\rho' = -\operatorname{div} P$ . Поскольку вектор поляризации зависит только от одной координаты  $x$ , получаем:

$$\rho' = -\operatorname{div} P = -\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = P_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (1 - x/d) = 0.$$

**Ответ:**  $E(x) = -P_0 \frac{d-x}{\epsilon_0 d}$ ;  $\Delta\varphi = P_0 d / 2\epsilon_0$ ;  $\rho' = 0$ .

**Задача 10.3.3.** На пластинах плоского изолированного конденсатора равномерно распределены заряды с поверхностными плотностями  $+\sigma$  и  $-\sigma$ . В пространство между пластинами вносят электрет с вектором поляризации  $\mathbf{P}$  так, что он заполняет треть часть этого пространства. Толщина электрета  $d$  равна расстоянию между пластинами, вектор поляризации ориентирован от положительно заряженной пластины в сторону отрицательного заряда (рис. 10.10). Найти разность потенциалов между пластинами.

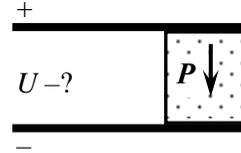


Рис. 10.10. Конденсатор с внесенным в него электретом.

### Решение

В поляризованном диэлектрике на его горизонтальных поверхностях имеются связанные заряды с поверхностной плотностью  $\pm\sigma' = \pm P$ . Известно, что на поляризацию электрета внешнее поле влияет слабо, поэтому изменением  $\mathbf{P}$  за счет поля зарядов на пластинах конденсатора можно пренебречь.

При внесении электрета в конденсатор произойдет перераспределение сторонних зарядов на пластинах конденсатора так, чтобы напряженность поля в воздушном промежутке  $\mathbf{E}_1$  и в электрете  $\mathbf{E}_2$  стала одинаковой:  $E_1 = E_2 = E$ , т.к. разность потенциалов между пластинами равна  $\Delta\varphi = Ed$  независимо от пути перехода от одной пластины к другой – через воздушный промежуток или через диэлектрик. При этом с учетом направлений напряженностей и равенства  $\pm\sigma' = \pm P$  напряженность поля в конденсаторе равна:

$$E = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_2 - \sigma'}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_2 - P}{\epsilon_0}, \quad (10.14)$$

где  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  – поверхностные плотности зарядов на верхней пластине конденсатора над воздушным зазором и над электретом соответственно.

По условию задачи диэлектрик заполняет  $1/3$  объема конденсатора. Поэтому по закону сохранения заряда исходная поверхностная плотность заряда  $\sigma$  на пластинах конденсатора

$$\sigma = \frac{2\sigma_1 + \sigma_2}{3}. \quad (10.15)$$

Таким образом, из уравнений (10.14) и (10.15) получаем:

$$\sigma_1 = \sigma - P/3,$$

$$E = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{3\sigma - P}{3\varepsilon_0}.$$

Разность потенциалов между обкладками равна:

$$U = Ed = \frac{3\sigma - P}{3\varepsilon_0} d.$$

**Ответ:**  $U = \frac{3\sigma - P}{3\varepsilon_0} d.$

### Задачи типа 10.2

*Расчет напряженности электрического поля в диэлектриках цилиндрической формы, имеющих заданное статическое состояние поляризации.*

**Метод решения.** Использование формулы  $\rho' = -\operatorname{div}\mathbf{P}$  и  $\sigma' = -n_{12}(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) = P_n - P_n$  для определения объемной  $\rho'$  и поверхностной  $\sigma'$  плотности связанных зарядов в диэлектриках, материальных уравнений для векторов  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{P}$  и принципа суперпозиции полей.

**Задача 10.3.4.** Найти напряженность электрического поля в центре прямого круглого диэлектрического цилиндра длиной  $h$  и радиусом  $R$ , вектор поляризации которого параллелен его оси и равен  $\mathbf{P}$  (рис. 10.11).

#### Решение

Из условия однородной поляризации следует, что плотность объемных связанных зарядов внутри цилиндра равна нулю. На торцах цилиндра находятся противоположные по знаку поверхностные связанные заряды, распределенные равномерно с плотностью  $\pm\sigma' = \pm P$ . Таким образом, по принципу суперпозиции напряженность поля в центре цилиндра (т. О) равна сумме напряженностей полей, создаваемых двумя противо-

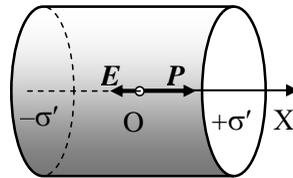


Рис. 10.11. Поляризованный вдоль оси диэлектрический цилиндр.

положно заряженными дисками на их общей оси. Напряженность на оси диска вычислена в **задаче 1.3.6** главы 1 и равна

$$E = \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0} \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right),$$

где  $R$  – радиус диска, а  $x$  – расстояние вдоль его оси от плоскости диска до исследуемой точки.

В данном случае для обоих дисков  $x = h/2$ , откуда получаем искомую напряженность электрического поля в центре прямого круглого диэлектрического цилиндра:

$$E = -\frac{P}{\varepsilon_0} \left( 1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + 4R^2}} \right).$$

*Замечание 1.* Таким способом можно вычислить напряженность поля в любой точке на оси цилиндра, кроме точек на его торцах, потому что формула для напряженности на оси диска справедлива при всех  $x$ . На торцах цилиндра напряженность поля не определена. Здесь она испытывает скачок, как на любой заряженной поверхности.

*Замечание 2.* Поляризованный цилиндр можно представить себе как результат малого сдвига всех положительных зарядов относительно всех его отрицательных зарядов. Вектор напряженности поля  $E$ , создаваемого поляризацией  $P$ , направлен противоположно вектору  $P$ . Поэтому поле от связанных зарядов часто называют *деполяризующим полем*.

**Ответ:** 
$$E = -\frac{P}{\varepsilon_0} \left( 1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + 4R^2}} \right).$$

**Задача 10.3.5.** Вектор поляризации  $P$  в предыдущей задаче направлен перпендикулярно оси цилиндра. Найти напряженность поля в центре цилиндра.

### Решение

Из условия задачи следует, что связанные заряды возникнут только на боковой поверхности цилиндра. Плотность связанных зарядов определяется формулой:

$$\sigma' = -n_{12}(P_2 - P_1) = (Pn) = P \cos \varphi,$$

где  $\varphi$  – азимутальный угол, который отсчитывается от вектора  $P$  против часовой стрелки,  $n$  – единичный вектор нормали к поверхности цилиндра (рис. 10.12).

Для вычисления напряженности в центре цилиндра представим боковую поверхность цилиндра в виде последовательности бесконечно узких колец с зарядом, распределенным на них с линейной плотностью

$$d\tau = \sigma' dx = P \cos \varphi dx = d\tau_0 \cos \varphi,$$

где  $d\tau_0 = P dx$  (см. рис. 10.13).

Далее воспользуемся результатом решения задачи 1.3.5 (глава 1), где вычислена напряженность поля на оси такого кольца:

$$dE = - \frac{d\tau_0}{4\pi\epsilon_0 R \left(1 + \frac{x^2}{R^2}\right)^{3/2}} e_y = - \frac{R^2 P dx}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}} e_y,$$

где  $x$  – расстояние от плоскости кольца до точки наблюдения  $O$  (в данной задаче это центр цилиндра (рис. 10.13)),  $e_y$  – орт оси  $Y$ , совпадающей по направлению с вектором поляризации  $P$ .

Полную напряженность поля в центре цилиндра найдем, интегрируя это выражение по всем  $x$  от  $-h/2$  до  $+h/2$ :

$$E = -e_y \int_{-h/2}^{h/2} \frac{R^2 P dx}{4\epsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}} = -e_y \cdot \frac{P}{4\epsilon_0} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \Big|_{-h/2}^{h/2} =$$

$$= - \frac{Ph}{2\epsilon_0 \sqrt{h^2 + 4R^2}} e_y.$$

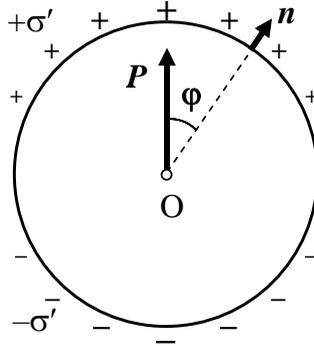


Рис. 10.12. Распределение связанных зарядов на боковой поверхности однородно поляризованного цилиндра.

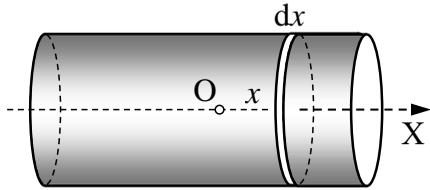


Рис. 10.13. К вычислению напряженности электрического поля в центре однородно поляризованного цилиндра.

Знак "минус" показывает, что, как и в предыдущей задаче, направление вектора  $\mathbf{E}$  противоположно направлению вектора  $\mathbf{P}$ . С учетом этого обстоятельства для искомой напряженности поля в центре диска получаем:

$$\mathbf{E} = -\frac{Ph}{2\varepsilon_0\sqrt{h^2 + 4R^2}}.$$

Если цилиндр очень длинный ( $h \rightarrow \infty$ ), то напряженность поля внутри него будет однородной и равной  $\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{P}}{2\varepsilon_0}$ .

**Ответ:** 
$$\mathbf{E} = -\frac{Ph}{2\varepsilon_0\sqrt{h^2 + 4R^2}}.$$

### Задачи типа 10.3

*Определение напряженности электрического поля в диэлектриках сферической формы, а также их поляризации во внешних электрических полях.*

**Метод решения.** Использование формулы  $\rho' = -\operatorname{div}\mathbf{P}$  и  $\sigma' = -\mathbf{n}_{12}(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) = P_{1n} - P_{2n}$  для определения объемной  $\rho'$  и поверхностной  $\sigma'$  плотности связанных зарядов в диэлектриках, материальных уравнений для векторов  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{P}$  и принципа суперпозиции полей.

**Задача 10.3.6.** Диэлектрический шар поляризован однородно, его вектор поляризации равен  $\mathbf{P}$ . Найти напряженность электрического поля внутри шара.

#### Решение

Так как шар поляризован, то на нем имеются поверхностные заряды, плотность которых  $\sigma' = (\mathbf{P}\mathbf{n}) = P\cos\vartheta$ , где  $\vartheta$  – полярный угол относительно вектора  $\mathbf{P}$ , а  $\mathbf{n}$  – единичный вектор нормали к поверхности шара.

Указанную выше плотность поверхностных зарядов можно смоделировать следующим образом. Возьмем два шара, однородно заряженных одинаковой по величине, но противоположной по знаку объемной плотностью заряда  $\rho$ .

Сместим центр отрицательно заряженного шара  $O'$  относительно центра положительного шара  $O$  на малый вектор  $\mathbf{a}$  против

направления  $\mathbf{P}$  (рис. 10.14). Тогда внутри области пересечения шаров получится нулевая суммарная плотность заряда, а толщина поверхностного слоя нескомпенсированного заряда в первом приближении будет равна  $h(\vartheta) = a \cos \vartheta$ , что при малых  $a$  эквивалентно поверхностной плотности заряда

$$\sigma = \rho h(\vartheta) = \rho a \cos \vartheta.$$

Для получения приведенной выше плотности поверхностного заряда нужно положить  $P = \rho a$ , или в векторном виде

$$\mathbf{P} = -\rho \mathbf{a}. \quad (10.16)$$

При  $a \rightarrow 0$  полученное распределение объемных поляризационных зарядов эквивалентно распределению поверхностных зарядов в данной задаче.

Напряженность поля  $E^*(r)$  внутри заряженного шара на расстоянии  $r < R$  от его центра находим по теореме Гаусса, применяя её к сферическому объему радиуса  $r$ :

$$4\pi r^2 E^*(r) = \frac{4}{3\epsilon_0} \pi r^3 \rho.$$

С учетом направления  $\mathbf{E}$  получаем:

$$\mathbf{E}^*(\mathbf{r}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r},$$

где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор, проведенный из центра шара в точку внутри него.

Для двух шаров, однородно заряженных одинаковой по величине, но противоположной по знаку объемной плотностью заряда  $\rho$ , в области их пересечения напряженности полей шаров складываются, и суммарная напряженность равна:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{a}, \quad (10.17)$$

где  $\mathbf{r}_-$  и  $\mathbf{r}_+$  – расстояния до исследуемой точки от центров отрицательно и положительно заряженных шаров соответственно,  $\mathbf{r}_- = \mathbf{a} + \mathbf{r}_+$  (см. рис. 10.14).

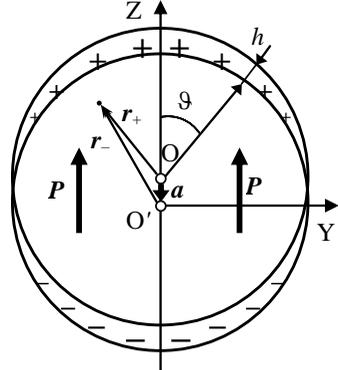


Рис. 10.14. К вычислению напряженности поля внутри однородно поляризованного шара.

Следовательно, внутри шаров силовые линии электрического поля параллельны вектору  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{E} = \text{const}$  и вектор напряженности направлен против вектора  $\mathbf{a}$ .

Используя формулы (10.16) и (10.17), находим искомую напряженность электрического поля внутри шара:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{3\varepsilon_0} \mathbf{P}.$$

*Замечание 1.* Для получения формулы (10.17) можно сразу воспользоваться результатом **задачи 2.3.11** главы 2, где была найдена напряженность электрического поля в области пересечения двух шаров разных радиусов, равномерно заряженных равной по модулю, но противоположной по знаку плотностью зарядов  $\pm\rho$ , когда центры шаров смещены относительно друг друга на вектор  $\mathbf{a}$ .

*Замечание 2.* Электрическое поле, обусловленное поляризацией вещества, называется деполяризующим. При однородной поляризации тела это поле будет однородным только для тел в форме эллипсоида или его частных случаев – шара, диска, цилиндра. Для эллипсоида  $\varepsilon_0 \mathbf{E} = -\hat{N} \mathbf{P}$ , где  $\hat{N}$  – тензор деполяризации формы. В главных осях эллипсоида тензор  $\hat{N}$  диагонален и сумма диагональных элементов всегда равна 1. Поэтому в шаре все коэффициенты деполяризации равны 1/3, что и было получено в данной задаче.

Таким же способом можно решить задачу для очень длинного цилиндра с поперечной поляризацией (без учета неоднородности поля на торцах). В этом случае коэффициенты деполяризации в его поперечном сечении равны 1/2, а продольный коэффициент равен нулю.

*Ответ:* 
$$\mathbf{E} = -\frac{1}{3\varepsilon_0} \mathbf{P}.$$

**Задача 10.3.7.** В однородное электрическое поле напряженности  $\mathbf{E}_0$  поместили однородный диэлектрический шар, диэлектрическая проницаемость которого равна  $\varepsilon$ . Найти напряженность  $\mathbf{E}$  электрического поля внутри шара и вектор поляризации  $\mathbf{P}$  диэлектрика.

### Решение

Воспользуемся материальным уравнением

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\mathbf{E}, \quad (10.18)$$

где  $\mathbf{E}$  – напряженность электрического поля внутри шара.

По принципу суперпозиции можно записать:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1, \quad (10.19)$$

где  $\mathbf{E}_1$  – напряженность поля, созданного поляризационными поверхностными зарядами. Она была найдена в задаче 10.3.6 и равна:

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}. \quad (10.20)$$

Вектор поляризации  $\mathbf{P}$  находим из уравнения (10.18) с учетом соотношений (10.19) и (10.20):

$$\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} = (\varepsilon - 1) \left( \mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0} \right),$$

откуда получаем вектор поляризации:

$$\mathbf{P} = 3\varepsilon_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \mathbf{E}_0.$$

Подставляя  $\mathbf{P}$  в уравнение (10.18), находим искомую напряженность поля внутри шара  $\mathbf{E}$ , выраженную через заданную напряженность внешнего поля  $\mathbf{E}_0$ :

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)} = \frac{3\mathbf{E}_0}{\varepsilon + 2}.$$

*Замечание.* Обратите внимание, что вектор поляризации  $\mathbf{P}$  определяется напряженностью суммарного поля  $\mathbf{E}$  внутри тела.

$$\text{Ответ: } \mathbf{P} = 3\varepsilon_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \mathbf{E}_0; \quad \mathbf{E} = \frac{3}{\varepsilon + 2} \mathbf{E}_0.$$

**Задача 10.3.8.** Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено диэлектриком с проницаемостью  $\varepsilon$ . Внутри диэлектрика имеется сферическая полость. На пластинах конденсатора равномерно распределены заряды с плотностями  $\sigma$  и  $-\sigma$ . Найти напряженность электрического поля в полости  $\mathbf{E}_0$ .

### Решение

Напряженность поля в полости  $\mathbf{E}_0$  можно представить как разность векторов напряженности однородного поля  $\mathbf{E}$  в конденсаторе с диэлектриком без полости и поля  $\mathbf{E}_1$ , созданного однородно поляризованным шаром из диэлектрика (см. рис. 10.15). Напряженность поля  $\mathbf{E}$  в плоском слое диэлектрика равна:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} \mathbf{n},$$

где  $\mathbf{n}$  – единичный вектор в направлении нормали к поверхности слоя.

Напряженность поля диэлектрического шара  $E_1$  рассчитана в задаче 10.3.4 и равна:

$$E_1 = -\frac{P}{3\epsilon_0},$$

где  $\mathbf{P} = \epsilon_0(\epsilon - 1)\mathbf{E}$ .

Отсюда для искомой напряженности электрического поля в полости получаем:

$$E_0 = E - E_1 = E + \frac{P}{3\epsilon_0} = E \left( 1 + \frac{\epsilon - 1}{3} \right) = \sigma \frac{\epsilon + 2}{3\epsilon_0} \mathbf{n}.$$

**Ответ:** поле в полости однородно, его напряженность сонаправлена с напряженностью поля конденсатора и равна

$$E_0 = \frac{(\epsilon + 2)\sigma}{3\epsilon_0 \epsilon}.$$

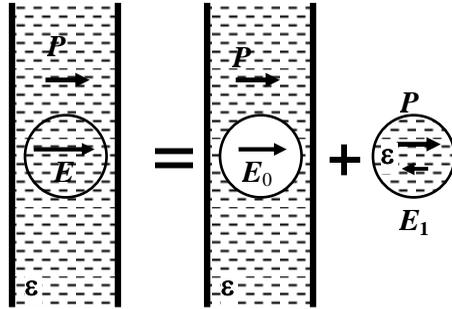


Рис. 10.15. К вычислению напряженности поля в полости внутри диэлектрика.

#### 10.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 10.4.1.** Тонкая большая диэлектрическая пластина имеет постоянную («замороженную»), не зависящую от электрического поля, поперечно направленную поляризацию, меняющуюся по её толщине по закону  $P = P_0(x^2 / d^2)$ , где  $x$  – расстояние до одной из поверхностей (рис. 10.16). Толщина пластины равна  $d$ . Пренебрегая краевыми эффектами, найти разность потенциалов  $U$  между поверхностями пластины.



Рис. 10.16. Пластина с «замороженной» поляризацией.

$$\text{Ответ: } U = \frac{P_0 d}{3\epsilon_0}.$$

**Задача 10.4.2.** В плоский конденсатор, подключенный к источнику с напряжением  $U$ , вставили пластину толщиной  $h$  с постоянным, не зависящим от электрического поля, вектором поляризации  $\mathbf{P}$ , направленным поперек пластины (рис. 10.17). Площадь пластин конденсатора и вставленной пластины  $S$ , расстояние между пластинами  $d$ . Полярность источника и направление поляризации показаны на рис. 10.17. Найти заряд конденсатора.



Рис. 10.17. Конденсатор с поляризованной пластиной.

$$\text{Ответ: } q = \left( \epsilon_0 \frac{U}{d} - \frac{h}{d} P \right) S.$$

**Задача 10.4.3** Бесконечно длинный цилиндр радиуса  $R$  из однородного диэлектрика с проницаемостью  $\epsilon$  поместили в однородное электрическое поле напряженностью  $\mathbf{E}_0$ , которая перпендикулярна оси цилиндра. Найти вектор поляризации диэлектрика.

$$\text{Ответ: } \mathbf{P} = -2 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \epsilon_0 \mathbf{E}_0.$$

**Задача 10.4.4** ([2], 3.84). При некоторых условиях поляризация безграничной незаряженной пластины из диэлектрика имеет вид  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 \left( 1 - x^2 / d^2 \right)$ , где  $\mathbf{P}_0$  – вектор, перпендикулярный к пластине,  $x$  – расстояние от середины пластины,  $d$  – её полутолщина. Найти напряженность электрического поля внутри пластины и разность потенциалов между её поверхностями.

$$\text{Ответ: } \mathbf{E} = -\mathbf{P}_0 \left( 1 - x^2 / d^2 \right) / \epsilon_0, \quad U = 4P_0 d / 3\epsilon_0.$$

**Задача 10.4.5** ([2], 3.95). Пластина толщиной  $h$  из однородно-го статически поляризованного диэлектрика находится внутри плоского конденсатора, обкладки которого соединены между собой проводником. Поляризация пластинки  $\mathbf{P}$  перпендикулярна к её боковым граням и равна  $\mathbf{P}$ . Расстояние между обкладками конденсатора  $d$  ( $d > h$ ). Найти векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  внутри и вне пластины.

*Ответ:*  $E_1 = Ph / d\epsilon_0$  (в зазоре),  $E_2 = -(1 - h/d)\mathbf{P} / \epsilon_0$ ,  
 $D_1 = D_2 = Ph / d$ .

**Задача 10.4.6** ([2], 3.96). Длинный диэлектрический цилиндр круглого сечения поляризован так, что вектор  $\mathbf{P} = \alpha\mathbf{r}$ , где  $\alpha$  – положительная постоянная,  $r$  – расстояние до оси. Найти объемную плотность  $\rho'$  связанных зарядов как функцию расстояния  $r$  от оси.

*Ответ:*  $\rho' = -2\alpha$  (не зависит от  $r$ ).

## Глава 11

## ЭНЕРГИЯ И РАБОТА ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

## 11.1. Теоретический материал

**Энергия парного взаимодействия точечных зарядов**  $q_i$  и  $q_j$ , находящихся на расстоянии  $r_{ij}$  друг от друга, представляет собой потенциальную энергию одного из зарядов в электростатическом поле другого заряда:

$$W_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = q_i \phi_i = q_j \phi_j = \frac{q_i \phi_i + q_j \phi_j}{2}, \quad (11.1)$$

где  $\phi_i$  – потенциал электрического поля, создаваемого зарядом  $q_j$  в точке нахождения заряда  $q_i$ , а  $\phi_j$  – потенциал электрического поля, создаваемого зарядом  $q_i$  в точке нахождения заряда  $q_j$ . При этом  $W_{ij} = W_{ji}$ .

**Взаимная энергия системы точечных зарядов**  $W_{вз}$  равна сумме энергий попарно взаимодействующих зарядов:

$$W_{вз} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \phi_i, \quad (11.2)$$

где  $q_i$  –  $i$ -й заряд,  $\phi_i$  – потенциал поля всех зарядов за исключением  $i$ -го в точке нахождения  $i$ -го заряда.

**Взаимная энергия зарядов**  $W_{вз}$  равна работе сил кулоновского взаимодействия между зарядами при разнесении их на бесконечность (не затрагивая при этом взаимного расположения элементов каждого из зарядов).

**Собственная энергия заряда**  $W_{соб}$  равна работе сил кулоновского взаимодействия между элементами заряда при разнесении его элементов на бесконечность.

**(Полная) энергия системы зарядов**  $W$  равна сумме взаимной и собственных энергий зарядов:

$$W = W_{вз} + W_{соб} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} W_{ij} + \sum_i W_i,$$

где  $W_{\text{вз}} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} W_{ij}$  – взаимная энергия (энергия взаимодействия) зарядов, которая может быть как больше, так и меньше нуля;  $W_i$  – собственная энергия  $i$ -го заряда, которая всегда больше нуля.

**(Полная) энергия системы объемно распределенных зарядов:**

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV .$$

где  $\rho(\mathbf{r})$  – объемная плотность заряда, распределенного в объеме (объемах)  $V$ ;  $\varphi$  – потенциал поля в точке нахождения элемента заряда  $\rho dV$ , созданный *всеми* зарядами системы.

**(Полная) энергия системы поверхностно распределенных зарядов:**

$$W = \frac{1}{2} \int_S \sigma \varphi dS ,$$

где  $\sigma(\mathbf{r})$  – поверхностная плотность заряда, распределенного по поверхности (поверхностям)  $S$ ;  $\varphi$  – потенциал поля в точке нахождения элемента заряда  $\sigma dS$ , созданный *всеми* зарядами системы.

**(Полная) энергия системы объемно и поверхностно распределенных зарядов:**

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV + \frac{1}{2} \int_S \sigma \varphi dS , \quad (11.3)$$

где  $\varphi$  – потенциал в точке нахождения элемента заряда  $\rho dV$  или  $\sigma dS$ , созданный *всеми* зарядами системы, а интегрирование ведется по всем областям, где имеются заряды. Формула учитывает как взаимодействие зарядов, находящихся на разных телах, так и взаимодействие друг с другом зарядов, находящихся на каждом из тел системы.

**Энергия электростатического поля** вычисляется по формуле

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV , \quad (11.4)$$

где  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  – напряженность и электрическая индукция поля; интегрирование ведется по всей области пространства, где локализовано электрическое поле.

**Объемная плотность энергии электростатического поля** равна:

$$w(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E^2(\mathbf{r}). \quad (11.5)$$

**Энергия точечного заряда  $q$ , расположенного во внешнем электрическом поле** напряженностью  $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$  в точке с радиус-вектором  $\mathbf{r}$ , определяется формулой:

$$W(\mathbf{r}) = q \int_r^{\infty} \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = q\varphi_0(\mathbf{r}), \quad (11.6)$$

где  $\varphi_0(\mathbf{r})$  – потенциал внешнего по отношению к заряду  $q$  поля в точке расположения заряда.

**Энергия точечного электрического диполя** с дипольным моментом  $\mathbf{p}$ , расположенного во внешнем электрическом поле в точке с радиус-вектором  $\mathbf{r}$ , равна:

$$W(\mathbf{r}) = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_0(\mathbf{r}). \quad (11.7)$$

**Энергия электрического поля, запасенная в конденсаторе,** равна

$$W = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} QU. \quad (11.8)$$

**Закон изменения энергии системы заряженных тел при наличии внешних сил и ЭДС:** сумма работ внешних сил  $A$  и ЭДС (сторонних сил)  $A_{\text{ист}}$  при изменении состояния системы заряженных тел равна сумме изменения энергии электрического поля  $\Delta W$ , создаваемого зарядами этих тел, и выделившегося джоулева тепла  $Q$ :

$$A + A_{\text{ист}} = \Delta W + Q.$$

При квазистатическом (физически бесконечно медленном) изменении состояния системы заряженных тел сила тока в цепи настолько мала, что можно не учитывать потери энергии на джоулево тепло. В этом случае

$$A + A_{\text{ист}} = \Delta W.$$

## 11.2. Основные типы задач (классификация)

11.1. Определение собственной энергии заданного распределения электрических зарядов и энергии электростатического поля этого распределения зарядов в заданном объеме.

11.2. Определение энергии взаимодействия системы, состоящей из точечных зарядов, диполей и нескольких заряженных тел.

11.3. Определение работы электрических сил при изменении конфигурации системы.

### 11.3. Методы решения и примеры решения задач

#### Задачи типа 11.1

*Определение собственной потенциальной энергии заданного распределения электрических зарядов и энергии электростатического поля этого распределения зарядов в заданном объеме.*

**Метод решения.** Применение формул (11.3) или (11.4) – (11.5).

**Задача 11.3.1.** Заряд  $q$  распределен равномерно по поверхности сферы радиуса  $R$ . Найти собственную энергию  $W$  системы.

#### Решение

При решении данной задачи можно использовать два подхода.

Способ 1. Собственная энергия  $W$  заряженного с объемной плотностью  $\rho$  и поверхностной плотностью  $\sigma$  тела определяется формулой:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \varphi \rho dV + \frac{1}{2} \int_S \varphi \sigma dS,$$

где  $\varphi$  – потенциал в точке нахождения элемента заряда  $\rho dV$  или  $\sigma dS$ , созданный всеми остальными зарядами системы, а интегрирование ведется по всем областям, где имеются заряды.

Так как заряд находится только на поверхности сферы, то потенциал сферы  $\varphi$  и плотность заряда на ней  $\sigma$  – величины постоянные и равные

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{R}, \quad \sigma = \frac{q}{S},$$

где  $S$  – площадь поверхности сферы.

Следовательно, искомая собственная энергия  $W$  системы равна:

$$W = \frac{1}{2} \int_S \varphi \sigma dS = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{RS} \int_S dS = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R}.$$

Способ 2. Другой подход состоит в определении энергии электрического поля, созданного зарядами сферы. Для этого следует использовать формулу, выражающую энергию электрического поля через объемную плотность  $w$  ее энергии:

$$W = \int_V w dV = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} dV,$$

где интегрирование проводится по всему пространству, занятому полем.

Внутри сферы напряженность поля равна нулю и, значит, плотность энергии поля также равна нулю.

Вне сферы  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$ ,  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$  и плотность энергии поля

равна:

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2.$$

Вся энергия поля сосредоточена в пространстве вне сферы, и её величина равна

$$W = \int_R^\infty w 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{R}.$$

Энергия поля концентрируется преимущественно вблизи заряда. Так, в рассматриваемой задаче внутри сферы радиусом  $2R$  сосредоточена половина всей энергии поля, а внутри сферы радиусом  $3R$  – уже  $2/3$  всей энергии.

**Ответ:**  $W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{R}.$

**Задача 11.3.2.** Определить энергию  $W$  поля, созданного зарядом  $q$ , равномерно распределенным по объему шара радиуса  $R$ . Шар изготовлен из материала с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Сравнить энергию  $W_1$  поля вне шара и энергию  $W_2$  поля внутри него.

### Решение

Способ 1. Будем вычислять энергию электрического поля шара, исходя из распределения объемной плотности энергии в пространстве.

Вне шара поле ничем не отличается от поля равномерно заряженной сферы, поэтому запасенная в нем энергия точно равна энергии, вычисленной в предыдущей задаче:

$$W_1 = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{R}$$

Индукцию электрического поля  $D$  внутри шара определяем по теореме Гаусса для вектора  $D$ :

$$4\pi r^2 D = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3, \quad (11.8)$$

где  $\rho = \frac{q}{(4/3)\pi R^3}$  – объемная плотность заряда.

Отсюда получаем, что индукция электрического поля равна:

$$D = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{q r}{R^3}.$$

Объемная плотность энергии электрического поля  $w = \frac{D^2}{2\epsilon\epsilon_0}$

зависит только от расстояния до центра шара  $r$ . Следовательно, энергия поля внутри шара  $W_2$  равна:

$$W_2 = \int_V w dV = \frac{1}{2\epsilon\epsilon_0} \int_0^R \frac{1}{16\pi^2} \cdot \frac{q^2 r^2}{R^6} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{1}{40\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{R}.$$

Отношение энергий поля вне и внутри шара составляет:

$$\frac{W_1}{W_2} = 5\epsilon.$$

Искомая полная энергия заряженного шара  $W$ , равная энергии электрического поля, создаваемого зарядом шара, равна:

$$W = W_1 + W_2 = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{5\epsilon + 1}{5\epsilon R}.$$

Способ 2. Это же значение полной энергии шара можно получить по формуле

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi(r) dV, \quad (11.9)$$

зная распределение заряда в пространстве и потенциал создаваемого этим зарядом поля.

Используем нормировку потенциала  $\varphi_\infty = 0$ . Тогда в области  $r \geq R$  потенциал равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}. \quad (11.10)$$

Вычислим потенциал электрического поля внутри равномерно заряженного по объёму шара из вещества с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ . В области  $r \leq R$  из формулы (11.8) с учетом материального уравнения  $\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$  находим значение напряженности поля внутри шара:

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0\varepsilon}.$$

При этом потенциал  $\varphi(r)$  равен:

$$\varphi(r) = -\int E(r)dr = -\int \frac{\rho r}{3\varepsilon\varepsilon_0} dr = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0\varepsilon} + C. \quad (11.11)$$

Постоянную интегрирования  $C$  найдем из условия непрерывности потенциала при  $r = R$ , используя формулы (11.10) и (11.11):

$$-\frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0\varepsilon} + C = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0},$$

откуда

$$C = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} \left(1 + \frac{1}{2\varepsilon}\right) = \frac{\rho R^2(1+2\varepsilon)}{6\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Окончательно зависимость потенциала от расстояния до центра шара  $r$  имеет вид:

$$\varphi(r) = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon\varepsilon_0} + \frac{\rho R^2(1+2\varepsilon)}{6\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\rho}{6\varepsilon\varepsilon_0} [R^2(1+2\varepsilon) - r^2],$$

где  $\rho = \frac{q}{V} = \frac{3q}{4\pi R^3}$  – объёмная плотность заряда.

Тогда по формуле (11.9) искомая энергия заряженного шара равна:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_0^R \rho \frac{\rho}{6\varepsilon\varepsilon_0} [R^2(1+2\varepsilon) - r^2] \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{2\pi\rho^2 R^5}{9\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{5\varepsilon+1}{5} = \\ &= \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{5\varepsilon+1}{5\varepsilon R}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } W = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{5\varepsilon+1}{5\varepsilon R}, \quad \frac{W_1}{W_2} = 5\varepsilon.$$

**Задача 11.3.3.** Имеется проводящий шар радиуса  $r_1$  и concentричный с ним сферический проводящий слой, внутренняя поверх-

ность которого имеет радиус  $r_2 > r_1$ , а внешняя – радиус  $r_3 > r_2$ . Заряды шара и слоя равны соответственно  $q_1$  и  $q_2$ . Найти энергию  $W$  этой системы зарядов.

### Решение

Ввиду сферической симметрии системы ее энергию проще рассчитать как энергию электрического поля.

Внутри шара и внутри проводящего слоя поля нет, т.е. при  $r < r_1$  и  $r_2 < r < r_3$   $E = 0$ . Напряженность поля равна:

$$\text{при } r_1 < r < r_2 \quad E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{r^2},$$

$$\text{при } r > r_3 \quad E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 + q_2}{r^2}.$$

Записывая плотность энергии электрического поля согласно формуле (11.5):

$$w(r) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2(r),$$

находим энергию в каждой области, вычисляя соответствующие интегралы:

$$W_1 = \frac{1}{2} \int_{r_1}^{r_2} \epsilon_0 E_1^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{q_1^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right);$$

$$W_2 = \frac{1}{2} \int_{r_3}^{\infty} \epsilon_0 E_2^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(q_1 + q_2)^2}{r_3}.$$

Полная энергия системы равна их сумме:

$$W = W_1 + W_2 = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left[ q_1^2 \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) + \frac{2q_1q_2 + q_2^2}{r_3} \right].$$

$$\text{Ответ: } W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left[ q_1^2 \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) + \frac{2q_1q_2 + q_2^2}{r_3} \right].$$

### Задачи типа 11.2

*Определение потенциальной энергии взаимодействия системы, состоящей из точечных зарядов, диполей и нескольких заряженных тел.*

**Метод решения.** Использование формул (11.1) – (11.2) и определения энергии взаимодействия системы из нескольких заряженных тел.

**Задача 11.3.4.** В вершинах квадрата со стороной  $a$  находятся точечные заряды  $q_1, q_2, q_3, q_4$  (рис. 11.1). Найти энергию взаимодействия  $W$  этой системы зарядов.

### Решение

Энергия взаимодействия системы точечных зарядов равна сумме энергий попарно взаимодействующих зарядов<sup>1</sup>:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}.$$

Применительно к данной задаче в этой формуле содержится шесть слагаемых по числу разных пар взаимодействующих точечных зарядов. В четырех из этих слагаемых  $r_{ij} = a$  и в двух  $r_{ij} = a\sqrt{2}$ . Отсюда получаем:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{a} \left[ q_1 q_2 + q_2 q_3 + q_3 q_4 + q_1 q_4 + \frac{q_1 q_3 + q_2 q_4}{\sqrt{2}} \right].$$

**Ответ:**  $W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{a} \left[ q_1 q_2 + q_2 q_3 + q_3 q_4 + q_1 q_4 + \frac{q_1 q_3 + q_2 q_4}{\sqrt{2}} \right].$

**Задача 11.3.5.** Вычислить потенциальную энергию, приходящуюся на один заряд, расположенный в неограниченной линейной цепочке точечных зарядов, величина которых равна  $q$ , а знаки чередуются. Расстояние между соседними разноименными зарядами равно  $a$  (рис. 11.2).

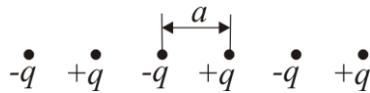


Рис. 11.2. Линейная цепочка зарядов.

### Решение

Энергия взаимодействия какого-либо заряда  $+q$  с ближайшим соседом (зарядом  $-q$  слева) согласно формуле (11.1) равна:

<sup>1</sup> Здесь и далее в этой главе считаем  $\varphi_\infty = 0$ .

$$W_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a},$$

а со следующими зарядами соответственно:

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{2a}, \quad W_3 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{3a} \text{ и т. д.}$$

Полная энергия взаимодействия одного заряда со всеми остальными согласно формуле (11.2) определяется суммой:

$$\begin{aligned} W &= 2(W_1 + W_2 + \dots) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{a} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\right) = \\ &= -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{a} \ln 2. \end{aligned}$$

**Ответ:**  $W = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{a} \ln 2.$

**Задача 11.3.6.** Точечный заряд  $q$  находится на расстоянии  $h$  от безграничной проводящей плоскости (рис. 11.3). Найти: а) энергию взаимодействия этого заряда с зарядами, индуцированными на плоскости, б) собственную энергию зарядов, индуцированных на плоскости, в) энергию взаимодействия всех зарядов системы.

### Решение

А. Непосредственно вычислить энергию взаимодействия заряда  $q$  с зарядами плоскости можно, если выделить на плоскости участок очень малой площади  $dS$ , заряд которого  $dq = \sigma(r)dS$  можно считать точечным (см. рис. 11.3), записать энергию взаимодействия

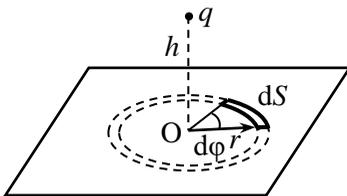


Рис. 11.3. К расчету энергии взаимодействия точечного заряда и безграничной проводящей плоскости.

$dW$  этого заряда с зарядом  $q$  и просуммировать вклады в энергию всех зарядов плоскости, т.е. вычислить интеграл от  $dW$  по всем её участкам. При этом надо учесть, что энергия взаимодействия  $W$  системы двух точечных зарядов  $q_1$  и  $q_2$  определяется формулой:

$$W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

где  $r$  – расстояние между точечными зарядами.

Для расчета удобно использовать полярную систему координат  $(r, \varphi)$  с началом координат в основании перпендикуляра, опущенного на плоскость из точки расположения заряда  $q$  (точка  $O$  на рис. 11.3). В этой системе координат  $dS = r dr d\varphi$  и суммирование вкладов в энергию от всех участков плоскости означает вычисление интеграла по  $\varphi$  в пределах от нуля до  $2\pi$  и по  $r$  от нуля до бесконечности.

Плотность индуцированного на плоскости заряда  $\sigma$ , вычисленная в задаче 6.3.2 главы 6, равна

$$\sigma = -\frac{qh}{2\pi(h^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Следовательно, для искомой энергии взаимодействия точно-го заряда с зарядами, индуцированными на плоскости, получаем:

$$dW = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q dq}{(h^2 + r^2)^{1/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \sigma r dr d\varphi}{(h^2 + r^2)^{1/2}},$$

$$W_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2 h}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \frac{r dr}{(h^2 + r^2)^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{2h}.$$

Отметим, что согласно методу электростатических изображений поле над металлической плоскостью точно совпадает с полем заряда -"изображения"  $q' = -q$ . Поэтому ту же энергию можно было получить как энергию взаимодействия точечных зарядов  $q$  и  $q' = -q$ .

Б. Для расчета собственной энергии индуцированных зарядов воспользуемся формулой:

$$W = \frac{1}{2} \int_S \varphi_\sigma \sigma dS, \quad (11.12)$$

где плотность индуцированных зарядов  $\sigma = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{qh}{(h^2 + r^2)^{3/2}}$  (см.

пункт А). В формулу (11.12) входит потенциал  $\varphi_\sigma$  поля, созданного самими поверхностными зарядами на проводящей плоскости. Чтобы его найти, отметим, что потенциал безграничной проводящей плоскости складывается из потенциала  $\varphi_\sigma$  поля, создаваемого самими поверхностными зарядами, и потенциала поля точечного заряда  $\varphi_q$ . Примем потенциал на бесконечном расстоянии от заряда

равным нулю. Тогда потенциал безграничной проводящей плоскости тоже равен нулю:

$$\varphi_{\sigma} + \varphi_q = 0,$$

при этом потенциал поля точечного заряда

$$\varphi_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{(h^2 + r^2)^{1/2}}.$$

Отсюда получаем:

$$\varphi_{\sigma} = -\varphi_q = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{(h^2 + r^2)^{1/2}}.$$

Вычисляя интеграл с найденным потенциалом, находим искомую энергию взаимодействия:

$$W_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \frac{q^2 h r dr}{2\pi(h^2 + r^2)^2} = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 h}.$$

В. Энергию взаимодействия всех зарядов системы найдем, суммируя энергию взаимодействия точечного заряда с зарядами, индуцированными на плоскости, и собственную энергию зарядов, индуцированных на плоскости.

$$W_3 = W_1 + W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{q^2}{2} + \frac{q^2}{4} \right) = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 h}.$$

*Замечание.* Найденную энергию взаимодействия всех зарядов системы можно определить, воспользовавшись методом электростатических изображений, согласно которому поле над плоскостью совпадает с полем, создаваемым зарядом  $q$  вместе с его зарядом-"изображением" ( $-q$ ).

Искомая энергия взаимодействия всех зарядов равна половине энергии взаимодействия заряда  $q$  с его зарядом-"изображением". Согласно определению, взаимная энергия зарядов равна работе сил кулоновского взаимодействия между зарядами при разнесении их на бесконечность. Если мы будем удалять от плоскости реальный заряд, будет удаляться на бесконечность и заряд-"изображение". Значит, при этом будет совершена также работа по его перемещению на бесконечность, т.е., вычислив энергию взаимодействия заряда  $q$  с его зарядом-"изображением", мы получим удвоенное значение искомой энергии. Используя результат пункта а), получим:

$$W_3 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{2h} = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 h}.$$

Как можно убедиться, полученное значение энергии равно найденному выше значению.

**Ответ:** а)  $W = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 h}$ ; б)  $W = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 h}$ ; в)  $W = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 h}$ .

**Задача 11.3.7.** Два диполя с дипольными моментами  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$ , которые лежат в одной плоскости на расстоянии  $r$  друг от друга, образуют с прямой, соединяющей диполи, углы  $\theta_1$  и  $\theta_2$  соответственно. Вычислить энергию взаимодействия диполей (рис. 11.4).

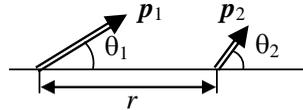


Рис. 11.4. Взаимная ориентация диполей.

### Решение

Энергию взаимодействия диполей рассчитаем с помощью формулы (11.7):

$$W = -\mathbf{pE},$$

которая определяет энергию точечного диполя с дипольным моментом  $\mathbf{p}$  во внешнем электрическом поле с напряженностью  $\mathbf{E}$ . В данном случае внешнее поле, действующее на диполь 1, создается диполем 2. Поэтому энергия взаимодействия диполей равна

$$W = -\mathbf{p}_1 \mathbf{E}_2,$$

где

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3(\mathbf{p}_2 \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_2}{r^3} \right]$$

– напряженность поля, создаваемая вторым диполем в точке расположения первого диполя.

Раскрывая скалярное произведение, находим:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \mathbf{p}_1 \cdot \left[ \frac{3(\mathbf{p}_2 \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_2}{r^3} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3(\mathbf{p}_1 \mathbf{r})(\mathbf{p}_2 \mathbf{r})}{r^5} - \frac{(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2)}{r^3} \right] = \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_1 p_2}{r^3} (3 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \cos(\theta_1 - \theta_2)). \end{aligned}$$

*Замечание.* Энергия взаимодействия:

максимальна и равна  $W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_1 p_2}{r^3}$ , если  $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$ ;

равна нулю при  $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi/2$ ;

минимальна и равна  $W = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p_1 p_2}{r^3}$ , если  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ .

**Ответ:**  $W = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_1 p_2}{r^3} (3 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \cos(\theta_1 - \theta_2))$ .

### Задачи типа 11.3

*Определение работы электрических сил при изменении конфигурации системы.*

**Метод решения.** Применяется закон изменения энергии системы заряженных тел при наличии внешних сил и ЭДС.

**Задача 11.3.8.** Сферическая оболочка радиуса  $R_1$ , равномерно заряженная зарядом  $q$ , расширилась до радиуса  $R_2$ . Найти работу, совершенную при этом силами электрического поля.

#### Решение

Энергия равномерно заряженной сферы определена в задаче 11.3.1 и равна

$$W = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

При расширении оболочки ее радиус увеличивается, и энергия уменьшается. Разность начальной и конечной энергий равна работе сил электрического поля:

$$A = -\Delta W = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

**Ответ:**  $A = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$ .

**Задача 11.3.9.** Плоский воздушный конденсатор с пластинами площадью  $S$  и расстоянием между ними  $d$  заряжен до разности потенциалов  $U$  и отключен от батареи. Какую минимальную работу надо совершить, чтобы увеличить расстояние между его пластинами на  $\Delta x$ ?

#### Решение

При увеличении расстояния между пластинами конденсатора его емкость  $C$  уменьшается и, следовательно, изменяется величина

запасенной в нем энергии. Если конденсатор отключен от батареи, то заряд  $q$  на его обкладках не изменяется. Для определения энергии конденсатора в этом случае удобно использовать формулу

$$W = \frac{q^2}{2C},$$

где  $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$ .

С увеличением расстояния  $d$  между пластинами конденсатора запасенная в нем энергия увеличивается за счет работы внешних сил:

$$\Delta W = A = \frac{q^2(d + \Delta x)}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q^2 d}{2\varepsilon_0 S} = \frac{q^2 \Delta x}{2\varepsilon_0 S}.$$

Выражая заряд конденсатора через первоначальную разность потенциалов  $q = CU$ , получаем:

$$A = \frac{\varepsilon_0 S \Delta x U^2}{2d^2}.$$

*Замечание.* Задачу можно также решать, используя понятие работы силы. Так как

$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 S} = \frac{U}{d} = \text{const},$$

то сила, действующая на одну из пластин конденсатора со стороны электрического поля второй пластины, не зависит от расстояния между обкладками и равна:

$$F = q \frac{E}{2} = \frac{qU}{2d} = \frac{CU^2}{2d} = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2d^2}.$$

Тогда при перемещении пластины на расстояние  $\Delta x$  внешние силы совершат работу, равную взятой с обратным знаком работе сил электрического поля:

$$A = F \Delta x = \frac{\varepsilon_0 S \Delta x U^2}{2d^2}.$$

**Ответ:**  $A = \frac{\varepsilon_0 S \Delta x U^2}{2d^2}$ .

**Задача 11.3.10.** Плоский воздушный конденсатор с пластинами площадью  $S$  заряжен до разности потенциалов  $U$ . Не отключая конденсатор от батареи, медленно увеличивают расстояние между пла-

стинами от  $x_1$  до  $x_2$ . Какую работу выполняют при этом внешние силы?

### Решение

Так как пластины конденсатора притягиваются друг к другу, то для раздвижения пластин внешние силы должны совершить работу. Эта работа будет минимальной, если процесс выполнять квазистатически.

Если конденсатор остается подключенным к источнику ЭДС, то при квазистатическом изменении расстояния между пластинами напряжение на пластинах остается постоянным, и для расчета энергии конденсатора следует использовать формулу:

$$W = CU^2/2,$$

где  $C = \epsilon_0 S/x$ ,  $x$  – расстояние между пластинами.

При увеличении расстояния  $x$  между пластинами емкость конденсатора уменьшается с одновременным уменьшением энергии, запасенной в конденсаторе. После завершения процесса перемещения верхней пластины энергия конденсатора изменится на величину:

$$\Delta W = \frac{(C_2 - C_1)U^2}{2} = \frac{\epsilon_0 S U^2}{2} \left( \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right) < 0. \quad (11.13)$$

Работу внешней силы можно найти, воспользовавшись законом изменения энергии для квазистатического процесса:

$$A_{\text{мех}} + A_{\text{ист}} = \Delta W + Q, \quad (11.14)$$

где  $A_{\text{мех}}$  – работа внешней силы,  $A_{\text{ист}}$  – работа, совершаемая источником,  $\Delta W$  – изменение энергии системы,  $Q$  – выделившееся джоулево тепло. Следует отметить, что знак  $A_{\text{ист}}$  определяется знаком протекшего через источник заряда  $\Delta q$ ; работа источника положительна, когда он подает заряд на пластины конденсатора (в этом случае  $\Delta q > 0$ ).

При медленном перемещении верхней пластины процесс является квазистатическим, поэтому можно считать, что за все время перемещения напряжение на обкладках конденсатора  $U$  остается постоянным, тогда сила тока в цепи настолько мала, что можно не учитывать потери энергии на джоулево тепло  $Q$ .

В данном случае напряжение на пластинах конденсатора остается постоянным, а заряд на них меняется на величину

$$\Delta q = U(C_2 - C_1) < 0.$$

Этот избыточный отрицательный заряд  $\Delta q$  перетекает в источник ЭДС, двигаясь против сил электрического поля, созданного источником (заряд движется к отрицательной пластине источника). При этом работа, совершаемая источником, отрицательна и равна:

$$A_{\text{ист}} = \Delta q \cdot U = U^2(C_2 - C_1) < 0. \quad (11.15)$$

Теперь, используя уравнение (11.14) и полученные соотношения (11.14) и (11.15), находим работу, совершенную внешними силами:

$$A_{\text{мех}} = -A_{\text{ист}} + \Delta W = \frac{(C_1 - C_2)U^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2} \left( \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right).$$

Заметим, что работа внешней силы при увеличении расстояния между пластинами конденсатора положительна.

*Замечание 1.* При увеличении расстояния между пластинами на  $dx$  работа электростатических сил равна

$$dA_1 = -F dx,$$

где  $F = qE_1$  – сила, действующая на одну из пластин. Здесь  $q$  – заряд пластины,  $E_1$  – напряженность поля, созданного зарядом второй пластины; она равна половине напряженности поля в конденсаторе  $E$ .

Так как  $q = CU$ ,  $E = U/x$ , находим:

$$F = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2x^2};$$

$$A_1 = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2} \left( \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right) = \Delta W = -A_{\text{мех}}.$$

*Замечание 2.* В обоих случаях  $q = \text{const}$  (**задача 11.3.9**) и  $U = \text{const}$  (данная задача) сила взаимодействия пластин получилась одинаковой. Действительно, силы определяются только зарядами на пластинах и не зависят от внешних цепей, куда подключен конденсатор.

**Ответ:** 
$$A_{\text{мех}} = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2} \left( \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right).$$

**Задача 11.3.11.** Внутри плоского конденсатора находится параллельная обкладкам пластина, толщина которой составляет  $\eta = 0,6$  расстояния между обкладками. Конденсатор сначала подключили к источнику постоянного напряжения  $U = 200$  В, затем

отключили и после этого медленно извлекли пластину из зазора. Емкость конденсатора в отсутствие пластины  $C = 20$  нФ. Найти работу, совершенную против сил электрического поля при извлечении пластины, если пластина: а) металлическая; б) стеклянная с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon = 5$ .

### Решение

Так как конденсатор отключен от источника напряжения, согласно закону сохранения энергии можно искомую работу рассчитать как изменение энергии, запасенной в конденсаторе:

$$A_{\text{мех}} = \Delta W.$$

При отключенном источнике ЭДС на обкладках конденсатора сохраняется заряд  $Q$  и энергию конденсатора следует рассчитывать по формуле:

$$W = \frac{Q^2}{2C}.$$

При извлечении пластины емкость конденсатора уменьшается, а запасенная в нем энергия увеличивается.

а) Пусть толщина металлической пластины равна  $h$ . Тогда начальная емкость конденсатора будет

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d-h} = \frac{\varepsilon_0 S}{d(1-\eta)} = \frac{C}{1-\eta},$$

где  $S$  – площадь обкладки,  $d$  – расстояние между обкладками.

После того, как пластина будет удалена из конденсатора, его емкость станет равна

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}.$$

Изменение потенциальной энергии конденсатора составит:

$$\Delta W = W_{\text{кон}} - W_{\text{нач}} = \frac{Q^2}{2} \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{C_1} \right) = \frac{Q^2 h}{2\varepsilon_0 S} = \frac{Q^2 \eta d}{2\varepsilon_0 S} = \frac{Q^2 \eta}{2C} > 0.$$

Выражая заряд конденсатора через начальную разность потенциалов:  $Q = C_1 U$ , находим окончательный ответ:

$$A = \Delta W = \frac{C^2 U^2 \eta}{2(1-\eta)^2 C} = \frac{\eta C U^2}{2(1-\eta)^2} = 1,5 \text{ мДж}.$$

б) Начальную емкость конденсатора можно найти, воспользовавшись решением задачи 9.3.4, где найдена емкость плоского конденсатора, заполненного двумя слоями диэлектрика (слой толщи-

ной  $d_1$  с проницаемостью  $\varepsilon_1$  и слой толщиной  $d_2 = d - d_1$  с проницаемостью  $\varepsilon_2$ ):

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{\left( \frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} \right)}.$$

В условиях данной задачи следует положить  $\varepsilon_1 = 1$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon$  и  $d_1 = (1 - \eta)d$ ,  $d_2 = \eta d$ . Тогда начальная емкость конденсатора запишется в виде:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{\left( 1 - \eta + \frac{\eta}{\varepsilon} \right) d} = \frac{\varepsilon_0 S}{(\varepsilon(1 - \eta) + \eta)d} = \frac{\varepsilon C}{\varepsilon(1 - \eta) + \eta}.$$

Изменение энергии конденсатора при удалении диэлектрической пластины равно:

$$\Delta W = \frac{Q^2}{2} \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{C_1} \right),$$

где  $Q = C_1 U$ .

Подставляя найденное выражение для  $C_1$ , получаем:

$$A = \Delta W = \frac{\varepsilon^2 C U^2 [\varepsilon(1 - \eta) + \eta - \varepsilon]}{2(\varepsilon(1 - \eta) + \eta)^2 \varepsilon} = \frac{\varepsilon(\varepsilon - 1)\eta C U^2}{2(\varepsilon(1 - \eta) + \eta)^2} = 0,8 \text{ мДж}.$$

Работа против сил электрического поля полностью пошла на увеличение энергии конденсатора.

**Ответ:** а)  $A = \frac{\eta C U^2}{2(1 - \eta)^2} = 1,5 \text{ мДж};$

б)  $A = \frac{\varepsilon(\varepsilon - 1)\eta C U^2}{2(\varepsilon(1 - \eta) + \eta)^2} = 0,8 \text{ мДж}.$

**Задача 11.3.12.** Внутри плоского конденсатора с площадью пластин  $S = 200 \text{ см}^2$  и расстоянием между ними  $d = 0,1 \text{ см}$  находится пластина из стекла ( $\varepsilon = 5$ ), целиком заполняющая пространство между пластинами конденсатора. Какую механическую работу надо затратить на удаление пластины, если конденсатор все время присоединен к батарее с ЭДС, равной  $U = 300 \text{ В}$ ?

## Решение

Если в процессе удаления пластины источник ЭДС остается подключенным к конденсатору, то для расчета запасенной в конденсаторе энергии следует воспользоваться формулой  $W = \frac{CU^2}{2}$ . В процессе удаления пластины диэлектрика из конденсатора его емкость уменьшается от величины  $C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}$  до  $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$  (без пластины). Одновременно происходит уменьшение энергии, запасенной в конденсаторе. Изменение энергии конденсатора равно:

$$\Delta W = W_{\text{кон}} - W_{\text{нач}} = \frac{(1 - \varepsilon)CU^2}{2} < 0.$$

Работу внешней силы находим по закону изменения энергии:

$$A + A_{\text{ист}} = \Delta W + Q, \quad (11.16)$$

где  $A_{\text{мех}}$  – работа внешней силы,  $A_{\text{ист}}$  – работа, совершаемая источником,  $\Delta W$  – изменение энергии системы,  $Q$  – выделившееся джоулево тепло.

При медленном выдвигании диэлектрика процесс является квазистатическим, поэтому напряжение на обкладках конденсатора  $U$  остается постоянным и сила тока в цепи настолько мала, что можно не учитывать потери энергии на джоулево тепло  $Q$ .

Если конденсатор подключен к источнику напряжения, то напряжение на пластинах остается постоянным, а заряд на них меняется на величину

$$\Delta q = U(C - C_1) = CU(1 - \varepsilon) < 0.$$

Этот избыточный отрицательный заряд  $\Delta q$  перетекает в источник ЭДС, двигаясь против сил электрического поля, созданного источником. При этом работа, совершаемая источником, отрицательна и равна:

$$A_{\text{ист}} = U\Delta q = CU^2(1 - \varepsilon) < 0. \quad (11.17)$$

По формуле (11.16) находим механическую работу, совершаемую при удалении стеклянной пластины:

$$A_{\text{мех}} = -A_{\text{ист}} + \Delta W = \frac{(\varepsilon - 1)CU^2}{2} = \frac{(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 SU^2}{2d} = 3,2 \cdot 10^5 \text{ Дж}.$$

**Ответ:**  $A_{\text{мех}} = \frac{(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 SU^2}{2d} = 3,2 \cdot 10^5 \text{ Дж}.$

**Задача 11.3.13.** Конденсатор емкости  $C_1 = 1$  мкФ, предварительно заряженный до напряжения  $U = 300$  В и отсоединенный от источника ЭДС, подключили параллельно к незаряженному конденсатору емкости  $C_2 = 2$  мкФ. Найти изменение энергии этой системы к моменту установления равновесия.

### Решение

При соединении конденсаторов первоначальный заряд конденсатора  $q = C_1 U$  перераспределится так, чтобы напряжение  $U_1$  на обоих конденсаторах стало одинаковым. При этом силы электрического поля совершат работу по перемещению зарядов и, следовательно, энергия системы уменьшится.

При параллельном соединении конденсаторов их емкости складываются, и емкость получившейся системы станет равна  $C = C_1 + C_2$ . Начальное значение энергии, запасенной в конденсаторах, было  $W = C_1 U^2 / 2$ , конечное станет  $W_1 = (C_1 + C_2) U_1^2 / 2$ .

Изменение энергии системы  $\Delta W = W_1 - W$  найдем, если определим величину напряжения  $U_1$ . Это можно сделать, используя закон сохранения заряда:

$$q = C_1 U = (C_1 + C_2) U_1,$$

откуда 
$$U_1 = \frac{C_1 U}{C_1 + C_2}.$$

В итоге получаем изменение энергии системы конденсаторов:

$$\Delta W = W_1 - W = \frac{C_1^2 U^2}{2(C_1 + C_2)} - \frac{C_1 U^2}{2} = -\frac{C_1 C_2 U^2}{2(C_1 + C_2)} = -0,03 \text{ мДж}.$$

*Замечание.* Вся потерянная системой энергия перешла главным образом в тепло за счет омического сопротивления соединительных проводов. При малом омическом сопротивлении и достаточно большой индуктивности системы будут наблюдаться затухающие колебания величины заряда на конденсаторах вплоть до достижения равновесного состояния, когда вся избыточная энергия перейдет в тепло и электромагнитное излучение.

**Ответ:** 
$$\Delta W = -\frac{C_1 C_2 U^2}{2(C_1 + C_2)} = -0,03 \text{ мДж}.$$

**Задача 11.3.14.** Незаряженный металлический шар радиуса  $R$  помещен в однородное внешнее поле с напряженностью  $E_0$ . Какую

работу необходимо совершить, чтобы переместить шар в область, где поле практически отсутствует?

### Решение

Если проводящий шар находится во внешнем однородном электрическом поле с напряженностью  $E_0$ , то явление электростатической индукции приведет к тому, что на его поверхности появятся поверхностные заряды (рис. 11.5), которые обеспечивают равенство нулю напряженности поля внутри шара. Эти заряды можно представить себе как результат малого сдвига на вектор  $l$  вдоль направления напряженности внешнего поля  $E_0$  друг относительно друга двух равномерно заряженных по объему шаров того же радиуса  $R$ , несущих заряды противоположных знаков  $q$  и  $-q$  (см. рис. 11.6, центры шаров обозначены как (+) и (-))

Поле каждого из этих шаров во внешней по отношению к ним области совпадает с полем точечного заряда, равного заряду шара и расположенного в его центре. Таким образом, суммарное поле этих двух шаров будет полем точечного диполя, т.е. шар приобретет некоторый дипольный момент. Величину этого момента можно рассчитать, учитывая, что поле внутри этих шаров должно полностью компенсировать внешнее поле.

Рассмотрим непроводящий однородно заряженный шар радиуса  $R$ , объемная плотность заряда внутри которого  $\rho = \frac{q}{V}$ ,

где  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$  – объем шара. Напряженность поля на расстоянии  $r < R$  от его центра находим по теореме Гаусса, применяя её к сферическому объему радиуса  $r$ :

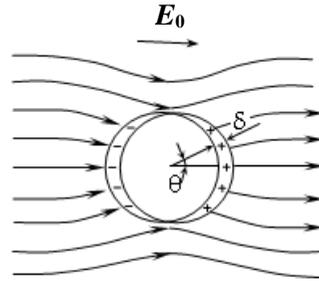


Рис. 11.5. Распределение поверхностных зарядов, возникающих на проводящем шаре во внешнем электрическом поле.

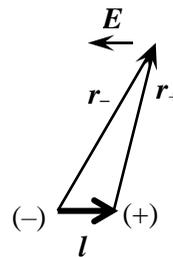


Рис. 11.6. Схематичное изображение центров отрицательно и положительно заряженных шаров и напряженности их суммарного поля  $E$ .

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{4}{3\varepsilon_0} \pi r^3 \rho.$$

С учетом направления  $\mathbf{E}$  получаем:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \mathbf{r},$$

где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор, проведенный из центра шара в точку внутри него.

В области пересечения шаров напряженности их полей складываются, и суммарная напряженность равна:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} (\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0} \mathbf{l},$$

где  $\mathbf{r}_- = \mathbf{l} + \mathbf{r}_+$  (см. рис. 11.6).

Так как внутри проводника  $\mathbf{E} = 0$ , то поле внутри шаров должно компенсировать внешнее, т.е. выполняется равенство:

$$\frac{\rho}{3\varepsilon_0} \mathbf{l} = \mathbf{E}_0.$$

Отсюда находим сдвиг центров шаров:

$$\mathbf{l} = \frac{3\varepsilon_0}{\rho} \mathbf{E}_0$$

и затем дипольный момент металлического шара во внешнем однородном поле напряженностью  $\mathbf{E}_0$ :

$$\mathbf{p} = q \mathbf{l} = q \cdot \frac{3\varepsilon_0}{q/V} \mathbf{E}_0 = 4\pi\varepsilon_0 R^3 \mathbf{E}_0.$$

Как диполь этот шар обладает во внешнем электрическом поле энергией

$$W = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_0 = -4\pi\varepsilon_0 R^3 E_0^2.$$

Чтобы удалить шар в область, где поле отсутствует, необходимо совершить работу:

$$A = -W = 4\pi\varepsilon_0 R^3 E_0^2.$$

**Ответ:**  $A = 4\pi\varepsilon_0 R^3 E_0^2$

#### 11.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 11.4.1.** Насколько изменится полная энергия уединенно-го металлического шара радиуса  $R_1$  с зарядом  $q$ , если его окружить

концентрическим сферическим слоем диэлектрика с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  и радиусами  $R_2$  и  $R_3$  ( $R_1 < R_2 < R_3$ ) (рис. 11.7)?

Ответ:

$$\Delta W = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \left( \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} \right).$$

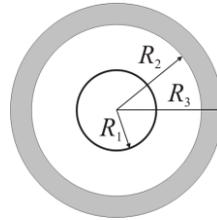


Рис. 11.7. Поперечное сечение шара, окруженного слоем диэлектрика.

**Задача 11.4.2.** Между пластинами плоского конденсатора, расположенными на расстоянии  $D$  друг от друга, находятся плоский слой диэлектрика с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  толщиной  $d_1$  и металлический слой толщиной  $d_2$ . Разность потенциалов между обкладками конденсатора равна  $U$ . Определить плотность энергии в диэлектрике (рис. 11.8).

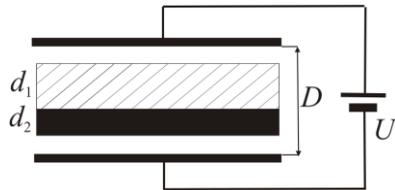


Рис. 11.8. Плоский конденсатор с пластинами диэлектрика и металла внутри.

Ответ:  $w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \left( \frac{U}{\varepsilon(D - d_1 - d_2) + d_1} \right)^2.$

**Задача 11.4.3.** Проводящая сфера радиуса  $R$ , имеющая заряд  $q$ , расположена на плоской границе бесконечного диэлектрика, как показано на рис. 11.9. Найти полную энергию электростатического поля.

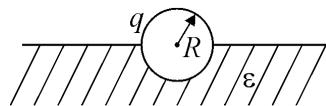


Рис. 11.9. Сфера на границе диэлектрика.

Ответ:  $W = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(\varepsilon + 1)R}.$

**Задача 11.4.4.** Центр незаряженной проводящей сферы радиуса  $a$  расположен на плоской границе двух изотропных диэлектриков с проницаемостями  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ , вплотную прилегающих к сфере и заполняющих всё пространство вне сферы. На расстоянии  $b < a$  от центра сферы находится точечный заряд  $q$ . Определить энергию поля вне сферы.

$$\text{Ответ: } W = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(\epsilon_1 + \epsilon_2)a}.$$

**Задача 11.4.5.** Точечный заряд  $q$  расположен на оси симметрии плоского воздушного заряженного конденсатора (вне его) на расстоянии  $L$  от центра положительной обкладки и на расстоянии  $L + d$  от центра отрицательной. Обкладки конденсатора – квадраты с ребром  $a$ . Напряжение на конденсаторе  $U$ . Оценить силу, с которой конденсатор действует на заряд, если  $L \gg a$ .

$$\text{Ответ: } F = \frac{qa^2U}{4\pi d} \left( \frac{1}{L^2} - \frac{1}{(L+d)^2} \right).$$

**Задача 11.4.6.** Пространство внутри плоского конденсатора полностью занимает пластина из твердого диэлектрика с проницаемостью  $\epsilon$ . Найти минимальную работу, которую необходимо совершить, чтобы увеличить расстояние между пластинами конденсатора вдвое, если он всё время подсоединен к источнику напряжения  $U$ , а пластина жестко скреплена с положительной обкладкой. Обкладки конденсатора и пластина – квадраты с ребром  $a$ , начальное расстояние между обкладками  $d \ll a$ .

$$\text{Ответ: } A = \frac{\epsilon_0\epsilon^2 a^2}{(\epsilon + 1)d} \cdot \frac{U^2}{2}.$$

**Задача 11.4.7.** Между обкладками плоского воздушного конденсатора расположена диэлектрическая пластина толщиной  $d_2$  с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , суммарная толщина оставшихся воздушных зазоров между пластиной и обкладками равна  $d_1$ . Разность потенциалов между обкладками равна  $V$ . Определить силу притяжения между обкладками. Площадь всех пластин равна  $S$ .

$$\text{Ответ: } F = \frac{\epsilon_0 S}{2} \left( \frac{\epsilon V}{\epsilon d_1 + d_2} \right)^2.$$

**Задача 11.4.8.** Обкладки плоского воздушного конденсатора имеют площадь  $S$  и отстоят друг от друга на расстояние  $d_1$ . Между ними находится металлическая пластина такой же площади толщиной  $d_2$ , изолированная от земли. Конденсатор заряжен до напряже-

ния  $V$  и отсоединен от источника. Какую работу необходимо совершить, чтобы удалить пластину из конденсатора?

$$\text{Ответ: } A = \frac{\varepsilon_0 S d_2 V^2}{2(d_1 - d_2)^2}.$$

**Задача 11.4.9.** Два одинаковых воздушных конденсатора ёмкостью  $C$  заряжены до разности потенциалов  $U$  и отсоединены от батареи. Один из них в заряженном состоянии погружают в диэлектрик с проницаемостью  $\varepsilon$ , после чего конденсаторы соединяют параллельно. Определить энергию происходящего при этом разряда.

$$\text{Ответ: } \Delta W = -\frac{(\varepsilon - 1)^2}{\varepsilon(\varepsilon + 1)} \cdot \frac{CU^2}{2}.$$

**Задача 11.4.10** ([2], 3.136). Система состоит из двух concentрических тонких металлических оболочек с радиусами  $R_1$ ,  $R_2$  и соответствующими зарядами  $q_1$ ,  $q_2$ . Найти собственную энергию  $W_1$  и  $W_2$  каждой оболочки, энергию взаимодействия  $W_{12}$  оболочек и полную электрическую энергию  $W$  системы.

$$\text{Ответ: } W = W_1 + W_2 + W_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{q_1^2}{2R_1} + \frac{q_2^2}{2R_2} + \frac{q_1 q_2}{R_2} \right).$$

**Задача 11.4.11** ([2], 3.140). В центре сферической оболочки, равномерно заряженной зарядом  $q = 5.0$  мкК, расположен точечный заряд  $q_0 = 1,50$  мкК. Найти работу сил электрического поля при расширении оболочки – увеличении её радиуса от  $R_1 = 50$  мм до  $R_2 = 100$  мм.

$$\text{Ответ: } A = \frac{q(q_0 + q/2)}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = 1,8 \text{ Дж}.$$

**Задача 11.4.12** ([3], 157). На обкладках плоского конденсатора находятся заряды  $+q$  и  $-q$ . Площадь обкладок  $S$ . Какую работу  $A$  смогут совершить обкладки, сблизившись с расстояния  $d_0$  до расстояния  $d$ ? За счет какой энергии совершается эта работа?

$$\text{Ответ: } A = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S} (d_0 - d); \text{ работа совершается за счет энергии}$$

электрического поля конденсатора.

**Задача 11.4.13** ([3], 164). К полюсам батареи присоединены обкладки плоского конденсатора. Для раздвижения пластин конденсатора необходимо совершить работу. Как меняется с расстоянием потребляемая мощность, если разводить пластины равномерно? Площадь пластин конденсатора  $S$ , разность потенциалов на зажимах батареи  $V$ , расстояние между обкладками  $x$ . На что затрачивается работа, совершаемая при раздвижении пластин конденсатора? Что происходит с начальной электростатической энергией конденсатора?

*Ответ:* потребляемая мощность меняется по закону:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\varepsilon_0 S V^2}{2x^2} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

**Задача 11.4.14** ([3], 166). Внутри плоского конденсатора с площадью пластин  $200 \text{ см}^2$  и расстоянием между ними  $0,1 \text{ см}$  находится пластина из стекла ( $\varepsilon = 5$ ), целиком заполняющая пространство между пластинами конденсатора. Как изменится энергия конденсатора, если удалить стеклянную пластину? Решить задачу при двух условиях: 1) конденсатор все время присоединен к батарее с ЭДС  $300 \text{ В}$ ; 2) конденсатор был первоначально присоединен к той же батарее, а затем отключен, и только после этого пластина была удалена. Найти механическую работу, которая затрачивается на удаление пластины в том и другом случае.

*Ответ:* 1)  $\Delta W_1 = \frac{(1 - \varepsilon) C V^2}{2} \approx -31,8 \text{ мкДж}$ ;  $A_1 = +31,8 \text{ мкДж}$ ;

2)  $\Delta W_2 = \frac{Q^2(\varepsilon - 1)}{2C\varepsilon} = +0,159 \text{ мДж}$ ,  $A_2 = +0,159 \text{ мДж}$ .

## Глава 12

**ПОНДЕРОМОТОРНЫЕ СИЛЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ****12.1. Теоретический материал**

**Пондеромоторные силы** – это силы, действующие на тела в электромагнитном поле. Механизм возникновения пондеромоторных сил в электрическом поле – силы со стороны электрического поля, действующие на заряды, связанные с телом сторонними (не электростатической природы) силами хотя бы в каком-то направлении.

**Сила, действующая на тела с объемно распределенными зарядами.** Если электрические заряды неразрывно связаны с телом, то на каждый элемент объема тела  $dV$  действует пондеромоторная сила

$$dF = \rho E dV. \quad (12.1)$$

Объемная плотность этой силы равна:

$$f_v = \frac{dF}{dV} = \rho E = -\rho \text{grad} \varphi. \quad (12.2)$$

В формулах  $\rho$  – объемная плотность заряда,  $E$  – напряженность, а  $\varphi$  – потенциал электрического поля, создаваемого всеми зарядами системы.

**Сила, действующая на тела с поверхностно распределенными зарядами.** На элемент поверхности тела  $dS$  со стороны электрического поля действует пондеромоторная сила

$$dF = \sigma E_0 dS. \quad (12.3)$$

Поверхностная плотность этой силы равна:

$$f_s = \frac{dF}{dS} = \sigma E_0. \quad (12.4)$$

В формулах (12.3)–(12.4)  $\sigma$  – поверхностная плотность заряда,  $E_0$  – напряженность электрического поля, создаваемого всеми зарядами, кроме заряда самого элемента поверхности  $dS$ .

**Сила, действующая на точечный диполь в электрическом поле напряженностью  $E_0$ ,** равна:

$$F = p_x \frac{\partial E_0}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_0}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_0}{\partial z} = (p \nabla) E_0, \quad (12.5)$$

где  $p$  – электрический дипольный момент диполя.

**Момент сил, действующий на точечный диполь в электрическом поле.** Момент сил, действующий на точечный диполь во внешнем электрическом поле напряженностью  $E_0$  относительно любой точки пространства равен:

$$M = [pE_0]. \quad (12.6)$$

**Максвелловские силы натяжения в электрическом поле** – это силы, действующие на поверхность раздела двух сред и возникающие под влиянием нормальной компоненты электрического поля. Поверхностные плотности этих сил со стороны первой  $f_{1x}^n$  и второй  $f_{2x}^n$  среды (см. рис. 12.1) равны объемной плотности энергии, приходящейся на нормальную составляющую поля в этих средах и направлены каждая в сторону своей среды (тянут к себе поверхность раздела):

$$f_{1x}^n = -w_1^n = -\frac{E_{1n}D_{1n}}{2}, \quad f_{2x}^n = w_2^n = \frac{E_{2n}D_{2n}}{2}. \quad (12.7)$$

Полная поверхностная плотность сил натяжения действует в сторону диэлектрика с меньшей диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  и равна:

$$f_x^n = -(w_1^n - w_2^n) = \frac{D_n^2}{2\epsilon_0} \left( \frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1} \right). \quad (12.8)$$

**Максвелловские силы давления в электрическом поле** – это силы, действующие на поверхность раздела двух сред и возникающие под влиянием тангенциальной компоненты электрического поля. Поверхностные плотности этих сил со стороны первой  $f_{1x}^t$  и второй  $f_{2x}^t$  среды (см. рис. 12.2) равны объемной плотности энергии, приходящейся на тангенциальную составляющую поля в этих средах и направлены каждая в сторону другой среды (давят на поверхность раздела):

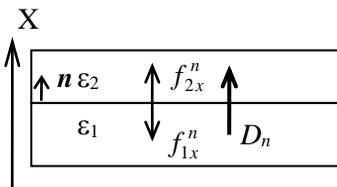


Рис. 12.1. Максвелловские силы натяжения.

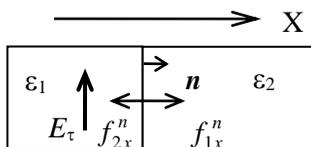


Рис. 12.2. Максвелловские силы давления.

$$f_{1x}^\tau = w_1^\tau = \frac{E_{1\tau} D_{1\tau}}{2}, \quad f_{2x}^\tau = -w_2^\tau = -\frac{E_{2\tau} D_{2\tau}}{2}. \quad (12.9)$$

Полная поверхностная плотность сил давления действует в сторону диэлектрика с меньшей диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  и равна:

$$f_x^\tau = w_1^\tau - w_2^\tau = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_\tau^2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2). \quad (12.10)$$

**Связь пондеромоторных сил с энергией электрического поля**  $W$  для произвольной системы заряженных проводников и незаряженных диэлектриков, изменением упругой энергии которых при изменении электрического поля можно пренебречь.

При виртуальных процессах, в которых постоянны величины зарядов  $q_i$ :

$$F_{x_j} = - \left( \frac{\partial W}{\partial x_j} \right)_q, \quad (12.11)$$

где  $F_{x_j}$  – **обобщенные** пондеромоторные **силы**, действующие по направлению **обобщенной координаты**  $x_j$  (это могут быть проекции силы и соответствующие координаты системы отсчета, а также моменты сил относительно оси и соответствующие углы поворота вокруг этой оси). **Обобщенные координаты** – координаты (углы), однозначно определяющие положение тел системы в пространстве.

При виртуальных процессах, в которых постоянны потенциалы  $\varphi$ :

$$F_{x_j} = \left( \frac{\partial W}{\partial x_j} \right)_\varphi, \quad (12.12)$$

## 12.2. Основные типы задач (классификация)

12.1. Определение сил и моментов сил, действующих на твердые проводники и диэлектрики во внешнем электрическом поле.

12.2. Определение сил и моментов сил, действующих на жидкие диэлектрики во внешнем электрическом поле.

12.3. Определение сил и моментов сил, действующих на точечный диполь во внешнем электрическом поле

### 12.3. Методы решения и примеры решения задач

#### Задачи типа 12.1

*Определение сил и моментов сил, действующих на твердые проводники и диэлектрики во внешнем электрическом поле.*

**Метод решения.** Использование формул (12.1) – (12.6), выражающих силу (или момент силы) или поверхностную плотность силы, максвелловские натяжения и давления через известную напряженность (или индукцию) электрического поля (12.7) – (12.10). Кроме того, можно использовать формулы (12.11) – (12.12), связывающие энергию электрического поля с компонентами сил и моментов, действующих на тела при условии постоянства либо их зарядов, либо потенциалов.

**Задача 12.3.1.** Между обкладками плоского воздушного конденсатора помещена диэлектрическая пластина толщиной  $d_1$  с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  (рис. 12.3). Между поверхностями пластины и обкладками конденсатора остались воздушные зазоры, суммарная толщина которых равна  $d_2$ . Определить модуль силы  $F$ , действующей на каждую из обкладок конденсатора, если разность потенциалов между ними равна  $U$ , а площадь обкладок  $S$ .

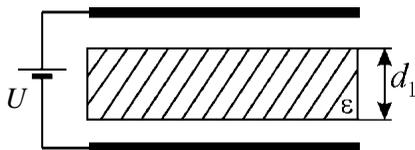


Рис. 12.3. К определению силы притяжения между обкладками плоского конденсатора с диэлектриком.

#### Решение

В плоском конденсаторе электрическое поле однородно. Его напряженность перпендикулярна обкладкам и направлена от положительной обкладки к отрицательной. Сила, действующая на обкладку конденсатора, равна:

$$F = qE_1,$$

где  $q$  – заряд, находящийся на этой обкладке, а  $E_1$  – напряженность электрического поля в ее плоскости. Поэтому сила, действующая на

положительную обкладку, совпадает с направлением  $E_1$ , а сила, действующая на отрицательную обкладку, противоположна  $E_1$ . Так как направления напряженности и сил определены, в дальнейшем будем использовать модули этих величин.

Поле в воздушном зазоре конденсатора складывается из двух одинаковых однородных полей, направления которых совпадают, созданных каждой из обкладок, и суммарного поля, созданного поляризационными зарядами. Поле поляризационных зарядов вне диэлектрической пластины равно нулю, т.к. они одинаковы по величине и противоположны по знаку. Таким образом, поле с напряженностью  $E_1$  создается только зарядами другой обкладки:

$$E_1 = \frac{E}{2},$$

где  $E$  – напряженность поля в воздушном зазоре конденсатора.

Напряженность поля в воздушном зазоре конденсатора определим, записав разность потенциалов между обкладками:

$$U = Ed_2 + \frac{E}{\varepsilon} d_1,$$

откуда

$$E = \frac{\varepsilon U}{\varepsilon d_2 + d_1}.$$

Заряд пластины можно найти, используя определение емкости конденсатора, по формуле:

$$q = CU.$$

Плоский конденсатор с помещенной в него диэлектрической пластиной можно рассматривать как последовательное соединение воздушного конденсатора и конденсатора с диэлектриком; его емкость определяется из соотношения

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d_2}{\varepsilon_0 S} + \frac{d_1}{\varepsilon \varepsilon_0 S},$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – соответственно емкости конденсатора с воздушным зазором, имеющим суммарную толщину  $d_2$ , и конденсатора с диэлектриком толщиной  $d_1$ .

Из этого соотношения находим:

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{\varepsilon d_2 + d_1}.$$

В итоге получаем:

$$F = \frac{qE}{2} = \frac{CUE}{2} = \frac{\varepsilon_0 S}{\varepsilon d_2 + d_1} \cdot \frac{UE}{2} = \frac{\varepsilon_0 S}{2} \left( \frac{\varepsilon U}{\varepsilon d_2 + d_1} \right)^2.$$

**Ответ:**  $F = \frac{\varepsilon_0 S}{2} \left( \frac{\varepsilon U}{\varepsilon d_2 + d_1} \right)^2.$

**Задача 12.3.2.** Расстояние между обкладками плоского конденсатора равно  $d$ . Обкладки имеют форму квадрата со стороной  $a$ . Конденсатор подсоединен к источнику напряжения с разностью потенциалов  $U$ . В пространство между обкладками частично вдвинули квадратную диэлектрическую пластину с проницаемостью  $\varepsilon$  толщиной  $\Delta < d$  и со стороной  $a$ . Ребра квадратов пластины параллельны сторонам обкладок конденсатора (рис. 12.4). Найти силу, с которой пластина втягивается в пространство между обкладками конденсатора.

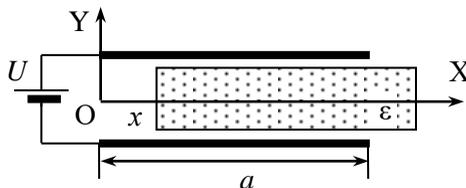


Рис. 12.4. К определению силы, действующей на диэлектрик в электрическом поле.

### Решение

При постоянном напряжении на конденсаторе его энергия  $W = \frac{CU^2}{2}$  изменяется только с изменением емкости  $C$ , которая, в свою очередь, зависит от длины вдвинутой части диэлектрической пластины. Если координатную ось  $X$  направить вдоль ребра пластины, а начало координат поместить у края обкладки конденсатора (см. рис. 12.4), емкость будет функцией одной переменной – координаты  $x$  левого торца пластины. Действующую на пластину ponderomotorную силу со стороны электрического поля конденсатора можно рассчитать по формуле:

$$F_x = \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)_U = \frac{U^2}{2} \cdot \frac{dC}{dx}. \quad (12.13)$$

Конденсатор с пластиной можно рассматривать как два соединенных параллельно конденсатора – воздушного емкостью  $C_1$  с площадью обкладок  $S_1 = ax$  и конденсатора емкостью  $C_2$  с диэлектрической пластиной, площадь обкладок которого  $S_2 = a(a - x)$ . Емкость первого конденсатора

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S_1}{d} = \frac{\varepsilon_0 ax}{d}. \quad (12.14)$$

Определим емкость  $C_2$ . Для этого представим конденсатор с пластиной внутри как сумму трех последовательно соединенных конденсаторов с одинаковой площадью обкладок  $S_2$ : воздушного конденсатора над пластиной с расстоянием между обкладками  $d_1$ , конденсатора, заполненного диэлектриком толщиной  $\Delta$ , и воздушного конденсатора под пластиной с расстоянием  $d_2$  между обкладками. При этом

$$d_1 + \Delta + d_2 = d.$$

Результат сложения емкостей последовательно соединенных конденсаторов можно записать:

$$\frac{1}{C_2} = \frac{d_1}{\varepsilon_0 S_2} + \frac{\Delta}{\varepsilon_0 S_2} + \frac{d_2}{\varepsilon_0 S_2},$$

откуда получаем:

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 S_2}{(d_1 + d_2) + \Delta/\varepsilon} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S_2}{\Delta + \varepsilon(d - \Delta)} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon a(a - x)}{\Delta + \varepsilon(d - \Delta)}. \quad (12.15)$$

Заметим, что емкость  $C_2$  не зависит от того, как расположена диэлектрическая пластина относительно обкладок конденсатора (т.е. от величины зазоров  $d_1$  и  $d_2$ ), а определяется только толщиной пластины  $\Delta$ , расстоянием  $d$  между обкладками и диэлектрическими проницаемостями сред.

Емкость  $C$  всего конденсатора с частично вдвинутой в него пластиной равна

$$C = C_1 + C_2. \quad (12.16)$$

Подставив в формулу (12.16) соотношения (12.14) и (12.15), вычислим производную  $\frac{dC}{dx}$ :

$$\frac{dC}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{\varepsilon_0 ax}{d} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon a(a - x)}{\Delta + \varepsilon(d - \Delta)} \right) = \frac{\varepsilon_0 a}{d} \left[ 1 - \frac{\varepsilon d}{\Delta + \varepsilon(d - \Delta)} \right] =$$

$$= -\frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)a\Delta}{d[\Delta + \varepsilon(d - \Delta)]},$$

используя которую, по формуле (12.13) находим силу, действующую на диэлектрическую пластину вдоль оси X:

$$F_x = -\frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)a\Delta}{d[\Delta + \varepsilon(d - \Delta)]} \cdot \frac{U^2}{2}.$$

Знак "минус" указывает на то, что сила направлена противоположно оси X, т.е. стремится втянуть пластину в конденсатор.

$$\text{Ответ: } F_x = -\frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)a\Delta}{d[\Delta + \varepsilon(d - \Delta)]} \cdot \frac{U^2}{2}.$$

**Задача 12.3.3.** Коэффициент поверхностного натяжения сферического мыльного пузыря  $\lambda = 0,05$  Н/м, его радиус  $R = 1$  см, наружное атмосферное давление  $p = 10^5$  Па. Какой заряд  $q$  надо сообщить пузырю, чтобы его радиус увеличился вдвое?

### Решение

При равновесии незаряженного мыльного пузыря радиуса  $R$  давление в его внутренней области  $p_1$  уравнивает наружное атмосферное давление  $p$  и давление за счет поверхностного натяжения  $\frac{4\lambda}{R}$  (здесь учтено, что мыльная пленка имеет две поверхности – внутреннюю и внешнюю)

$$p_1 = p + \frac{4\lambda}{R}. \quad (12.17)$$

Давление газа внутри пузыря при постоянной температуре обратно пропорционально объему, т.е.  $p_1 = \frac{a}{R^3}$ , где  $a$  – коэффициент пропорциональности. Если пузырю сообщается заряд  $q$ , то к внутреннему давлению добавляется давление сил со стороны электрического поля  $p_2$ . Тогда условие равновесия принимает вид:

$$p'_1 + p_2 = p + \frac{4\lambda}{r}, \quad (12.18)$$

где  $p'_1 = p_1 R^3 / r^3$  ( $r$  – увеличившийся радиус пузыря).

Рассчитаем величину  $p_2$ . Для этого выделим на поверхности пузыря малую площадку  $dS$  и определим действующую на нее силу. Поверхностная плотность заряда на пузыре равна:

$$\sigma = \frac{q}{4\pi r^2}.$$

Известно (глава 2, задача 2.3.12), что напряженность поля, созданного у поверхности сферы всеми ее зарядами, кроме заряда  $dq = \sigma dS$ , находящегося на элементе  $dS$ , равна:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0},$$

поэтому на заряд  $dq$  будет действовать сила

$$dF = Edq = \sigma EdS,$$

и эта сила будет создавать давление

$$p_2 = \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}.$$

Решая систему уравнений (12.17) – (12.18) с учетом условия  $r = 2R$ , находим:

$$q = 8\pi R \sqrt{\varepsilon_0 R (12\lambda + 7pR)}.$$

Если  $R \gg \lambda/p = 5 \cdot 10^{-5}$  см (как и определено условиями задачи), то

$$q = 8\pi R^2 \sqrt{7\varepsilon_0 p} = 6,2 \cdot 10^{-6} \text{ Кл.}$$

$$\text{Ответ: } q = 8\pi R^2 \sqrt{7\varepsilon_0 p} = 6,2 \cdot 10^{-6} \text{ Кл.}$$

**Задача 12.3.4.** Конденсатор переменной емкости состоит из двух неподвижных металлических пластин, расположенных на расстоянии  $d$  друг от друга, и подвижной диэлектрической пластины, которая может поворачиваться и входить в зазор между металлическими пластинами (рис. 12.5). Все пластины имеют форму полукруга радиуса  $R$ , причем зазоры между диэлектрической пластиной и пластинами конденсатора пренебрежимо малы по сравнению с  $d$ . Пренебрегая краевыми эффектами, найти момент сил  $M$ , действующих на диэлектрическую

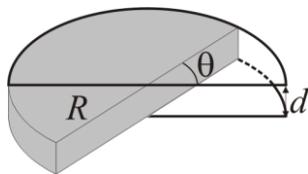


Рис. 12.5. Конденсатор переменной емкости.

пластину, когда она выведена из положения равновесия. Конденсатор поддерживается при разности потенциалов  $V$ , диэлектрическая проницаемость подвижной пластины равна  $\varepsilon$ .

### Решение

Конденсатор с выведенной из положения равновесия на угол  $\theta$  диэлектрической пластиной можно заменить эквивалентной схемой двух включенных параллельно конденсаторов, у одного из которых площадь пластин  $S_1 = R^2\theta/2$  и между пластинами находится воздух, а у другого площадь пластин  $S_2 = R^2(\pi - \theta)/2$  и между пластинами находится диэлектрик  $\varepsilon$ . Емкость такого конденсатора равна:

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0(S_1 + \varepsilon S_2)}{d} = \frac{\varepsilon_0 R^2(\theta + \varepsilon\pi - \varepsilon\theta)}{2d}.$$

Для определения момента силы  $M$  применим формулу (12.12), записав энергию конденсатора в виде:

$$W = \frac{CV^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 R^2(\theta + \varepsilon\pi - \varepsilon\theta)V^2}{4d}.$$

Выполняя дифференцирование, получаем ответ:

$$M = \left( \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)_V = - \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)R^2V^2}{4d}.$$

$$\text{Ответ: } M = - \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)R^2V^2}{4d}.$$

### Задачи типа 12.2

*Определение сил и моментов сил, действующих на жидкие диэлектрики во внешнем электрическом поле.*

**Метод решения.** Использование формул, выражающих силу или поверхностную плотность силы, действующей на тела с поверхностно распределенными зарядами (12.3) – (12.4), а также максвелловские силы натяжения и давления (12.7) – (12.10) через известную напряженность (или индукцию) электрического поля. Кроме того, можно использовать формулы (12.11) – (12.12), связывающие энергию электрического поля с компонентами сил, действующих на тела при условии постоянства либо их зарядов, либо потенциалов.

**Задача 12.3.5.** Плоский конденсатор расположен горизонтально так, что одна его пластина находится над поверхностью жидкости в широком сосуде, другая – непосредственно под ее поверхностью (рис. 12.6). Диэлектрическая проницаемость жидкости  $\epsilon$ , ее плотность  $\rho$ . На какой высоте установится уровень жидкости в конденсаторе после сообщения его пластинам заряда с поверхностной плотностью  $\sigma$ ?

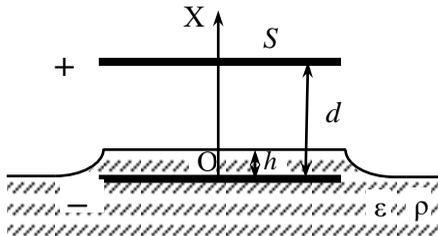


Рис. 12.6. Изменение уровня жидкого диэлектрика в электрическом поле.

### Решение

Способ 1. После сообщения заряда пластинам конденсатора жидкость частично втягивается в конденсатор, что приводит к изменению его емкости. Обозначим площадь пластин  $S$ , расстояние между пластинами  $d$  и установившийся уровень поднявшейся жидкости  $h$  (текущий уровень обозначим через  $x$ ). Полученную электрическую систему можно рассматривать как два последовательно соединенных конденсатора с емкостями

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 S}{d-x} \text{ и } C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{x}.$$

Суммарная емкость системы равна

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{\epsilon(d-x) + x}.$$

Легко убедиться, что емкость системы увеличилась, поскольку  $\epsilon > 1$ :

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{\epsilon(d-x) + x} = \frac{\epsilon_0 S}{d - \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right)x} > \frac{\epsilon_0 S}{d}.$$

При этом запасенная системой энергия уменьшилась и стала равной

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{\sigma^2 S [\epsilon(d-x) + x]}{2\epsilon_0 \epsilon}. \quad (12.19)$$

Запас энергии в конденсаторе уменьшается при постоянных зарядах на его пластинах в связи с тем, что система совершает работу по подъему жидкости. Для определения действующей на поверхность жидкости пондеромоторной силы выберем направление оси  $X$  вертикально вверх и воспользуемся формулой

$$F_i = - \left( \frac{\partial W}{\partial x_i} \right)_q, \quad (12.20)$$

которая справедлива при постоянных зарядах в системе. Подставляя выражение (12.19) в формулу (12.20), получаем:

$$F = - \frac{\sigma^2 S}{2\epsilon_0} \cdot \frac{d}{dx} [\epsilon(d-x) + x] = - \frac{\sigma^2 S(1-\epsilon)}{2\epsilon_0\epsilon} = \frac{\sigma^2 S(\epsilon-1)}{2\epsilon_0\epsilon}.$$

Эта сила действует на поверхность жидкости со стороны электрического поля в конденсаторе и совершает механическую работу, поднимая уровень жидкости в конденсаторе. Процесс подъема жидкости продолжается до достижения равновесия, когда гидростатическое давление на уровне жидкости в сосуде, равное  $\rho gh$ , будет полностью уравновешено давлением  $F/S$ . Приравнявая эти два выражения для давления, получаем ответ:

$$h = \frac{\sigma^2(\epsilon-1)}{2\epsilon_0\epsilon\rho g}.$$

Способ 2. Вблизи поверхности раздела жидкость – воздух электрическое поле неоднородно. На диэлектрик, который в этих условиях можно представить себе как систему диполей, начинают действовать объемные электрические силы, связанные с поляризационными зарядами. Действие этих объемных сил полностью совпадает с действием силы, приложенной к поверхности раздела диэлектриков. В данной задаче направление вектора индукции электрического поля  $\mathbf{D}$  перпендикулярно плоскости раздела диэлектриков, т.е. индукция имеет только нормальную компоненту  $D_n$ . В таком случае поверхностная плотность силы называется максвелловским натяжением. Каждый диэлектрик как бы притягивает к себе границу раздела. Равнодействующая этих сил дает плотность поверхностной силы:

$$f = \frac{D_n^2}{2\epsilon_0} \left( \frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1} \right),$$

где  $\varepsilon_2 = 1$  – диэлектрическая проницаемость верхнего диэлектрика (воздуха), а  $\varepsilon_1 = \varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость нижнего диэлектрика (жидкости). Поверхностная сила всегда направлена в сторону диэлектрика с меньшей диэлектрической проницаемостью.

Итак, на поверхность жидкости в рассматриваемом конденсаторе будет действовать направленная вверх сила (максвелловское натяжение), поверхностная сила, плотность которой равна:

$$f = \frac{(\varepsilon - 1)}{2\varepsilon\varepsilon_0} D_n^2.$$

При равновесии эта сила компенсирует силу гидростатического давления на нижнюю пластину, откуда:

$$f = \rho gh.$$

Поскольку в нашем случае  $D = D_n = \sigma$ , получаем ответ:

$$h = \frac{\sigma^2(\varepsilon - 1)}{2\varepsilon\varepsilon_0\rho g}.$$

**Ответ:**  $h = \frac{\sigma^2(\varepsilon - 1)}{2\varepsilon\varepsilon_0\rho g}.$

**Задача 12.3.6.** Определить высоту подъема жидкости в расположенном вертикально плоском конденсаторе, если он подсоединен к батарее с напряжением  $U$ , расстояние между пластинами  $d$ , плотность жидкости  $\rho$ , диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$ .

### Решение

Введем ось  $X$ , направив ее вертикально вверх. Силу, действующую на жидкость со стороны поля, можно определить, записав выражение для энергии поля, запасенной в конденсаторе. Тогда при  $U = \text{const}$

$$F_x = \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)_U = \frac{U^2}{2} \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right).$$

Так как емкость плоского конденсатора, частично заполненного диэлектриком, равна (см. задачу 13.7)

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \{l + (\varepsilon - 1)x\},$$

$$F_x = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)SU^2}{2d} = \rho ghS;$$

откуда

$$h = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)U^2}{2\rho gd^2}.$$

$$\text{Ответ: } h = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)U^2}{2\rho gd^2}.$$

### Задачи типа 12.3

*Определение сил и моментов сил, действующих на точечный диполь во внешнем электрическом поле.*

*Метод решения.* Использование формул для силы и момента силы из теоретического раздела главы или формулы (12.5) – (12.6).

**Задача 12.3.7.** Точечный диполь находится на расстоянии  $d$  от длинного заряженного провода, линейная плотность заряда на котором равна  $\tau$ . Вектор  $\mathbf{p}$  ориентирован перпендикулярно к проводу. Найти величину силы  $F$  и момента силы  $M$ , действующих на диполь.

### Решение

Величина напряженности поля на расстоянии  $r$  от провода равна:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r};$$

При этом векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{p}$  сонаправлены, и согласно формуле (12.5)

$$F = p \frac{dE}{dr} = \frac{p\tau}{2\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

На расстоянии  $r = d$  от провода

$$F = \frac{\tau p}{2\pi\varepsilon_0 d^2}.$$

Так как векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{p}$  сонаправлены, а  $\mathbf{M} = [\mathbf{p}\mathbf{E}]$ , то  $M = 0$ .

$$\text{Ответ: } F = \frac{\tau p}{2\pi\varepsilon_0 d^2}, M = 0.$$

**Задача 12.3.8.** Точечный диполь находится на расстоянии  $d$  от длинного заряженного провода, линейная плотность заряда на котором равна  $\tau$ . Вектор дипольного момента  $\mathbf{p}$  и провод параллельны друг другу. Найти модули силы  $\mathbf{F}$  и момента силы  $\mathbf{M}$ , действующих на диполь.

### Решение

Так как градиент напряженности поля вдоль провода равен нулю, то

$$F = 0.$$

Векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{p}$  взаимно перпендикулярны, из  $\mathbf{M} = [\mathbf{p}\mathbf{E}]$  следует:

$$M = \frac{\tau p}{2\pi\epsilon_0 d}.$$

$$\text{Ответ: } F = 0, \quad M = \frac{\tau p}{2\pi\epsilon_0 d}.$$

## 12.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 12.4.1.** Между обкладками плоского воздушного конденсатора находится диэлектрическая пластина толщиной  $d_2$  с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , суммарная толщина оставшихся воздушных зазоров между пластиной и обкладками равна  $d_1$ . Модуль силы, действующей на каждую обкладку, равен  $F$ . Площади обкладок и пластины одинаковы и равны  $S$ . Найти разность потенциалов  $U$  между обкладками.

$$\text{Ответ: } U = \frac{\epsilon d_1 + d_2}{\epsilon} \sqrt{\frac{2F}{\epsilon_0 S}}.$$

**Задача 12.4.2.** Между обкладками плоского воздушного конденсатора расположена диэлектрическая пластина толщиной  $d_2$  с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , суммарная толщина оставшихся воздушных зазоров между пластиной и обкладками равна  $d_1$ . Разность потенциалов между обкладками равна  $V$ . Определить силу притяжения между обкладками. Площадь всех пластин равна  $S$ .

$$\text{Ответ: } F = \frac{\varepsilon_0 S}{2} \left( \frac{\varepsilon V}{\varepsilon d_1 + d_2} \right)^2.$$

**Задача 12.4.3.** Диэлектрическая проницаемость определяется по высоте подъёма жидкости в плоском конденсаторе, который расположен вертикально и торцом касается поверхности жидкости. Конденсатор подключен к батарее с напряжением  $U$ , расстояние между пластинами  $d$ , плотность жидкости  $\rho$ . Найти диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon$ .

$$\text{Ответ: } \varepsilon = \frac{2\rho g h d^2}{\varepsilon_0 U^2} + 1.$$

**Задача 12.4.4.** В условиях предыдущей задачи в пространство между обкладками, параллельно им, введена диэлектрическая пластина толщины  $d_2 < d$  с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_2$ . Конденсатор подключен к батарее с напряжением  $U$ , расстояние между пластинами  $d$ , плотность жидкости  $\rho$ . Найти высоту подъема жидкости в зазорах между пластиной и обкладками, если ее диэлектрическая проницаемость равна  $\varepsilon_1$ .

$$\text{Ответ: } h = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_1 - 1) U^2}{2\rho g} \left( \frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) d_2 + \varepsilon_2 d} \right)^2.$$

**Задача 12.4.5.** Определить высоту подъёма жидкости в расположенном вертикально плоском конденсаторе, если он подсоединен к батарее с напряжением  $U$ , расстояние между пластинами  $d$ , плотность жидкости  $\rho$ , диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$ .

$$\text{Ответ: } h = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) U^2}{d^2 \rho g} \frac{1}{2}.$$

**Задача 12.4.6.** Две коаксиальные трубки радиусов  $a$  и  $b$  погружаются вертикально в диэлектрическую жидкость. Плотность жидкости  $\rho$ . Найти диэлектрическую восприимчивость жидкости  $\chi$ , если разность потенциалов между трубками  $U$ , а высота подъема

жидкости в пространстве между трубками равна  $h$ . Капиллярными силами пренебречь.

$$\text{Ответ: } \chi = \frac{\rho g h (b^2 - a^2) \ln \frac{b}{a}}{\varepsilon_0 U^2}.$$

**Задача 12.4.7.** Две коаксиальные трубки радиуса  $a$  и  $b$  погружаются вертикально в масляную ванну. Плотность масла  $\rho$ , диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$ . Разность потенциалов между трубками  $U$ . Найти высоту подъема масла в пространстве между трубками. Капиллярными силами пренебречь.

$$\text{Ответ: } h = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1) U^2}{(b^2 - a^2) \rho g \ln \frac{b}{a}}.$$

**Задача 12.4.8.** Незаряженный проводящий шар, плотность которого  $\rho_1$ , плавает в жидкости, имеющей плотность  $\rho_2$  ( $\rho_2 > 2\rho_1$ ) и диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon$ . Какой заряд следует сообщить шару, чтобы он погрузился в жидкость ровно наполовину? Радиус шара равен  $R$ .

$$\text{Ответ: } q = 4\pi\varepsilon_0(\varepsilon + 1) \sqrt{\frac{(\rho_2 - 2\rho_1)gR^5}{3\varepsilon_0(\varepsilon - 1)}}.$$

**Задача 12.4.9.** Найти силу взаимодействия  $F$  между точечным зарядом  $q$  и точечным диполем  $p$ , если расстояние между ними равно  $d$  и дипольный момент направлен вдоль соединяющей их прямой.

$$\text{Ответ: } E = \frac{pq}{2\pi\varepsilon_0 d^3}.$$

**Задача 12.4.10** ([2], 3.46). Диполь с электрическим моментом  $p$  находится на расстоянии  $r$  от длинной нити, заряженной равномерно с линейной плотностью  $\lambda$ . Найти силу  $F$ , действующую на диполь, если вектор  $p$  ориентирован: а) вдоль нити; б) по радиус-вектору  $r$ ; в) перпендикулярно нити и радиус-вектору  $r$ .

$$\text{Ответ: а) } F = 0; \text{ б) } F = -\lambda p / (2\pi\varepsilon_0 r^2);$$

$$в) \mathbf{F} = \lambda p / (2\pi\epsilon_0 r^2)$$

**Задача 12.4.11** ([2], 3.47). Найти силу взаимодействия двух молекул воды, отстоящих друг от друга на расстояние  $l = 10$  нм, если их электрические моменты ориентированы вдоль одной и той же прямой. Момент каждой молекулы  $p = 0,62 \cdot 10^{-29}$  Кл м.

$$\text{Ответ: } F = 3p / (2\pi\epsilon_0 l^4) = 2,1 \cdot 10^{-16} \text{ Н}$$

**Задача 12.4.12.** Некая молекула (рис. 12.7) содержит три заряда  $+q$ ,  $+q$ ,  $-2q$ , которые расположены линейно на равных расстояниях  $a$  друг от друга, и находится на расстоянии  $r$  от бесконечной проводящей плоскости, много большем размеров самой молекулы ( $r \gg 2a$ ). В дипольном приближении найти силу, действующую на плоскость со стороны молекулы.

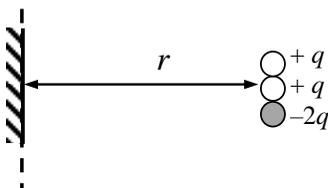


Рис. 12.7. Схема молекулы к задаче 12.4.12

$$\text{Ответ: } F = \frac{27a^2 q^2}{64\pi\epsilon_0 r^4}.$$

## Глава 13

## ТОКИ В СПЛОШНЫХ ПРОВОДЯЩИХ СРЕДАХ

## 13.1. Теоретический материал

**Электрический ток** – это упорядоченное (направленное) движение электрических зарядов.

**Плотность (объемного) тока** – физическая величина, равная:

$$\mathbf{j} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_i q_i^+ \mathbf{v}_i^+ + \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_i q_i^- \mathbf{v}_i^- = \rho^+ \mathbf{v}^+ + \rho^- \mathbf{v}^- = \mathbf{j}^+ + \mathbf{j}^-,$$

где суммирование ведется по всем положительным  $q_i^+$  и отрицательным  $q_i^-$  зарядам, находящимся в физически малом объеме  $\Delta V$ ,  $\rho^+$  и  $\rho^-$  – объемные плотности распределения положительных и отрицательных зарядов,  $\mathbf{v}^+$  и  $\mathbf{v}^-$  – скорости направленного движения (скорости дрейфа) положительных и отрицательных зарядов.

Единица измерения плотности объемного тока –  $[j] = \frac{\text{А}}{\text{м}^2}$ .

**Сила тока  $I$**  через поверхность – физическая величина, равная величине заряда, проходящего через эту поверхность в единицу времени – поток заряда через поверхность.

Единица измерения силы тока –  $[I] = \frac{\text{Кл}}{\text{с}} = \text{А}$ .

**Связь силы тока с плотностью тока.**

Для элемента поверхности  $dS$ :

$$dI \equiv \frac{dq}{dt} = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (13.1)$$

Для конечной поверхности  $S$ :

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (13.2)$$

**Линия и трубка тока.**

Линия тока – воображаемая направленная линия в пространстве, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением плотности тока в данный момент времени.

Трубка тока – трубка, боковая поверхность которой образована линиями тока.

Линии и трубки тока нигде не пересекаются, поскольку в произвольной точке пространства плотность тока определена однозначно.

**Уравнение непрерывности в интегральной и дифференциальной формах.**

$$\oint_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = - \frac{\partial q}{\partial t}, \quad (13.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}) = - \frac{\partial \rho(\mathbf{r})}{\partial t}. \quad (13.4)$$

В формулах  $q$  – заряд внутри поверхности  $S$ ,  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  и  $\rho(\mathbf{r})$  – плотность объемного тока и объемная плотность заряда в точке с радиус-вектором  $\mathbf{r}$ .

**Условие стационарности в интегральной и дифференциальной формах.**

$$\oint_S \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (13.5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0. \quad (13.6)$$

**Закон Ома для участка цепи:**

$$I = \frac{U}{R}, \quad (13.7)$$

где  $I$  и  $U$  – сила тока и напряжение на участке цепи,  $R$  – сопротивление участка цепи.

**Дифференциальная форма закона Ома:**

$$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}, \quad (13.8)$$

где  $\mathbf{j}$  – плотность тока,  $\mathbf{E}$  – напряженность электрического поля,  $\lambda$  – удельная проводимость среды.

**Сопротивление, удельные сопротивление и проводимость проводника.**

Сопротивление проводника равно:

$$R = \frac{U}{I}, \quad [R] = \frac{[U]}{[I]} = \frac{\text{В}}{\text{А}} = \text{Ом}, \quad (13.9)$$

где  $I$  – сила тока в проводнике,  $U$  – напряжение на концах проводника.

Сопротивление цилиндрического проводника длиной  $L$  и площадью поперечного сечения  $S$  равно:

$$R = \rho \frac{L}{S} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{L}{S}, \quad (13.10)$$

где  $\rho$  и  $\lambda \equiv \frac{1}{r}$  – удельные сопротивление и проводимость (электропроводность) проводника, зависящие только от материала проводника и его температуры (свойств вещества, из которого сделан проводник). Единицы измерения удельного сопротивления и проводимости:

$$[\rho] = \frac{[R][S]}{[L]} = \text{Ом} \cdot \text{м} \quad \text{и} \quad [\lambda] = \frac{1}{[\rho]} = \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}}.$$

**Граничные условия для нормальных и тангенциальных составляющих векторов электрического поля и плотности стационарного тока в случае поверхности раздела двух проводящих сред.**

$D$	$E$	$j$
$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$	$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$	$\frac{1}{\lambda_2} j_{2n} - \frac{1}{\lambda_1} j_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$
$D_{2\tau} - D_{1\tau} = 0$	$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0$	$\frac{1}{\lambda_2} j_{2\tau} - \frac{1}{\lambda_1} j_{1\tau} = 0$
$\lambda_2 D_{2n} - \lambda_1 D_{1n} = 0$	$\lambda_2 E_{2n} - \lambda_1 E_{1n} = 0$	$j_{2n} - j_{1n} = 0$

**Граничные условия для нормальных и тангенциальных составляющих векторов электрического поля и плотности стационарного тока в случае поверхности раздела проводящей и диэлектрической среды.**

$D$	$E$	$j$
$D_{2n} = \sigma$	$\epsilon_0 \epsilon_2 E_{2n} = \sigma$	–
$\frac{1}{\epsilon_2} D_{2\tau} - D_{1\tau} = 0$	$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0$	–
$D_{1n} = 0$	$E_{1n} = 0$	$j_{1n} = 0$

**Закон Джоуля-Ленца** – количество теплоты, выделяемое в проводнике с постоянным током за время  $\Delta t$  равно:

$$\Delta Q = \frac{U^2}{R} \Delta t = RI^2 \Delta t. \quad (13.11)$$

**Дифференциальная форма закона Джоуля-Ленца** – количество теплоты, выделяющееся в единице объема проводника в единицу времени равно:

$$q = \frac{j^2}{\lambda}. \quad (13.12)$$

**Сторонние силы** – силы не электростатической природы, действующие на заряды.

**Напряженность поля сторонних сил  $E^{ct}$**  – это физическая величина, равная отношению сторонней силы  $F^{ct}$ , действующей на заряд  $q$  в данной точке поля, к величине этого заряда:

$$E^{ct} \equiv \frac{F^{ct}}{q}. \quad (13.13)$$

**Напряжение сторонних сил или электродвижущая сила (ЭДС)  $\mathcal{E}$**  между точками 1 и 2 в контуре – это физическая величина, равная работе сторонних сил по перемещению положительного единичного заряда вдоль контура из т. 1 в т. 2:

$$\mathcal{E} \equiv \int_1^2 \mathbf{E}^{ct} \cdot d\mathbf{l}. \quad (13.14)$$

**Обобщенный закон Ома в дифференциальной форме:**

$$\mathbf{j} = \lambda(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{ct}). \quad (13.15)$$

**Обобщенный закон Ома в интегральной форме** (для участка цепи, содержащего ЭДС):

$$IR_{12} = U_{12} + \mathcal{E}. \quad (13.16)$$

### 13.2 Основные типы задач (классификация)

13.1. Вычисление сопротивления, полного тока, плотности тока, зарядов на электродах и границах раздела в сплошной среде.

13.2. Вычисление количества тепла, выделяющегося в сплошной среде при протекании тока.

### 13.3. Методы решения и примеры решения задач

#### Задачи типа 13.1

*Вычисление сопротивления, полного тока, плотности тока, зарядов на электродах и границах раздела в сплошной среде.*

**Метод решения.** При рассмотрении токов в проводящих средах и нахождении сопротивления среды между электродами целесообразно придерживаться следующей схемы решения задачи (электрод – проводник с одинаковым потенциалом, электропроводность которого много больше электропроводности среды).

Для расчета сопротивления по закону Ома нужно найти отношение напряжения на электродах  $U$  и полного тока  $I$  через систему. В качестве исходного параметра удобнее всего взять полный ток  $I$ , поскольку величины зарядов на электродах заранее могут быть не очевидны.

а) Начать решение целесообразно с нахождения плотности объемного тока  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ , поскольку при протекании постоянного тока независимо от особенностей диэлектрических и проводящих свойств среды для плотности тока всегда можно воспользоваться условием стационарности в дифференциальной форме:  $\operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$  (13.6). С другой стороны,  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  легко связать с полным током через электрод соотношением  $I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$  (13.2). В задачах с высокой симметрией условие стационарности обычно позволяет сразу определить характер зависимости плотности тока  $\mathbf{j}$  от координат.

б) Далее, пользуясь законом Ома в дифференциальной форме (13.8), перейти к напряженности электрического поля:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\lambda(\mathbf{r})} \mathbf{j}(\mathbf{r}).$$

в) Зная  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ , интегрированием можно найти разность потенциалов (напряжение)  $U$  между электродами 1 и 2:

$$U = - \int_{(1)}^{(2)} \mathbf{E}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (13.17)$$

Используя закон Ома (13.7), определить сопротивление среды между электродами

$$R = \frac{U}{I}.$$

Таким образом, задача решается в следующей последовательности:

$$I \rightarrow j \rightarrow E \rightarrow U. \quad (13.18)$$

Если проводящая среда однородна (или хотя бы однородна в направлении протекания тока), то свободного заряда в среде не будет. Тогда поле полностью определяется зарядами и потенциалами электродов, и можно исходным параметром взять напряжение на электродах и решать в обратной последовательности:

$$U \rightarrow E \rightarrow j \rightarrow I, \quad (13.19)$$

или же исходить из свободного заряда на электродах  $\pm q$  и решать по схеме:

$$q \rightarrow E \rightarrow j \rightarrow I. \quad (13.20)$$

Однако в случае неоднородной проводимости среды простой переход  $U \rightarrow E$  или  $q \rightarrow E$  невозможен. Напряженность поля  $E$  будет определяться при этом не только геометрическими факторами и напряжением  $U$  или зарядом электродов  $q$ , но и характером зависимости  $\lambda(\mathbf{r})$  из-за появления в проводящей среде ненулевой плотности свободных зарядов.

**Задача 13.3.1.** Показать, что сопротивление однородной проводящей среды, заполняющей всё пространство между двумя идеально проводящими телами произвольной формы, равно  $R = \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\lambda C}$ . Здесь  $C$  – ёмкость системы,  $\lambda$  – удельная электропроводность вещества,  $\varepsilon$  – его диэлектрическая проницаемость.

### Решение

Ввиду однородности среды будем следовать схеме (13.18). Пусть проводники (электроды) заряжены одинаковыми по величине, но разными по знаку зарядами  $\pm q$ , а напряжение между ними  $U = q/C$ .

Вектор электрической индукции вблизи поверхности каждого проводника перпендикулярен поверхности и равен  $D = \sigma$  (где  $\sigma$  –

поверхностная плотность свободного заряда на проводнике). Напряженность электростатического поля вблизи поверхности

$$E = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Согласно закону Ома в дифференциальной форме вектор плотности тока параллелен вектору напряженности поля и поэтому вблизи поверхности проводников перпендикулярен поверхности и по модулю равен:

$$j = j_n = \lambda E = \frac{\lambda \sigma}{\epsilon_0}.$$

Силу тока через электрод можно найти интегрированием плотности тока по поверхности электрода:

$$I = \int_S j dS = \frac{\lambda}{\epsilon_0} \int_S \sigma dS = \frac{\lambda q}{\epsilon_0} = \lambda \frac{CU}{\epsilon_0}.$$

Используя закон Ома (13.5), окончательно получаем:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\epsilon \epsilon_0}{\lambda C}.$$

*Замечание.* Поместим в однородную проводящую среду, заполняющую всё пространство, локализованный заряд объёмной плотности  $\rho$ . Электрическое поле, создаваемое этим зарядом, вызовет ток плотности  $\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}$ , который будет уменьшать объёмную плотность заряда. Из соотношений  $\mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}$  и  $\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$  следует, что  $\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ . Подставив полученное выражение в уравнение

непрерывности (13.4)  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ , имеем:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\lambda \mathbf{E}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\lambda \rho}{\epsilon_0} = 0.$$

или

$$\frac{d\rho}{\rho} = - \frac{\lambda}{\epsilon_0} dt.$$

Учитывая начальное условие  $\rho|_{t=0} = \rho_0$ , получаем, что с течением времени плотность заряда будет уменьшаться по закону:

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),$$

где  $\tau = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\lambda} = RC$  – время релаксации.

**Ответ:**  $R = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\lambda C}$ .

**Задача 13.3.2.** На плоский конденсатор ёмкостью  $C$  подано постоянное напряжение  $U$ . Найти ток утечки через конденсатор, если удельное сопротивление однородного вещества, которым заполнен зазор между обкладками конденсатора, равно  $\rho$ , а диэлектрическая проницаемость равна  $\varepsilon$ .

### Решение

Так как напряжение на обкладках конденсатора постоянно, а среда, заполняющая пространство между его обкладками, однородна, то для нахождения тока утечки, текущего через конденсатор можно воспользоваться схемой  $U \rightarrow E \rightarrow j \rightarrow I$ .

Электростатическое поле конденсатора однородно, и напряженность его равна  $E = \frac{U}{d}$ , где  $d$  – расстояние между обкладками.

Согласно закону Ома в дифференциальной форме  $j = \frac{U}{\rho d}$ .

Сила тока, текущего между обкладками, равна:

$$I = jS = \frac{US}{\rho d} = \frac{UC}{\rho\varepsilon_0},$$

где учтено, что емкость плоского конденсатора  $C = \varepsilon\varepsilon_0 S/d$ .

**Ответ:**  $I = \frac{UC}{\rho\varepsilon_0}$ .

**Задача 13.3.3.** Между обкладками плоского конденсатора находятся два слоя диэлектрика толщиной  $d_1$  и  $d_2$ , диэлектрические проницаемости и удельные сопротивления которых соответственно равны  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , площадь каждой из пластин равна  $S$  (рис. 13.1). Определить:

1) общее сопротивление конденсатора;  
 2) заряды на обкладках конденсатора при его подключении к источнику напряжения  $U$ .

### Решение

Ввиду неоднородности проводимости среды вдоль линий тока воспользуемся схемой решения  $I \rightarrow j \rightarrow E \rightarrow U$ .

Так как ток однороден и постоянен, то

$$\frac{I}{S} = j_1 = j_2 = j.$$

Из закона Ома в дифференциальной форме получаем напряженности полей в слоях 1 и 2:

$$E_1 = \rho_1 j,$$

$$E_2 = \rho_2 j.$$

Ввиду однородности полей напряжение между обкладками конденсатора равно:

$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2 = j(\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2),$$

откуда находим плотность тока и полную силу тока через конденсатор:

$$j = \frac{U}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2},$$

$$I = jS = \frac{U}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2} S.$$

Используя закон Ома, найдем искомое общее сопротивление слоистого конденсатора:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2}{S}.$$

Для нахождения заряда пластин можно воспользоваться граничным условием для нормальной компоненты вектора электрической индукции:

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma,$$

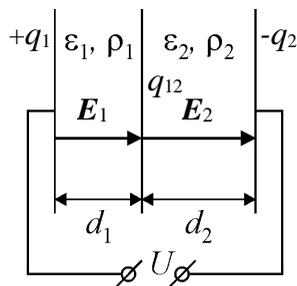


Рис. 13.1 Схема плоского конденсатора с двумя проводящими слоями между обкладками.

где  $\sigma$  – поверхностная плотность свободных зарядов,  $\mathbf{n}$  – вектор нормали в направлении от среды 1 к среде 2. Учитывая, что вне конденсатора  $D = 0$ , для левой пластины получим:

$$\sigma_1 = D_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_1,$$

а для правой пластины:

$$\sigma_2 = -D_2 = -\varepsilon_0 \varepsilon_2 E_2.$$

Напряженности полей  $E_1$  и  $E_2$  легко определить из найденной плотности тока:

$$E_1 = j\rho_1 = \frac{U\rho_1}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2},$$

$$E_2 = j\rho_2 = \frac{U\rho_2}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2}.$$

Далее можно определить искомые полные заряды каждой из пластин конденсатора:

$$q_1 = \sigma_1 S = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_1 \rho_1}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2} SU,$$

$$q_2 = \sigma_2 S = -\varepsilon_0 \frac{\varepsilon_2 \rho_2}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2} SU.$$

*Замечание.* В отличие от случая конденсатора с непроводящей средой или средой проводящей, но имеющей однородную проводимость, здесь заряды обкладок не равны друг другу:  $|q_1| \neq |q_2|$ . Такая система эквивалентна двум последовательно включённым конденсаторам с утечкой. Причина в том, что при заряде такого конденсатора на границе раздела сред также накапливаются свободные заряды, поверхностная плотность которых в соответствии с граничным условием равна

$$\sigma_{12} = D_{2n} - D_{1n} = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_2 \rho_2 - \varepsilon_1 \rho_1}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2} U,$$

а полный заряд на этой границе равен:

$$q_{12} = \sigma_{12} S = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_2 \rho_2 - \varepsilon_1 \rho_1}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2} SU.$$

Знак этого заряда определяется знаком выражения  $\varepsilon_2 \rho_2 - \varepsilon_1 \rho_1$ , т.е. зависит от параметров сред и напряжения  $U$ . Очевидно, что  $|q_{12}| = |q_1| - |q_2|$ .

Полный заряд  $q$ , получаемый конденсатором при зарядке, равен большому по модулю из зарядов пластин:  $q = \max(|q_1|, |q_2|)$ . Заряд противоположного знака той же суммарной величины будет находиться на противоположной пластине и внутри конденсатора на поверхности раздела сред.

**Ответ:** 1)  $R = \frac{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2}{S}$ ;

2)  $q_1 = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_1 \rho_1}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2} SU$ ,

$q_2 = -\varepsilon_0 \frac{\varepsilon_2 \rho_2}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2} SU$ .

**Задача 13.3.4.** Между двумя концентрическими сферами (1) и (2) из идеального проводника находится однородная среда с удельным сопротивлением  $\rho$  и диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon = 1$ . Определить сопротивление  $R$  такого слоя, если его внешний радиус в два раза больше внутреннего, равного  $a$  (рис. 13.2).

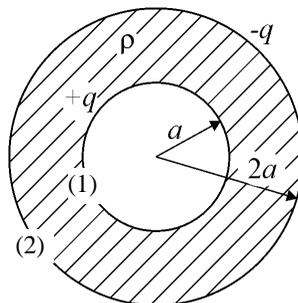


Рис. 13.2. Схема сферического конденсатора с проводящей средой между обкладками.

### Решение

**Способ 1.** Так как среда однородна ( $\rho = \text{const}$ ), свободных зарядов внутри среды нет. Считая внутреннюю и внешнюю сферы идеальными проводниками, их можно рассматривать как электроды с равными по модулю зарядами  $+q$  и  $-q$  и решать задачу согласно схеме (13.20)  $q \rightarrow E \rightarrow j \rightarrow I$ .

Согласно теореме Гаусса напряженность электрического поля в пространстве между сферами ( $a < r < 2a$ ) равна:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Напряжение между сферами можно найти интегрированием:

$$U = \int_a^{2a} E dr = \left( -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \Big|_a^{2a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{2a} \right) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a}.$$

Определим силу тока, текущего в такой системе. Так как заряды на электродах постоянны, то через любую поверхность (концентрическую сферу радиуса  $a < r < 2a$ ) сила тока одинакова и равна:

$$I = jS = \lambda ES = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\rho\epsilon_0}.$$

Согласно закону Ома найдем искомое сопротивление:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\rho}{8\pi a}.$$

Способ 2. Ввиду однородности среды будем следовать схеме  $q \rightarrow E \rightarrow j \rightarrow I$ . Пусть проводники (электроды) заряжены одинаковыми по величине, но разными по знаку зарядами  $\pm q$ , а напряжение между ними  $U = q/C$ .

Вектор электрической индукции вблизи поверхности каждого проводника перпендикулярен поверхности и равен  $D = \sigma$  (где  $\sigma$  – поверхностная плотность свободного заряда на проводнике). Напряженность электростатического поля

$$\text{вблизи поверхности } E = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Согласно закону Ома в дифференциальной форме (13.8) вектор плотности тока параллелен вектору напряженности поля и поэтому вблизи поверхности проводников перпендикулярен поверхности и по модулю равен

$$j = j_n = \lambda E = \frac{\lambda\sigma}{\epsilon_0}.$$

Силу тока через электрод можно найти интегрированием плотности тока по поверхности электрода:

$$I = \int_S j dS = \frac{\lambda}{\epsilon_0} \int_S \sigma dS = \frac{\lambda q}{\epsilon_0} = \lambda \frac{CU}{\epsilon_0}.$$

Используя закон Ома (13.7), окончательно получаем:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\lambda C},$$

или

$$RC = \rho\varepsilon\varepsilon_0.$$

Используя связь между сопротивлением однородной проводящей среды, заполняющей все пространство между идеально проводящими телами произвольной формы, и ёмкостью такой системы ( $RC = \rho\varepsilon\varepsilon_0$ ), получаем решение задачи, которое оказывается короче того, что приведено в способе 1. Так как ёмкость сферического конденсатора равна:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2}{r_2 - r_1} = 8\pi\varepsilon_0 a,$$

то для искомого сопротивления будем иметь:

$$R = \frac{\rho\varepsilon_0}{C} = \frac{\rho}{8\pi a}.$$

*Замечание.* Сопротивление безграничной среды с удельным сопротивлением  $\rho$ , окружающей уединенную проводящую сферу

радиуса  $a$ , равно  $R_\infty = \frac{\rho}{4\pi a}$ , так как в этом случае  $r_2 \rightarrow \infty$ .

**Ответ:**  $R = \frac{\rho}{8\pi a}.$

**Задача 13.3.5.** Цилиндрический проводник круглого сечения радиуса  $a$  изготовлен из материала, удельная электропроводность которого зависит от расстояния  $r$  до оси проводника по закону  $\lambda = \alpha r^2$ , где  $\alpha$  – постоянная величина. Определить сопротивление единицы длины проводника при протекании тока вдоль оси цилиндра.

### Решение

Способ 1. Выберем цилиндрическую систему координат, ось  $Z$  которой совпадает с осью проводника (рис. 13.3).

Данный проводник можно представить, как совокупность тонких цилиндрических слоев, сопротивление каждого из которых в расчете на единицу длины одинаково по всей длине проводника. В пределах такого слоя плотность тока  $j$  также постоянна.

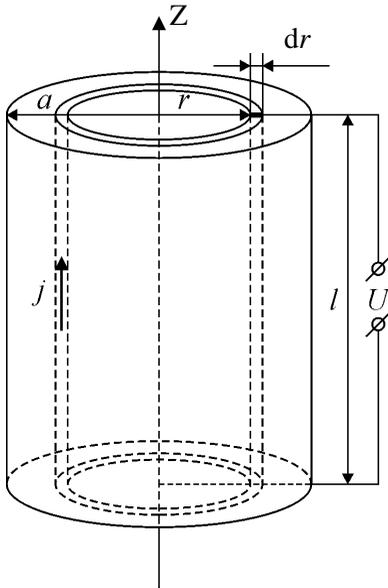


Рис. 13.3. К определению сопротивления проводника с переменной по радиусу цилиндрического проводника электропроводностью.

Пусть напряжение между точками на оси проводника, находящимися на расстоянии  $l$  друг от друга, равно  $U$ . Используя закон Ома в дифференциальной форме, получим:

$$j = \lambda E = \lambda \frac{U}{l}.$$

Таким образом, плотность тока в слое радиуса  $r$  толщины  $dr$  с учетом зависимости удельной электропроводности от  $r$  будет равна:

$$j = \lambda \frac{U}{l} = \alpha \frac{U r^2}{l}.$$

Найдем полную силу тока  $I$ , текущего по проводу:

$$I = \int_S j dS = \int_0^a \alpha \frac{U r^2}{l} 2\pi r dr = \alpha U \frac{\pi a^4}{2l}.$$

Тогда по закону Ома для участка цепи искомое сопротивление участка провода единичной длины равно:

$$R_l = \frac{R}{l} = \frac{U}{I l} = \frac{2}{\alpha \pi a^4}.$$

Способ 2. Рассмотрим проводник как систему тонких концентрических проводящих трубок, соединенных параллельно

между собой. Электропроводность отдельной трубки толщиной  $dr$  с площадью сечения  $dS = 2\pi r dr$  и длиной  $l$  равна:

$$d\Lambda = \lambda \frac{dS}{l} = \alpha r^2 \frac{2\pi r dr}{l}.$$

Электропроводность всего проводника находится интегрированием:

$$\Lambda = \int_0^a \frac{2\pi\alpha r^3 dr}{l} = \frac{\alpha\pi a^4}{2l},$$

а так как  $R = \frac{1}{\Lambda}$ , то искомое сопротивление единицы длины провода равно:

$$R_l = \frac{R}{l} = \frac{2}{\alpha\pi a^4}.$$

**Ответ:**  $R_l = \frac{2}{\alpha\pi a^4}.$

**Задача 13.3.6.** Зазор между обкладками плоского конденсатора заполнен веществом с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  и с удельной проводимостью, меняющейся в направлении, перпендикулярном обкладкам, по линейному закону от  $\lambda_1$  до  $\lambda_2$ . Площадь пластин  $S$ , ширина зазора  $d$ . На конденсатор подано напряжение  $U$ . Найти:

- 1) ток  $I$  через конденсатор;
- 2) заряды пластин  $q_1$  и  $q_2$ ;
- 3) заряд конденсатора  $q$ ;
- 4) плотность свободных зарядов  $\rho_{\text{своб}}(x)$  внутри зазора;
- 5) плотность связанных (поляризационных) зарядов  $\rho'(x)$  в среде;
- 6) полный свободный заряд в среде  $q_{\text{своб}}$ .

### Решение

Ввиду неоднородности среды в направлении протекания тока воспользуемся схемой:  $I \rightarrow j \rightarrow E \rightarrow U$ .

Запишем закон изменения удельной проводимости:

$$\lambda(x) = \lambda_1 + \alpha x.$$

Для нахождения  $\alpha$  запишем граничное условие:

$$\lambda(d) = \lambda_1 + \alpha d = \lambda_2.$$

Отсюда получаем, что

$$\alpha = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{d}.$$

Окончательно имеем:

$$\lambda(x) = \lambda_1 + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{d} x.$$

В плоском конденсаторе плотность тока везде однородна и постоянна  $j = I/S = \text{const}$ . Однако напряженность электрического поля уже будет зависеть от  $x$ :

$$E(x) = \frac{j}{\lambda(x)}.$$

Для напряжения между пластинами получаем:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d E(x) dx = j \int_0^d \frac{dx}{\lambda_1 + \alpha x} = \frac{j}{\alpha} \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Таким образом,

$$j = \frac{\alpha U}{\ln(\lambda_2 / \lambda_1)}$$

и

$$I = jS = \frac{\alpha SU}{\ln(\lambda_2 / \lambda_1)} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{d \ln(\lambda_2 / \lambda_1)} SU.$$

Согласно закону Ома (13.7) сопротивление конденсатора равно

$$R = \frac{U}{I} = \frac{d \ln(\lambda_2 / \lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Заряды пластин определим аналогично тому, как было сделано в **задаче 13.3.3**, т.е. из граничных условий для вектора электрической индукции, величина которой в среде имеет следующий вид:

$$D(x) = \varepsilon_0 \varepsilon E(x) = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{j}{\lambda(x)}.$$

На левой пластине ( $x = 0$ ):

$$q_1 = S\sigma_1 = SD(0) = \frac{\varepsilon_0 j S}{\lambda_1} = \frac{\varepsilon_0 I}{\lambda_1} = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1) S U}{\lambda_1 d \ln(\lambda_2 / \lambda_1)},$$

на правой пластине ( $x = d$ ):

$$q_2 = S\sigma_2 = -SD(d) = -\frac{\varepsilon_0 j S}{\lambda_2} = -\frac{\varepsilon_0 I}{\lambda_2} = -\frac{(\lambda_2 - \lambda_1)SU}{\lambda_2 d \ln(\lambda_2 / \lambda_1)}.$$

Полный заряд  $q$ , получаемый конденсатором при зарядке, равен большему по модулю из зарядов пластин:  $q = \max(|q_1|, |q_2|)$ .

Объемную плотность свободных зарядов в среде можно найти как

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \operatorname{div} \mathbf{D}, \\ \frac{dD}{dx} &= \varepsilon_0 \varepsilon \frac{dE}{dx} = \varepsilon_0 \varepsilon j \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{\lambda(x)} \right) = -\frac{\varepsilon_0 \varepsilon j \alpha}{\lambda^2(x)} = \\ &= -\varepsilon_0 \varepsilon \frac{\alpha^2 U}{\ln(\lambda_2 / \lambda_1)} \cdot \frac{1}{\lambda^2(x)} = \\ &= -\varepsilon_0 \varepsilon \left( \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{d} \right)^2 \frac{U}{\ln(\lambda_2 / \lambda_1)} \cdot \frac{1}{\lambda^2(x)} = \\ &= -\frac{\varepsilon_0 \varepsilon (\lambda_2 - \lambda_1)^2}{\ln(\lambda_2 / \lambda_1)} \cdot \frac{U}{(\lambda_1 d + (\lambda_2 - \lambda_1)x)^2} \end{aligned}$$

Полный свободный заряд в объеме конденсатора равен:

$$\begin{aligned} q &= \int_V \rho(x) dV = S \int_0^d \rho(x) dx = S \int_0^d \frac{dD}{dx} dx = \\ &= S(D(d) - D(0)) = -q_2 - q_1 = \varepsilon_0 \varepsilon I \left( \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) = \\ &= -\varepsilon_0 \varepsilon \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)^2 SU}{\lambda_1 \lambda_2 d \ln(\lambda_2 / \lambda_1)}. \end{aligned}$$

Поскольку электрическое поле внутри конденсатора неоднородно, в среде появится неоднородная поляризация

$$\mathbf{P}(x) = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\mathbf{E}(x)$$

и связанные поляризационные заряды плотностью

$$\rho'(x) = -\operatorname{div} \mathbf{P} = -\varepsilon_0(\varepsilon - 1) \frac{dE}{dx}.$$

Учитывая, что  $\rho(x) = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{dE}{dx}$ , для объемной плотности поляризационных зарядов получаем:

$$\rho'(x) = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \rho(x) = -\varepsilon_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \cdot \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}{\ln(\lambda_2 / \lambda_1)} \cdot \frac{U}{(\lambda_1 d + (\lambda_2 - \lambda_1)x)^2}.$$

**Ответ:** 1)  $I = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{d \ln(\lambda_2 / \lambda_1)} SU$ ;

2)  $q_1 = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)SU}{\lambda_1 d \ln(\lambda_2 / \lambda_1)}$ ,  $q_2 = -\frac{(\lambda_2 - \lambda_1)SU}{\lambda_2 d \ln(\lambda_2 / \lambda_1)}$

3)  $q = \max(|q_1|, |q_2|)$ ; т.е.  $q = |q_1|$  при  $\lambda_1 < \lambda_2$  и  $q = |q_2|$  при  $\lambda_1 > \lambda_2$ ;

4)  $\rho(x) = -\frac{\varepsilon_0 \varepsilon (\lambda_2 - \lambda_1)^2}{\ln(\lambda_2 / \lambda_1)} \cdot \frac{U}{(\lambda_1 d + (\lambda_2 - \lambda_1)x)^2}$ ;

5)  $\rho'(x) = -\varepsilon_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \cdot \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}{\ln(\lambda_2 / \lambda_1)} \cdot \frac{U}{(\lambda_1 d + (\lambda_2 - \lambda_1)x)^2}$ ;

б)  $q_{\text{своб}} = -\varepsilon_0 \varepsilon \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)^2 SU}{\lambda_1 \lambda_2 d \ln(\lambda_2 / \lambda_1)}$ .

### Задачи типа 13.2

*Вычисление количества тепла, выделяющегося в сплошной среде при протекании тока.*

**Метод решения.** Использование интегрального и дифференциального законов Джоуля–Ленца (13.11) – (13.12) после расчета сопротивления среды, силы тока или плотности тока аналогично расчетам в задачах типа 13.1.

**Задача 13.3.7.** Пространство между обкладками цилиндрического конденсатора длиной  $L$  заполнено веществом с удельным сопротивлением  $\rho$  и диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon = 1$ . Определить тепловую мощность, выделяемую в конденсаторе, если напряжение между его обкладками  $U_0$ , радиусы обкладок  $R_1$  и  $R_2$ . Краевыми эффектами пренебречь (рис. 13.4.).

### Решение

Сила тока, текущего в такой цепи, постоянна, однако плотность тока  $j$  зависит от расстояния до оси цилиндров.

По закону Джоуля–Ленца в дифференциальной форме объёмная плотность тепловой мощности равна:

$$P_V = j \cdot E = \frac{1}{\rho} E^2.$$

В слое толщины  $dr$ , находящемся на расстоянии  $r$  от оси конденсатора, будет выделяться мощность:

$$dP = P_V dV = \frac{1}{\rho} E^2 2\pi r L dr.$$

По теореме Гаусса напряженность электрического поля на расстоянии  $r$  от оси конденсатора равна:

$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L r},$$

где  $q$  – заряд на внутренней обкладке конденсатора. Тогда:

$$P = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{\rho} E^2 \cdot 2\pi r L dr = \frac{q^2}{\rho \cdot 2\pi\epsilon_0^2 L} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{q^2}{\rho \cdot 2\pi\epsilon_0^2 L} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$

Используя выражение для емкости цилиндрического конденсатора

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(R_2/R_1)},$$

и зная напряжение между его обкладками, можно найти его заряд:

$$q = CU_0 = \frac{2\pi\epsilon_0 LU_0}{\ln(R_2/R_1)}.$$

Окончательно получим:

$$P = \frac{2\pi LU_0^2}{\rho \ln(R_2/R_1)}.$$

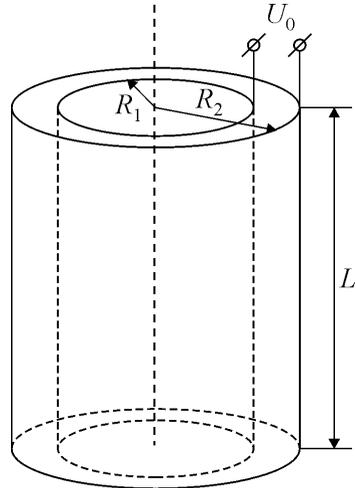


Рис. 13.4. К определению количества тепла, выделившегося при радиальном протекании тока между цилиндрами.

*Замечание.* Результат можно получить, воспользовавшись соотношением  $RC = \rho \epsilon_0 \epsilon$  (см. задачу 13.3.1). Действительно, учитывая, что  $\epsilon = 1$  и  $R = \frac{\rho \epsilon_0}{C}$ , сразу получаем:

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{CU^2}{\rho \epsilon_0} = \frac{2\pi LU^2}{\rho \ln(R_2/R_1)}.$$

**Ответ:**  $P = \frac{2\pi LU^2}{\rho \ln(R_2/R_1)}.$

**Задача 13.3.8.** Сферический конденсатор заполнен однородным веществом с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  и удельным сопротивлением  $\rho$ . Первоначально конденсатор не заряжен. Найти количество теплоты, выделившееся в системе, после сообщения внутренней обкладке конденсатора заряда  $q_0$ . Радиусы обкладок конденсатора равны  $a$  и  $b = 3a$ .

### Решение

После сообщения внутренней обкладке конденсатора заряда между его обкладками возникнет электрический ток. Ток будет течь до тех пор, пока разность потенциалов между внутренней и внешней обкладками не станет равной нулю. В конечном состоянии весь заряд окажется распределенным по внешней обкладке конденсатора.

Способ 1. Опираясь на решение задачи 13.3.4, можно рассматривать такой конденсатор как проводник сопротивлением  $R$ .

Обозначим через  $q_1 = q$  заряд на внутренней сфере в произвольный момент времени, тогда заряд внешней сферы  $q_2 = q_0 - q$ . Разность потенциалов между ними в процессе перетекания заряда равна:

$$\begin{aligned} U(q) &= \varphi_1 - \varphi_2 = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{a} + \frac{q_2}{b} \right) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 + q_2}{b} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{b-a}{ab} = \frac{q}{C}, \end{aligned}$$

где  $C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}$  – ёмкость сферического конденсатора. В соответствии с законом Джоуля–Ленца для тепла  $dQ$ , выделившегося в проводнике за время  $dt$ , получим:

$$dQ = I^2 R dt = IR Idt = \frac{U}{R} R Idt = -U dq = -\frac{q}{C} dq,$$

где  $dq = -Idt$  – убыль заряда внутренней обкладки за время  $dt$ .

Всё количество теплоты, выделившееся в конденсаторе за время перетекания заряда, можно рассчитать интегрированием:

$$Q = -\int_{q_0}^0 \frac{q}{C} dq = \frac{q_0^2}{2C} = \frac{q_0^2}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{b-a}{ab} = \frac{q_0^2}{12\pi a\epsilon_0}.$$

Способ 2. Согласно замечанию к задаче 13.3.1, заряд на внутренней обкладке конденсатора будет убывать по закону

$q = q_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$ . Тогда сила тока, текущего между обкладками

конденсатора, будет зависеть от времени по закону:

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = -\frac{q_0}{RC} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right).$$

Все количество тепла, выделившееся в конденсаторе, вычисляется по формуле:

$$Q = \int_0^{\infty} I^2 R dt = \int_0^{\infty} R \left(\frac{q_0}{RC}\right)^2 \exp\left(-\frac{2t}{RC}\right) dt = \frac{q_0^2}{2C} = \frac{q_0^2}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{b-a}{ab}.$$

*Замечание 1.* Выделившееся количество теплоты не зависит от сопротивления между обкладками конденсатора. Величина сопротивления влияет только на скорость процесса.

*Замечание 2.* Выделившееся количество теплоты проще найти из закона сохранения энергии без расчета силы тока. Оно будет равно разности начальной и конечной электростатической энергии системы. Учитывая, что энергия заряженной сферы радиуса  $r$  равна

$\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r}$ , сразу получаем:

$$Q = W_1 - W_2 = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a} - \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 \cdot 3a} = \frac{q_0^2}{12\pi a\epsilon_0}.$$

**Ответ:**  $Q = \frac{q_0^2}{12\pi a\epsilon_0}.$

### 13.4 Задачи для самостоятельного решения

**Задача 13.4.1.** Плоский конденсатор, заполненный веществом, диэлектрическая проницаемость которого равна  $\epsilon$ , за время  $\tau$  теряет треть сообщенного ему заряда. Считая, что утечка заряда происходит только через диэлектрическую прокладку, найти удельное сопротивление её материала.

$$\text{Ответ: } \rho = \frac{\tau}{\epsilon \epsilon_0 \ln(3/2)}.$$

**Задача 13.4.2.** Зазор между обкладками плоского конденсатора толщиной  $d$  заполнен последовательно двумя диэлектрическими слоями одинаковой толщины. Удельные сопротивления слоев соответственно равны  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , диэлектрическая проницаемость  $\epsilon = 1$ . Площадь обкладок  $S$ . На конденсатор подано напряжение  $U$ . Найти тепловую мощность, выделяемую в каждом слое.

$$\text{Ответ: } P_1 = \frac{2U^2}{d} \cdot \frac{\rho_1}{(\rho_1 + \rho_2)^2} S,$$

$$P_2 = \frac{2U^2}{d} \cdot \frac{\rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} S.$$

**Задача 13.4.3.** ([2], 3.164) Зазор между обкладками плоского конденсатора заполнен неоднородной слабо проводящей средой, удельная проводимость которой изменяется в направлении, перпендикулярном к пластинам, по линейному закону от  $\lambda_1 = 1,0 \cdot 10^{-12} \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$  до  $\lambda_2 = 2,0 \cdot 10^{-12} \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$ . Площадь каждой пластины конденсатора  $S = 230 \text{ см}^2$ , толщина зазора  $d = 2,0 \text{ см}$ . Найти силу тока через конденсатор при напряжении на нем  $U = 300 \text{ В}$ .

$$\text{Ответ: } I = \frac{US(\lambda_2 - \lambda_1)}{d \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = 5 \text{ нА}.$$

**Задача 13.4.4.** ([2], 3.161) Зазор между обкладками плоского конденсатора заполнен стеклом с удельным сопротивлением  $\rho = 100 \text{ ГОм м}$ . Емкость конденсатора  $C = 4,0 \text{ нФ}$ . Найти силу тока

утечки через конденсатор при подаче на него напряжения  $U = 2,0$  кВ.

$$\text{Ответ: } I = \frac{UC}{\rho \varepsilon_0} = 1,5 \text{ мкА.}$$

**Задача 13.4.5.** Найти сопротивление между внутренней и внешней поверхностями кольца толщиной  $d$ . Материал кольца имеет удельное сопротивление  $\rho$ . Радиусы внутренней и внешней частей кольца равны  $a$  и  $b$  ( $a < b$ ).

$$\text{Ответ: } R = \frac{\rho}{2\pi d} \ln \frac{b}{a}.$$

**Задача 13.4.6.** Пространство между обкладками цилиндрического конденсатора длины  $L$  заполнено двумя слоями веществ с удельными проводимостями  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  соответственно. Определить мощность, выделяемую в первом слое, если напряжение между обкладками  $U$ . Радиусы цилиндров равны  $R_1, R_2, R_3$ .

$$\text{Ответ: } P = \frac{2\pi U^2 L \lambda_1 \lambda_2 \ln \frac{R_2}{R_1}}{\left( \lambda_2 \ln \frac{R_2}{R_1} + \lambda_1 \ln \frac{R_3}{R_2} \right)^2}.$$

**Задача 13.4.7.** ([2], 3.169) Длинный проводник круглого сечения радиуса  $a$  сделан из материала, удельное сопротивление которого зависит только от расстояния  $r$  до оси проводника по закону  $\rho = \alpha/r^2$ , где  $\alpha$  – постоянная. Найти:

- сопротивление единицы длины такого проводника;
- напряженность электрического поля в проводнике, при которой по нему будет протекать ток  $I$ .

$$\text{Ответ: а) } R_1 = \frac{2\alpha}{\pi a^4}; \text{ б) } E = \frac{2\alpha I}{\pi a^4}.$$

**Задача 13.4.8.** Два одинаковых металлических шара с радиусами  $a$  находятся в однородной среде с удельным

сопротивлением  $\rho$ . Определить сопротивление  $R$  между шарами, считая, что расстояние между шарами много больше их радиуса.

$$\text{Ответ: } R = \frac{\rho}{2\pi a}.$$

**Задача 13.4.9.** Металлический шар радиуса  $R$  находится в среде с удельной проводимостью  $\lambda$ . На шар в некоторый момент времени помещен заряд  $q$ . Определить количество теплоты, выделившееся во всей среде за время, пока весь заряд стечет с шара.

$$\text{Ответ: } Q = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

**Задача 13.4.10.** Пространство между обкладками сферического конденсатора, радиусы обкладок которого равны  $R_1$  и  $R_2$ , заполнено веществом с удельным сопротивлением  $\rho$ . Какое количество теплоты будет выделяться в единицу времени в такой системе, если между электродами конденсатора поддерживается постоянная разность потенциалов  $U$ ?

$$\text{Ответ: } P = \frac{4\pi U^2 R_1 R_2}{\rho(R_2 - R_1)}.$$

## Глава 14

# РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА. ПРАВИЛА КИРХГОФА, МЕТОДЫ КОНТУРНЫХ ТОКОВ И УЗЛОВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

### 14.1. Теоретический материал

**Сопротивление проводников, соединенных последовательно и параллельно.**

А. При последовательном соединении проводников (см. рис. 14.1) стационарные токи, текущие через них, одинаковы, а напряжение между концами всей совокупности проводников равно сумме напряжений на каждом из проводников.

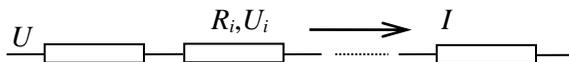


Рис. 14.1. Последовательное соединение проводников.

Сопротивление системы последовательно соединенных проводников равно сумме сопротивлений каждого из проводников в отдельности:

$$R = \sum_i R_i . \tag{14.1}$$

Б. В случае параллельного соединения проводников (рис. 14.2) напряжения на всех проводниках одинаковы, а сила тока, текущего через всю систему проводников, равна сумме сил токов, текущих через каждый проводник в отдельности.

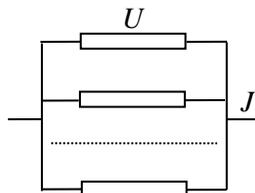


Рис. 14.2. Параллельное соединение проводников.

Обратная величина сопротивления системы параллельно соединенных проводников равна сумме обратных величин сопротивлений каждого из проводников в отдельности:

$$\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i} . \tag{14.2}$$

**Распределение заряда в проводниках в случае стационарных токов.** В случае стационарных токов свободные

заряды находятся только в областях неоднородности проводимости проводящей среды, например, на поверхности раздела двух сред.

**Закон Ома для замкнутой неразветвленной цепи:**

$$IR = \mathcal{E}, \quad (14.3)$$

где  $I$  – сила тока,  $R$  – полное сопротивление и  $\mathcal{E}$  – полная ЭДС в замкнутой цепи тока.

**Простые контуры** – замкнутые контуры цепи, на "территории" (внутри) которых нет других контуров этой цепи.

**Правила Кирхгофа.**

*Первое правило Кирхгофа.* Алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в точке разветвления (узле) цепи, равна нулю:

$$\sum_i I_i = 0, \quad (14.4)$$

где  $I_i$  – сила тока в  $i$ -ом ветвлении. Знаки сил токов, текущих к узлу и от него, считаются противоположными.

*Второе правило Кирхгофа.* В любом замкнутом контуре, выделенном в цепи проводников, алгебраическая сумма падений напряжения (произведений сил токов на сопротивление) на последовательных участках этого контура равна алгебраической сумме всех ЭДС на тех же участках:

$$\sum_k I_k R_k = \sum_k \mathcal{E}_k. \quad (14.5)$$

Правилами Кирхгофа удобно пользоваться для расчета разветвленных цепей, когда заданы все сопротивления и все ЭДС и требуется определить силу тока на каждом участке цепи. При этом необходимо действовать следующим образом.

1. Направления токов на всех неразветвленных участках цепи выбирают произвольно и обозначают стрелками. Если вычисления покажут, что сила тока положительна на данном участке, то его направление соответствует избранному. Если же сила тока окажется отрицательной – значит, его истинное направление противоположно направлению стрелки.

2. Выбрав произвольный замкнутый контур, следует задать направление обхода контура. Если это направление совпадает с направлением стрелки, указывающей направление тока, то слагаемое  $RI$  берется со знаком плюс. Если же эти направления противоположны, то оно берется со знаком минус. Если при обходе контура источник тока проходится от отрицательного полюса к

положительному, то его ЭДС следует считать положительной, в противном случае ее надо считать отрицательной.

3. Убедиться в том, что все ЭДС и все сопротивления входят в систему уравнений.

*Следует также помнить:*

1) если схема содержит  $N$  узлов, то из  $N$  уравнений для узлов только  $(N - 1)$  уравнений являются независимыми (первая система уравнений Кирхгофа);

2) число независимых уравнений, полученных из второго правила Кирхгофа, равно числу  $M$  простых контуров в цепи (вторая система уравнений Кирхгофа);

3) всего  $(N - 1 + M)$  уравнений равно числу неразветвленных участков в схеме.

### **Метод контурных токов.**

*Метод контурных токов* – метод расчета электрических цепей путем записи системы линейных алгебраических уравнений, в которой за неизвестные принимаются контурные токи в простых контурах цепи.

Рассмотрим все простые контуры, на которые распадается разветвленная цепь. В каждом из этих контуров введем свой ток постоянной силы вдоль всего контура. Такие токи называются *контурными токами*. Каждому контурному току приписываем определенное положительное направление, например, по часовой стрелке в каждом контуре. Таким образом, сила тока на любом участке цепи равна силе контурного тока или разности (или сумме) сил двух контурных токов соседних простых контуров.

Затем для каждого простого контура с учетом знаков ЭДС и сил токов записываются уравнения, следующие из второго правила Кирхгофа.

Введение контурных токов автоматически приводит к выполнению закона сохранения заряда, что позволяет не использовать первую систему уравнений Кирхгофа. Этот метод снижает число уравнений на столько, сколько независимых уравнений дает первое правило Кирхгофа. Всего остается  $M$  независимых уравнений по числу простых контуров.

### **Метод узловых потенциалов.**

*Метод узловых потенциалов* – метод расчета электрических цепей путем записи системы линейных алгебраических уравнений, в которой за неизвестные принимаются потенциалы узлов цепи.

Сущность метода заключается в том, что сначала определяются потенциалы всех узлов схемы, а затем токи и напряжения в неразветвленных участках цепи (ветвях), соединяющих узлы.

Вначале выбирается один из узлов, потенциал которого считаем равным нулю. Затем нумеруются узлы, после чего записывается система из  $(N - 1)$  уравнений. В левой части каждого из уравнений записывается потенциал заданного узла, умноженный на сумму проводимостей ветвей ( $\Lambda_{ij} \equiv \frac{1}{R_{ij}}$ ), примыкающих к нему,

вычитается сумма потенциалов узлов, примыкающих к данному, умноженных на проводимости ветвей, соединяющих их с данным узлом. В правой части записывается сумма произведений ЭДС на проводимость для всех ветвей, примыкающих к данному узлу, если ЭДС направлена в сторону рассматриваемого узла, то она записывается со знаком «+», если от узла, то со знаком «-»:

$$\varphi_i \sum_{j \neq i}^N \Lambda_{ij} - \sum_{j \neq i}^N \Lambda_{ij} \varphi_j = - \sum_{j \neq i}^N \Lambda_{ij} \mathcal{E}_{ij}. \quad (14.6)$$

Из полученной системы  $(N - 1)$  независимых уравнений (где  $N$  – число узлов цепи) определяются потенциалы узлов (равные напряжениям между каждым из узлов и базовым), а затем (по закону Ома) токи в ветвях и напряжения на элементах цепи. Если заданы напряжения между какими-либо парами узлов, то число независимых уравнений уменьшается.

В том случае, когда  $(N - 1) < M$ , данный метод является более экономным, чем метод контурных токов. Применение метода узловых потенциалов особенно эффективно для цепей, имеющих параллельные ветви (например, при наличии только двух узлов).

Методы контурных токов и узловых потенциалов не привносят ничего нового к правилам Кирхгофа и обобщенному закону Ома. Данные методы только задают алгоритм их использования, уменьшая общее число независимых уравнений.

**Обобщенный закон Ома (для участка цепи, содержащего ЭДС) в интегральной форме.**

$$IR_{12} = U_{12} + \mathcal{E}_{12}, \quad (14.7)$$

где  $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$  – разность потенциалов между точками 1 и 2,  $R_{12}$  – сопротивление рассматриваемого участка.

**Закон изменения энергии для цепей постоянного тока, содержащих ЭДС, с учетом работы пондеромоторных сил.**

Рассмотрим систему тел (проводников с токами и диэлектриков) и даем возможность этим телам совершать бесконечно медленные (квазистатические, чтобы успело установиться электрическое равновесие в системе – распределение зарядов и полей) возможные перемещения. Будем считать, что внутренняя энергия тел системы, не связанная с электрическим полем, поддерживается постоянной (например, упругая ее часть, связанная с изменением степени деформации тела).

Пусть за бесконечно малый интервал времени  $dt$  произошло бесконечно малое квазистатическое перемещение тел. Вследствие закона сохранения энергии работа всех источников тока  $\delta A_{\text{ст}}$  должна быть равна сумме механической работы сил электрического поля  $\delta A$  (пондеромоторных сил), изменения энергии электрического поля  $dW$  и выделяемого количества джоулева тепла  $\delta Q$ :

$$\delta A_{\text{ст}} = \delta A + dW + \delta Q. \quad (14.8)$$

В соответствии с определением ЭДС и законом Джоуля–Ленца получим:

$$\sum_i \mathcal{E}_i I_i dt = \delta A + dW + \sum_k R_k I_k^2 dt. \quad (14.9)$$

Суммирование в формуле проводится по участкам цепи, содержащим ЭДС (по  $i$ ), и по участкам цепи, содержащим сопротивление (по  $k$ ), соответственно.

Пользуясь законом изменения энергии, во многих случаях можно вычислить механические силы, действующие на тела в электрическом поле (пондеромоторные силы), проще, чем рассматривая непосредственно действие поля на отдельные части тел.

*Суть метода.* Пусть требуется найти обобщенную силу  $F_{x_j}$  (например, проекцию силы на ось координат или момент силы), действующую на какое-либо тело в электрическом поле по направлению обобщенной координаты  $x_j$  (например, координаты или угла поворота). Предполагается, что это тело совершает какое-либо малое возможное (виртуальное) перемещение  $dx_j$ .

При этом вычисляются работа всех источников тока  $\delta A_{\text{ст}}$ , изменение энергии электрического поля  $dW$  и выделяемое джоулево тепло  $\delta Q$ , вызванные этим перемещением. Далее,

воспользовавшись законом сохранения энергии, находят неизвестную обобщенную силу:

$$F_{x_j} = \frac{\delta A_{\text{ст}} - dW - \delta Q}{\delta x_j}. \quad (14.10)$$

## 14.2. Основные типы задач (классификация)

14.1. Расчет неразветвленных цепей линейных проводников (или схем, сводимых к неразветвленным цепям прямым применением формул (14.1) – (14.2) для сопротивлений последовательно и параллельно соединенных проводников); используется обобщенный закон Ома (14.7).

14.2. Расчет разветвленных цепей линейных проводников методом правил Кирхгофа, контурных токов и узловых потенциалов (14.4) – (14.6).

14.3. Расчет разветвленных цепей, которые сводятся к неразветвленным цепям с использованием элементов симметрии.

14.4. Расчет количества тепла или тепловой мощности, выделяющейся в цепях линейных проводников.

## 14.3. Методы решения и примеры решения задач

### Задачи типа 14.1

*Расчет неразветвленных цепей (или цепей, сводимых к неразветвленным схемам стандартными способами).*

**Метод решения.** Прямое применение формул (14.1) и (14.2) для сопротивлений последовательно и параллельно соединенных проводников с целью получения эквивалентной неразветвленной цепи с дальнейшим использованием обобщенного закона Ома (14.7).

**Задача 14.3.1.** Два источника ЭДС ( $\mathcal{E}_1 = 10$  В и  $\mathcal{E}_2 = 15$  В) с внутренними сопротивлениями  $r_1 = 0,2$  Ом и  $r_2 = 0,3$  Ом подключены к резистору  $R_1$  (рис. 14.3). Найти ЭДС и внутреннее сопротивление источника, эквивалентного этим двум источникам.

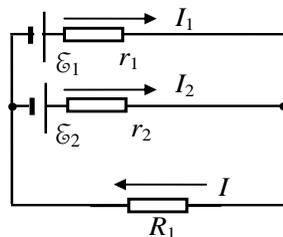


Рис. 14.3. Схема для расчета электрической цепи.

**Решение**

Ток  $I$  через резистор  $R_1$  есть сумма токов  $I_1$  и  $I_2$  через источники:

$$I = I_1 + I_2.$$

При этом падение напряжения на резисторе  $R_1$  можно записать:

$$U = \mathcal{E}_1 - I_1 r_1 = \mathcal{E}_2 - I_2 r_2$$

или

$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = I_1 r_1 - I_2 r_2 = I_1 r_1 - (I - I_1) r_2 = I_1 (r_1 + r_2) - I r_2,$$

откуда

$$I_1 = I \frac{r_2}{r_1 + r_2} + \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{r_1 + r_2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} U &= \mathcal{E}_1 - I_1 r_1 = \mathcal{E}_1 - \left( I \frac{r_2}{r_1 + r_2} + \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{r_1 + r_2} \right) r_1 = \\ &= \frac{\mathcal{E}_1 (r_1 + r_2) - (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) r_1}{r_1 + r_2} - I \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 + r_2} - I \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = \mathcal{E} - I r. \end{aligned}$$

Таким образом:

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 + r_2}; \quad r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

После подстановки числовых данных получим:

$$\mathcal{E} = 12 \text{ В}; \quad r = 0,12 \text{ Ом}.$$

$$\text{Ответ: } \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 + r_2}; \quad r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2};$$

$$\mathcal{E} = 12 \text{ В}; \quad r = 0,12 \text{ Ом}.$$

**Задачи типа 14.2**

*Расчет разветвленных цепей линейных проводников методом правил Кирхгофа, контурных токов и узловых потенциалов.*

**Метод решения.** Применяются выше описанные в теоретической части методы – правила Кирхгофа, контурные токи и узловые потенциалы.

**Задача 14.3.2.** Найти сопротивление между точками А и В в схеме, представленной на рис. 14.4а.

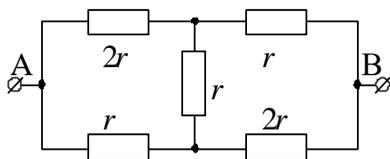


Рис. 14.4а. Схема соединения резисторов.

### Решение

#### Способ 1. Метод контурных токов.

Пусть к точкам А и В, сопротивление между которыми нужно определить, подключен источник с ЭДС  $\mathcal{E}$  (рис. 14.4б).

Представленная схема содержит три контура и четыре узла. Следовательно, предпочтительным будет использовать метод контурных токов. Далее в способах 2 и 3 мы покажем, что решения с использованием правил Кирхгофа и метода узловых потенциалов окажутся более громоздкими.

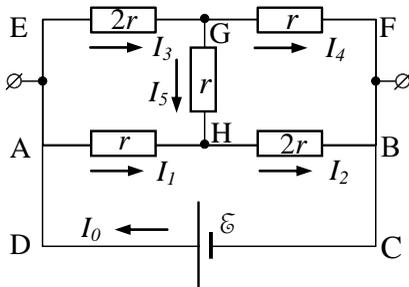


Рис. 14.4б. Схема электрической цепи для расчета с использованием контурных токов.

Итак, проводники разбивают данную схему на три контура. Каждому из них сопоставим соответствующие контурные токи  $I_{1-3}$ , направление которых выберем произвольно, например, как показано на рис. 14.4б пунктирными линиями со стрелкой. Запишем три независимых уравнения для контурных токов, совершив обходы трех контуров:

$$\text{контур ABCD: } (I_1 - I_2)r + (I_1 - I_3)2r = \mathcal{E},$$

$$\text{контур DEFC: } 2I_2r + I_3r = \mathcal{E},$$

$$\text{контур AEGH: } 2I_2r + (I_2 - I_3)r + (I_2 - I_1)r = 0.$$

Решая записанную систему уравнений относительно тока  $I_1$ , получаем:

$$I_1 = \frac{5\mathcal{E}}{7r},$$

откуда находим искомое сопротивление цепи:

$$R_{AB} = \frac{7}{5} r .$$

Способ 2. Применение правил Кирхгофа.

Для применения правил Кирхгофа введем токи  $I_0 - I_5$  между всеми узлами схемы (рис. 14.4в). Чтобы определить эти шесть токов, требуется записать шесть независимых уравнений. Это могут быть три уравнения для суммы токов (1-ое правило Кирхгофа) в трех узлах, например, А, G и Н:

$$\begin{aligned} \text{А: } I_0 - I_3 - I_1 &= 0, \\ \text{G: } I_3 - I_5 - I_4 &= 0, \\ \text{Н: } I_1 + I_5 - I_2 &= 0, \end{aligned}$$

и три уравнения для суммы падений напряжения (2-е правило Кирхгофа) при обходе трех контуров, например, АНВСДА, АЕГНА и GFBHG:

$$\begin{aligned} \text{АНВСДА: } I_1 r + 2I_2 r &= \mathcal{E}, \\ \text{АЕГНА: } 2I_3 r + I_5 r - I_1 r &= 0, \\ \text{GFBHG: } I_4 r - 2I_2 r - I_5 r &= 0. \end{aligned}$$

Исключая последовательно токи  $I_1 - I_5$  в этой системе уравнений, получаем выражение для тока  $I_0$ :

$$I_0 = \frac{5\mathcal{E}}{7r},$$

откуда получаем искомое сопротивление цепи:

$$R_{AB} = \frac{7}{5} r .$$

Способ 3. Метод узловых потенциалов.

Для применения метода узловых потенциалов вновь используем схему на рис. 14.4в. Согласно этому методу потенциалу одного из узлов следует присвоить нулевое значение. Примем  $\varphi_A = 0$ , тогда  $\varphi_B = -\mathcal{E}$  в соответствии с тем, как подключена батарея ЭДС; потенциалы узлов G и Н обозначим, соответственно,  $\varphi_G$  и  $\varphi_H$ .

Используя закон Ома для каждого из участков цепи, выразим искомые токи через заданные величины и введенные потенциалы:

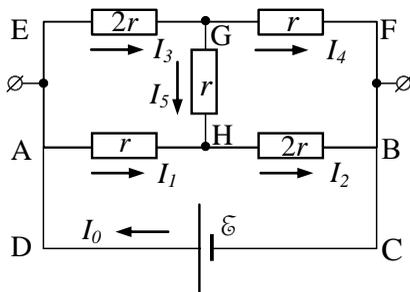


Рис. 14.4в. Схема электрической цепи для расчета с использованием правил Кирхгофа.

$$I_1 = \frac{0 - \varphi_H}{r} = (0 - \varphi_H)\Lambda, \quad (14.11)$$

$$I_2 = 0.5(\varphi_H + \mathcal{E})\Lambda, \quad (14.12)$$

$$I_3 = 0.5(0 - \varphi_G)\Lambda, \quad (14.13)$$

$$I_4 = (\varphi_G + \mathcal{E})\Lambda, \quad (14.14)$$

$$I_5 = (\varphi_G - \varphi_H)\Lambda. \quad (14.15)$$

Здесь и далее через  $\Lambda = \frac{1}{r}$  обозначена проводимость участка цепи с сопротивлением  $r$ .

Для узлов В, G и H запишем уравнения согласно первому правилу Кирхгофа:

$$\text{В:} \quad I_2 + I_4 - I_0 = 0, \quad (14.16)$$

$$\text{G:} \quad I_3 - I_5 - I_4 = 0, \quad (14.17)$$

$$\text{H:} \quad I_1 + I_5 - I_2 = 0. \quad (14.18)$$

Подставляя выражения для токов  $I_1 - I_5$  в уравнения (14.17) и (14.18), находим потенциалы  $\varphi_G$  и  $\varphi_H$ :

$$\varphi_G = -\frac{4}{7}\mathcal{E},$$

$$\varphi_H = -\frac{3}{7}\mathcal{E}.$$

Подставив полученные потенциалы в выражения (14.12) и (14.14), найдем токи  $I_2$  и  $I_4$ :

$$I_2 = \frac{2\mathcal{E}}{7r},$$

$$I_4 = \frac{3\mathcal{E}}{7r},$$

исключив которые из уравнения (14.16), получим, как и в предыдущем варианте решения, силу тока  $I_0$  и искомое сопротивление цепи:

$$I_0 = \frac{5\mathcal{E}}{7r},$$

$$R_{AB} = \frac{7}{5}r.$$

*Примечание.* Таким образом, из приведенного примера очевидно, что для рассмотренной цепи только метод контурных токов имеет ощутимые преимущества над двумя другими методами

в отношении простоты решения. Поэтому необходим предварительный анализ электрической схемы для выбора рационального метода решения.

**Ответ:**  $R_{AB} = \frac{7}{5} r$ .

**Задача 14.3.3.** Найти токи в схеме, представленной на рис. 14.5. Даны величины сопротивлений –  $R_1 = 10$  Ом,  $R_2 = 5$  Ом,  $R_3 = 8$  Ом,  $R_4 = 2$  Ом,  $R_5 = 1$  Ом,  $R_6 = 2$  Ом и ЭДС батарей –  $\mathcal{E}_1 = 10$  В,  $\mathcal{E}_2 = 5$  В,  $\mathcal{E}_3 = 8$  В,  $\mathcal{E}_4 = 2$  В.

**Решение**

Для обоснования выбора метода решения задачи проанализируем электрическую схему.

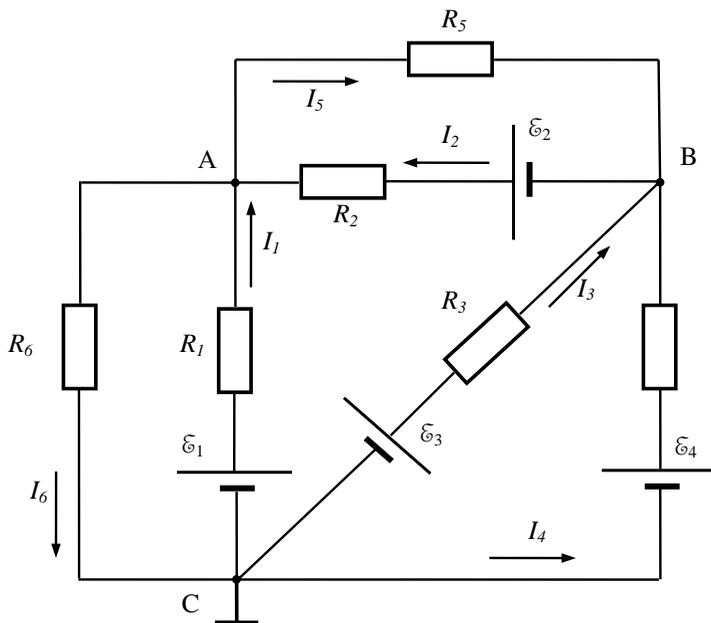


Рис. 14.5. Схема цепи для расчета по методу узловых потенциалов.

В представленной схеме нужно определить силу шести токов. Применение метода Кирхгофа потребует записать шесть независимых уравнений – для двух узлов и четырех контуров. По методу контурных токов придется вводить четыре контурных тока и

записывать столько же уравнений. По методу узловых потенциалов нужно будет определять потенциалы всего двух узлов (А и В), приняв потенциал узла С за нулевой. Поэтому выберем последний метод.

Итак, отсчет потенциалов будем вести от узла С, т.е. примем  $\varphi_C = 0$ ; искомые потенциалы узлов А и В обозначим соответственно  $\varphi_A$  и  $\varphi_B$ . Примем направления токов  $I_i$ , протекающих в ветвях цепи, например, так, как показано на рис. 14.5.

Используя закон Ома для каждого из участков цепи, выразим искомые токи через заданные величины и введенные потенциалы:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 - \varphi_A}{R_1} = (\mathcal{E}_1 - \varphi_A)\Lambda_1,$$

$$I_2 = (\varphi_B - \varphi_A + \mathcal{E}_2)\Lambda_2,$$

$$I_3 = (\mathcal{E}_3 - \varphi_B)\Lambda_3,$$

$$I_4 = (\mathcal{E}_4 - \varphi_B)\Lambda_4,$$

$$I_5 = (\varphi_A - \varphi_B)\Lambda_5,$$

$$I_6 = \varphi_A\Lambda_6.$$

Здесь и далее через  $\Lambda_i = \frac{1}{R_i}$  обозначим проводимость  $i$ -го участка

цепи.

Запишем уравнения по 1-у правилу Кирхгофа для узла А:

$$I_1 + I_2 - I_5 - I_6 = 0$$

и для узла В:

$$-I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = 0.$$

В эти равенства подставим выражения для токов  $I_i$  и сгруппируем коэффициенты (проводимости) при  $\varphi_A$  и  $\varphi_B$  в их левой части, а произведения  $\mathcal{E}_i\Lambda_i$  отнесем в правую часть:

$$(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_5 + \Lambda_6)\varphi_A - (\Lambda_2 + \Lambda_5)\varphi_B = \mathcal{E}_1\Lambda_1 + \mathcal{E}_2\Lambda_2,$$

$$-(\Lambda_2 + \Lambda_5)\varphi_A + (\Lambda_2 + \Lambda_3 + \Lambda_4 + \Lambda_5)\varphi_B = -\mathcal{E}_2\Lambda_2 + \mathcal{E}_3\Lambda_3 + \mathcal{E}_4\Lambda_4.$$

Таким образом, получены два уравнения для нахождения потенциалов  $\varphi_A$  и  $\varphi_B$ . Подставив полученные значения потенциалов в выражения для  $I_i$ , можно рассчитать все искомые токи. Очевидно, что эти операции в общем (буквенном) виде приведут к громоздким выражениям. Поэтому рационально использовать заданные в задаче числовые значения величин сопротивлений и ЭДС батарей в выражениях для  $\varphi_A$  и  $\varphi_B$ , что дает для узлов А и В:

$$1.8\varphi_A - 1.2\varphi_B = 2,$$

$$-1.2 \varphi_A + 1.825 \varphi_B = 1,$$

откуда

$$\varphi_A \approx 2.63 \text{ В и } \varphi_B \approx 2.27 \text{ В.}$$

Далее для токов в цепи получаем:

$$I_1 = 0.737 \text{ А, } I_2 = 0.928 \text{ А, } I_3 = 0.716 \text{ А,}$$

$$I_4 = -0.135 \text{ А, } I_5 = 0.365 \text{ А, } I_6 = 1.315 \text{ А.}$$

*Примечание.* Систему уравнений для нахождения потенциалов узлов можно составить формальным образом, руководствуясь следующими правилами.

1) В левой части  $i$ -го уравнения записывается со знаком «+» потенциал  $\varphi_i$   $i$ -го узла, для которого составляется данное уравнение, умноженный на сумму проводимостей  $\Lambda_{ij}$  ветвей, присоединенных к данному узлу, и со знаком «-» – потенциалы  $\varphi_k$  соседних узлов, каждый из которых умножен на сумму проводимостей  $\Lambda_{ik}$  ветвей, присоединенных к  $i$ -му и  $k$ -му узлам.

2) В правой части  $i$ -го уравнения записывается т.н. «узловой ток», равный сумме произведений ЭДС ветвей, подходящих к  $i$ -му узлу, и проводимостей этих ветвей. Знак «+» берут, если ЭДС обращена положительным полюсом к  $i$ -му узлу, в противном случае ставится знак «-».

**Ответ:**  $I_1 = 0.737 \text{ А, } I_2 = 0.928 \text{ А, } I_3 = 0.716 \text{ А,}$

$$I_4 = -0.135 \text{ А, } I_5 = 0.365 \text{ А, } I_6 = 1.315 \text{ А.}$$

### Задачи типа 14.3

*Разветвленные цепи, сводимые к неразветвленным благодаря элементам симметрии.*

**Методы решения.** Задачи этого типа, в принципе, можно решить общим методом, например, с помощью правил Кирхгофа. При этом, однако, решение зачастую получается громоздким или, в ряде случаев, приводит к бесконечной системе уравнений, анализ которой требует особых методов.

Возможны разные способы сведения задач этого типа к задаче с неразветвленной цепью: соединение точек равного потенциала, удаление проводников с нулевым током, соединяющих точки равного потенциала, добавление дополнительного звена к бесконечной повторяющейся цепочке и др.

**Задача 14.3.4.** Найти сопротивление  $R_{AB}$  между точками А и В в схеме, представленной на рис. 14.6. Даны величины сопротивлений  $R, r, R_1$ .

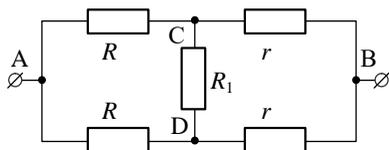


Рис. 14.6. Схема соединения резисторов.

### Решение

При подключении данной цепи к источнику ЭДС в силу симметрии схемы потенциалы точек С и D будут одинаковы, и ток в  $R_1$  отсутствует.

Способ 1. Ввиду равенства потенциалов точек С и D их можно соединить между собой. Схема сводится к последовательному соединению левого и правого участков с сопротивлениями  $\frac{1}{2}R$  и

$\frac{1}{2}r$  соответственно, что дает искомое сопротивление:

$$R_{AB} = \frac{1}{2}(R + r).$$

Способ 2. Поскольку тока в участке CD нет, резистор  $R_1$  можно убрать. Схема сводится к параллельному соединению двух одинаковых участков с сопротивлением  $(R + r)$ , что дает тот же результат.

**Ответ:**  $R_{AB} = \frac{1}{2}(R + r).$

**Задача 14.3.5.** Бесконечная цепь образована повторением звена  $R_1, R_2$  (рис. 14.7а). Найти сопротивление  $R_{AB}$  между точками А и В.

### Решение

Вся цепочка эквивалентна сопротивлению  $R_{AB}$ . Ввиду ее бесконечности добавление еще одного звена  $R_1, R_2$  не изменит ее сопротивления (рис. 14.7б), поэтому:

$$R_{AB} = R_1 + \frac{R_2 R_{AB}}{R_2 + R_{AB}},$$

$$R_{AB}^2 - R_1 R_{AB} - R_1 R_2 = 0.$$

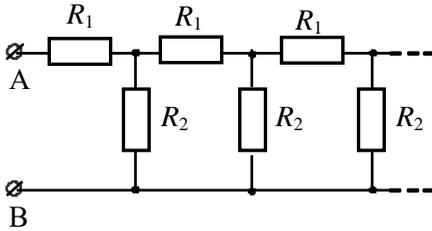


Рис. 14.7а. Схема бесконечной цепочки резисторов.

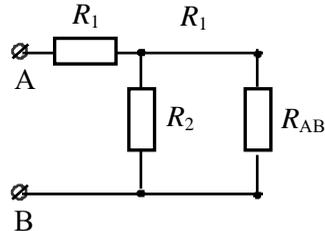


Рис. 14.7б. Эквивалентная схема бесконечной цепочки резисторов.

Решая полученное уравнение, находим искомое сопротивление  $R_{AB}$ :

$$R_{AB} = \frac{R_1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4R_2}{R_1}} \right);$$

корень со знаком «минус» перед радикалом дает  $R_{AB} < 0$ , не имеющий физического смысла.

$$\text{Ответ: } R_{AB} = \frac{R_1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4R_2}{R_1}} \right).$$

**Задача 14.3.6.** Имеется бесконечная сетка с квадратными ячейками. Сопротивление каждого проводника между узлами ячейки равно  $R$ . Найти сопротивление  $R_{AB}$  между соседними узлами (рис. 14.8).

### Решение

Данная задача не сводится к неразветвленной цепи, но позволяет ввиду симметрии эффективно применить принцип суперпозиции.

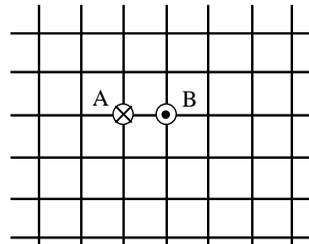


Рис. 14.8. Бесконечная проводящая сетка с квадратными ячейками.

Подсоединим к точкам А и В источник ЭДС. Относительно бесконечности точки А и В эквивалентны, поэтому картину протекания тока можно представить, как суперпозицию тока, входящего в точку А и симметрично растекающегося в бесконечность, и тока, симметрично сходящегося в точку В из бесконечности. Если полный ток между точками А и В обозначить  $I$ , то ток, входящий в А, и ток, сходящийся к В, симметрично делится на четыре части по  $I/4$ . По проводу АВ потечет ток

$$I/4 + I/4 = I/2,$$

следовательно, напряжение

$$U_{AB} = \frac{I}{2} R.$$

По закону Ома

$$R_{AB} = U_{AB} / I = R/2.$$

Решение этой задачи по правилам Кирхгофа привело бы к бесконечной системе уравнений.

**Ответ:**  $R_{AB} = \frac{1}{2} R.$

**Задача 14.3.7** Найти сопротивление  $R_x$  цепи в виде шестиугольника (рис. 14.9а) между точками А и В. Сопротивление каждого проводника в цепи равно  $R$ .

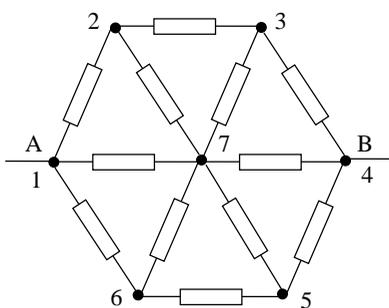


Рис. 14.9а. Исходная схема соединения резисторов.

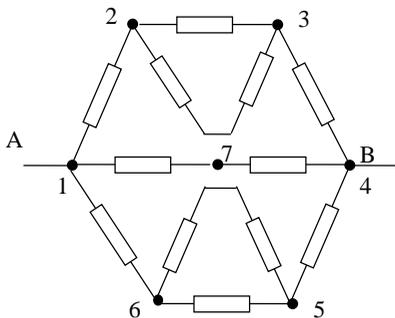


Рис. 14.9б. Эквивалентная схема соединения резисторов.

### Решение

Из соображений симметрии очевидно, что ток в проводнике 1–7 равен току в проводнике 7–4, ток 2–7 равен току 7–3, ток 6–7

равен току 7–5 (рис. 14.9а). Поэтому распределение токов и, следовательно, сопротивление шестиугольника не изменится, если отсоединить проводники 2–7, 7–3, 6–7 и 7–5 от центра в точке 7 (рис. 14.9б).

Далее легко находим сопротивление верхней и нижней ветвей:

$$R_{1234} = R_{1654} = \frac{8}{3} R,$$

сопротивление средней ветви:

$$R_{174} = 2R$$

и искомое полное сопротивление цепи:

$$R_x = \frac{4}{5} R.$$

$$\text{Ответ: } R_x = \frac{4}{5} R.$$

### Задачи типа 14.4

*Расчет количества тепла или тепловой мощности, выделяющейся в цепях линейных проводников.*

**Методы решения.** Задачи этого типа решают с использованием закона Джоуля–Ленца (13.11) после определения значений токов (или напряжений), применяя методы, описанные для задач типа 14.1–14.3.

**Задача 14.3.8.** Какую максимальную полезную (выделяемую на внешнем сопротивлении) мощность можно получить от аккумулятора с ЭДС  $\mathcal{E} = 10$  В и внутренним сопротивлением  $r = 1$  Ом? Каково при этом сопротивление  $R$  внешней цепи?

### Решение

Мощность  $N$ , выделяющаяся на внешнем сопротивлении  $R$ , согласно закону Джоуля–Ленца равна:

$$N = IU = I^2 R,$$

где  $I$  – ток в цепи, а  $U$  – падение напряжения на сопротивлении  $R$ .

По закону Ома для полной цепи, содержащей ЭДС, можно записать:

$$U = \mathcal{E} - Ir,$$

и, следовательно, ток в цепи будет равен:

$$I = \frac{\mathcal{E} - U}{r}.$$

Таким образом, для выделяемой на внешнем сопротивлении мощности можно записать:

$$N = \frac{\mathcal{E}U - U^2}{r}.$$

Найдем, при каком падении напряжения  $U$  на сопротивлении  $R$  выделяется максимальная мощность:

$$\frac{dN}{dU} = \frac{\mathcal{E} - 2U}{r} = 0,$$

откуда:

$$U = \frac{\mathcal{E}}{2},$$

$$N_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r} = 25 \text{ Вт}.$$

Ток в этом случае равен:

$$I = \frac{\mathcal{E} - U}{r} = \frac{\mathcal{E}}{2r},$$

а искомое внешнее сопротивление должно быть равно:

$$R = \frac{N_{\max}}{I^2} = \frac{\mathcal{E}^2 4r^2}{4r^2 \mathcal{E}^2} = r.$$

Итак, для того, чтобы выделялась максимальная полезная мощность, внешнее сопротивление должно равняться внутреннему сопротивлению источника тока.

**Ответ:**  $N_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r} = 25 \text{ Вт}$  при  $R = r$ .

#### 14.4 Задачи для самостоятельного решения

**Задача 14.4.1.** В схеме, представленной на рис. 14.10, дано:  $R, R_{1-3}, \mathcal{E}, \mathcal{E}_0$ . Найти силу тока через резистор  $R$ .

**Ответ:**

$$I = \frac{\mathcal{E}(R_2 + R_3) + \mathcal{E}_0 R_3}{R(R_2 + R_3) + R_2 R_3}.$$

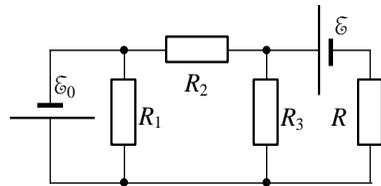


Рис. 14.10. Схема цепи к задаче 14.4.1.

**Задача 14.4.2.** Между точками А и В в схеме, представленной на рис. 14.11, поддерживается напряжение  $U = 20$  В,  $R = 5$  Ом. Найти силу тока и его направление на участке цепи CD.

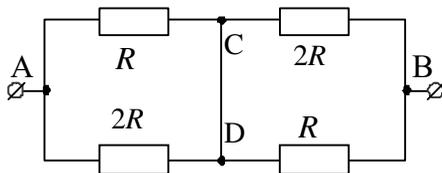


Рис. 14.11. Схема цепи к задаче 14.4.2.

*Ответ:*  $I = \frac{U}{4R} = 1$  А; направление тока: от С к D.

**Задача 14.4.3.** Найти сопротивление между точками А и В в схеме на рис. 14.12, если  $R = 100$  Ом,  $r = 50$  Ом.

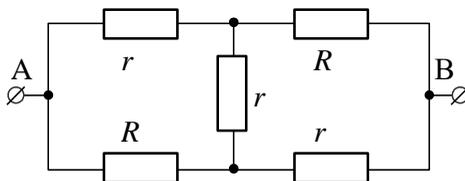


Рис. 14.12. Схема цепи к задаче 14.4.3.

*Ответ:*  $R_{AB} = \frac{r(r + 3R)}{R + 3r} = 70$  Ом.

**Задача 14.4.4.** В схеме, представленной на рис. 14.13, известны  $R_{1-5}$ , причем  $R_1/R_2 = R_3/R_4$ . Найти сопротивление  $R_{AB}$  между точками А и В.

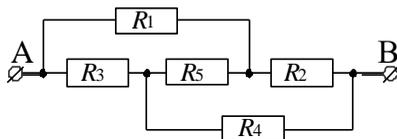


Рис. 14.13. Схема цепи к задаче 14.4.4.

$$\text{Ответ: } R_{AB} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}.$$

**Задача 14.4.5.** Сопротивление каждого ребра куба равно  $R$ . Найти сопротивление между точками А и В, А и С, А и D (рис. 14.14).

$$\text{Ответ: } R_{AB} = (5/6)R, R_{AC} = (7/12)R, \\ R_{AD} = (3/4)R.$$

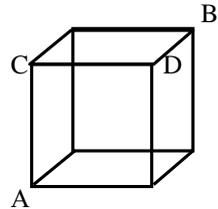


Рис. 14.14. Схема цепи к задаче 14.4.5.

**Задача 14.4.6.** Найти сопротивление  $R_{AB}$  между точками А и В бесконечной цепочки (рис. 14.15).

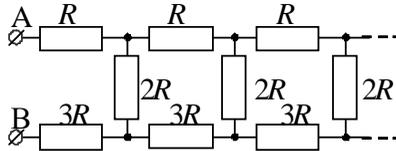


Рис. 14.15. Схема цепи к задаче 14.4.6.

$$\text{Ответ: } R_{AB} = 2R(1 + \sqrt{3}).$$

**Задача 14.4.7.** Заданные сопротивления  $R_1$  и  $R_2$  подобраны так, что ток через гальванометр  $G$  равен нулю. Считая известными ЭДС  $\mathcal{E}_{1,2}$ , найти ЭДС  $\mathcal{E}$  (рисунок 14.16).

$$\text{Ответ: } \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_1 R_2 + \mathcal{E}_2 R_1}{R_1 + R_2}.$$

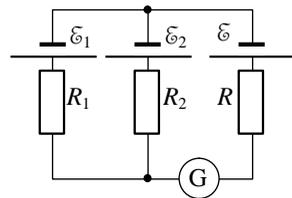


Рис. 14.16. Схема цепи к задаче 14.4.7.

**Задача 14.4.8.** В схеме, представленной на рис. 14.17, известны ЭДС  $\mathcal{E}_1$ ,  $\mathcal{E}_2$ ,  $\mathcal{E}_3$  и внутренние сопротивления  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$ .

1) Найти напряжение  $U$ , показываемое идеальным вольтметром  $V$  (рис. 14.17).

2) Чему равно  $U$ , если  $\mathcal{E}_1/r_1 = \mathcal{E}_2/r_2 = \mathcal{E}_3/r_3$ ?

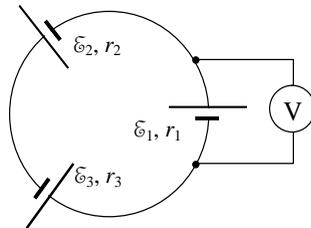


Рис. 14.17. Схема цепи к задаче 14.4.8.

Ответ:

$$1) U = -r_1 \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3}{r_1 + r_2 + r_3} - \mathcal{E}_1;$$

$$2) U = 0.$$

**Задача 14.4.9.** Найти ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутреннее сопротивление  $r$  источника, эквивалентного двум параллельно соединенным элементам с ЭДС и внутренними сопротивлениями  $\mathcal{E}_1, r_1$  и  $\mathcal{E}_2, r_2$  соответственно.

$$\text{Ответ: } \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 + r_2}, \quad r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

**Задача 14.4.10** ([2], 3.175). Два последовательно соединенных одинаковых источника ЭДС имеют различные внутренние сопротивления  $r_1$  и  $r_2$ , причем  $r_2 > r_1$ . Найти внешнее сопротивление  $R$ , при котором разность потенциалов на клеммах одного из источников (какого именно?) равна нулю.

Ответ:  $R = r_2 - r_1$ ,  $\Delta\varphi = 0$  у источника тока с сопротивлением  $r_2$ .

**Задача 14.4.11** Аккумулятор с ЭДС  $\mathcal{E} = 2,6$  В, замкнутый на внешнюю цепь, дает ток  $I = 1$  А при напряжении на его клеммах  $U = 2$  В. Найти тепловую мощность  $P$ , выделяемую в аккумуляторе.

Ответ:  $P = I(\mathcal{E} - U) = 0,6$  Вт.

**Задача 14.4.12** ([2], 3.195). Электромотор постоянного тока подключили к напряжению  $U$ . Сопротивление его обмотки равно  $R$ . При каком токе через обмотку полезная мощность мотора  $N$  будет максимальна? Чему равна эта  $N_{\text{макс}}$ ? Каков при этом к.п.д. мотора  $\eta$ ?

$$\text{Ответ: } I = \frac{U}{2R}; \quad N_{\text{макс}} = \frac{U^2}{4R}; \quad \eta = 0,5.$$

**Задача 14.4.13** ([2], 3.191). Сколько тепла выделится в спирали с сопротивлением  $R = 75$  Ом при прохождении через нее количества электричества  $q = 100$  Кл, если ток в спирали:

а) равномерно убывал до нуля в течение  $\Delta t = 50$  с;

б) монотонно убывал до нуля так, что через каждые  $\Delta t = 2,0$  с он уменьшался вдвое.

Ответ: а)  $Q = 4q^2R/3\Delta t = 20$  кДж;  
 б)  $Q = \ln 2 q^2R/2\Delta t = 0,13$  МДж.

**Задача 14.4.14** ([2], 3.199). В схеме на рис. 14.18  $R_1 = 20$  Ом и  $R_2 = 30$  Ом. При каком сопротивлении  $R_x$  выделяемая на нем тепловая мощность практически не будет зависеть от малых изменений этого сопротивления? Напряжение между точками А и В постоянно.

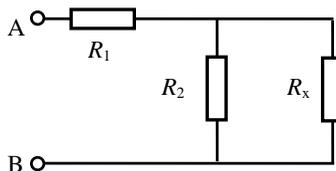


Рис. 14.18. Схема цепи к задаче 14.4.14.

Ответ  $R_x = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) = 12$  Ом.

**Задача 14.4.15.** Цепь состоит из двух батарей с ЭДС  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  и резисторов  $R_{1-4} = R$  (рис. 14.19). Какая тепловая мощность рассеивается на каждом из этих резисторов?

Ответ:  $P_1 = P_4 = \frac{(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)^2}{4R}$ ,

$$P_2 = P_3 = \frac{(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)^2}{4R}.$$

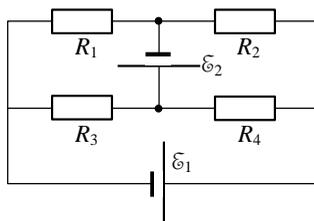


Рис. 14.19. Схема цепи к задаче 14.4.15.

**Задача 14.4.16.** В схеме, представленной на рис. 14.20, даны величины  $\mathcal{E}_{1,2}$ ,  $R_{1,2}$ . При каком сопротивлении  $R$  выделяемая на нем тепловая мощность будет максимальна? Чему она равна?

Ответ:  $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ ;

$$P_{\text{макс}} = \frac{(\mathcal{E}_1 R_2 + \mathcal{E}_2 R_1)^2}{4R_1 R_2 (R_1 + R_2)}.$$

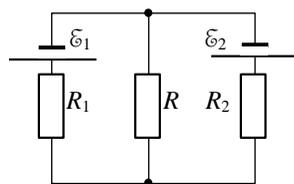


Рис. 14.20. Схема цепи к задаче 14.4.16.

**МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПРОВОДНИКОВ  
С ТОКОМ В ВАКУУМЕ. СИЛЫ АМПЕРА  
И ЛОРЕНЦА. САМО- И ВЗАМОИНДУКЦИЯ.  
ПОНДЕРОМАТОРНЫЕ СИЛЫ  
И ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ**

**3**

- **МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ ПРОВОДНИКОВ  
С ТОКОМ. ЗАКОН БИО–САВАРА–ЛАПЛАСА**
- **МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ ПРОВОДНИКОВ  
С ТОКОМ. ТЕОРЕМА О ЦИРКУЛЯЦИИ.  
ВЕКТОРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ**
- **СИЛА АМПЕРА. СИЛА ЛОРЕНЦА.  
ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ  
В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ**
- **ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ**
- **САМОИНДУКЦИЯ И ВЗАИМНАЯ ИНДУКЦИЯ.  
ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ**
- **ПОНДЕРОМАТОРНЫЕ СИЛЫ  
И РАБОТА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ**

## Глава 15

## МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ ПРОВОДНИКОВ С ТОКОМ. ЗАКОН БИО–САВАРА–ЛАПЛАСА

### 15.1. Теоретические вопросы

**Линейный ток** – ток, у которого линейные размеры любого поперечного сечения трубки тока гораздо меньше, чем расстояние от этого сечения до рассматриваемой точки наблюдения или характерные линейные размеры неоднородности поля, в котором находится сечение трубки.

**Элемент линейного тока** – физически бесконечно малый элемент длины  $dl$  линейного тока. Этот элемент тока характеризуется физической величиной, также называемой **линейным элементом тока**, и равной  $d\mathbf{i} \equiv I d\mathbf{l}$ , где направление вектора  $d\mathbf{l}$  совпадает с направлением плотности тока.

**Элемент объемного тока** – физически бесконечно малый элемент объема  $dV$  пространства, в котором течет ток. Этот элемент тока характеризуется физической величиной, также называемой **объемным элементом тока** и равной  $d\mathbf{i} \equiv j dV$ , где  $j$  – плотность тока.

Элемент линейного тока  $I d\mathbf{l}$  эквивалентен объемному элементу  $j dV$  того же тока:  $I d\mathbf{l} = j dV$ . В зависимости от выбранной модели описания токов в формулах можно перейти от линейных токов к объемным и наоборот.

**Закон Био–Савара–Лапласа** Индукция магнитного поля (магнитная индукция)  $d\mathbf{B}$ , создаваемого элементом линейного или объемного тока, равна:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I [d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3} \quad \text{или} \quad d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[j, \mathbf{r}]}{r^3} dV, \quad (15.1)$$

где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор относительно линейного или объемного элемента тока ( $I d\mathbf{l}$  или  $j dV$ ) точки наблюдения, в которой вычисляется магнитная индукция поля  $d\mathbf{B}$ ;  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2$  – магнитная постоянная ( $\mu_0/4\pi = 10^{-7} \text{ Н/А}^2$ ).

**Принцип суперпозиции для магнитного поля:** индукция магнитного поля, создаваемого совокупностью элементов

постоянного тока, равна сумме индукций магнитных полей, создаваемых каждым элементом в отдельности.

**Линия магнитной индукции** – воображаемая направленная линия в пространстве, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением индукции магнитного поля в этой точке (в общем случае в данный момент времени).

**Свойства линий магнитной индукции:**

- 1) через любую точку в магнитном поле можно провести линию магнитной индукции;
- 2) линии магнитной индукции не пересекаются;
- 3) линии магнитной индукции замкнуты или уходят в бесконечность;
- 4) линии гуще там, где модуль индукции магнитного поля больше.

**Прямой ток** – постоянный линейный ток, текущий по физически бесконечно длинному прямому проводнику. Поперечные линейные размеры проводника гораздо меньше расстояния до точки наблюдения, а длина гораздо больше этого расстояния.

**Магнитная индукция постоянного прямого тока** направлена по касательной к окружности с центром на проводе, ее направление согласовано с направлением тока по правилу буравчика (рис.15.1). Модуль магнитной индукции пропорционален силе тока  $I$  и обратно пропорционален расстоянию  $d$  от точки наблюдения до прямого тока:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I}{d}.$$

**Магнитный момент плоского витка с током** равен

$$p_m = ISn, [p_m] = \text{А} \cdot \text{м}^2, \quad (15.2)$$

где  $I$  – сила тока в витке,  $S$  – площадь витка,  $n$  – нормаль к плоскости витка, согласованная с направлением тока по правилу буравчика (рис.15.2).

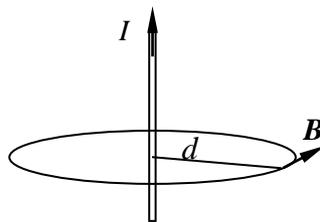


Рис. 15.1. Линия индукции магнитного поля прямого тока.

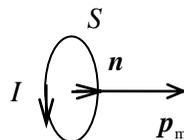


Рис. 15.2. Магнитный момент плоского витка с током.

**Элементарный ток (точечный магнитный диполь)** – это плоский физически бесконечно малый (по сравнению с расстоянием до точки наблюдения или с линейными размерами неоднородности внешнего магнитного поля) виток с постоянным током.

Индукция  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  магнитного поля, создаваемого элементарным током, равна:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3(\mathbf{p}_m \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2 \mathbf{p}_m}{r^5}, \quad (15.3)$$

где  $\mathbf{p}_m$  – магнитный момент элементарного тока,  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор точки наблюдения относительно места расположения элементарного тока.

## 15.2. Основные типы задач (классификация)

15.1 Определение индукции магнитного поля, создаваемого током заданной конфигурации.

15.2 Определение магнитного момента контура с током и индукции магнитостатического поля, созданного заданным распределением магнитных диполей.

## 15.3. Методы решения и примеры решения задач

### Задачи типа 15.1

*Определение индукции магнитного поля, создаваемого током заданной конфигурации.*

**Метод решения.** Если необходимо определить индукцию магнитостатического поля линейного тока, ограниченного в пространстве, то решение основывается на использовании закона Био-Савара-Лапласа (15.1) и принципа суперпозиции.

**Задача 15.3.1.** Определить индукцию магнитного поля, создаваемого отрезком прямого провода длиной  $2L$  в точке А, находящейся в плоскости, перпендикулярной отрезку и проходящей через его центр, на расстоянии  $a$  от провода. Сила тока, текущего в проводе, равна  $I$ .

## Решение

В данной задаче ток, магнитное поле которого необходимо определить, ограничен в пространстве и расположен симметрично относительно плоскости, указанной в условии.

Выберем правую декартову систему координат, у которой ось  $Z$  совпадает с проводом, начало – с центром провода, ось  $Y$  проходит через точку  $A$ , ось  $X$  направлена перпендикулярно плоскости чертежа на нас (рис. 15.3).

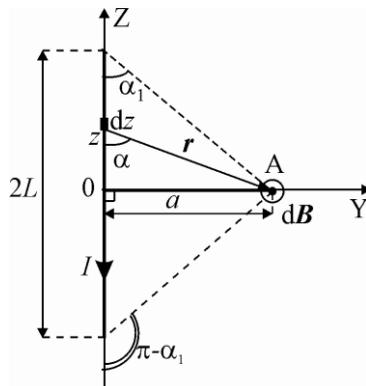


Рис. 15.3. Определение индукции магнитного поля, создаваемого отрезком прямого провода с током.

Рассмотрим произвольный элемент тока длиной  $dl = dz$ , находящийся на расстоянии  $z$  от начала отсчета. Он создает в точке  $A$ , характеризуемой радиус-вектором  $r$ , магнитное поле с индукцией  $d\mathbf{B}$ .

Согласно (15.1) направление вектора  $d\mathbf{B}$  определяется направлением вектора  $[d\mathbf{l} \mathbf{r}]$ , т.е. вектор  $d\mathbf{B}$  направлен на нас перпендикулярно плоскости рисунка (так как в рассматриваемом случае ток течет против направления оси  $Z$  и вектор  $d\mathbf{l}$  направлен в ту же сторону). Линии индукции магнитного поля, создаваемого таким прямолинейным участком тока, лежат в плоскости, перпендикулярной проводу.

Пусть угол, который составляет некоторый элемент тока с направлением на точку  $A$ , равен  $\alpha$ . Тогда:

$$r = \frac{a}{\sin \alpha}; \quad z = a \operatorname{ctg} \alpha; \quad dz = -\frac{a d\alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

В соответствии с законом Био-Савара-Лапласа (15.1)

$$d\mathbf{B} = d\mathbf{B}_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I dz}{r^2} \sin \alpha = -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{a} \sin \alpha d\alpha.$$

В силу симметрии задачи для нахождения  $\mathbf{B}$  можно проинтегрировать это выражение по половине провода и удвоить результат:

$$B = B_x = 2 \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\pi/2}^{\alpha_1} (-\sin \alpha) d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \cos \alpha_1.$$

Здесь  $\alpha_1$  – угол, который составляет с направлением на точку А крайний элемент тока. Так как  $\cos \alpha_1 = \frac{L}{\sqrt{a^2 + L^2}}$ , окончательно

получаем:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \cdot \frac{L}{\sqrt{a^2 + L^2}}.$$

*Замечание 1.* Если плоскость, в которой лежит рассматриваемая точка, перпендикулярна проводу, но не проходит через его центр, то индукция магнитного поля может быть вычислена аналогично:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2),$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – углы, которые составляют с направлением на точку расчета крайние элементы тока.

*Замечание 2.* В предельном случае  $a \ll L$  (магнитное поле, создаваемое бесконечным прямым проводом) получаем:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}.$$

Это выражение проще получить из теоремы о циркуляции (16.1) глава 16, что показано далее в **задаче 16.3.1**.

**Ответ:** вектор магнитной индукции лежит в плоскости, перпендикулярной проводу, его модуль равен  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \cdot \frac{L}{\sqrt{a^2 + L^2}}$ .

**Задача 15.3.2.** Найти величину и направление вектора магнитной индукции в центре плоского контура, имеющего вид прямоугольника, если длины его сторон равны соответственно  $b$  и  $c$ , а ток равен  $I$ .

### Решение

Так как система проводника с током, представленная в условии задачи, ограничена в пространстве и представляет собой несколько отрезков линейного тока, то данная задача относится к типу 15.1.

Основываясь на решении задачи 15.3.1, можно сказать, что векторы индукции магнитного поля, создаваемого всеми сторонами рассматриваемого прямоугольника, в центре контура (точка  $O$  на рис. 15.4) будут направлены на нас и перпендикулярны плоскости рисунка. Их величины соответственно равны:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi \frac{c}{2}} \cdot \frac{b/2}{\sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4}}}$$

(индукция поля, создаваемого отрезками  $AB$  или  $CD$ );

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi b/2} \cdot \frac{c/2}{\sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4}}}$$

(индукция поля, создаваемого отрезками  $BC$  или  $DA$ ).

По принципу суперпозиции величина индукции магнитного поля в центре контура равна

$$B = 2(B_1 + B_2) = \frac{2\mu_0 I}{\pi bc} \sqrt{b^2 + c^2}.$$

**Ответ:** вектор магнитной индукции направлен перпендикулярно плоскости контура по правилу правого винта (см. рис. 15.4) и равен по модулю  $B = \frac{2\mu_0 I}{\pi bc} \sqrt{b^2 + c^2}$ .

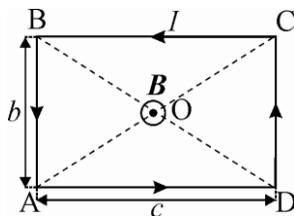


Рис. 15.4 Прямоугольный проводник с током и направление вектора магнитной индукции.

**Задача 15.3.3.** Определить величину индукции магнитного поля на оси кругового витка радиуса  $R$  с током  $I$  в зависимости от расстояния до его плоскости.

### Решение

Область существования тока ограничена, а распределение тока имеет осевую симметрию.

В силу осевой симметрии задачи и принципа суперпозиции вектор индукции магнитного поля кругового витка на его оси будет направлен вдоль этой оси. Направим ось  $X$  декартовой системы

координат вдоль оси витка, начало координат поместим в центр витка.

Вектор  $d\mathbf{B}$  индукции поля, создаваемого элементом тока  $I d\mathbf{l}$ , перпендикулярен к векторам  $d\mathbf{l}$  и  $\mathbf{r}$  и лежит в плоскости, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его диаметр, проведенный через  $d\mathbf{l}$  (рис. 15.5а). Проекция вектора  $d\mathbf{B}$  на ось  $X$  по закону Био-Савара-Лапласа (15.1) равна

$$dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \sin \alpha}{r^2} dl,$$

откуда получим:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \sin \alpha}{r^2} 2\pi R = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{IR^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

*Замечание 1.* В центре кольца ( $x = 0$ ) индукция магнитного поля равна  $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$ .

*Замечание 2.* Если магнитное поле создается не целым кольцом, а его частью длины  $\Delta l = R\varphi$  (рис. 15.5б), то индукция магнитного поля в центре кольца ( $r = R$ ;) равна:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{R^2} \cdot \varphi R = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I\varphi}{R}.$$

*Замечание 3.* В предельном случае при  $x \gg R$

$$B(x) \approx \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{IR^2}{x^3},$$

что совпадает с выражением для индукции поля точечного магнитного момента (элементарного тока) на его оси.

Действительно, плоский контур с током можно рассматривать как магнитный момент  $\mathbf{p}_m$ :

$$\mathbf{p}_m = IS \mathbf{n},$$

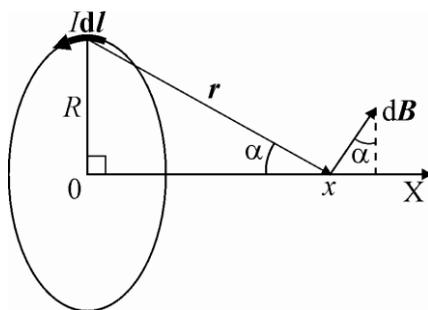


Рис. 15.5а. К определению индукции магнитного поля на оси кругового витка с током.

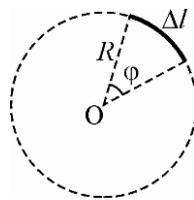


Рис.15.5б. Определение магнитного поля дуги.

где  $I$  – сила тока в контуре,  $S$  – площадь контура,  $\mathbf{n}$  – положительная нормаль к контуру, обходимому по направлению тока (рис. 15.5в).

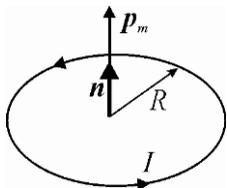


Рис. 15.5в. Магнитный момент кольца с током.

В случае  $x \gg R$  такой магнитный момент называют точечным магнитным моментом (магнитным диполем) или элементарным током и определяют индукцию его магнитного поля в произвольной точке на расстоянии  $r$  от центра витка по формуле:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\mathbf{p}_m \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_m}{r^3} \right).$$

При нахождении индукции магнитного поля на оси элементарного тока векторы  $\mathbf{p}_m$  и  $\mathbf{r}$  параллельны и  $r = x$ . В этом случае

$$B(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3p_m x^2}{x^5} - \frac{p_m}{x^3} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2p_m}{x^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I \pi R^2}{x^3} = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{IR^2}{x^3}.$$

$$\text{Ответ: } B = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{IR^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

**Задача 15.3.4.** Два одинаковых круговых витка, ток в каждом из которых равен  $I$ , располагаются так, что их плоскости параллельны, а центры лежат на одной оси на расстоянии  $L$  друг от друга. Радиус витков  $R$ . Предполагая, что токи в витках текут в одном направлении, определить, при каком соотношении между  $R$  и  $L$  магнитное поле в центре системы на оси витков будет максимально однородным, а также величину индукции этого поля.

### Решение

Выберем систему координат так, чтобы её ось  $X$  совпала с осью витков. Начало координат совместим с центром симметрии системы (см. рис. 15.6).

При решении данной задачи будем опираться на решение задачи 15.3.3.

Используя принцип суперпозиции, получим, что величина индукции магнитного поля в произвольной точке (с координатой  $x$ ) на оси равна

$$B(x) = \frac{\mu_0 I R^2}{2} \left\{ \left( R^2 + \left( \frac{L}{2} + x \right)^2 \right)^{-3/2} + \left( R^2 + \left( \frac{L}{2} - x \right)^2 \right)^{-3/2} \right\}.$$

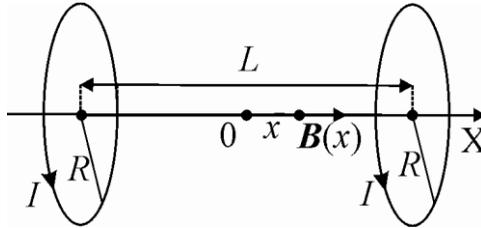


Рис. 15.6 Индукция магнитного поля на оси двух круговых витков с одинаковыми токами.

Рассмотрим магнитное поле вблизи начала координат. При разложении функции  $B(x)$  в ряд в окрестности точки  $x = 0$  получим:

$$B(x) = B(0) + xB'(0) + \frac{x^2}{2} B''(0) + \dots$$

Поле в окрестности точки  $x = 0$  будет тем однороднее, чем больше производных будут равны нулю. Покажем, что в данном случае  $B'(0) = 0$  и  $B''(0) = 0$ .

Введем обозначения:

$$F_1(x) \equiv \left( R^2 + \left( \frac{L}{2} + x \right)^2 \right)^{-3/2};$$

$$F_2(x) = F_1(-x) = \left( R^2 + \left( \frac{L}{2} - x \right)^2 \right)^{-3/2}.$$

Тогда  $B'(0) = 0$ , если  $F_1'(0) = -F_2'(0)$ , и  $B''(0) = 0$ , если  $F_1''(0) = -F_2''(0)$ .

Дифференцируя полученные функции, получаем:

условие  $F_1'(0) = -F_2'(0)$  выполняется при любых  $L$ ;

условие  $F_1''(0) = -F_2''(0)$  выполняется при  $L = R$ .

Таким образом, поле между витками на их оси максимально однородно, если расстояние между витками равно их радиусу.

Определим значение функции  $B(x)$  в точке  $x = 0$  при этом условии. Получим:

$$\begin{aligned} B(0)|_{L=R} &= \frac{\mu_0 I R^2}{2} 2 \left( R^2 + \frac{R^2}{4} \right)^{-3/2} = \mu_0 I R^2 \left( \frac{4}{5R^2} \right)^{3/2} = \\ &= \frac{\mu_0 I}{R} \left( \frac{4}{5} \right)^{3/2} \approx 0,715 \frac{\mu_0 I}{R}. \end{aligned}$$

*Замечание 1.* Ввиду того, что функции  $F_2(x) = F_1(-x)$ , не только первая производная, но и все нечетные производные от  $F_1(x) + F_2(x)$  равны нулю при любых  $L$ . Таким образом, первой не равной нулю будет производная 4 порядка.

*Замечание 2.* В поперечном направлении (перпендикулярно оси  $X$ ) область однородности поля примерно такая же, как и в продольном, однако доказательство этого факта достаточно сложное.

*Замечание 3.* Если в качестве объектов, создающих магнитное поле, рассмотреть две одинаковые тонкие катушки из  $N$  витков, то можно считать их эквивалентными двум кольцам радиуса  $R$  с током  $NI$  в каждом. Если расположить такие катушки соосно друг другу на расстоянии, равном их среднему радиусу, то магнитное поле между ними можно считать однородным и равным по модулю

$$B = \frac{\mu_0 NI}{R} \left( \frac{4}{5} \right)^{3/2} \approx 0,715 \frac{\mu_0 NI}{R}.$$

Такая система называется **катушками Гельмгольца**. Наряду с соленоидом они используются для создания однородного магнитного поля.

**Ответ:** магнитное поле на оси витков посередине между ними максимально однородно при  $L = R$ , и его индукция равна

$$B = \frac{\mu_0 I}{R} \left( \frac{4}{5} \right)^{3/2} \approx 0,715 \frac{\mu_0 I}{R}.$$

**Задача 15.3.5.** Найти модуль индукции магнитного поля на оси соленоида с током  $I$  в произвольной точке, из которой края соленоида видны под углами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Радиус сечения соленоида  $R$ , плотность намотки витков на единицу длины  $n$ .

## Решение

Учитывая осевую симметрию соленоида, выберем ось  $X$  системы координат совпадающей с его осью (рис. 15.7а). Точку, в которой требуется определить индукцию магнитного поля, примем за начало отсчета.

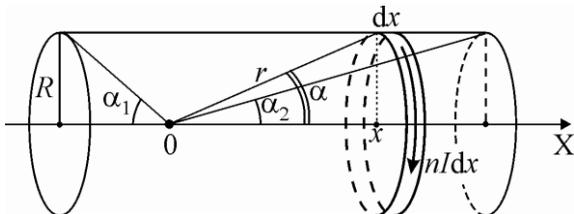


Рис. 15.7а. К определению магнитного поля на оси соленоида.

Магнитное поле, создаваемое соленоидом на его оси, можно представить как суперпозицию полей, создаваемых круговыми витками линейного тока, причем ширина участка соленоида с этими витками равна  $dx$ , а сила тока в каждом из них равна  $nI dx$ . Тогда, аналогично решению задачи 15.3.3, для модуля индукции магнитного поля такого витка на его оси получим:

$$dB(\alpha) = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{(nI dx)R \sin \alpha}{r^2},$$

здесь  $\alpha$  – угол, под которым видно рассматриваемое кольцо из точки наблюдения.

На рис. 15.7а видно, что  $r = R/\sin \alpha$  и  $x = R \operatorname{ctg} \alpha$ ,

а значит

$$dx = -R/\sin^2 \alpha \cdot d\alpha.$$

Так как проекции на ось  $X$  магнитных индукций от всех витков имеют одинаковый знак, получим искомый модуль индукции магнитного поля на оси соленоида:

$$B = \int dB(\alpha) = \frac{\mu_0 I n}{2} \int_{\pi-\alpha_1}^{\alpha_2} (-\sin \alpha) d\alpha = \frac{1}{2} \mu_0 I n (\cos \alpha_2 + \cos \alpha_1).$$

*Замечание 1.* Если длина соленоида много больше его радиуса (бесконечный соленоид), то  $\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2 = 1$ . Индукция

магнитного поля на оси такого соленоида не зависит от точки наблюдения и равна:

$$B_{\infty} = \mu_0 In .$$

*Замечание 2.* Для точки, находящейся в центре торца длинного соленоида,  $\alpha_1 = \pi/2$ ,  $\alpha_2 = 0$ , и индукция магнитного поля равна:

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 In = \frac{1}{2} B_{\infty} .$$

*Замечание 3.* Значения углов  $\alpha_1 > \pi/2$  или  $\alpha_2 > \pi/2$  соответствуют точкам, лежащим вне соленоида на его оси. Решение задачи не отличается от рассмотренного. При удалении от соленоида вдоль его оси  $\alpha_1 \rightarrow \pi$  и  $\alpha_2 \rightarrow 0$ , модуль индукции магнитного поля  $B \rightarrow 0$ .

Дополнение. В реальных соленоидах намотка осуществляется не в один слой, поэтому нельзя пренебрегать толщиной соленоида. Для такого соленоида поле на оси представляет собой суперпозицию полей тонких соленоидов разных радиусов:

$$B = \int_{R_1}^{R_2} dB(R),$$

где  $R_1$  и  $R_2$ , внутренний и внешний радиусы намотки.

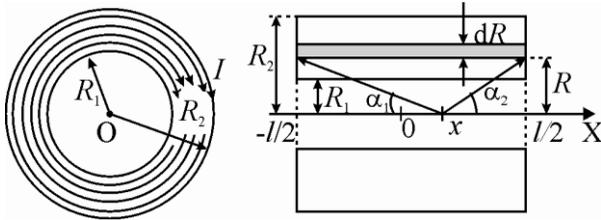


Рис. 15.76. К определению индукции магнитного поля на оси толстого соленоида.

Если общее число витков  $N$ , длина соленоида  $l$ , сила тока в обмотке  $I$ , то в случае равномерно намотанного провода имеем:

$$\begin{aligned} dB(x) &= \frac{\mu_0 NI \cdot dR}{2l(R_2 - R_1)} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) = \\ &= \frac{\mu_0 NI \cdot dR}{2l(R_2 - R_1)} \left( \frac{l/2 + x}{\sqrt{(l/2 + x)^2 + R^2}} + \frac{l/2 - x}{\sqrt{(l/2 - x)^2 + R^2}} \right). \end{aligned}$$

Здесь  $x$  – расстояние от центра соленоида до рассматриваемой точки на его оси (рис. 15.7б). Тогда модуль индукции результирующего поля на оси соленоида равен:

$$B(x) = \frac{\mu_0 NI(l/2 + x)}{2l(R_2 - R_1)} \ln \left( \frac{R_2 + \sqrt{(l/2 + x)^2 + R_2^2}}{R_1 + \sqrt{(l/2 + x)^2 + R_1^2}} \right) + \\ + \frac{\mu_0 NI(l/2 - x)}{2l(R_2 - R_1)} \ln \left( \frac{R_2 + \sqrt{(l/2 - x)^2 + R_2^2}}{R_1 + \sqrt{(l/2 - x)^2 + R_1^2}} \right),$$

где при интегрировании учтено, что

$$\int \frac{dR}{\sqrt{a^2 + R^2}} = \ln \left( R + \sqrt{a^2 + R^2} \right).$$

В центре соленоида ( $x = 0$ )

$$B(0) = \frac{\mu_0 NI}{2(R_2 - R_1)} \ln \left( \frac{R_2 + \sqrt{(l/2)^2 + R_2^2}}{R_1 + \sqrt{(l/2)^2 + R_1^2}} \right) = \alpha \mu_0 nI,$$

где  $\alpha = \frac{l}{2(R_2 - R_1)} \ln \left( \frac{R_2 + \sqrt{(l/2)^2 + R_2^2}}{R_1 + \sqrt{(l/2)^2 + R_1^2}} \right).$

**Ответ:**  $B = \frac{1}{2} \mu_0 nI (\cos \alpha_2 + \cos \alpha_1).$

### Задачи типа 15.2

*Определение магнитного момента контура с током и индукции магнитостатического поля, созданного заданным распределением магнитных диполей.*

**Метод решения.** Использование формул (15.2) и (15.3) теоретического материала.

Определение индукции магнитного поля, созданного заданной системой магнитных диполей, является одной из важнейших задач магнитостатики. Особое значение эта задача приобретает в разделе «Магнитостатика магнетиков», так как магнитный момент является основной величиной, характеризующей магнитные свойства вещества. Для замкнутых линейных токов на большом расстоянии от них поле аналогично

полю диполя, поэтому решение задачи значительно упрощается при использовании дипольного описания.

**Задача 15.3.6.** Точечный магнитный диполь  $\mathbf{p}_m$  расположен в начале декартовой системы координат вдоль её оси OY. Определить величину индукции магнитного поля в точке M с координатами  $(x, y)$  (см. рис. 15.8).

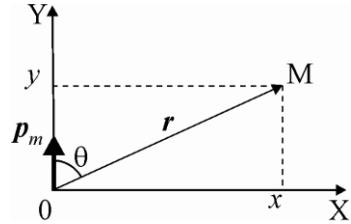


Рис. 15.8. Ориентация магнитного диполя  $\mathbf{p}_m$  относительно декартовой системы координат.

### Решение

Согласно соотношению (15.3) вектор индукции магнитного поля в точке, определяемой радиус-вектором  $\mathbf{r}$ , равен

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\mathbf{p}_m \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_m}{r^3} \right).$$

Определим проекцию вектора  $\mathbf{B}$  на ось X. Так как магнитный момент диполя перпендикулярен этой оси, то  $\left( \frac{\mathbf{p}_m}{r^3} \right)_x = 0$  и

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\mathbf{p}_m \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} \right)_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3p_m r \cos \vartheta \sin \vartheta}{r^5} \right).$$

Здесь  $\vartheta$  – угол между векторами  $\mathbf{p}_m$  и  $\mathbf{r}$ , поэтому

$$\cos \vartheta = \frac{y}{r}; \quad \sin \vartheta = \frac{x}{r}; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Отсюда получаем:

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3p_m xy}{(x^2 + y^2)^{5/2}}.$$

Аналогично имеем для компоненты магнитного поля, параллельной оси Y:

$$\begin{aligned} B_y &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\mathbf{p}_m \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_m}{r^3} \right)_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3p_m r^2 \cos^2 \vartheta}{r^5} - \frac{p_m}{r^3} \right) = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p_m (2y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^{5/2}}. \end{aligned}$$

Окончательно получаем:

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} p_m \frac{(2y^2 + x^2)^2 + x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}}.$$

*Замечание.* Эту задачу удобно решать в цилиндрической системе координат аналогично задаче 4.3.3 главы 4 (определение напряжённости поля точечного электрического диполя). В этом случае положение точки М определяется длиной радиус-вектора  $r$  и полярным углом  $\vartheta$ , а величина магнитной индукции поля диполя в этой точке может быть представлена как

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{p_m}{r^3} \sqrt{3 \cos^2 \vartheta + 1}.$$

**Ответ:** 
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} p_m \frac{(2y^2 + x^2)^2 + x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}}.$$

**Задача 15.3.7.** Два точечных магнитных диполя с равными по величине моментами  $|\mathbf{p}_{m1}| = |\mathbf{p}_{m2}| = |\mathbf{p}_m|$  находятся на некотором расстоянии друг от друга в одной плоскости и ориентированы взаимно перпендикулярно. При какой ориентации магнитных моментов относительно соединяющей их прямой индукция магнитного поля в точке О, расположенной посередине между диполями, будет минимальной и максимальной?

### Решение

Пусть расстояние между диполями равно  $2a$ . В выбранной системе отсчета (см. рис. 15.9) компоненты индукции магнитного поля, созданного левым и правым магнитными моментами в точке О согласно соотношению (15.3) соответственно равны:

левый диполь  $\mathbf{p}_{m1}$ :

$$B_{1x} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3p_m a^2 \cos\theta}{a^5} - \frac{p_m \cos\theta}{a^3} \right) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{p_m \cos\theta}{a^3};$$

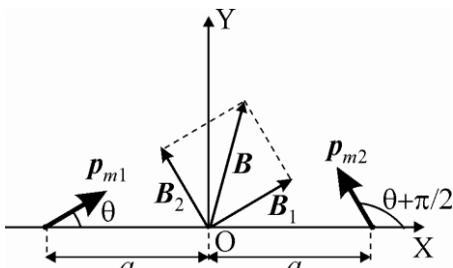


Рис. 15.9. Определение индукции магнитного поля от двух взаимно перпендикулярных магнитных диполей.

$$B_{1y} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{p_m \sin \theta}{a^3};$$

правый диполь  $p_{m_2}$  :

$$B_{2x} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{p_m \cos(\theta + \pi/2)}{a^3} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{p_m \sin \theta}{a^3};$$

$$B_{2y} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{p_m \cos \theta}{a^3}.$$

Согласно принципу суперпозиции для индукции магнитного поля получим:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{p_m}{a^3} \sqrt{(B_{1x} + B_{2x})^2 + (B_{1y} + B_{2y})^2} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{p_m}{a^3} \sqrt{4(\cos \theta - \sin \theta)^2 + (\cos \theta + \sin \theta)^2}. \end{aligned}$$

Исследование функции

$$f(\theta) = \sqrt{4(\cos \theta - \sin \theta)^2 + (\cos \theta + \sin \theta)^2}$$

на экстремум дает:

$$\text{при } \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} : \quad B = B_{\min} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{p_m \sqrt{2}}{a^3},$$

$$\text{при } \theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} : \quad B = B_{\max} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{p_m 2\sqrt{2}}{a^3}.$$

*Замечание.* В цилиндрической системе координат аналогичная задача для электрического диполя решена в главе 4 (**задача 4.3.4**).

$$\text{Ответ: } B(0) = B_{\min} \text{ при } \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4};$$

$$B(0) = B_{\max} \text{ при } \theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}.$$

**Задача 15.3.8.** Непроводящая сфера радиуса  $R$ , равномерно заряженная по поверхности с плотностью заряда  $\sigma$ , вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, проходящей через её центр. Определить магнитную индукцию  $\mathbf{B}$  в центре сферы и её магнитный момент  $\mathbf{p}_m$ .

## Решение

В силу симметрии задачи её удобно решать в сферической системе координат. Будем отсчитывать угол  $\theta$  этой системы координат от оси  $Z$ , направление которой совпадает с вектором угловой скорости сферы (рис. 15.10).

Рассмотрим произвольное тонкое кольцо шириной  $R d\theta$  на рассматриваемой сфере. Так как оно вращается с постоянной угловой скоростью вокруг своей оси, то такая система аналогична неподвижному кольцу, по которому течет ток силы

$$\begin{aligned} dI &= \frac{dq}{T} = \frac{\sigma dS}{T} = \\ &= \frac{\sigma 2\pi R \sin \theta R d\theta}{T} = \sigma \omega R^2 \sin \theta d\theta, \end{aligned}$$

где  $T$  – период обращения сферы вокруг своей оси.

Согласно решению задачи 15.3.3, магнитное поле, создаваемое таким витком в центре сферы, направлено вдоль оси  $Z$ , и его индукция равна:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{dI \sin \theta}{R^2} 2\pi R \sin \theta = \frac{\mu_0 \omega \sigma R}{2} \sin^3 \theta d\theta.$$

Интегрируя по кольцам в соответствии с принципом суперпозиции, получим индукцию магнитного поля в центре сферы:

$$B = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\mu_0 \omega \sigma R}{2} \sin^3 \theta d\theta = 2 \frac{\mu_0 \omega \sigma R}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \mu_0 \omega \sigma R.$$

Определим теперь магнитный момент такой системы. Согласно (15.2), магнитный момент кольца с током равен  $p_m = ISn$ . Эта величина не зависит от точки, относительно которой определяется магнитный момент. Тогда аналогично вычислению магнитной индукции найдём магнитный момент вращающейся сферы как суперпозицию магнитных моментов колец с током, на которые можно разбить такую систему.

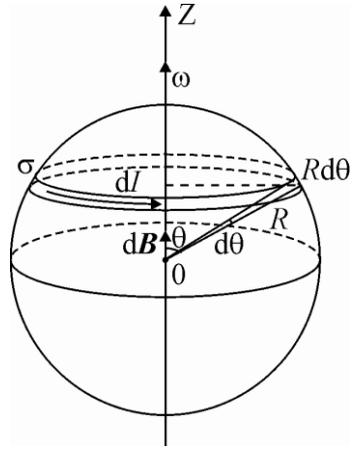


Рис. 15.10. К расчёту магнитного поля в центре вращающейся сферы.

Магнитный момент  $d\mathbf{p}_m$  произвольного тонкого кольца шириной  $R d\theta$  и радиуса  $R\sin\theta$  равен:

$$d\mathbf{p}_m = \sigma\omega R^2 \sin\theta d\theta \cdot \pi(R\sin\theta)^2.$$

Тогда для искомого магнитного момента получим:

$$\mathbf{p}_m = 2 \cdot \pi\sigma\omega R^4 \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta d\theta = \frac{4}{3}\pi\sigma\omega R^4 = \frac{1}{3}QR^2\omega,$$

где  $Q = 4\pi R^2\sigma$  – заряд сферы.

$$\text{Ответ: } \mathbf{B} = \frac{2}{3}\mu_0\sigma R\omega; \mathbf{p}_m = \frac{4}{3}\pi\sigma R^4\omega.$$

#### 15.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 15.4.1.** Определить величину индукции магнитного поля в центре равностороннего треугольника со стороной  $a$ , если:

- его обтекает ток  $I$ ;
- источник ЭДС подключен к двум вершинам треугольника.

Поле подводящих проводов не учитывать, сопротивление всех сторон треугольника одинаково.

$$\text{Ответ: а) } B = \frac{9\mu_0 I}{2\pi a}; \text{ б) } B = 0.$$

**Задача 15.4.2.** Найти величину индукции магнитного поля в центре плоской спирали, по которой течет ток силы  $I$ . Спираль заключена между окружностями радиусов  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 > R_2$ ). Общее число витков спирали  $N$ . Поле подводящих проводов не учитывать (рис. 15.11).

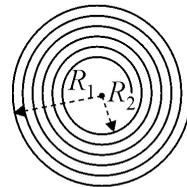


Рис. 15.11. Плоская спираль с током.

$$\text{Ответ: } B = \frac{\mu_0 N I \ln(R_2 / R_1)}{2(R_2 - R_1)}.$$

**Задача 15.4.3.** Ток  $I$  течет по тонкому замкнутому проводнику, показанному на рис. 15.12. Радиус изогнутой части проводника равен  $R$ , угол  $2\varphi=90^\circ$ . Найти величину индукции магнитного поля в точке  $O$ .

$$\text{Ответ: } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \left( \frac{3\pi}{4} + 1 \right).$$

**Задача 15.4.4.** Найти величину индукции магнитного поля в точке  $O$  для контура с током  $I$ , который показан на рис. 15.13. Радиусы  $a$ ,  $b$  и угол  $\varphi$  известны.

$$\text{Ответ: } B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \frac{2\pi - \varphi}{a} + \frac{\varphi}{b} \right).$$

**Задача 15.4.5.** Найти величину индукции магнитного поля в точке  $O$  для проводника с током  $I$ , который показан на рис. 15.14. Горизонтальные части провода можно считать бесконечно длинными, радиус полукольца равен  $R$ .

$$\text{Ответ: } B = \frac{\mu_0 I}{4R}.$$

**Задача 15.4.6.** Найти индукцию магнитного поля в точке  $O$ , если проводник с током  $I$  имеет вид, показанный на рис. 15.15. Горизонтальные части провода можно считать бесконечно длинными, радиус полукольца равен  $R$ .

**Ответ:**  $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \sqrt{4 + \pi^2}$ , вектор  $\mathbf{B}$  лежит в плоскости  $XZ$  под углом  $\alpha$  к оси  $OX$ , где  $\text{tg}\alpha \approx 0,63$ .

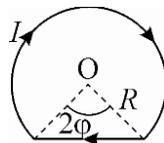


Рис. 15.12. Конфигурация провода с током в задаче 15.4.3.

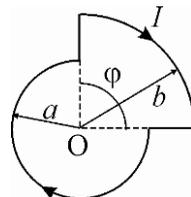


Рис. 15.13. Конфигурация провода с током в задаче 15.4.4.

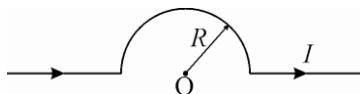


Рис. 15.14. Конфигурация провода с током в задаче 15.4.5.

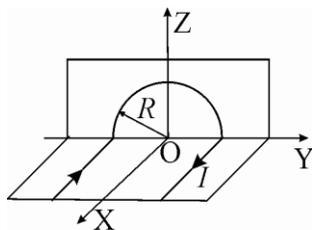


Рис. 15.15. Конфигурация провода с током в задаче 15.4.6.

**Задача 15.4.7.** ([2], 3.223). Ток  $I$  течёт по тонкому проводнику, который имеет вид правильного  $n$ -угольника, вписанного в окружность радиуса  $R$ . Найти магнитную индукцию в центре данного контура. Исследовать полученное выражение при  $n \rightarrow \infty$ .

$$\text{Ответ: } B = \frac{\mu_0 n I \operatorname{tg}(\pi/n)}{2\pi R}.$$

**Задача 15.4.8.** ([2], 3.226(б)). Найти индукцию магнитного поля в точке  $O$  контура с током  $I$ , который показан на рис. 15.16. Радиус кольца  $a$  и сторона квадрата  $b$  известны.

$$\text{Ответ: } B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \frac{3\pi}{2a} + \frac{\sqrt{2}}{b} \right).$$

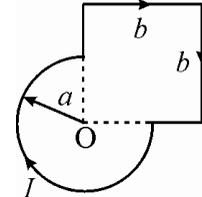


Рис. 15.16. Конфигурация провода с током в задаче 15.4.8.

**Задача 15.4.9.** ([2], 3.230). Длинный проводник с током  $I = 5$  А изогнут под прямым углом. Найти индукцию магнитного поля в точке, которая отстоит от плоскости проводника на  $l = 35$  см и находится на перпендикуляре к проводнику, проходящем через точку сгиба.

$$\text{Ответ: } B = \frac{\mu_0 \sqrt{2} I}{4\pi l} = 2 \text{ мкТл.}$$

**Задача 15.4.10.** ([3], 303). По длинному прямому проводнику течёт ток силы  $2I$ . В некоторой точке проводник разветвляется на два длинных одинаковых провода, расположенных под углами  $\alpha$  и  $\beta$  к первоначальному направлению. Определить индукцию магнитного поля  $B$ , созданного такой системой токов в точке  $M$ , находящейся на линии, перпендикулярной плоскости токов, на расстоянии  $r$  от места их разветвления.

$$\text{Ответ: } B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \sqrt{6 + 4(\cos\alpha + \cos\beta) + 2\cos(\alpha + \beta)}.$$

**Задача 15.4.11.** ([3], 305). Источник ЭДС присоединен к двум противоположным вершинам плоского проволочного контура,

имеющего форму квадрата. Какова величина индукции магнитного поля, создаваемого токами, текущими по контуру, в центре квадрата? Поле подводящих проводов не учитывать.

*Ответ:*  $B = 0$ .

**Задача 15.4.12.** ([3], 309). К противоположным концам диаметра АВ проволочного контура в форме окружности радиуса  $R$  присоединён источник ЭДС. Определить индукцию магнитного поля в произвольной точке диаметра. Поле подводящих проводов не учитывать.

*Ответ:*  $B = 0$ .

**Задача 15.4.13.** ([3], 310). Деревянный шар радиуса  $R$  обмотан тонкой проволокой так, что витки ложатся по большим кругам, пересекаясь в концах одного и того же диаметра АВ. Число витков  $b$ , и плоскости каждой пары соседних витков образуют друг с другом угол  $30^\circ$ . По проволоке течёт ток силы  $I$ . Найти величину и направление индукции магнитного поля в центре шара.

*Ответ:*  $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\sin 15^\circ + \sin 45^\circ + \sin 75^\circ)$ .

**Задача 15.4.14.** ([3], 311) На деревянный круглый цилиндр намотаны четыре витка проволоки под углом  $45^\circ$  один к другому. Каждый виток представляет собой прямоугольную рамку со сторонами  $h$  (высота барабана) и  $D$  (диаметр основания барабана). По проволоке течёт ток силы  $I$ . Найти модуль и направление индукции магнитного поля  $B$  в середине оси цилиндра.

*Ответ:*  $B = \frac{\mu_0 14I}{\pi h d} \sqrt{h^2 + D^2} \left( \sin \frac{\pi}{8} + \sin \frac{3\pi}{8} \right)$ , индукция

направлена под углом  $22,5^\circ$  к вертикальной плоскости.

**Задача 15.4.15.** ([3], 313). Деревянный шар радиуса  $R$  обмотан тонкой проволокой так, что все витки параллельны между собой. Витки плотно уложены и покрывают ровно половину поверхности шара в один слой. Количество витков равно  $N$ , по проволоке течёт

ток силы  $I$ . Найти модуль индукции магнитного поля в центре шара.

$$\text{Ответ: } B = \frac{\mu_0 I}{4R} (N + 1).$$

**Задача 15.4.16.** ([3], 314). Куб спаян из одинаковых кусков тонкой проволоки, каждый из которых имеет сопротивление  $r$ . Определить индукцию магнитного поля в центре куба, если к противоположным концам его пространственной диагонали подключить источник с напряжением  $U$ . Поле подводящих проводов не учитывать.

$$\text{Ответ: } B = 0.$$

**Задача 15.4.17.** ([3], 320). Два одинаковых проводящих кольца радиуса  $R$  расположены на расстоянии  $l = 2R$  друг от друга. Центры колец расположены на одной прямой, а их плоскости параллельны друг другу. По кольцам текут токи одинаковой силы  $I$ , направление которых также совпадает. Определить модуль индукции  $B$  магнитного поля в произвольной точке на оси колец и построить примерный график зависимости  $B$  от расстояния  $x$  до центра системы.

$$\text{Ответ: } B = \frac{\mu_0 I R^2}{2} \left( \frac{1}{(R^2 + (R+x)^2)^{3/2}} + \frac{1}{(R^2 + (R-x)^2)^{3/2}} \right)$$

**Задача 15.4.18.** ([2], 3.228). Ток силой  $I = 11$  А течёт по длинному прямому проводнику, сечение которого имеет форму тонкого полукольца радиуса  $R = 5$  см (рис. 15.17). Найти индукцию магнитного поля в точке  $O$ .

$$\text{Ответ: } B = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R} = 28 \text{ мкТл.}$$

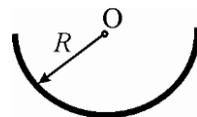


Рис. 15.17. Конфигурация провода с током в задаче 15.4.18.

**Задача 15.4.19.** Непроводящий тонкий диск радиуса  $R$ , равномерно заряженный с одной стороны с поверхностной плотностью  $\sigma$ , вращается вокруг своей оси с угловой скоростью  $\omega$ .

Найти:

- а) величину индукции магнитного поля в центре диска;
- б) модуль магнитного момента диска.

Ответ: а)  $B = \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{2}$ ; б)  $p_m = \frac{\pi \sigma \omega R^4}{4}$ .

**Задача 15.4.20.** Заряд  $Q$  равномерно распределен по объёму однородного шара радиуса  $R$ , который вращается вокруг оси, проходящей через его центр, с угловой скоростью  $\omega$ . Найти магнитный момент такой системы.

Ответ:  $p_m = \frac{Q R^2}{5} \omega$ .

## Глава 16

**МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ ПРОВОДНИКОВ С ТОКОМ.  
ТЕОРЕМА О ЦИРКУЛЯЦИИ. ВЕКТОРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ****16.1. Теоретические вопросы**

**Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции в интегральной и дифференциальной формах.**

*Интегральная форма теоремы.* Циркуляция индукции постоянного магнитного поля по любому замкнутому контуру ( $L$ ) равна произведению магнитной постоянной на силу полного тока  $I$ , охватываемого этим контуром (протекающему через любую поверхность, ограниченную контуром):

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I . \quad (16.1)$$

*Дифференциальная форма теоремы.* В каждой точке пространства, где существует произвольное постоянное магнитное поле,

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) . \quad (16.2)$$

Здесь обе части соотношения относятся к одной и той же точке пространства, задаваемой радиус-вектором  $\mathbf{r}$ .

**Поток (вектора) магнитной индукции**  $d\Phi$  через физически бесконечно малый элемент поверхности равен:

$$d\Phi \equiv \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} . \quad (16.3)$$

Поток магнитной индукции через всю поверхность  $S$  равен:

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} . \quad (16.4)$$

Единица измерения потока вектора магнитной индукции:

$$[\Phi] = \text{Тл} \cdot \text{м}^2 = \text{Н} \cdot \text{м} / \text{А} \equiv \text{Вб} .$$

**Теорема Гаусса для магнитного поля в интегральной и дифференциальной формах.**

*Интегральная форма теоремы.* Поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность  $S$  равен нулю:

$$\oint_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (16.5)$$

*Дифференциальная форма теоремы.* В каждой точке пространства, где существует магнитное поле,

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0.$$

Теорема Гаусса в обеих формах справедлива для любых, в том числе переменных, магнитных полей.

**Векторный потенциал и его связь с магнитной индукцией.**

Индукция магнитного поля может быть представлена в виде ротора векторного потенциала магнитного поля:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}). \quad (16.6)$$

**Векторный потенциал магнитного поля токов:**

для объемно распределенных токов:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} dV', \quad (16.7)$$

для линейных токов:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i I_i \oint_{L'_i} \frac{d\mathbf{l}'}{R}. \quad (16.8)$$

Здесь  $V'$  – область пространства, где имеются объемные токи;  $L'_i$  – замкнутые контуры токов. Единица измерения –  $[A] = \text{H}/\text{A}$ .

**Нормировка векторного потенциала.**

Если в качестве определения векторного потенциала принять его дифференциальную связь с магнитной индукцией  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r})$ , то поле с заданной индукцией  $\mathbf{B}$  может быть описано также векторным потенциалом  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} \chi$  при произвольной скалярной функции  $\chi$ . В этом случае можно провести нормировку (кулоновскую калибровку) векторного потенциала:

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0. \quad (16.9)$$

## 16.2. Основные типы задач (классификация)

16.1 Определение индукции магнитоэстатического поля от безграничных распределений токов, обладающих плоской или осевой симметрией.

16.2 Определение индукции магнитного поля с использованием векторного магнитного потенциала (эквивалентные плоские электростатические и магнитостатические задачи).

### 16.3. Методы решения и примеры решения задач

#### Задачи типа 16.1

*Определение индукции магнитостатического поля от безграничных распределений токов, обладающих плоской или осевой симметрией.*

**Метод решения.** При решении задач, в которых рассматриваются системы токов, формально не ограниченные в пространстве (бесконечные линейные, плоские или объёмные токи), обладающие плоской или осевой симметрией, удобно опираться на теорему о циркуляции вектора магнитной индукции (закон полного тока) (16.1).

Аналогично применению электростатической теоремы Гаусса (глава 2), при вычислении циркуляции вектора магнитной индукции по замкнутому контуру ключевым моментом является выбор этого контура. Очевидно, что он должен проходить через точку, в которой мы хотим определить величину  $B$ , и, кроме этого, вычисление интеграла  $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$  должно быть максимально простым.

Например, величина  $B$  должна быть одинакова на всем протяжении контура  $L$  или на одной из частей контура  $B = \text{const}$ , а на другой  $B = 0$  и т.п.; угол  $\alpha$  между векторами  $\mathbf{B}$  и  $d\mathbf{l}$  не должен меняться при обходе контура или на одной из частей контура  $\alpha = \text{const}$ , а на другой  $\alpha = 0$ , либо  $\alpha = \pi/2$ . Поэтому при анализе условия задачи особое внимание следует обратить на картину распределения полей вокруг проводников с током.

**Задача 16.3.1.** Безграничная проводящая плоскость расположена горизонтально. По ней течет ток, поверхностная плотность которого равна  $i$ , а направление одинаково во всех точках. Определить индукцию магнитного поля, создаваемого такой плоскостью.

### Решение

Ввиду симметрии в распределении токов рассматриваемой системы и безграничности плоскости величина вектора индукции магнитного поля этой системы не будет зависеть от расстояния до плоскости, а сам вектор будет направлен параллельно плоскости и перпендикулярно текущему по ней току.

В качестве контура  $L$  удобно выбрать прямоугольник  $ABCD$ , две стороны которого параллельны плоскости и перпендикулярны току, текущему в ней (см. рис. 16.1). Полный ток, охватываемый этим контуром, равен  $I = ia$ , где  $a$  – длина горизонтально расположенной стороны контура.

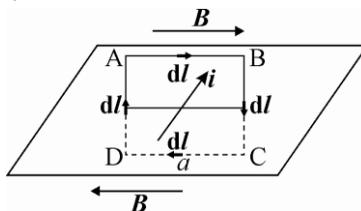


Рис. 16.1. Определение индукции магнитного поля, создаваемого безграничной проводящей плоскостью.

На горизонтальных участках контура вектор  $\mathbf{B}$  не изменяется по величине и сонаправлен с вектором  $d\mathbf{l}$  (участки  $AB$  и  $CD$  на рис. 16.1). На участках контура, перпендикулярных плоскости ( $BC$  и  $DA$ ), вектор  $\mathbf{B}$  перпендикулярен  $d\mathbf{l}$  в каждой точке. Тогда в соответствии с теоремой о циркуляции имеем:

$$\left. \begin{aligned} \oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= 2Ba; \\ I &= ia. \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2Ba = \mu_0 ia.$$

*Замечание.* Результат данной задачи справедлив и в случае, когда плоскость не безгранична, но расстояние от точки наблюдения до плоскости много меньше её линейных размеров. В этом случае вдали от краев плоскости магнитное поле также будет однородным.

**Ответ:** вектор магнитной индукции направлен параллельно плоскости и перпендикулярен направлению тока, а его модуль равен  $B = \frac{\mu_0 i}{2}$ .

**Задача 16.3.2.** Система состоит из двух параллельных друг другу безграничных плоскостей с токами, величины которых одинаковы. Эти токи создают в пространстве между плоскостями

однородное магнитное поле с индукцией  $B$ , а снаружи поле отсутствует. Найти поверхностную плотность тока, текущего по плоскостям.

### Решение

Система токов, представленная в данной задаче, эквивалентна двум системам **задачи 16.3.1**. Используя результат предыдущей задачи, можно утверждать, что токи по плоскостям параллельны и текут в противоположных направлениях – иначе согласно принципу суперпозиции магнитное поле снаружи от плоскостей должно быть отлично от нуля.

При такой ориентации токов в пространстве между плоскостями индукция магнитного поля вдвое больше индукции магнитного поля одной плоскости, т.е. по модулю равна:

$$B = \mu_0 i .$$

Отсюда находим:

$$i = \frac{B}{\mu_0} .$$

**Ответ:** направления токов, текущих по плоскостям, взаимно противоположны, их поверхностные плотности одинаковы по модулю и равны  $i = \frac{B}{\mu_0}$ .

**Задача 16.3.3.** Найти индукцию магнитного поля внутри бесконечного соленоида с плотностью намотки  $n$  витков на метр, по которому течет ток силой  $I$ .

### Решение

В случае плотной намотки магнитное поле внутри длинного соленоида близко к однородному полю, линии индукции которого параллельны оси соленоида, за исключением точек непосредственно вблизи витков обмотки. Снаружи длинного соленоида вдали от его торцов индукцию магнитного поля можно считать близкой к нулю.

Проведем через точку, в которой надо найти индукцию магнитного поля, прямоугольный контур так, чтобы его сторона длины  $l$  была параллельна линии магнитной индукции  $\mathbf{B}$ , а противоположная сторона была вне соленооида (рис. 16.2). Запишем теорему о циркуляции вектора  $\mathbf{B}$  по выбранному контуру. Пусть ток в витках, охваченных контуром, направлен из плоскости чертежа к нам. Плоскость контура пересекают  $nl$  витков, полная величина тока через выбранный контур равна  $Inl$ . При расчете циркуляции выберем направление обхода против часовой стрелки, для которого этот ток будет положительным по правилу правого винта. Поскольку вне соленооида поле можно считать равным нулю, циркуляция по данному контуру равна  $Bl$ , откуда следует:

$$Bl = \mu_0 Inl,$$

и искомая индукция магнитного поля:

$$B = \mu_0 In.$$

**Ответ:**  $B = \mu_0 In.$

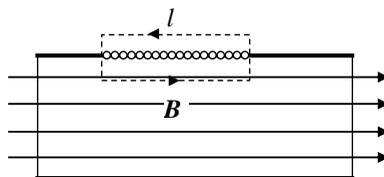


Рис. 16.2. К определению индукции магнитного поля внутри бесконечного соленооида.

**Задача 16.3.4.** По стенке бесконечной тонкостенной цилиндрической трубы радиуса  $R$  параллельно её оси течет ток  $I$ . Найти величину индукции магнитного поля внутри и вне трубы в зависимости от расстояния до её оси.

### Решение

В силу симметрии рассматриваемой системы линии индукции создаваемого ей магнитного поля являются окружностями, плоскости которых перпендикулярны оси трубы. Для вычисления  $B(r)$  удобно воспользоваться теоремой о циркуляции.

1) Найдем индукцию магнитного поля внутри трубы в точке, находящейся на расстоянии  $r$  от её оси ( $r < R$ ). Для этого выберем в качестве контура  $L$  окружность, центр которой лежит на оси трубы, а

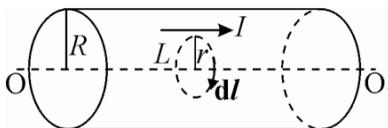


Рис. 16.3а. К определению индукции магнитного поля внутри тонкостенной трубы.

радиус равен  $r$  (рис. 16.3а). Тогда вектор  $\mathbf{B}$  в каждой точке этого контура направлен по касательной к нему, а величина индукции не изменяется вдоль всего контура. Однако выбранный нами контур не охватывает ток, т.е.

$$\left. \begin{aligned} \oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= B \cdot 2\pi r, \\ I &= 0. \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2\pi r \cdot B = 0.$$

Таким образом, магнитное поле внутри цилиндра в любой точке отсутствует.

2) Найдем теперь индукцию магнитного поля снаружи трубы в точке, находящейся на расстоянии  $r$  от ее оси ( $r > R$ ). Проведя рассуждения аналогично пункту 1 получим, что выбранная нами в качестве контура окружность радиуса  $r$  охватывает весь ток  $I$ , текущий по трубе, независимо от своего радиуса (рис. 16.3б).

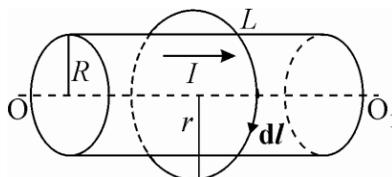


Рис. 16.3б. К определению индукции магнитного поля снаружи тонкостенной трубы.

Получим:

$$\left. \begin{aligned} \oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= B \cdot 2\pi r, \\ I &= I. \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2\pi r \cdot B = \mu_0 I,$$

откуда

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

*Замечание 1.* Полученный ответ совпадает с ответом **задачи 15.3.1**, полученным для бесконечно длинного провода с током (замечание 2 к задаче 15.3.1), однако данное решение задачи гораздо проще, что делает этот способ решения предпочтительным.

*Замечание 2.* При  $r = R$  (поверхность трубы) индукция магнитного поля в такой системе испытывает скачок. Величина индукции на поверхности трубы не определена (в рамках рассматриваемой модели бесконечно тонких стенок трубы ток следует рассматривать как поверхностный).

**Ответ:**  $B = 0$ , при  $r < R$  (внутри трубы);

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad \text{при } r > R \text{ (снаружи трубы).}$$

**Задача 16.3.5.** По однородному сплошному бесконечному цилиндрическому проводнику радиуса  $R$  течет ток  $I$ , который равномерно распределен по сечению. Найти величину индукции магнитного поля внутри и вне проводника в зависимости от расстояния до оси. Магнитные свойства материала не учитывать.

### Решение

Линии индукции магнитного поля такого проводника являются коаксиальными окружностями, лежащими в плоскостях, перпендикулярных оси проводника, с центром на его оси.

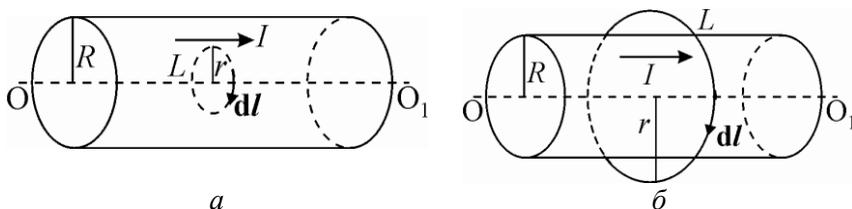


Рис. 16.4. К определению индукции магнитного поля внутри (а) и снаружи (б) бесконечного цилиндрического проводника.

1. Найдем модуль индукции магнитного поля внутри проводника с током в точке, находящейся на расстоянии  $r$  от его оси  $OO_1$  ( $r < R$ , рис. 16.4а), используя теорему о циркуляции. Проведём через точку, находящуюся на расстоянии  $r$  от оси проводника, круговой замкнутый контур  $L$ , совпадающий с линией магнитной индукции. Тогда циркуляция вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$  по этому контуру равна

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot 2\pi r.$$

Так как ток равномерно распределён по сечению проводника, то модуль его объёмной плотности внутри проводника постоянен и равен  $j = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi R^2}$ . Следовательно, полный ток  $I_1$ , охватываемый рассматриваемым контуром, определяется выражением:

$$I_1 = \pi r^2 j = I \frac{r^2}{R^2}.$$

Теорему о циркуляции магнитного поля в этом случае можно записать в виде:

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \frac{r^2}{R^2}.$$

В результате для искомого модуля индукции магнитного поля внутри проводника получим:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r.$$

Таким образом, при  $r < R$  величина индукции магнитного поля сплошного проводника, плотность тока в котором постоянна, линейно зависит от расстояния до оси проводника.

2. Найдем модуль индукции магнитного поля вне проводника в точке, находящейся на расстоянии  $r$  от его оси ( $r > R$ , рис. 16.4б).

Аналогично предыдущему случаю проведём через точку, находящуюся на расстоянии  $r$  от оси проводника, круговой замкнутый контур  $L$ , совпадающий с линией магнитной индукции. Так как в этом случае выбранный контур охватывает весь проводник, то полный ток, охватываемый контуром, равен  $I$ . Теорему о циркуляции магнитного поля в этом случае можно записать в виде:

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I,$$

откуда получим:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Зависимость модуля индукции магнитного поля от расстояния до оси цилиндра  $B(r)$  приведена на рисунке 16.4в.

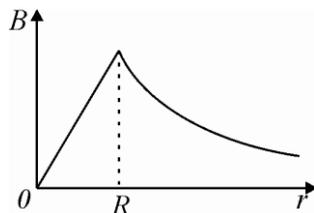


Рис. 16.4в. Зависимость модуля индукции магнитного поля от расстояния до оси цилиндра  $B(r)$ .

*Замечание 1.* В точке  $r = R$  функция  $B(r)$  непрерывна, её значение максимально и равно  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$ .

*Замечание 2.* Зависимость модуля индукции магнитного поля, создаваемого объемным током постоянной плотности в цилиндрическом бесконечном проводнике, от расстояния до оси проводника аналогична зависимости напряженности электрического

поля, создаваемого равномерно заряженным по объёму бесконечным цилиндром.

**Ответ:** внутри проводника ( $r < R$ ) –  $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r$ ;

снаружи проводника ( $r \geq R$ ) –  $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ .

**Задача 16.3.6.** Проводник из немагнитного материала имеет в сечении сложную конфигурацию и представляет собой суперпозицию двух бесконечно длинных прямолинейных цилиндрических проводников, в области пересечения которых имеется полость П (см. рис. 16.5а).

В правой и левой части проводника текут в противоположных направлениях токи с одной и той же по модулю объёмной плотностью  $j$ . Найти величину и направление индукции магнитного поля в полости. Расстояние между осями цилиндрических составляющих проводника  $AC = d$ .

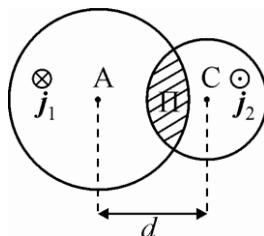


Рис. 16.5а. Проводник сложной конфигурации с полостью П и распределение в нём объёмных токов.

### Решение

Рассмотрим систему из двух сплошных цилиндров А и С, в которых токи текут равномерно во всем объёме. Тогда в области перекрытия цилиндров (полость П на рис. 16.5а) тока не будет – таким образом, сконструированная нами система в отношении пространственного распределения тока идентична системе, представленной в условии задачи.

Рассмотрим произвольную точку М, находящуюся внутри области перекрытия токов (см.

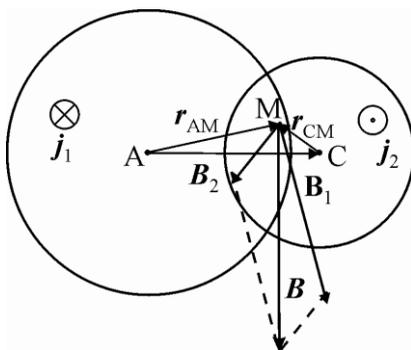


Рис.16.5б. Определение индукции магнитного поля в полости.

рис. 16.5б). Согласно решению задачи 16.3.5 величина индукции магнитного поля, созданного в этой точке цилиндром А, определяется соотношением  $B_1 = \frac{\mu_0 j}{2} r_{AM}$  и направлена перпендикулярно вектору  $r_{AM}$ . Аналогично величина индукции магнитного поля, созданного в этой точке цилиндром С, определяется соотношением  $B_2 = \frac{\mu_0 j}{2} r_{CM}$  и направлена перпендикулярно вектору  $r_{CM}$ . В векторном виде индукции магнитных полей цилиндров в точке М можно записать в виде:

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 j}{2} [I_1 r_{AM}], \quad \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 j}{2} [I_2 r_{BM}],$$

где векторы  $I_1$  и  $I_2$  – единичные векторы, сонаправленные с токами в проводниках А и С соответственно, т. е.  $I_1 = -I_2$ .

Используя принцип суперпозиции, получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_M = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 &= \frac{\mu_0 j}{2} ([I_1 r_{AM}] + [I_2 r_{BM}]) = \frac{\mu_0 j}{2} [I_1 (r_{AM} - r_{BM})] = \\ &= \frac{\mu_0 j}{2} [I_1 AC]. \end{aligned}$$

Таким образом, магнитное поле в полости П однородно. Индукция этого поля равна  $B = \frac{\mu_0 j}{2} d$  и направлена в плоскости рисунка перпендикулярно линии, соединяющей оси проводников А и С.

**Ответ:** вектор  $\mathbf{B} \perp AC$  и равен по модулю  $B = \frac{\mu_0 j}{2} d$ .

### Задачи типа 16.2

*Определение индукции магнитного поля с использованием векторного магнитного потенциала (эквивалентные плоские электростатические и магнитостатические задачи).*

**Метод решения.** Если записать теорему о циркуляции индукции постоянного магнитного поля в вакууме в дифференциальной форме (16.2)  $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$  и учесть, что векторный магнитный потенциал связан с индукцией магнитного поля соотношением (16.6)  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ , то с учетом условия

калибровки векторного потенциала (16.9) получим:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}.$$

Это уравнение эквивалентно трем скалярным уравнениям:

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 j_x, \quad \nabla^2 A_y = -\mu_0 j_y, \quad \nabla^2 A_z = -\mu_0 j_z,$$

каждое из которых аналогично уравнению для скалярного потенциала  $\varphi$  электрического поля в пустоте от зарядов с объёмной плотностью  $\rho$  (уравнение Пуассона (4.3), глава 4):

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho,$$

решение которого известно из электростатики, и для заряда объёмной плотности  $\rho$ , сосредоточенного в ограниченной области пространства  $V$ , имеет вид:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r}.$$

Удобнее всего сопоставлять уравнения для скалярного  $\varphi$  и векторного  $\mathbf{A}$  потенциалов для однонаправленного (однокомпонентного) тока, когда, например,  $j_x = j_y = 0$ , а  $j_z = j_z(x, y)$  и не зависит от  $z$  (плоские задачи). Тогда, если распределение плотности электрического заряда  $\rho = \rho(x, y)$  аналогично распределению тока  $j_z(x, y)$ , то решения уравнений

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(x, y) \quad \text{и} \quad \nabla^2 A_z = -\mu_0 j_z(x, y)$$

дают функции  $\varphi(x, y)$  и  $A_z(x, y)$ , имеющие одинаковые пространственные распределения. Значит, они равны с точностью до постоянных множителей. Чтобы перейти от решения электростатической задачи к магнитостатической, нужно сделать замены:

$$\begin{aligned} \varphi &\rightarrow A_z, \quad \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \mu_0 j_z, \\ E_x &\rightarrow B_y, \quad E_y \rightarrow -B_x, \\ E_r &\rightarrow B_\varphi, \quad E_\varphi \rightarrow -B_r. \end{aligned} \quad (16.10)$$

Однако, следует учесть, что в этом случае, как следует из приведенных соотношений, векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  взаимно перпендикулярны.

Таким образом, ответ многих магнитостатических задач

можно записать сразу без решения задачи, используя известное решение эквивалентной задачи электростатики.

При решении обратной задачи – нахождения потенциала  $A$  по известной индукции магнитного поля  $B$  – в случае задач с элементами симметрии может быть полезно интегральное соотношение, следующее из теоремы Стокса:

$$\oint_L \mathbf{A} d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{A} d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}. \quad (16.11)$$

**Задача 16.3.7.** Найти векторный потенциал (в кулоновской калибровке) для однородного магнитного поля с индукцией  $B$ .

### Решение

Направим ось  $Z$  декартовой системы координат вдоль вектора  $B$ . Учитывая, что  $B$  имеет только одну ненулевую компоненту  $B_z$ , запишем в декартовых координатах соотношение (16.6):

$$B_z = (\text{rot } \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B.$$

$$B_x = (\text{rot } \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0,$$

$$B_y = (\text{rot } \mathbf{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0.$$

Очевидно, что с точностью до константы решениями являются следующие векторы:  $A = B\{-y; 0; 0\}$ ,  $A = B\{0; x; 0\}$  и их суперпозиция

$$A = \frac{1}{2} B\{-y; x; 0\} = \frac{1}{2} [B \mathbf{r}];$$

Кулоновской калибровке  $\text{div } A = 0$  удовлетворяют все три решения.

**Ответ:**  $A(x,y) = \frac{1}{2} B\{-y; x; 0\} = \frac{1}{2} [B \mathbf{r}];$

$$A(x,y) = B\{-y; 0; 0\}, A(x,y) = B\{0; x; 0\}.$$

**Задача 16.3.8.** Найти векторный магнитный потенциал  $A$  и индукцию магнитного поля  $B$  на расстоянии  $r$  от прямолинейного бесконечного тонкого проводника, по которому течёт постоянный ток  $I$ .

### Решение

Эквивалентная задача электростатики: найти потенциал  $\varphi$  и напряженность  $E$  электростатического поля, созданного прямолинейным безграничным тонким проводником, на котором равномерно распределён электрический заряд с линейной плотностью  $\tau$ . Решение данной задачи было рассмотрено выше (задача 2.3.5 главы 2 и задача 3.3.1 главы 3) и имеет следующий вид:

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \tau \ln \frac{r}{C};$$

$$E_r = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{r},$$

где  $r$  – расстояние от провода,  $C$  – произвольная константа, имеющая размерность длины. Вектор напряженности электрического поля здесь направлен перпендикулярно проводнику.

Выберем цилиндрическую систему координат, полярная ось  $Z$  которой совпадает с проводником, а её направление – с направлением тока  $I$ .

Используя аналогию электростатической и магнитостатической задач и производя замены (16.9), получим:

$$A = A_z = -\frac{\mu_0}{2\pi} I \ln \frac{r}{C};$$

$$B = B_\varphi = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r}.$$

Вектор индукции магнитного поля прямого безграничного тока лежит в плоскости ( $XY$ ) и касателен к окружности радиуса  $r$ , центр которой лежит на проводнике. Векторный магнитный потенциал этого поля имеет одну компоненту вдоль оси  $Z$ .

*Замечание:* Тот же ответ для величины магнитной индукции  $B$  был получен ранее из уравнения Био-Савара-Лапласа (задача 15.3.1, Замечание 2) и из теоремы о циркуляции вектора  $B$  (задача 16.3.4).

**Ответ:** 
$$A = A_z = -\frac{\mu_0}{2\pi} I \ln \frac{r}{C};$$

$$B = B_\varphi = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r}.$$

**Задача 16.3.9.** По поверхности длинного кругового цилиндра радиуса  $R$  вдоль его оси течет поверхностный ток с постоянной плотностью  $i$ . Определить магнитный потенциал  $A$  и индукцию магнитного поля  $B$  этого тока.

### Решение

Выберем цилиндрическую систему координат, ось  $Z$  которой совпадает с осью цилиндра, а направление – с вектором плотности тока.

Эквивалентная задача электростатики: длинный круговой цилиндр радиуса  $R$  заряжен по поверхности с постоянной поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ . Определить  $\varphi$  и  $E$  для этой системы зарядов.

Данная электростатическая задача была решена выше (глава 2, задача 2.3.5). Используя решение этой задачи для областей внутри и снаружи цилиндра, в случае задачи электростатики можно записать:

$$\text{для } r < R: \varphi^{\text{in}} = C_1, E^{\text{in}} = 0;$$

$$\text{для } r > R: \varphi^{\text{ex}} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} R \ln \frac{r}{C}, E_r^{\text{ex}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot \frac{R}{r};$$

$$\text{граничные условия } (r = R): \varphi^{\text{ex}} = \varphi^{\text{in}}, E_r^{\text{ex}} - E_r^{\text{in}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0};$$

Сделав замены (16.10), в случае задачи магнитостатики получим:

$$\text{для } r < R: A = C_1, B = 0;$$

$$\text{для } r > R: A_z^{\text{ex}} = -\mu_0 i R \ln \frac{r}{C_2}, B_\varphi^{\text{ex}} = \mu_0 i \frac{R}{r};$$

$$\text{граничные условия } (r = R): A_z^{\text{ex}} = A_z^{\text{in}}, B_\varphi^{\text{ex}} - B_\varphi^{\text{in}} = \mu_0 i.$$

## 16.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 16.4.1.** Бесконечно длинный цилиндрический провод состоит из двух коаксиальных цилиндров. Внутренний сплошной цилиндр, изготовленный из немагнитного материала, имеет радиус  $R_1$ . Радиус внешнего пустотелого цилиндра равен  $R_2$ . Вдоль цилиндров текут постоянные токи одинаковой величины  $I$ , но направленные противоположно. Определить зависимость величины индукции магнитного поля от расстояния до оси провода  $B(r)$ .

$$\text{Ответ: } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1^2} r \quad \text{при } r < R_1;$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \text{при } R_1 \leq r \leq R_2;$$

$$B = 0 \quad \text{при } r \geq R_2.$$

**Задача 16.4.2.** Вдоль длинной тонкостенной цилиндрической трубки радиуса  $R$  течет постоянный ток  $I$ . В стенке трубки имеется тонкая щель ширины  $d$ , параллельная оси трубки. Определить величину индукции магнитного поля  $B$  в точке, лежащей внутри трубки на её радиусе, если расстояние от середины щели до рассматриваемой точки равно  $r$  ( $r, R \gg d$ ).

$$\text{Ответ: } B \approx \frac{\mu_0 I d}{4\pi^2 r R}.$$

**Задача 16.4.3** ([2], 3.232 (б)). Определить индукцию магнитного поля тока, равномерно распределённого по двум параллельным плоскостям с поверхностными плотностями  $i$  и  $-i$ .

*Ответ:*  $B = \mu_0 i$  между плоскостями и  $B = 0$  вне плоскостей.

**Задача 16.4.4** ([2], 3.234). Постоянный ток  $I$  течёт по длинному прямому проводу и далее растекается радиально симметрично по проводящей плоскости, перпендикулярной проводу. Найти индукцию магнитного поля во всех точках пространства.

*Ответ:*

в полупространстве, где находится прямой провод,  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ ,

где  $r$  – расстояние от провода;

в другом полупространстве  $B = 0$ .

**Задача 16.4.5.** Длинный непроводящий полый цилиндр, имеющий заряд  $Q$  на единицу длины, вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг своей оси. Найти индукцию магнитного поля внутри цилиндра.

*Ответ:*  $B = \frac{\mu_0}{2\pi} \omega Q$ , магнитное поле направлено параллельно

оси цилиндра.

**Задача 16.4.6.** Однородный ток плотности  $j$  течет внутри неограниченной пластины толщины  $2d$  параллельно ее поверхности. Пренебрегая влиянием вещества пластины, найти зависимость величины индукции магнитного поля этого тока от расстояния  $x$ , отсчитываемого от средней плоскости пластины.

$$\text{Ответ: } \begin{cases} B = \mu_0 j x, & x \leq d; \\ B = \mu_0 j d, & x \geq d. \end{cases}$$

**Задача 16.4.7** ([2], 3.239). Найти плотность тока как функцию расстояния  $r$  от оси аксиально-симметричного параллельного потока электронов, если индукция магнитного поля внутри потока зависит от  $r$  как  $B = br^\alpha$ , где  $b$  и  $\alpha$  – положительные постоянные.

$$\text{Ответ: } j(r) = \frac{b}{\mu_0} (1 + \alpha) r^{\alpha-1}.$$

**Задача 16.4.8.** Вдоль оси длинного цилиндра радиуса  $R$  течет ток с постоянной плотностью  $j$ . Найти векторный магнитный потенциал  $A$  магнитного поля в зависимости от расстояния  $r$  до оси цилиндра. Считать, что в центре цилиндра  $A(0) = 0$ .

$$\text{Ответ: для } r \leq R: \quad A^{in} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \pi r^2 j;$$

$$\text{для } r \geq R: \quad A^{ex} = -\frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi R^2 \left( \ln \frac{r}{R} + \frac{1}{2} \right) j.$$

**Задача 16.4.9.** Найти векторный магнитный потенциал  $A$  внутри и вне длинного (бесконечного) соленоида радиуса  $a$ , внутри которого протекающим током создается однородное магнитное поле с индукцией  $B$ . Положить  $A = 0$  на оси соленоида.

*Ответ:* линии векторного поля  $A$  образуют окружности с центром на оси соленоида, лежащие в плоскости, перпендикулярной этой оси. В цилиндрических координатах внутри соленоида  $A_\varphi = \frac{1}{2} Br$ ; снаружи  $A_\varphi = \frac{a^2 B}{2r}$ .

## Глава 17

СИЛА АМПЕРА. СИЛА ЛОРЕНЦА. ДВИЖЕНИЕ  
ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

## 17.1. Теоретические вопросы

**Закон взаимодействия элементов тока.** Для двух линейных элементов тока:

$$dF_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[I_2 dL_2 [I_1 dL_1, r_{12}]]}{r_{12}^3}. \quad (17.1)$$

Здесь  $dF_{12}$  – сила, с которой линейный элемент постоянного тока  $[I_1 dL_1]$  действует на линейный элемент постоянного тока  $[I_2 dL_2]$ ;  $r_{12}$  – радиус-вектор элемента тока 2 относительно элемента тока 1 (рис. 17.1).

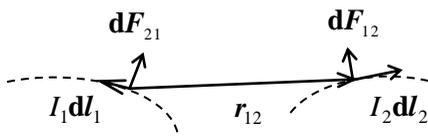


Рис. 17.1. Силы взаимодействия линейных элементов постоянного тока.

Для двух объемных элементов тока ( $j_1 dV_1$  и  $j_2 dV_2$ ):

$$dF_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[j_2 [j_1, r_{12}]]}{r_{12}^3} dV_2 dV_1. \quad (17.2)$$

**Сила Ампера – сила, действующая на элемент тока в магнитном поле.**

*Сила (закон) Ампера для линейного элемента тока:*

$$dF = I [dL B]. \quad (17.3)$$

*Сила (закон) Ампера для объемного элемента тока:*

$$dF = [j B] dV. \quad (17.4)$$

Здесь  $B$  – магнитная индукция в точке расположения элемента тока.

**Сила Лоренца** – сила, действующая на движущийся точечный заряд в электрическом и магнитном полях равна:

$$F_L = qE + q[vB]. \quad (17.5)$$

Здесь первое слагаемое называется кулоновой, а второе – амперовой составляющей силы Лоренца.

**Магнитный момент плоского витка с током равен:**

$$\mathbf{p}_m = IS\mathbf{n}, [\mathbf{p}_m] = \text{А} \cdot \text{м}^2, \quad (17.6)$$

где  $I$  – сила тока в витке,  $S$  – площадь витка,  $\mathbf{n}$  – нормаль к плоскости витка, согласованная с направлением тока по правилу буравчика (рис. 17.2).

**Элементарный ток (элементарный магнитный диполь)** – это плоский физически бесконечно малый (по сравнению с расстоянием до точки наблюдения или с линейными размерами неоднородности внешнего магнитного поля) виток с постоянным током.

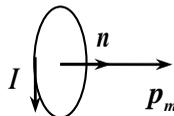


Рис. 17.2. Магнитный момент плоского витка с током.

Векторный потенциал поля  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  и магнитная индукция  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  поля, создаваемого элементарным током, равны:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[\mathbf{p}_m \mathbf{r}]}{r^3}, \quad (17.7)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3(\mathbf{p}_m \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2 \mathbf{p}_m}{r^5}, \quad (17.8)$$

где  $\mathbf{p}_m$  – магнитный момент элементарного тока,  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор точки наблюдения относительно места расположения элементарного тока.

На элементарный ток в магнитном поле действует момент сил, равный:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m \mathbf{B}], \quad (17.9)$$

стремящийся повернуть магнитный момент витка по направлению поля.

В неоднородном магнитном поле на элементарный ток действует сила, равная:

$$\mathbf{F} = i \left( p_m \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \right) + j \left( p_m \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \right) + k \left( p_m \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} \right). \quad (17.10)$$

## 17.2. Основные типы задач (классификация)

17.1. Определение сил Ампера, действующих на проводники с током различной конфигурации.

17.2. Изучение движения заряженных частиц в магнитном поле.

17.3. Определение вращающего момента, действующего на проводник с током во внешнем магнитном поле.

### 17.3. Методы решения и примеры решения задач

#### Задачи типа 17.1

*Определение сил Ампера, действующих на проводники с током различной конфигурации.*

**Методы решения.** Использование соотношений (17.1) – (17.4) теоретического материала. Начинать решение задач этого типа следует с анализа распределения магнитных полей системы в пространстве (направление и симметрия). Исходя из результатов такого анализа, надо выбрать часть системы, которая создаёт магнитное поле. Этот выбор должен определяться простотой и удобством решения.

**Задача 9.3.1.** Бесконечно длинный тонкий проводник с током  $I$  изогнут в форме буквы П. Расстояние между длинными частями провода равно  $l$ . Найти величину и направление силы  $F_l$ , действующей на единицу длины проводника в точке  $O$ , находящейся в центре горизонтальной перемычки.

#### Решение

Предположим, что ток течет в контуре по часовой стрелке (см. рис. 17.3). Тогда вектор магнитной индукции поля такой системы в окрестности точки  $O$  направлен от нас перпендикулярно плоскости рисунка. В соответствии с законом Ампера (17.3) на элемент тока длиной  $dl$  в окрестности точки  $O$  действует сила  $d\mathbf{F} = I[d\mathbf{l} \times \mathbf{B}]$ , направление которой указано на рис. 17.3. Поэтому величина силы, действующей на единицу проводника в этой области, равна

$$F_l = \frac{dF}{dl} = IB.$$

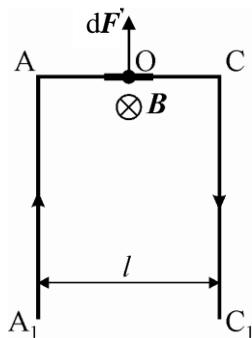


Рис. 17.3. К определению силы, действующей на линейный проводник с током в магнитном поле.

Определим индукцию магнитного поля в точке  $O$ , используя методы главы 15. Согласно принципу суперпозиции индукция результирующего поля  $\mathbf{B}$  будет равна сумме индукций полей  $\mathbf{B}_1$  и  $\mathbf{B}_2$ , которые создают в этой области пространства участки провода  $AA_1$  и  $CC_1$  (индукция магнитного поля, создаваемого участком  $AC$  на элементе провода  $dl$  в окрестности точки  $O$ , равна нулю). Из симметрии задачи следует, что величины магнитных индукций этих полей одинаковы ( $B_1 = B_2$ ) и равны половине индукции поля, которое создал бы в точке  $O$  бесконечно длинный проводник с током, находящийся на расстоянии  $\frac{l}{2}$  от нее. Используя результат

задачи 15.3.1, имеем:

$$B = B_1 + B_2 = 2B_1 = 2 \frac{\mu_0 I}{4\pi(l/2)} = \frac{\mu_0 I}{\pi l},$$

откуда получим:

$$F_l = \frac{\mu_0 I^2}{\pi l}.$$

**Ответ:**  $F_l = \frac{\mu_0 I^2}{\pi l}$ ; сила перпендикулярна короткой стороне проводника (см. рис. 17.3) и её направление не зависит от направления тока.

**Задача 17.3.2.** Две параллельные плоскости, по которым течет ток, создают в пространстве между собой однородное магнитное поле с индукцией  $\mathbf{B}$ . Вне этой области поле отсутствует. Найти силу Ампера  $F_S$ , действующую на единицу площади каждой плоскости. Расстояние между плоскостями много меньше их линейных размеров.

### Решение

В задаче 16.3.1 предыдущей главы было показано, что магнитное поле, созданное безграничной плоскостью, однородно. Его вектор индукции  $\mathbf{B}$  направлен параллельно плоскости и перпендикулярен вектору плотности тока  $\mathbf{i}$ , текущего по плоскости. Модуль вектора магнитной индукции такого поля равен

$$B_1 = \frac{\mu_0 i}{2}.$$

Используя этот результат, можно сделать вывод о том, что в данной задаче по плоскостям текут токи с одинаковой поверхностной плотностью параллельно друг другу, но в противоположных направлениях – иначе согласно принципу суперпозиции будет существовать магнитное поле в пространстве вне плоскостей (рис. 17.4).

При противоположной ориентации параллельных токов в пространстве между плоскостями индукция магнитного поля вдвое больше индукции поля одной плоскости  $B_1$ :

$$B = 2B_1 = \mu_0 i,$$

откуда получим, что модуль поверхностной плотности тока, текущего в каждой плоскости, равен:

$$i = \frac{B}{\mu_0}.$$

Рассмотрим одну плоскость в поле другой. На участок плоскости с площадью  $\Delta S$  в соответствии с законом Ампера действует сила, равная  $\Delta F$ :

$$\Delta F = \Delta S [i, \mathbf{B}_1].$$

Тогда сила  $F_s$ , действующая на единицу поверхности одной из плоскостей со стороны магнитного поля, создаваемого другой плоскостью, равна по модулю:

$$F_s = \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{iB_1 \Delta S}{\Delta S} = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Эта сила направлена перпендикулярно плоскостям от плоскости, создающей магнитное поле (рис. 17.4). Таким образом, плоскости с противоположно направленными токами отталкиваются друг от друга, испытывая давление

$$p = F_s = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

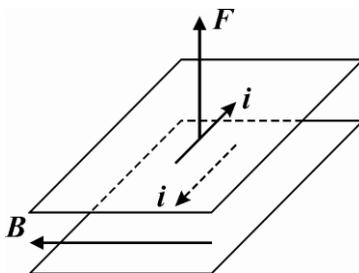


Рис. 17.4. К определению силы магнитного взаимодействия двух плоскостей с током.

**Ответ:** плоскости отталкиваются с силой, действующей на единицу площади,  $F_s = \frac{B^2}{2\mu_0}$ .

**Задача 17.3.3.** По тонкой проволоке диаметром  $D$ , согнутой в виде окружности радиуса  $R$ , течет ток  $I$ . Проволока разрывается, если величина механического напряжения в ней достигает величины  $\sigma_0$ . При каком значении индукции однородного магнитного поля, перпендикулярного плоскости кольца, произойдет разрыв проволоки?

### Решение

Замкнутое кольцо с током можно рассматривать как магнитный момент  $\mathbf{p}_m = IS\mathbf{n}$  (см. (15.2) в главе 15). Так как вектор индукции магнитного поля параллелен  $\mathbf{p}_m$ , то согласно (17.9) вращающий момент, действующий на проводник со стороны внешнего магнитного поля, равен нулю.

Поскольку магнитное поле однородно, то согласно (17.10) сила, действующая на кольцо со стороны магнитного поля, также равна нулю, т.е. проводник находится в положении равновесия.

Рассмотрим силу  $d\mathbf{F}$ , действующую на элемент проводника  $d\mathbf{l}$  (рис. 17.5). Согласно закону Ампера (17.3)  $d\mathbf{F} = I[d\mathbf{l}\mathbf{B}]$ .

Помимо этой силы на данный элемент проводника действуют силы натяжения  $\mathbf{T}$  и  $\mathbf{T}'$ , равные друг другу по величине и приложенные к концам выбранного участка. Выберем ось  $OX$  декартовой системы координат по направлению силы  $d\mathbf{F}$ . Тогда из условия равновесия получаем:

$$\left. \begin{aligned} dF &= 2T \frac{d\alpha}{2} = T \frac{dl}{R} \\ dF &= IB dl \end{aligned} \right\} \Rightarrow T = IBR .$$

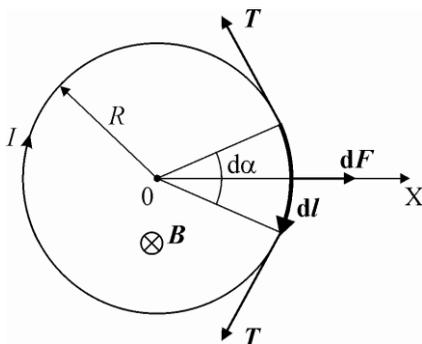


Рис. 17.5. Силы, действующие на элемент кольца с током во внешнем магнитном поле  $\mathbf{B}$ .

Проволока разорвётся, если механическое напряжение в ней достигнет предельного, то есть  $\frac{T}{S} = \sigma_0$  (где  $S = \frac{\pi D^2}{4}$  – площадь поперечного сечения проводника).

$$\text{Окончательно получим: } B = \frac{\sigma_0 \pi D^2}{4IR}.$$

$$\text{Ответ: } B = \frac{\sigma_0 \pi D^2}{4IR}.$$

### Задачи типа 17.2

*Изучение движения заряженных частиц в магнитном поле.*

**Методы решения.** Использование выражения для силы Лоренца (17.5) и законов механики (второй закон Ньютона, законы движения и др.).

**Задача 17.3.4.** Протон, имеющий скорость  $v = 10^4$  м/с, влетает в однородное магнитное поле с индукцией  $B = 0,01$  Тл. Вектор скорости протона направлен под углом  $\alpha = 60^\circ$  к линиям индукции. Определить траекторию движения протона, путь, пройденный им по траектории за время  $t_1 = 10$  мкс, и его положение к концу указанного времени.

### Решение

Выберем декартову систему координат таким образом, чтобы вектор индукции магнитного поля был сонаправлен с осью X, а вектор скорости протона изначально лежал в плоскости XY (рис. 17.6). Начало системы координат совместим с местом нахождения протона в начальный момент времени.

Найдём уравнение траектории протона в выбранной системе координат.

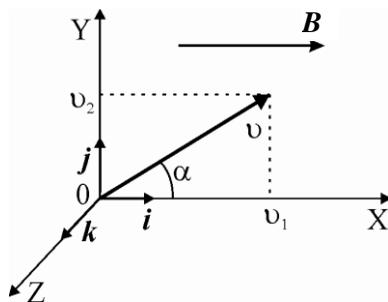


Рис. 17.6. Выбор системы координат в задаче 17.3.4.

На протон, как на частицу с зарядом  $q = |e|$ , при движении в магнитном поле действует сила Лоренца:

$$\mathbf{F}_L = q [\mathbf{v}, \mathbf{B}].$$

Так как сила Лоренца перпендикулярна вектору скорости частицы, то она меняет только направление её скорости, при этом модуль скорости не меняется.

Если представить вектор скорости протона как суперпозицию двух векторов:  $\mathbf{v}_1$  – направленного вдоль линий индукции и  $\mathbf{v}_2$  – направленного перпендикулярно этим линиям, то для силы Лоренца можно записать:

$$\mathbf{F}_L = q [(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2), \mathbf{B}] = q [\mathbf{v}_2, \mathbf{B}].$$

Так как сила Лоренца  $\mathbf{F}_L$  перпендикулярна оси X, то движение протона вдоль оси X равномерное со скоростью  $v_1 = v \cos \alpha$ .

В проекции на плоскость YZ движение протона будет являться равномерным вращением по окружности радиуса

$$R = \frac{mv_2}{qB} = \frac{mv \sin \alpha}{qB}$$

с периодом  $T$ , равным:

$$T = \frac{2\pi R}{v \sin \alpha} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

В результате суперпозиции движений по всем координатам протон движется по спирали, шаг которой  $h$  равен:

$$h = v \cos \alpha \cdot T = \frac{2\pi m}{qB} \cdot v \cos \alpha.$$

Так как модуль скорости протона не изменяется, то движение равномерное и путь  $S$ , пройденный протоном за время  $t$ , равен:

$$S = vt.$$

Найдём теперь координаты точки M, в которой окажется протон через заданный промежуток времени  $t_1 = 10^{-5}$  с. Запишем зависимость координат протона от времени. Так как в начальный момент времени координаты протона были равны (0, 0, 0), то:

$$\begin{cases} x = v \cos \alpha \cdot t, \\ y = R \sin \omega t, \\ z = -R + R \cos \omega t. \end{cases}$$

Здесь  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{qB}{m}$  – частота обращения протона по спирали.

Подставляя численные значения, заданные в условии, и учитывая, что заряд и масса протона равны  $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл и  $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг, получим:

$$\omega t_1 = \frac{qB}{m} t_1 = 9,6 \text{ рад},$$

$$R = \frac{mv \sin \alpha}{qB} = 0,9 \text{ см}.$$

Тогда координаты протона в точке М равны:

$$\begin{cases} x = v \cos \alpha \cdot t = 5 \text{ см}, \\ y = R \sin \omega t = -0,16 \text{ см}, \\ z = -R + R \cos \omega t = 0,08 \text{ см}. \end{cases}$$

Путь  $S_1$ , пройденный протоном за рассматриваемое время  $t_1$ , равен:

$$S_1 = v t_1 = 10 \text{ см}.$$

*Замечание.* При  $\omega t = 2\pi n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) координаты протона равны  $(x, 0, 0)$ , то есть его траектория касается оси X. Таким образом, заряженная частица при движении в магнитном поле оказывается в той плоскости, из которой она вылетела, только через целое число периодов обращения.

Дополнение. Покажем, исходя из законов Ньютона, что траекторией движения протона является спираль, и найдём уравнение траектории.

Если  $i, j, k$  – орты системы координат, то векторное произведение  $[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$  можно расписать в виде:

$$[\mathbf{v}, \mathbf{B}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_x & v_y & v_z \\ B & 0 & 0 \end{vmatrix} = B v_z \mathbf{j} - B v_y \mathbf{k}.$$

Запишем уравнения движения протона в проекциях на оси координат:

$$m \frac{dv_x}{dt} = 0; \quad (17.11)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = qv_z B; \quad (17.12)$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = -qv_y B. \quad (17.13)$$

Из уравнения (17.11) следует, что вдоль оси X движение протона равномерное:

$$v_1 = v_x = v_{x0} = v \cos \alpha,$$

$$x = v \cos \alpha \cdot t.$$

Модуль вектора  $\mathbf{v}$  постоянен, то есть можно записать:

$$v_y^2 + v_z^2 = v^2 - v_1^2 = v_2^2 = v^2 \sin^2 \alpha = \text{const}. \quad (17.14)$$

Перейдём от производных по времени к производным по координатам. Учитывая (17.14), а также соотношения:

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{dv_y}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = v_y \frac{dv_y}{dy},$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{dv_z}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = v_z \frac{dv_z}{dz},$$

уравнения (17.12) и (17.13) можно переписать в виде:

$$mv_y \frac{dv_y}{dy} = qB \sqrt{v_2^2 - v_y^2},$$

$$mv_z \frac{dv_z}{dz} = -qB \sqrt{v_2^2 - v_z^2}.$$

Из этих уравнений выразим  $dy$  и  $dz$ :

$$dy = \frac{m}{qB} \cdot \frac{v_y dv_y}{\sqrt{v_2^2 - v_y^2}},$$

$$dz = -\frac{m}{qB} \cdot \frac{v_z dv_z}{\sqrt{v_2^2 - v_z^2}}.$$

Отсюда после интегрирования получим законы движения:

$$y = -\frac{m}{qB} \sqrt{v_2^2 - v_y^2} + C_1,$$

$$z = \frac{m}{qB} \cdot \sqrt{v_2^2 - v_z^2} + C_2.$$

Для определения постоянных  $C_1$  и  $C_2$  воспользуемся начальными условиями при  $t = 0$ :

$$y(0) = z(0) = 0, \quad (17.15)$$

$$v_y(0) = v_2; \quad v_z(0) = 0. \quad (17.16)$$

Используя (17.15), найдём постоянную  $C_1$ :

$$C_1 = 0 + \frac{m}{qB} \sqrt{v_2^2 - v_z^2} = 0.$$

Используя (17.16), получим значение  $C_2$ :

$$C_2 = 0 - \frac{m}{qB} \sqrt{v_2^2} = -\frac{mv_2}{qB}.$$

Тогда выражения для координат  $y$  и  $z$  примут вид:

$$y = -\frac{m}{qB} \sqrt{v_2^2 - v_y^2} = -\frac{mv_z}{qB}; \quad (17.17)$$

$$z = \frac{m}{qB} \left( \sqrt{v_2^2 - v_z^2} - v_2 \right) = \frac{m}{qB} (v_y - v_2).$$

В другой форме для координаты  $z$  можно записать:

$$z + \frac{mv_2}{qB} = \frac{mv_y}{qB}. \quad (17.18)$$

Для получения уравнения траектории движения протона определим связь координат  $y$  и  $z$  друг с другом, для этого возведём в квадрат уравнения (17.17) и (17.18) и сложим их:

$$y^2 + \left( z + \frac{mv_2}{qB} \right)^2 = \left( \frac{m}{qB} \right)^2 (v_z^2 + v_y^2) = \left( \frac{mv_2}{qB} \right)^2.$$

Получившееся уравнение представляет собой уравнение окружности радиуса  $R = \frac{mv_2}{qB} = \frac{mV \sin \alpha}{qB}$  с центром, расположен-

ным в точке с координатами  $y_0 = 0$  и  $z_0 = -\frac{mv_2}{qB} = -R$ .

Период обращения протона по этой окружности равен:

$$T = \frac{2\pi R}{v \sin \alpha} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

**Ответ:** траекторией движения протона является спираль радиуса  $R = \frac{m\nu \sin \alpha}{qB}$  с шагом  $h = \frac{2\pi m}{qB} \nu \cos \alpha$ ;

путь  $S_1 = 10$  см;

координаты конечной точки движения: (5; -0,16; 0,08) см.

**Задача 17.3.5.** Вдоль прямого медного цилиндрического проводника радиуса  $R$  течет ток силы  $I$ . Найти разность потенциалов между осью проводника и его поверхностью. Концентрация электронов проводимости в меди  $n$ .

### Решение

Ток, текущий в проводнике, создает вокруг себя магнитное поле. Это поле действует на электроны проводимости, которые упорядоченно движутся с дрейфовой скоростью

$$\nu = \frac{I}{neS} = \frac{I}{ne\pi R^2}.$$

Действие магнитной составляющей силы Лоренца

$$\mathbf{F} = e[\nu\mathbf{B}]$$

приводит к тому, что электроны начинают смещаться к оси проводника. В результате на поверхности появляется положительный заряд, а в остальном объеме – отрицательный. Таким образом, возникает электрическое поле, со стороны которого на электроны также действует сила. Равновесие в проводнике будет достигнуто тогда, когда действующая на электроны сила Лоренца

$$\mathbf{F}_L = e\mathbf{E} + e[\nu\mathbf{B}]$$

станет равной нулю (рис. 17.6), и в каждой точке проводника будет выполняться равенство

$$e\mathbf{E} = e\nu\mathbf{B}. \quad (17.19)$$

Индукция магнитного поля на расстоянии  $r$  от оси сплошного цилиндрического проводника с током  $I$  равна (см. задачу 16.3.5 предыдущей главы):

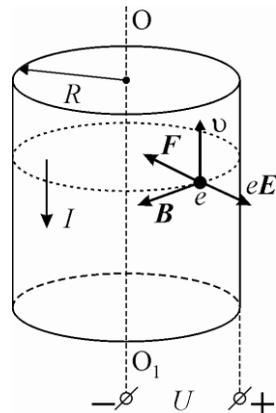


Рис. 17.6. К определению разности потенциалов между осью проводника с током и его поверхностью.

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r. \quad (17.20)$$

Из выражений (17.19) и (17.20) получаем модуль вектора напряжённости электрического поля в произвольной точке проводника:

$$E = \nu B = \frac{I}{n e \pi R^2} \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r.$$

Отсюда находим разность потенциалов между осью проводника и его поверхностью:

$$U = \int_0^R E dr = \int_0^R \frac{\mu_0 I^2}{2 n e \pi^2 R^4} r dr = \frac{\mu_0 I^2}{4 n e \pi^2 R^2}.$$

*Замечание.* Оценим разность потенциалов между осью медного проводника радиуса  $R = 1$  мм при силе тока в нём  $I = 10$  А. Концентрация электронов проводимости в меди  $n \approx 8 \cdot 10^{22}$  см<sup>-3</sup>, заряд электрона  $1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл. Тогда получим:

$$U = \frac{\mu_0 I^2}{4 n e \pi^2 R^2} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100}{4 \cdot 8 \cdot 10^{28} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \pi^2 \cdot 10^{-6}} \approx 2,5 \cdot 10^{-10} \text{ В},$$

так что в большинстве задач этой разностью потенциалов можно пренебречь.

**Ответ:**  $U = \frac{\mu_0 I^2}{4 n e \pi^2 R^2}.$

**Задача 17.3.6.** В неоднородном магнитном поле, вектор индукции которого направлен перпендикулярно плоскости ХУ декартовой системы координат, а модуль изменяется согласно закону  $B = ay$ , ( $y \geq 0$ ), где  $a$  – известная постоянная, в точке с координатой  $y = 0$  находится заряженная частица с массой  $m$  и зарядом  $q$ . Частице сообщили скорость  $\nu$ , направленную в положительном направлении оси ОУ. Определить максимальное смещение частицы вдоль оси ОУ. Силой тяжести пренебречь.

### Решение

Так как сила Лоренца, действующая на частицу, не совершает работу, то модуль скорости частицы не изменяется, и в любой момент

$$\nu^2 = \nu_x^2 + \nu_y^2.$$

Запишем уравнение движения частицы в проекции на ось  $OX$  в произвольный момент времени (см. рис. 17.7):

$$\begin{aligned} m \frac{dv_x}{dt} &= F_L \cos \alpha = Bvq \cos \alpha = \\ &= Bqv_y = ayq \frac{dy}{dt}. \end{aligned}$$

После интегрирования получим:

$$m(v_x - v_{0x}) = aq \left( \frac{y^2}{2} - \frac{y_0^2}{2} \right).$$

Учитывая начальные условия:  $mv_x = \frac{aqy^2}{2}$ , в точке максимального смещения частицы вдоль оси  $OY$   $v_y = 0$ , то есть

$|v_x| = v$ , следовательно

$$mv = \frac{a|q|y_{\max}^2}{2}.$$

Окончательно имеем:

$$y_{\max} = \sqrt{\frac{2mv}{a|q|}}.$$

**Ответ:**  $y_{\max} = \sqrt{\frac{2mv}{a|q|}}.$

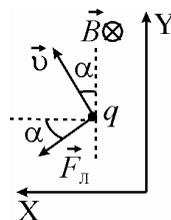


Рис. 17.7. Движение частицы в неоднородном магнитном поле.

### Задачи типа 17.3

*Определение вращающего момента, действующего на проводник с током во внешнем магнитном поле.*

**Методы решения.** Использование выражений (17.3) – (17.5) и (17.9) теоретического материала.

**Задача 17.3.7** На круглый короткий деревянный цилиндр объёмом  $V = 60 \text{ см}^3$  в один слой намотана катушка. По катушке течет ток, средняя поверхностная плотность которого равна  $i = 10 \text{ А/см}$ . Определить величину механического момента, который удерживает цилиндр в равновесии, если он находится во внешнем

однородном магнитном поле, вектор индукции которого  $\mathbf{B}$  образует угол  $\alpha = 30^\circ$  с осью цилиндра и равен по модулю  $B = 0,01$  Тл.

### Решение

Выделим из катушки тонкое кольцо шириной  $dl$ . Это кольцо обладает магнитным моментом

$$d\mathbf{p}_m = I\mathbf{S}\mathbf{n} = i dl \pi R^2 \mathbf{n} \quad (R - \text{радиус катушки}),$$

направленным вдоль оси цилиндра (рис. 17.8).

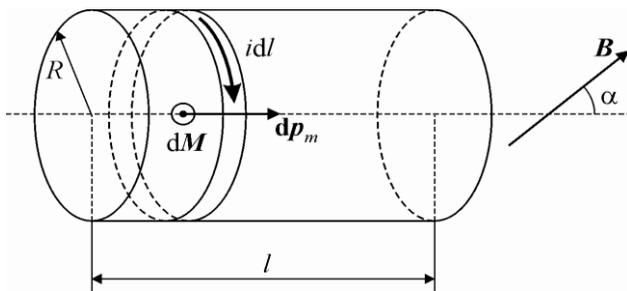


Рис. 17.8. К определению вращающего момента, действующего на катушку в магнитном поле.

На этот элемент катушки со стороны магнитного поля действует вращающий момент

$$d\mathbf{M} = [d\mathbf{p}_m \mathbf{B}].$$

Так как по условию угол между векторами  $d\mathbf{p}_m$  и  $\mathbf{B}$  равен  $\alpha$ , то модуль вектора  $d\mathbf{M}$  равен:

$$dM = p_m B \sin \alpha = i dl \pi R^2 B \sin \alpha.$$

Считая, что геометрические размеры катушки (радиус  $R$  и длина  $l$ ) совпадают с размерами деревянного цилиндра, на который она намотана, получим выражение для момента, действующего на всю катушку со стороны магнитного поля:

$$M = \int_0^l dM = \int_0^l i dl \pi R^2 B \sin \alpha = iVB \sin \alpha.$$

Здесь при интегрировании учтено, что объём катушки равен  $V = l\pi R^2$ .

В условиях равновесия механический момент, который удерживает цилиндр с катушкой в равновесии, равен по модулю моменту магнитных сил, который стремится повернуть катушку.

Подставляя численные данные, для модуля искомого механического момента получим:

$$M = iVB\sin\alpha = 0,3 \text{ мН}\cdot\text{м}.$$

**Ответ:**  $M = iVB\sin\alpha = 0,3 \text{ мН}\cdot\text{м}.$

**Задача 17.3.8.** Круглая рамка массы  $m$  может вращаться вокруг вертикальной оси  $OO$ , проходящей через одну из точек рамки по касательной к проводу (см. рис. 17.9а). По рамке течёт ток силы  $I$ . Рамка находится в однородном магнитном поле индукция  $\mathbf{B}$  которого горизонтальна. Определить период  $T$  малых колебаний рамки около положения равновесия.

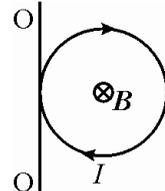


Рис. 17.9а. Круглая рамка с током в магнитном поле

### Решение

Магнитный момент рамки равен

$$\mathbf{p}_m = I\mathbf{S}\mathbf{n} = I\pi R^2 \mathbf{n},$$

где  $R$  – радиус рамки. В положении равновесия вектор  $\mathbf{p}_m$  параллелен вектору магнитной индукции, а при отклонении рамки составляет с вектором магнитной индукции угол  $\alpha$  (см. рис. 17.9б).

При отклонении рамки от положения равновесия на небольшой угол  $\alpha$  на неё начинает действовать момент сил Ампера, стремящийся вернуть её обратно. Согласно (17.9) этот момент равен:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m \mathbf{B}].$$

Запишем уравнение вращательного движения рамки относительно оси  $OO$ :

$$J\ddot{\alpha} = -p_m B \sin\alpha,$$

где  $J = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3mR^2}{2}$  – момент инерции рамки относительно оси  $OO$ .

При малых отклонениях  $\sin\alpha \approx \alpha$ . Тогда уравнение вращательного движения можно привести к виду уравнения гармонических колебаний рамки:

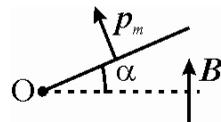


Рис. 17.9б Взаимная ориентация векторов  $\mathbf{p}_m$  и  $\mathbf{B}$  при отклонении рамки.

$$\ddot{\alpha} + \frac{2\pi IB}{3m} \alpha = 0,$$

откуда следует, что циклическая частота колебаний равна

$$\omega = \sqrt{\frac{2\pi IB}{3m}},$$

а период:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{6\pi m}{IB}}.$$

$$\text{Ответ: } T = \sqrt{\frac{6\pi m}{IB}}.$$

#### 17.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 17.4.1** ([2], 3.275). При измерении эффекта Холла в натриевом проводнике напряжённость поперечного поля оказалась  $E = 5$  мкВ/см при плотности тока  $j = 200$  А/см<sup>2</sup> и индукции магнитного поля  $B = 1$  Тл. Найти концентрацию электронов проводимости в проводнике.

$$\text{Ответ: } n = \frac{jB}{eE} = 2,5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}.$$

**Задача 17.4.2** ([2], 3.276). Найти подвижность электронов проводимости в медном проводнике, если при измерении эффекта Холла в магнитном поле с индукцией  $B = 100$  мТл напряжённость поперечного электрического поля у данного проводника оказалась в  $\eta = 3,1 \cdot 10^3$  раз меньше напряжённости продольного электрического поля.

$$\text{Ответ: } u_0 = \frac{1}{\eta B} = 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с}).$$

**Задача 17.4.3** ([2], 3.394). Протон, ускоренный разностью потенциалов  $U = 500$  кВ, пролетает поперечное однородное магнитное поле с индукцией  $B = 0,51$  Тл. Толщина области с полем  $d = 10$  см. Найти угол  $\alpha$  отклонения протона от первоначального направления движения.

$$\text{Ответ: } \alpha = \arcsin\left(Bd\sqrt{\frac{q}{2mU}}\right) = 30^\circ.$$

**Задача 17.4.4** ([2], 3.397). Электрон, ускоренный разностью потенциалов  $U = 1$  кВ, движется в однородном магнитном поле под углом  $\alpha = 30^\circ$  к вектору  $\mathbf{B}$ , модуль которого  $B = 29$  мТл. Найти шаг винтовой траектории электрона.

$$\text{Ответ: } \Delta l = 2\pi\sqrt{\frac{2mU}{eB^2}} \cos \alpha = 2 \text{ см.}$$

**Задача 17.4.5** ([2], 3.399). Из точки А, лежащей на оси прямого соленоида, вылетает нерелятивистский протон со скоростью  $u$  под углом  $\alpha$  к оси. Индукция магнитного поля  $B$ . Найти расстояние  $r$  от оси до точки попадания электрона на экран, расположенный перпендикулярно к оси на расстоянии  $l$  от точки А.

$$\text{Ответ: } r = 2\left(\frac{m\upsilon}{eB} \sin \alpha\right) \cdot \left|\sin\left(\frac{leB}{2m\upsilon \cos \alpha}\right)\right|.$$

**Задача 17.4.6.** Какова сила взаимодействия двух параллельных проводящих пластин в вакууме, по которым текут одинаковые по величине токи с поверхностной плотностью величиной  $i$ , если направления этих токов составляют друг с другом угол  $\alpha$ ? Линейные размеры сторон пластин  $l_1, l_2$  много больше расстояния между ними.

$$\text{Ответ: } F = \frac{\mu_0 i^2}{2} l_1 l_2 \cos \alpha.$$

**Задача 17.4.7.** Два длинных прямых взаимно перпендикулярных провода отстоят друг от друга на расстояние  $a$ . В каждом проводе течет ток  $I$ . Найти максимальное значение силы Ампера, приходящееся на единицу длины провода в такой системе.

$$\text{Ответ: } (F_l)_{\max} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi a}.$$

**Задача 17.4.8.** Прямоугольная рамка с током  $I$  и сторонами  $a$  и  $b$  лежит в одной плоскости с очень длинным проводом, по

которому течет ток  $I_0$  (сторона рамки  $b$  параллельна проводу). Определить внешнюю механическую силу, которая удерживает рамку в равновесии. Расстояние между проводом и осью симметрии рамки равно  $r_0$ .

$$\text{Ответ: } F = \frac{2\mu_0 I_0 I a b}{\pi(4r_0^2 - a^2)}.$$

**Задача 17.4.9** ([2], 3.255a). Найти модуль и направление силы, действующей на единицу длины тонкого проводника с током  $I = 8$  А в точке О, если проводник изогнут так, как показано на рис. 17.10. Радиус закругления  $R = 10$  см.

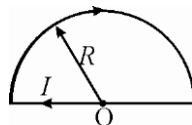


Рис. 17.10. Провод с током в задаче 17.4.9.

$$\text{Ответ: } F = \frac{\mu_0 I^2}{4R} = 0,2 \text{ мН/м.}$$

**Задача 17.4.10** ([2], 3.258). Медный провод сечением  $S = 2,5$  мм<sup>2</sup>, согнутый в виде трёх сторон квадрата, может поворачиваться вокруг горизонтальной оси  $OO_1$ . Провод находится в однородном вертикальном магнитном поле (рис. 17.11). Найти индукцию поля, если при пропускании по данному проводу тока  $I = 16$  А угол отклонения  $\alpha = 20^\circ$ .

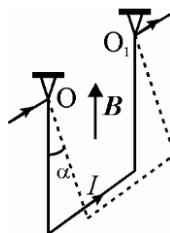


Рис. 17.11. Подвижная рамка в магнитном поле.

$$\text{Ответ: } B = \frac{2\rho g S \operatorname{tg} \alpha}{I} = 10 \text{ мТл,}$$

где  $\rho$  – плотность меди.

**Задача 17.4.11** ([2], 3.261a). Квадратная рамка с током  $I$  расположена в одной плоскости с длинным прямым проводником, по которому течёт ток  $I_0$ . Сторона рамки  $a$ . Проходящая через середины противоположных сторон ось рамки параллельна проводу и отстоит от него на расстояние, которое в  $\eta$  раз больше стороны рамки. Найти силу Ампера, действующую на рамку.

$$\text{Ответ: } F = \frac{2\mu_0 I I_0}{\pi(4\eta^2 - 1)}.$$

**Задача 17.4.12** ([2], 3.263). Два длинных параллельных провода с пренебрежимо малым сопротивлением замкнуты с одного конца на сопротивление  $R$ , а с другого конца подключены к источнику постоянного напряжения. Расстояние между осями проводов в  $\eta = 20$  раз больше радиуса сечения каждого провода. При каком  $R$  сила взаимодействия между проводами обратиться в ноль?

$$\text{Ответ: } R = \frac{\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} \ln \eta}{\pi} = 0,36 \text{ кОм.}$$

**Задача 17.4.13.** Внутри длинного соленоида находится короткая катушка сечения  $S$ , состоящая из  $N$  витков. Ось катушки перпендикулярна оси соленоида и направлена вертикально. Внутренняя катушка укреплена на коромысле весов, которое в отсутствие тока находится в равновесии (рис.17.12).

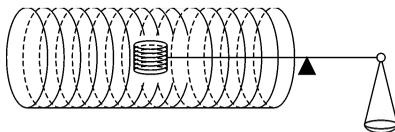


Рис. 17.12. Соленоид с катушкой.

Если в катушке и соленоиде текут одинаковые токи, то для уравнивания весов на короткое плечо коромысла длиной  $l$  нужно поместить груз массы  $m$ . Определить силу этого тока  $I$ , если плотность намотки соленоида равна  $n$  витков на единицу длины.

$$\text{Ответ: } I = \sqrt{\frac{mgl}{\mu_0 n S N}}.$$

**Задача 17.4.14** ([2], 3.260). Укрепленную на конце коромысла весов небольшую катушку  $K$  с числом витков  $N = 200$  поместили в зазор между полюсами магнита (рис. 17.13). Площадь сечения катушки  $S = 1,0 \text{ см}^2$ , длина плеча  $OA$  коромысла  $l = 22 \text{ м}$ , для восстановления равновесия пришлось изменить груз на чаше весов на  $\Delta m = 60 \text{ мг}$ . Найти индукцию магнитного поля в месте нахождения катушки.

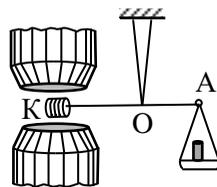


Рис. 17.13. Катушка в зазоре магнита.

$$\text{Ответ: } B = \frac{\Delta mgl}{NIS} = 0,4 \text{ Тл.}$$

**Задача 17.4.15** ([3], 344). Квадратная рамка со стороной  $a$ , имеющая  $N$  витков, может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через середины противоположных сторон рамки. По рамке течёт ток силы  $I$ . Рамка находится в однородном горизонтальном магнитном поле индукции  $B$ . Определить период  $T$  малых колебаний рамки около положения равновесия, если момент инерции рамки равен  $J$ .

$$\text{Ответ: } T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{a^2 NIB}} .$$

## Глава 18

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

## 18.1. Теоретический материал

**Потоком  $d\Phi$  (вектора) магнитной индукции  $\mathbf{B}(r)$**  через физически бесконечно малый элемент поверхности (настолько малый, что можно считать элемент плоским, а магнитную индукцию одинаковой в любой точке этого элемента) площадью  $dS$  называется физическая величина, равная:

$$d\Phi \equiv \mathbf{B}(r) \cdot d\mathbf{S},$$

где  $d\mathbf{S} \equiv n dS$ ,  $n$  – нормаль к поверхности.

**Поток магнитной индукции через всю поверхность  $S$**  равен:

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S \mathbf{B}(r) \cdot d\mathbf{S}. \quad (18.1)$$

Единицей измерения потока вектора магнитной индукции является *Вебер*:

$$[\Phi] = \text{Тл} \cdot \text{м}^2 = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{А}} \equiv \text{Вб}.$$

**Электромагнитная индукция** – это возникновение электродвижущей силы (ЭДС индукции) в контуре, находящемся в переменном магнитном поле или движущемся в магнитном поле.

**Интегральная форма закона электромагнитной индукции Фарадея.** ЭДС индукции  $\mathcal{E}_{\text{инд}}$  в контуре равна взятой с обратным знаком скорости изменения потока магнитной индукции, пронизывающего этот контур, (потока через поверхность, опирающуюся на контур):

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (18.2)$$

Поскольку знак потока вектора магнитной индукции зависит от выбора направления нормали к поверхности, опирающейся на контур, а знак ЭДС – от выбора направления обхода контура, необходимо **согласовать** положительное направление нормали с положительным направлением обхода контура. Это согласование делается по **правилу правого буравчика (винта)**, как показано на рис. 18.1.

Знак минус в (18.2) соответствует так называемому **правилу Ленца**: действие индукционного тока противоположно действию причины, которая его вызвала – создаваемое индукционным током магнитное поле стремится скомпенсировать то изменение магнитного потока, которое его вызвало. Или совсем коротко – последствия противодействуют причине.

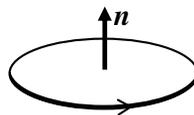


Рис. 18.1. К определению направления вектора нормали к плоскому контуру.

### Механизмы электромагнитной индукции.

Появление ЭДС электромагнитной индукции обусловлено работой силы Лоренца, действующей на заряд в электромагнитном поле:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{v}\mathbf{B}],$$

где  $\mathbf{v}$  – скорость движения заряда.

В разных физических ситуациях и разных системах отсчета эта сила может иметь только электрическую (первое слагаемое) или только магнитную (второе слагаемое) составляющую, или быть суммой этих составляющих.

Изменение потока магнитной индукции  $\Phi(t)$  может быть вызвано двумя разными причинами, которые могут действовать и совместно. Им соответствуют следующие два механизма электромагнитной индукции.

Первый механизм. При произвольном движении контура в *постоянном* магнитном поле причиной электромагнитной индукции является магнитная составляющая силы Лоренца:

$$\mathbf{F} = q [\mathbf{v}\mathbf{B}].$$

При этом ЭДС индукции равна работе вдоль контура  $L$  той составляющей силы Лоренца, которая возникает из-за движения заряда вместе с контуром со скоростью  $\mathbf{v}$ :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{q} \oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L [\mathbf{v}\mathbf{B}] \cdot d\mathbf{l}. \quad (18.3)$$

Если взять систему отсчета, движущуюся вместе с данным участком проводника, то магнитная составляющая силы Лоренца не возникнет, поскольку в такой системе заряды будут неподвижны. Появление же ЭДС индукции на этом участке можно объяснить релятивистским эффектом – появлением электрического поля, возникающего в движущейся системе отсчета. Это поле для скоростей

системы отсчета  $\mathbf{v}$ , много меньших скорости света, определяется формулой:

$$\mathbf{E} = [\mathbf{v}\mathbf{B}]. \quad (18.4)$$

В этом случае ЭДС возникает за счет работы электрической составляющей силы Лоренца, и ее величина приводит к тому же самому выражению (18.3) для ЭДС.

**Второй механизм.** Всякое переменное магнитное поле порождает в окружающем пространстве электрическое поле (которое называют *индукционным*), при этом циркуляция напряженности электрического поля (ЭДС индукции) по любому неподвижному замкнутому контуру  $L$  равна взятой с обратным знаком скорости изменения магнитного потока  $\Phi$ , пронизывающего этот контур.

Индукционное электрическое поле, в отличие от электростатического поля, не потенциально и возникает в отсутствие электрических зарядов. Локальная взаимная связь напряженности вихревого электрического поля  $\mathbf{E}_{\text{вихр}}$  и магнитной индукции  $\mathbf{B}(t)$  определяется уравнением (18.5), которое входит в систему четырех фундаментальных уравнений электродинамики Максвелла.

**Дифференциальная форма закона электромагнитной индукции Фарадея:**

$$\text{rot } \mathbf{E}_{\text{вихр}} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (18.5)$$

Пользуясь теоремой Стокса, ЭДС индукции в замкнутом контуре  $L$ , вызванной вихревым электрическим полем, можно представить в виде (18.2):

$$\mathcal{E} = \oint_L \mathbf{E}_{\text{вихр}} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Таким образом, интегральное соотношение (18.2) является универсальным, так как описывает оба механизма возникновения ЭДС, в том числе и при их совместном действии.

## 18.2. Основные типы задач (классификация)

18.1. Нахождение ЭДС индукции в линейных<sup>1</sup> проводниках, движущихся в постоянном магнитном поле.

---

<sup>1</sup> Под *линейными* проводниками будем понимать проводники, длина которых значительно превышает их линейные поперечные размеры. При расчете цепей,

18.2. Нахождение ЭДС индукции в проводящих телах, движущихся в постоянном магнитном поле.

18.3. Нахождение ЭДС индукции в изменяющемся магнитном поле.

18.4. Нахождение напряженности вихревого электрического поля.

### 18.3. Методы решения и примеры решения задач

#### Задачи типа 18.1

*Нахождение ЭДС индукции в линейных проводниках, движущихся в постоянном магнитном поле.*

**Метод решения** – применение закона Фарадея в интегральной форме (18.2) либо расчет ЭДС индукции с использованием силы Лоренца (18.3). В обоих случаях требуется выбрать контур, который проводится по линейным проводникам цепи.

Применение формулы (18.2) для нахождения ЭДС индукции требует определения потока через площадь контура, то есть интегрирования по поверхности, ограниченной контуром. Этот вариант проще, если все проводники лежат в одной плоскости, а величина нормальной компоненты индукции  $B_n$  на поверхности контура постоянна или задана легко интегрируемой функцией координат.

Использование формулы (18.3) требует расчета контурного интеграла для определения работы силы Лоренца, поэтому удобно при простой форме контура, например, прямоугольной.

Использование релятивистского соотношения (18.4) для решения типовых задач курса общей физики в большинстве случаев не оправдано, поскольку приводит к ненужному усложнению. Это особенно проявляется в случае непоступательного движения проводников, например, при их вращении, поскольку закон преобразования полей (18.4) относится к инерциальным системам отсчета.

**Задача 18.3.1.** Длинный прямой провод, по которому течет ток  $I_0$ , и П-образный проводник ABCD с подвижной перемычкой AB длиной  $l$  расположены в одной плоскости. Сторона CD контура находится на расстоянии  $a$  от провода. Перемычку перемещают с заданной постоянной скоростью  $v$  (рис. 18.2). Найти:

1) зависимость от времени ЭДС индукции в контуре;

2) силу тока в контуре, если сопротивление единицы длины всех составляющих его проводников равно  $r'$ , а индуктивностью контура можно пренебречь.

### Решение

Зададим для определенности направление тока  $I_0$  (рис. 18.2). Выберем в качестве положительного направления

обхода контура обход против часовой стрелки. Тогда вектор  $\mathbf{n}$  нормали к контуру будет перпендикулярен плоскости чертежа и направлен из чертежа вверх. Обозначим расстояние от провода до ближайшей стороны контура  $a$ , тогда расстояние от провода до перемычки  $b(t) = a + vt$ .

ЭДС индукции можно найти тремя способами.

Способ 1. Решение основано на использовании закона электромагнитной индукции в интегральной форме (18.2).

Силовые линии магнитной индукции поля, создаваемого бесконечным прямолинейным проводом, являются окружностями и пересекают плоскость рамки под прямым углом. В соответствии с выбранным направлением тока  $I_0$  вектор  $\mathbf{B}$  в плоскости рамки будет направлен в плоскость чертежа (рис. 18.2). На расстоянии  $r$  от бесконечного провода модуль вектора индукции равен:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}.$$

В каждый момент времени магнитный поток  $\Phi(t)$  через контур определяется интегралом от  $B(r)$  по площади контура:

$$\Phi(t) = \int_{S(t)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = - \int_a^{b(t)} B(r) l dr = - \frac{\mu_0 I_0 l}{2\pi} \int_a^{b(t)} \frac{dr}{r} = - \frac{\mu_0 I_0 l}{2\pi} \ln \left( \frac{b(t)}{a} \right).$$

Здесь учтено, что  $dS = l dr$ , а знак минус возникает из-за противоположной направленности вектора  $d\mathbf{S}$  (который параллелен нормали  $\mathbf{n}$ ) и вектора  $\mathbf{B}$ .

ЭДС находим из закона Фарадея:

$$\mathcal{E}(t) = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\mu_0 I_0 l}{2\pi} \cdot \frac{1}{b(t)} \cdot \frac{db(t)}{dt} = \frac{\mu_0 I_0 l}{2\pi b(t)} v = \frac{\mu_0 I_0 l v}{2\pi(a + vt)}.$$

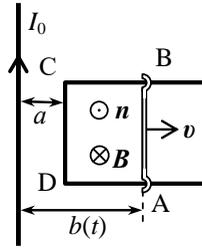


Рис. 18.2. К расчету ЭДС индукции в контуре с движущейся перемычкой.

ЭДС получилась положительной, то есть при переносе положительного заряда по выбранному положительному направлению обхода контура ее работа больше нуля.

Данный способ нахождения ЭДС индукции здесь не оптимален, так как в процессе решения после интегрирования выполняется дифференцирование полученного выражения, то есть, фактически, обратная операция.

Способ 2. Расчет ЭДС на основе силы Лоренца.

Магнитная компонента силы Лоренца  $\mathbf{F}_L = q[\mathbf{v}\mathbf{B}]$  действует только на подвижные заряды, находящиеся в движущейся перемычке, и при указанных направлениях векторов  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{B}$  направлена вверх. В замкнутой цепи эта сторонняя сила порождает ЭДС индукции, которая равна:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{q} \oint_{\Gamma} \mathbf{F}_L \cdot d\mathbf{l} = \int_{AB} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \cdot d\mathbf{l} = \int_{AB} Bv dl = Bv \int_{AB} dl = Bvl = \frac{\mu_0 I_0 l}{2\pi b(t)} v.$$

Интегрирование здесь происходит только по длине перемычки АВ, поскольку остальные проводники неподвижны. Интегрирование свелось просто к умножению, поскольку вектор индукции  $\mathbf{B}$  одинаков во всех точках перемычки.

Этот способ, отражающий физическую причину появления ЭДС, в данном случае наиболее удобен.

Способ 3. Расчет с использованием релятивистского преобразования полей (формула (18.4)).

Рассмотрим задачу в системе отсчета, движущейся со скоростью перемычки  $v$ . В данной системе отсчета перемычка АВ неподвижна, а участок CD движется со скоростью  $(-v)$ . В перемычке АВ возникает вихревое электрическое поле с напряженностью  $\mathbf{E}_{AB} = [v\mathbf{B}(b)]$ , а на участке CD – поле с напряженностью  $\mathbf{E}_{CD} = [v\mathbf{B}(a)]$ , причем векторы напряженности на всех участках контура направлены вверх. На заряды, находящиеся на участке CD, действует также магнитная составляющая силы Лоренца  $\mathbf{F} = q[(-v)\mathbf{B}(a)]$ , которая компенсирует силу со стороны электрического поля  $q\mathbf{E}_{CD}$ . Таким образом, сторонние силы в контуре действуют на заряды вдоль проводников только на участке АВ и обусловлены электрическим полем, модуль напряженности которого  $E = vB(b)$ . Это поле и вызывает появление ЭДС

$$\mathcal{E} = El = Bvl = \frac{\mu_0 I_0 l}{2\pi b(t)} v = \frac{\mu_0 I_0 lv}{2\pi(a + vt)}.$$

Легко убедиться, что в данном случае  $\text{rot}\mathbf{E} = \text{rot}[\mathbf{v}\mathbf{B}(t)] \neq 0$ , то есть электрическое поле является вихревым.

#### Нахождение силы тока

Сопротивление контура пропорционально его периметру и равно

$$R(t) = 2r'[l + b(t) - a] = 2r'(l + vt).$$

Поскольку индуктивность контура по условию мала, можно пренебречь ЭДС самоиндукции, и сила тока в каждый момент времени определяется по закону Ома из найденной выше ЭДС индукции:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R(t)} = \frac{\mu_0 I_0 l v}{4\pi r'(a + vt)(l + vt)}.$$

Сила тока получилась положительной, то есть его направление совпадает с выбранным положительным направлением обхода контура против часовой стрелки. Создаваемый этим током магнитный поток, очевидно, противоположен по знаку потоку, порождаемому током  $I_0$ , что соответствует правилу Ленца.

**Ответ:** 1)  $\mathcal{E} = \frac{\mu_0 I_0 l}{2\pi(a + vt)}$ ; 2)  $I(t) = \frac{\mu_0 I_0 l v}{4\pi r'(a + vt)(l + vt)}$ .

**Задача 18.3.2.** Круглая проволочная петля радиуса  $a$  и сопротивлением  $R$ , находящаяся в однородном постоянном магнитном поле с индукцией  $\mathbf{B}$ , равномерно вращается вокруг своего диаметра, перпендикулярного к  $\mathbf{B}$ , с угловой скоростью  $\omega$  (рис. 18.3). Пренебрегая индуктивностью петли, найти среднюю механическую мощность, необходимую для поддержания вращения.

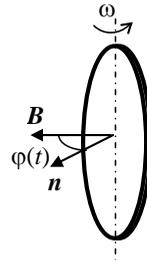


Рис. 18.3. Вращающаяся в магнитном поле проволочная петля.

#### Решение

Пусть  $\varphi(t) = \omega t$  – угол между вектором  $\mathbf{B}$  и вектором  $\mathbf{n}$  нормали к плоскости петли. Тогда магнитный поток через контур

$$\Phi(t) = \pi a^2 B \cos \omega t,$$

а ЭДС индукции

$$\mathcal{E} = -(\partial\Phi / \partial t) = \pi a^2 B \omega \sin \omega t.$$

Механическую мощность, необходимую для поддержания вращения, можно найти из того, что по закону сохранения энергии она должна равняться тепловой мощности  $P_T$ , выделяющейся в этом контуре.

Поскольку индуктивностью контура можно пренебречь, ЭДС самоиндукции можно не учитывать, и для тепловой мощности  $P_T$  получаем:

$$P_T(t) = \frac{\xi^2}{R} = \frac{(\pi a^2 B \omega)^2}{R} \sin^2 \omega t.$$

Среднее за период значение этой величины составляет:

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T P_T(t) dt = \frac{1}{2R} (\pi a^2 B \omega)^2.$$

*Замечание.* Мощность момента сил, обеспечивающих вращение петли, должна равняться мощности тормозящего механического момента сил Ампера, действующих на контур со стороны магнитного поля из-за протекающего в контуре индукционного тока. Решение задачи таким способом рассмотрено в главе 20, **задача 20.3.6.**

**Ответ:**  $\bar{P} = \frac{1}{2R} (\pi a^2 B \omega)^2.$

### Задачи типа 18.2

*Нахождение ЭДС индукции в проводящих телах, движущихся в постоянном магнитном поле.*

**Метод решения** – нахождение ЭДС индукции через магнитную составляющую силы Лоренца (18.3). Применение закона Фарадея в интегральной форме (18.2) в данном случае не всегда удобно, так как требует задания контура. При наличии движущихся пространственных проводящих областей (тел) выбор контура может быть неочевидным. В таких случаях целесообразно вести расчет ЭДС, непосредственно исходя из ее первопричины – силы Лоренца.

**Задача 18.3.3.** Металлический цилиндр радиуса  $a$  помещен в однородное постоянное магнитное поле с индукцией  $\mathbf{B}$ , направленной вдоль его оси. Цилиндр вращают вокруг его оси с постоянной угловой скоростью  $\omega$  (рис. 18.4). Найти: 1) разность потенциалов  $U$

между поверхностью и осью цилиндра;  
2) поверхностную  $\sigma$  и объемную  $\rho(r)$  плотности зарядов в цилиндре.

### Решение

Пусть для определенности вектор угловой скорости  $\omega$  сонаправлен  $B$ . В стационарном режиме движения электронов вдоль радиуса цилиндра нет, т.е. радиальная компонента скорости  $v_r = 0$ , а имеется только перпендикулярная к радиусу компонента  $v_\phi(r) = \omega r$ . В проекции на радиальное направление второй закон Ньютона для электронов, движущихся по окружности с центростремительным ускорением  $a_{ц} = -\omega^2 r$ , имеет вид:

$$-m\omega^2 r = -e(\omega r B + E_r(r)),$$

где справа стоит полная сила Лоренца,  $E_r$  – радиальная компонента напряженности электрического поля,  $e$  – модуль заряда электрона.

Это выражение можно переписать в виде:

$$e\omega r B - m\omega^2 r = -eE_r(r).$$

Величина  $m\omega^2 r$  обычно пренебрежимо мала по сравнению со слагаемым  $e\omega r B$ . Действительно:

$$\frac{m\omega^2 r}{e\omega r B} = \frac{\omega}{(e/m)B},$$

что обычно очень мало ввиду большой величины удельного заряда электрона ( $e/m = 1,76 \cdot 10^{11}$  Кл/кг). Например, при  $B \sim 10^2$  Тл и  $\omega \sim 10^4$  рад/с это отношение имеет порядок  $10^{-5}$ . Поэтому приближенно можно считать, что

$$E_r(r) = -\omega r B.$$

Данное радиальное электрическое поле напряженностью  $E_r(r)$  создается за счет перераспределения электронов в цилиндре при его вращении.

Разность потенциалов между поверхностью и центром цилиндра равна:

$$U = -\int_0^a E(r) dr = \int_0^a \omega r B dr = \frac{1}{2} \omega B a^2.$$

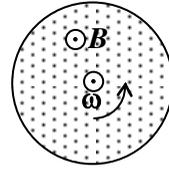


Рис. 18.4 Вращающийся в магнитном поле цилиндр.

Зная напряженность электрического поля, можно найти объемную плотность заряда  $\rho$  из уравнения  $\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ . Учитывая, что напряженность поля  $\mathbf{E}$  имеет только радиальную компоненту  $E_r$  и используя выражение для дивергенции в цилиндрических координатах, получим:

$$\rho = \varepsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} = \varepsilon_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_r) = -2\varepsilon_0 \omega B.$$

Так как плотность заряда получилась постоянной, то объемный заряд внутри цилиндра

$$q_{об} = \rho \cdot V = -2\omega \varepsilon_0 B \pi a^2 b.$$

Он отрицателен, поскольку магнитная составляющая силы Лоренца при заданной ориентации векторов  $\mathbf{B}$  и угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  вытесняет электроны от поверхности к центру цилиндра.

Поскольку в целом цилиндр не имеет заряда, то на его поверхности остается противоположный по знаку (т.е. положительный) поверхностный заряд  $q_{пов} = -q_{об} = 2\omega \varepsilon_0 B \pi a^2 b$ , поверхностная плотность которого

$$\sigma = \frac{q_{пов}}{S} = \frac{2\omega \varepsilon_0 B \pi a^2 b}{2\pi ab} = \varepsilon_0 \omega B a.$$

Еще проще можно найти  $\sigma$  из граничного условия для вектора электрической индукции:

$$\sigma = -D_r(a) = -\varepsilon_0 E_r(a) = \varepsilon_0 \omega B a.$$

**Ответ:** 1)  $U = \frac{1}{2} \omega B a^2$ ; 2)  $\sigma = \varepsilon_0 \omega B a$ ,  $\rho = -2\omega \varepsilon_0 B = \text{const}$ .

### Задачи типа 18.3

*Нахождение ЭДС индукции в переменном магнитном поле.*

**Метод решения** – применение закона Фарадея в интегральной форме (18.2).

**Задача 18.3.4.** Плоский контур, имеющий вид двух квадратов со сторонами  $a$  и  $b$  соответственно, находится в однородном магнитном поле, вектор индукции которого перпендикулярен его плоскости и меняется по закону  $B(t) = B_0 \cos \omega t$ . Найти зависимость от времени силы тока  $I$  в контуре, если сопротивление единицы длины провода равно  $r'$ . Индуктивностью контура пренебречь.

**Решение**

Выберем в качестве положительного направления обхода большего контура (со стороной  $a$ , верхний на рис. 18.5) движение против часовой стрелки. Тогда для второго контура (со стороной  $b$ ) это направление будет отрицательным. В связи с этим полный магнитный поток через контур

$$\Phi = B \cdot (a^2 - b^2),$$

а величина ЭДС равна:

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial B}{\partial t} (a^2 - b^2) = (a^2 - b^2) B_0 \omega \sin \omega t.$$

Поскольку индуктивностью можно пренебречь, ЭДС самоиндукции учитывать не надо, и сила тока определяется из найденной ЭДС по закону Ома. Учитывая, что общее сопротивление контура

$$R = 4r'(a + b), \quad (18.6)$$

получаем:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R} = \frac{(a^2 - b^2) B_0 \omega \sin \omega t}{4r'(a + b)} = \frac{1}{4r'} (a - b) B_0 \omega \sin \omega t. \quad (18.7)$$

Из выражения (18.7) видно, что ток  $I$  меняется по гармоническому закону с той же частотой  $\omega$ , что и магнитное поле.

**Ответ:**  $I(t) = \frac{1}{4r'} (a - b) B_0 \omega \sin \omega t.$

**Задача 18.3.5.** Магнитный поток через неподвижный контур с сопротивлением  $R$  изменяется за промежутки времени  $\tau$  по закону  $\Phi = at$  ( $\tau - t$ ). Найти:

- 1) количество тепла  $Q$ , выделившееся в контуре за время  $\tau$ ;
- 2) заряд  $q$ , прошедший через контур за время  $\tau/2$ .

**Решение**

ЭДС электромагнитной индукции в контуре равна:

$$\mathcal{E} = -(\partial \Phi / \partial t) = 2a \left( t - \frac{\tau}{2} \right),$$

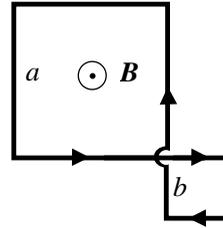


Рис. 18.5. Плоский контур в магнитном поле (стрелками указано направление индукционного тока).

тепловая мощность тока составляет:

$$P(t) = \frac{\mathcal{E}^2}{R} = \frac{4a^2}{R} \left( t - \frac{\tau}{2} \right)^2.$$

Интегрируя тепловую мощность, находим количество тепла, выделившееся в контуре за время  $\tau$ :

$$Q = \int_0^{\tau} P(t) dt = \frac{4a^2}{R} \int_0^{\tau} \left( t - \frac{\tau}{2} \right)^2 dt = \frac{4a^2}{3R} \left( t - \frac{\tau}{2} \right)^3 \Bigg|_0^{\tau} = \frac{a^2}{3R} \tau^3.$$

Чтобы найти заряд  $q$ , прошедший по цепи за время  $\tau/2$ , найдем силу индукционного тока:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt},$$

откуда затем получаем:

$$q = \int_0^{\tau/2} I(t) dt = -\frac{1}{R} \int_0^{\tau/2} \frac{d\Phi}{dt} dt = -\int_0^{\tau/2} d\Phi = -\frac{1}{R} (\Phi(\tau/2) - \Phi(0)) = -\frac{a\tau^2}{4R}.$$

Отрицательный знак заряда означает, что, в соответствии с правилом Ленца, индукционный ток шел по контуру в таком направлении, при котором его магнитное поле препятствовало изменению магнитного потока.

**Ответ:** 1)  $Q = \frac{a^2}{3R} \tau^3$ ; 2)  $q = -\frac{a\tau^2}{4R}$ .

**Задача 18.3.6.** Контур представляет собой окружность, соединенную по диаметру, с конденсаторами  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$ , включенными в разрывы проводников (рис. 18.6), и находится в однородном переменном магнитном поле. Скорость изменения магнитного потока через площадь кольца постоянна и равна  $\dot{\Phi}$ . Найти заряды конденсаторов, если вначале они не были заряжены.

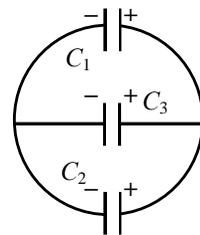


Рис. 18.6. Схема контура.

### Решение

Расставим произвольно знаки зарядов на конденсаторах (см. рис. 18.6). Истинные знаки зарядов определяются потом из полученных решений.

Алгебраическая сумма напряжений по любому выбранному контуру должна равняться сумме ЭДС, действующих в данном контуре. Совершим обход внешнего кругового контура против часовой стрелки. Сразу учитывая, что напряжение на конденсаторах

$U_i = \frac{q_i}{C_i}$ , а ЭДС в этом контуре  $\mathcal{E} = -\dot{\Phi}$ , для данного контура полу-

чим:

$$\frac{q_1}{C_1} - \frac{q_2}{C_2} = -\dot{\Phi}$$

Обход верхней половины контура (также против часовой стрелки) дает уравнение:

$$\frac{q_1}{C_1} - \frac{q_3}{C_3} = -\frac{1}{2} \dot{\Phi},$$

где учтено, что магнитный поток через этот контур вдвое меньше, чем через весь контур.

Третье уравнение получается из условия сохранения заряда (запишем для правого узла):

$$q_1 + q_2 + q_3 = 0.$$

Решая эту систему трех уравнений, получаем заряды конденсаторов:

$$q_1 = -\dot{\Phi} \frac{C_1(C_2 + C_3/2)}{C_1 + C_2 + C_3},$$

$$q_2 = \dot{\Phi} \frac{C_2(C_1 + C_3/2)}{C_1 + C_2 + C_3},$$

$$q_3 = \dot{\Phi} \frac{C_3(C_2 - C_1)}{2(C_1 + C_2 + C_3)}.$$

*Замечание.* Знаки  $q_1$  и  $q_2$  всегда противоположны. Знак  $q_3$  зависит от соотношения емкостей  $C_1$  и  $C_2$ . В случае  $C_1 = C_2$  разность потенциалов между концами диаметра равна нулю и  $q_3 = 0$ .

**Ответ:**  $q_1 = -\dot{\Phi} \frac{C_1(C_2 + C_3/2)}{C_1 + C_2 + C_3}, \quad q_2 = \dot{\Phi} \frac{C_2(C_1 + C_3/2)}{C_1 + C_2 + C_3},$

$$q_3 = \dot{\Phi} \frac{C_3(C_2 - C_1)}{2(C_1 + C_2 + C_3)}.$$

### Задачи типа 18.4

*Нахождение напряженности вихревого электрического поля.*

**Метод решения:** в общем случае напряженность вихревого электрического поля определяется дифференциальным соотношением (18.5). Если же структура силовых линий вихревого поля заранее известна из соображений симметрии, как это бывает в большинстве случаев в задачах курса общей физики, то для нахождения  $E_{\text{вихр}}$  удобно использовать соотношение

$$E_{\text{инд}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \oint_L \mathbf{E}_{\text{вихр}} d\mathbf{l},$$

в котором приравнивается ЭДС индукции, найденная из общего соотношения (18.2), и ее выражение через циркуляцию вектора  $\mathbf{E}_{\text{вихр}}$ . Контур интегрирования  $L$  надо выбрать так, чтобы циркуляция вектора  $\mathbf{E}_{\text{вихр}}$  получилась в наиболее простом виде. Это будет, например, когда весь контур или его участки совпадают с силовыми линиями, а остальные участки контура перпендикулярны силовым линиям и не дают вклада в циркуляцию.

**Задача 18.3.7.** В длинном соленоиде радиуса  $a$  с плотностью катушки  $n$  (витков/метр) изменяют ток с постоянной скоростью  $\alpha = dI/dt$ . Найти модуль напряженности вихревого электрического поля  $E(r)$  как функцию расстояния  $r$  от оси соленоида.

#### Решение

Магнитное поле внутри длинного соленоида пространственно однородно, его индукция равна:

$$B = \mu_0 n I. \quad (18.8)$$

Пусть вектор  $\mathbf{B}$  направлен из плоскости рисунка вверх (рис. 18.7). В силу аксиальной симметрии системы силовые линии вихревого электрического поля являются окружностями с центром на оси соленоида (пунктир на рис. 18.7).

Область  $r < a$ .

Выберем контур  $L$  в виде окружности радиуса  $r$ . За положительное примем направление обхода

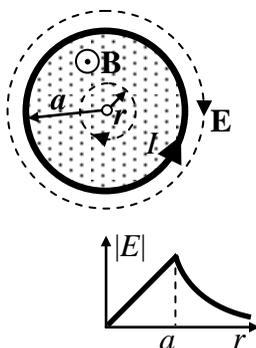


Рис. 18.7. К расчету напряженности вихревого электрического поля, создаваемого соленоидом. Внизу приведен график зависимости модуля напряженности от расстояния до оси соленоида.

против часовой стрелки, тогда нормаль к плоскости контура сонаправлена с вектором  $\mathbf{B}$  и поток магнитной индукции через контур положителен:

$$\Phi(t) = \pi r^2 \cdot B(t).$$

По закону Фарадея ЭДС индукции в этом контуре составляет:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi r^2 \frac{dB}{dt}. \quad (18.9)$$

Поскольку контур  $L$  совпадает с силовыми линиями электрического поля и величина напряженности  $E(r)$  постоянна в точках контура, циркуляция вектора  $\mathbf{E}$  вдоль контура имеет вид:

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = 2\pi r E. \quad (18.10)$$

Приравняв выражения (18.9) и (18.10), получаем:

$$E(r) = -\frac{1}{2} r \cdot \frac{dB}{dt}. \quad (18.11)$$

С учетом формулы (18.8) напряженность поля примет вид:

$$E(r) = -\frac{1}{2} \mu_0 n r \cdot \frac{dI}{dt} = -\frac{1}{2} \mu_0 n r \alpha.$$

Знак напряженности  $\mathbf{E}$  противоположен знаку производной тока  $\alpha = \frac{dI}{dt}$  в обмотке в соответствии с правилом Ленца, так как индуцированное поле должно препятствовать изменению силы тока (см. рис. 18.7).

Область  $r > a$ .

В этом случае магнитный поток не зависит от радиуса контура  $r$  и равен полному потоку через поперечное сечение соленоида:  $\Phi(t) = \pi a^2 B(t)$ . Повторяя предыдущие вычисления с этим изменением, получаем:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi a^2 \frac{dB}{dt},$$

$$E(r) = -\frac{1}{2} a^2 \frac{dB}{dt} \cdot \frac{1}{r} = -\frac{1}{2} \mu_0 n a^2 \alpha \cdot \frac{1}{r}.$$

График модуля  $E(r)$  приведен на рис. 18.7.

**Ответ:**  $r < a$ :  $E(r) = -\frac{1}{2} \mu_0 n r \alpha,$

$$r > a: E(r) = -\frac{1}{2} \mu_0 n a^2 \alpha \cdot \frac{1}{r}.$$

**Задача 18.3.8.** Плоская спираль с большим числом витков  $N$  и внешним радиусом  $R$  находится в однородном магнитном поле, вектор индукции которого перпендикулярен плоскости спирали, а модуль индукции меняется по закону:  $B = B_0 \cos \omega t$  (рис. 18.8). Найти ЭДС индукции в спирали.

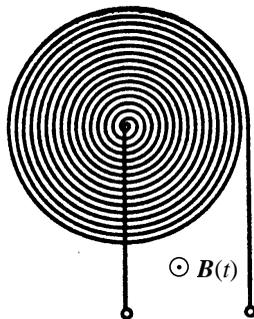


Рис. 18.8. К расчету ЭДС индукции в спирали.

### Решение

Способ 1. Будем исходить из того, что силовые линии вихревого электрического поля представляют собой окружности с центром в начале спирали, и его напряженность согласно результату предыдущей задачи равна (формула (18.11)):

$$E(r) = -\frac{1}{2} \dot{B} r.$$

В полярных координатах этот вектор имеет вид:

$$\mathbf{E} = \{E_r, E_\varphi\} = \left\{ 0; -\frac{1}{2} r \dot{B} \right\}.$$

Уравнение спирали с  $N$  витками в полярных координатах записывается следующим образом:

$$r(\varphi) = a\varphi,$$

$$\text{где } a = \frac{R}{2\pi N}.$$

Учитывая, что дифференциал дуги в полярных координатах имеет вид:  $d\mathbf{l} = \{dr; r d\varphi\}$ , найдем приращение ЭДС на элементе дуги спирали длиной  $d\mathbf{l}$ :

$$d\mathcal{E} = \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{1}{2} r \dot{B} r d\varphi = -\frac{1}{2} \dot{B} r^2(\varphi) d\varphi.$$

Интегрируя  $d\mathcal{E}$  по  $\varphi$  в пределах от 0 до  $2\pi N$ , получаем ЭДС для всей спирали:

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{2} \dot{B} \int_0^{2\pi N} r^2 d\varphi = -\frac{1}{2} \dot{B} \int_0^{2\pi N} (a\varphi)^2 d\varphi = -\frac{1}{2} \dot{B} \left( \frac{R}{2\pi N} \right)^2 \frac{(2\pi N)^3}{3} = -\frac{1}{3} \pi N R^2 \dot{B}.$$

Подставляя

$$\dot{B} = -B_0 \omega \sin(\omega t),$$

окончательно находим:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{3} \pi N R^2 B_0 \omega \sin \omega t .$$

Способ 2. Поскольку по условию задачи число витков  $N$  велико, шаг спирали мал и каждый её виток близок к окружности, ЭДС в  $i$ -ом круговом витке составляет:

$$\mathcal{E}_i = -\dot{\Phi}_i = -\pi r_i^2 \dot{B} ,$$

где  $r_i^2$  – средний квадрат радиуса  $i$ -ого витка.

Полная ЭДС получится суммированием по всем виткам, которое ввиду малости шага спирали  $\Delta r$  ( $\Delta r = \frac{R}{N}$ ) можно свести к интегрированию:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \sum_{i=1}^N \mathcal{E}_i = -\pi \dot{B} \sum_{i=1}^N r_i^2 = -\frac{\pi}{\Delta r} \dot{B} \sum_{i=1}^N r_i^2 \Delta r \cong -\frac{\pi}{\Delta r} \dot{B} \int_0^R r^2 dr = \\ &= -\frac{\pi}{R/N} \dot{B} \frac{R^3}{3} = -\frac{1}{3} \pi N R^2 \dot{B} , \end{aligned}$$

что приводит к тому же результату.

**Ответ:**  $\mathcal{E} = \frac{1}{3} \pi N R^2 B_0 \omega \sin \omega t .$

**Задача 18.3.9.** По двум параллельным бесконечным плоскостям текут одинаковые по модулю противоположно направленные токи с поверхностной плотностью, меняющейся во времени по закону  $i(t) = \alpha t$ . Найти напряженность вихревого электрического поля между плоскостями.

### Решение

Выберем систему координат  $XYZ$ , как показано на рис. 18.9. В пространстве между плоскостями магнитное поле однородно, снаружи равно нулю. Вектор индукции  $\mathbf{B}$  перпендикулярен направлению токов, его модуль равен (глава 16, задача 16.3.2):

$$B = \mu_0 i(t) = \mu_0 \alpha t . \quad (18.12)$$

Направление силовых линий вихревого электрического поля можно найти из следующих соображений. В силу симметрии системы относительно центральной плоскости силовые линии должны быть параллельны плоскостям и симметричны относительно центральной плоскости. Действительно, присутствие перпендику-

лярной  $x$ -компоненты вектора  $\mathbf{E}$  в этом случае привело бы к нарушению условия  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ . Далее, наличие у поля  $y$ -компоненты нарушило бы эквивалентность обоих направлений по этой оси. Таким образом, возможно существование только компоненты  $E_z$ .

Направление векторов  $\mathbf{E}$  вдоль оси  $Z$  можно определить по правилу Ленца, поскольку они должны быть антипараллельны направлению поверхностных токов  $\mathbf{i}$  на верхней и нижней плоскостях. Картина силовых линий представлена пунктиром на рис. 18.9.

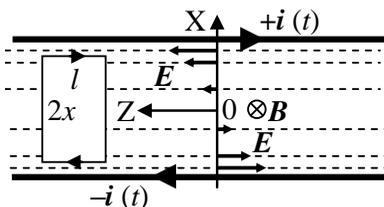


Рис. 18.9. К расчету вихревого электрического поля между плоскостями с током.

Для нахождения  $E_z(x)$  проведем прямоугольный контур со сторонами  $l$  и  $2x$  симметрично относительно центральной плоскости. ЭДС в этом контуре, равная циркуляции вектора  $\mathbf{E}$  вдоль него, при указанном стрелками направлении обхода равна:

$$\mathcal{E} = -2El. \quad (18.13)$$

Учитывая, что положительное направление нормали к контуру параллельно  $\mathbf{B}$ , магнитный поток через контур составляет:

$$\Phi(t) = +2xl \cdot B(t),$$

откуда для ЭДС согласно формуле (18.2) можно записать:

$$\mathcal{E} = -\dot{\Phi} = -2xl\dot{B}. \quad (18.14)$$

Приравнявая выражения (18.13) и (18.14) для ЭДС, с учетом формулы (18.12) получаем:

$$E(x) = E_z(x) = x\dot{B} = \mu_0\alpha x.$$

**Ответ:**  $E = E_z(x) = \mu_0\alpha x$ , где  $x$  – координата по оси, перпендикулярной к плоскостям, с началом координат посередине между ними.

**Задача 18.3.10.** На поверхности длинного сплошного непроводящего цилиндра радиуса  $a$  равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Цилиндр может вращаться без трения вокруг своей оси. Внешнее однородное магнитное поле с вектором индукции  $\mathbf{B}$  направлено вдоль оси цилиндра. Найти угловую скорость вращения  $\omega$ , которую приобретет цилиндр после выключения

магнитного поля. Плотность вещества цилиндра  $\rho$ , первоначально цилиндр неподвижен.

### Решение

Введем цилиндрическую систему координат  $(r, \varphi, z)$  с осью  $Z$ , совпадающей с осью цилиндра и параллельной индукции магнитного поля  $\mathbf{B}$ . Во время выключения магнитного поля возникает вихревое электрическое поле с напряженностью  $\mathbf{E}$  (задача 18.3.7), силовые линии которого ввиду аксиальной симметрии задачи являются окружностями с центром на оси цилиндра (пунктир на рис. 18.10). Это поле будет действовать на поверхностные заряды цилиндра, вызывая его ускорение.

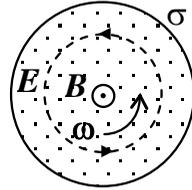


Рис. 18.10. Направление силовых линий вихревого электрического поля и направление вращения заряженного цилиндра.

Поскольку заряды находятся на поверхности цилиндра, найдем напряженность электрического поля на расстоянии  $r = a$  от его оси. В контуре с радиусом  $r = a$  (длиной  $l = 2\pi a$ ) возникает ЭДС индукции

$$\mathcal{E} = -\dot{\Phi} = -2\pi a E,$$

откуда

$$E(a) = -\dot{\Phi} / (2\pi a)$$

где  $\dot{\Phi}$  – магнитный поток через поперечное сечение цилиндра. Здесь положительное направление обхода выбрано против часовой стрелки, положительная нормаль параллельна вектору  $\mathbf{B}$ .

Рассмотрим элемент заряда  $dq = \sigma dS$  на поверхности цилиндра. Со стороны возникшего электрического поля на него будет действовать сила  $dF = Edq$ . Эта сила, в свою очередь, вызывает вращающий момент, направленный по оси цилиндра  $Z$  и равный:

$$dM_z = a dF = a E \sigma dS = -\frac{\dot{\Phi}}{2\pi} \sigma dS.$$

Полный вращающий момент находим интегрированием по поверхности цилиндра, что в данном случае сводится просто к умножению на площадь его боковой поверхности  $2\pi ab$ , где  $b$  – длина цилиндра:

$$M_z = a E \sigma \cdot 2\pi ab = -\frac{\dot{\Phi}}{2\pi} \sigma 2\pi ab = -\sigma ab \dot{\Phi}.$$

Учитывая, что момент инерции цилиндра относительно его оси равен

$$J = \frac{1}{2} m a^2 = \frac{1}{2} \rho \pi a^4 b,$$

получаем угловое ускорение цилиндра:

$$\varepsilon = \dot{\omega}_z = \frac{M_z}{J} = -\frac{\sigma a b \dot{\Phi}}{\frac{1}{2} \rho \pi a^4 b} = -\frac{2\sigma}{\rho \pi a^3} \cdot \frac{d\Phi}{dt}.$$

Интегрируя это соотношение по времени и учитывая граничные условия:  $\Phi(0) = \pi a^2 B$  и  $\Phi(\infty) = 0$ , окончательно получаем:

$$\omega_z = -\frac{2\sigma}{\rho \pi a^3} (\Phi(\infty) - \Phi(0)) = \frac{2\sigma}{\rho \pi a^3} \pi a^2 B = \frac{2\sigma}{\rho a} B.$$

**Ответ:**  $\omega = \frac{2\sigma}{\rho a} B.$

#### 18.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 18.4.1.** На расстояниях  $a$  и  $b$  от длинного прямого проводника с постоянным током  $I_0$  расположены два параллельных ему провода, замкнутых на одном конце сопротивлением  $R$ . По проводам без трения перемещают перемычку с постоянной скоростью  $v$  (рис. 18.11). Пренебрегая сопротивлением всех проводов и индуктивностью контура, найти силу, необходимую для поддержания постоянной скорости.

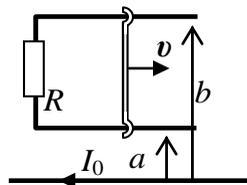


Рис. 18.11. Взаимное расположение провода с током  $I_0$  и контура с подвижной перемычкой.

**Ответ:**  $F = \left( \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \right)^2 \frac{v}{R}.$

**Задача 18.4.2.** Найти как функцию времени тепло  $Q(t)$ , выделенное на сопротивлении  $R$  с момента, когда переключатель длиной  $l$  начала двигаться с ускорением  $a$  (рис. 18.12). Магнитное поле однородно, вектор магнитной индукции перпендикулярен плоскости проводников, сопротивлением проводников и индуктивностью контура пренебречь.

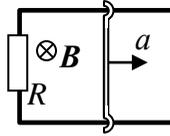


Рис. 18.12. Схема контура с подвижной переключкой.

*Ответ:*  $Q = \frac{1}{3R} (Bla)^2 t^3$ .

**Задача 18.4.3.** Квадратная проволочная рамка ACDE со стороной  $l$  помещена в магнитное поле с вектором индукции  $B$ , направленным перпендикулярно плоскости рамки (рис. 18.13). По рамке с постоянной скоростью  $v$  скользит переключка MN, сделанная из той же проволоки. Найти разность потенциалов между точками C и D в момент, когда переключка находится: 1) посередине; 2) у правого края. Индуктивностью контура пренебречь.

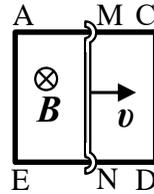


Рис. 18.13. Схема контура с подвижной переключкой.

*Ответ:* 1)  $\varphi_C - \varphi_D = \frac{1}{4} Blv$ ;      2)  $\varphi_C - \varphi_D = \frac{3}{7} Blv$ .

**Задача 18.4.4.** Проводящая лента ширины  $l$  протягивается со скоростью  $v$  в магнитном поле с индукцией  $B$ , направленной перпендикулярно ее плоскости. Найти ЭДС между краями ленты.

*Ответ:*  $\mathcal{E} = Blv$ .

**Задача 18.4.5.** Металлический стержень массы  $m$  и длины  $a$  подвешен горизонтально на двух проводах длины  $l$ , к которым подключен конденсатор емкости  $C$ . Система находится в магнитном поле с вектором индукции, направленным вертикально вниз (рис. 18.14). Определить период малых колебаний

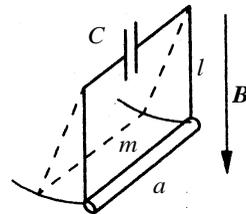


Рис. 18.14. Стержень, подвешенный в магнитном поле.

стержня. Сопротивлением проводов и стержня пренебречь.

$$\text{Ответ: } T = 2\pi \sqrt{\frac{(m + CB^2 a^2)l}{mg}}.$$

**Задача 18.4.6.** П-образный проводник с перемычкой длины  $l$  (рис. 18.15) находится в однородном магнитном поле с вектором индукции  $\mathbf{B}$ , который перпендикулярен плоскости проводника и изменяется во времени по закону  $B = \beta t$ . В момент времени  $t = 0$  перемычку, находившуюся в крайнем левом положении, начинают перемещать без начальной скорости с ускорением  $a$ . Найти ЭДС индукции в проводнике  $\mathcal{E}(t)$  в зависимости от времени.

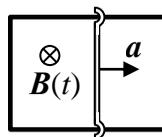


Рис. 18.15. Схема контура с подвижной перемычкой.

$$\text{Ответ: } \mathcal{E}(t) = \frac{3}{2} al\beta t^2.$$

**Задача 18.4.7.** По двум тонким параллельным проводникам, замкнутым на сопротивление  $R$ , в момент времени  $t = 0$  начинают перемещать перемычку с постоянным ускорением  $a$  (рис. 18.16.). Система находится в однородном магнитном поле, вектор индукции которого перпендикулярен к плоскости проводников, а его модуль изменяется со временем по закону  $B(t) = B_0 + \beta t$ . Начальная площадь контура  $S$ , длина перемычки  $l$ . Найти силу тока в цепи.

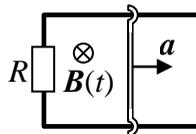


Рис. 18.16. Схема контура с подвижной перемычкой.

$$\text{Ответ: } I(t) = \left[ (B_0 + \beta t)lat + \beta(S + lat^2/2) \right] / R.$$

*Замечание.* Первое слагаемое обусловлено ЭДС в движущейся перемычке, возникающей за счет магнитной силы Лоренца, второе – вихревым электрическим полем.

**Задача 18.4.8.** В магнитном поле с большой высоты падает кольцо радиуса  $a$  и массы  $m$  так, что плоскость кольца всегда горизонтальна. Найти установившуюся скорость падения  $v$ , если вертикальная составляющая индукции поля зависит от высоты  $h$  по зако-

ну  $B(h) = B_0(1 + \alpha h)$ . Ускорение свободного падения  $g$ , сопротивление кольца  $R$ , индуктивностью кольца пренебречь.

$$\text{Ответ: } v = \frac{mgR}{(B_0 \pi a^2 \alpha)^2}.$$

**Задача 18.4.9.** На длинный соленоид, через который проходит переменный ток  $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ , надет тор из диэлектрика с проницаемостью  $\varepsilon$  (рис. 18.17). В торе имеется очень тонкий поперечный зазор. Найти модуль напряженности электрического поля  $E$  в зазоре в зависимости от расстояния  $r$  до оси соленоида. Радиус соленоида  $a$ , длина  $l$ , число витков  $N$ .

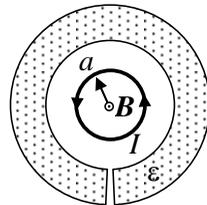


Рис. 18.17. Поперечное сечение соленоида и диэлектрического тора.

$$\text{Ответ: } E(r) = \varepsilon \frac{\mu_0 N I a^2 \omega}{2lr} \sin \omega t.$$

**Задача 18.4.10.** Непроводящее тонкое кольцо с невесомой ступицей надето на ось, вокруг которой может свободно вращаться. Кольцо заряжено по периметру зарядом  $q$ . В начальный момент оно покоилось, затем включили однородное магнитное поле, вектор индукции которого перпендикулярен плоскости кольца. Модуль индукции магнитного поля стал возрастать со временем по некоторому закону  $B(t)$ . Найти угловую скорость кольца  $\omega(B)$  в зависимости от индукции поля. Считать, что вся масса  $m$  сосредоточена в кольце.

*Указание.* Решить задачу двумя способами:

- 1) динамическим, найдя момент сил, действующих на кольцо со стороны вихревого электрического поля;
- 2) из формулы для энергии, учитывая, что энергия кольца в магнитном поле равна  $W = \Phi I/2$ .

$$\text{Ответ: } \omega(B) = -\frac{q}{2m} B(t).$$

**Задача 18.4.11** ([3], 379). Предположим, что рельсы железнодорожной колеи шириной 1,2 м, идущие по магнитному меридиану, изолированы друг от друга и от Земли. По этим рельсам идет поезд со скоростью 60 км/час. Вертикальная составляющая индукции

магнитного поля Земли  $B_{\text{в}} = 8 \cdot 10^{-9}$  Тл. Что покажет вольтметр, включенный в каком-нибудь месте между рельсами: 1) когда поезд приближается к прибору; 2) когда поезд проходит над прибором, т.е. прибор находится между двумя скатами какого-нибудь вагона; 3) когда поезд удаляется от прибора?

*Ответ:* во всех случаях 1 мВ.

**Задача 18.4.12** ([2], 3.300). Провод, имеющий форму параболы  $y = kx^2$  (рис. 18.18), находится в однородном магнитном поле с индукцией  $\mathbf{B}$ . Из вершины параболы в момент  $t = 0$  начали перемещать переключку 1-2. Найти ЭДС индукции в образовавшемся контуре как функцию  $y$ , если переключку перемещают: а) с постоянной скоростью  $v$ ; б) с постоянным ускорением  $a$ , причем в момент  $t = 0$  скорость переключки была равна нулю.

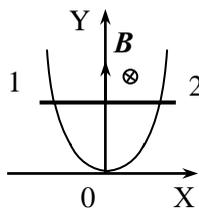


Рис. 18.18. Провод в форме параболы в магнитном поле.

*Ответ:* а)  $\mathcal{E} = 2Bv\sqrt{y/k}$ ; б)  $\mathcal{E} = By\sqrt{8a/k}$ .

**Задача 18.4.13** ([2], 3.304). По двум гладким медным шинам, установленным под углом  $\alpha$  к горизонту, скользит под действием силы тяжести медная переключка массы  $m$ . Шины замкнуты на сопротивление  $R$  (рис. 18.19). Расстояние между шинами  $l$ . Система находится в однородном магнитном поле с индукцией  $\mathbf{B}$ , перпендикулярной к плоскости, в которой перемещается переключка. Сопровитления шин, переключки и скользящих контактов, а также самоиндукция контура пренебрежимо малы. Найти установившуюся скорость переключки.

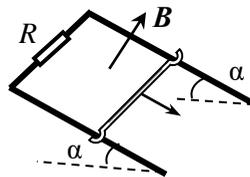


Рис. 18.19. Переключка, скользящая по шинам в магнитном поле с индукцией  $\mathbf{B}$ .

*Ответ:*  $v = mgR \sin \alpha / B^2 l^2$ .

**Задача 18.4.14** ([2], 3.301). Металлический диск радиуса  $a = 25$  см вращают с постоянной угловой скоростью  $\omega = 130$  рад/с вокруг его оси. Найти разность потенциалов между центром и ободом диска, если: а) внешнего магнитного поля нет; б) имеется пер-

пендикулярное к диску внешнее однородное магнитное поле с индукцией  $B = 5,0$  мТл.

Ответ: а)  $\Delta\varphi = \omega^2 a^2 m / 2e = 3,0$  нВ;

б)  $\Delta\varphi \approx \omega B a^2 / 2 = 20$  мВ

( $m, e$  – масса и заряд электрона).

**Задача 18.4.15** ([2], 3.299). Контур находится в однородном магнитном поле с индукцией  $B$ . Верхнюю часть контура – провод в виде полуокружности радиуса  $a$  (рис. 18.20) – вращают с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси  $OO'$ . В момент  $t = 0$  магнитный поток через контур максимальный. Найти ЭДС индукции в контуре как функцию времени  $t$ .

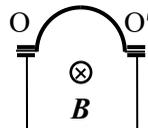


Рис. 18.20. Контур в виде полуокружности, вращающийся в магнитном поле.

Ответ:  $\mathcal{E} = \frac{\pi}{2} a^2 B \omega \sin \omega t$ .

**Задача 18.4.16** ([3], 398). В однородном магнитном поле с индукцией  $B = 0,8$  Тл с небольшой скоростью вращается квадратная рамка со стороной  $a = 5$  см, состоящая из небольшого числа витков медной проволоки сечением  $S = 0,5$  мм<sup>2</sup>. Максимальное значение силы тока, индуцируемого в рамке при вращении, равно  $I = 1,9$  А.

1) Определить число оборотов рамки в секунду.

2) Как нужно изменить скорость вращения рамки, чтобы при замене медной проволоки железной сила тока в цепи осталась неизменной?

Ответ: 1)  $N \approx 1$  об/с; 2) нужно увеличить её в

$\rho_{\text{ж}} / \rho_{\text{м}}$  раз, т.е. в 5,06 раза.

**Задача 18.4.17** ([2], 3.316). Внутри длинного соленоида находится катушка из  $N$  витков с площадью поперечного сечения  $S$ . Катушку поворачивают с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, совпадающей с её диаметром и перпендикулярной к оси соленоида. Найти ЭДС индукции в катушке, если индукция магнитного поля в соленоиде меняется со временем как  $B = B_0 \sin \omega t$  и в момент  $t = 0$  ось катушки совпадала с осью соленоида.

Ответ:  $\mathcal{E} = NS\omega B_0 \cos 2\omega t$ .

**Задача 18.4.18** ([2], 3.316). В середине длинного соленоида находится коаксиальное кольцо прямоугольного сечения из проводящего материала с удельным сопротивлением  $\rho$ . Толщина кольца  $h$ , его внутренний и внешний радиусы  $a$  и  $b$ . Найти индукционный ток в кольце, если индукция магнитного поля соленоида изменяется по закону  $B = \beta t$ , где  $\beta$  – постоянная.

*Ответ:*  $I = (b^2 - a^2)\beta h / 4\rho$ .

**Задача 18.4.19** ([3], 384). Прямоугольная рамка ( $a \times b$ ) равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг стороны  $a$  в однородном переменном магнитном поле, изменяющемся синусоидально с угловой скоростью  $\omega'$  и перпендикулярном к оси вращения рамки. Определить величину индуцированной ЭДС  $\mathcal{E}$ . Рассмотреть частные случаи при  $\omega = \omega'$ : 1) в начальный момент  $B = B_0$ , а плоскость рамки перпендикулярна  $\mathbf{B}$ ; 2) в начальный момент  $B = B_0$ , а плоскость рамки параллельна  $\mathbf{B}$ .

*Ответ:*  $\mathcal{E} = B_0 ab [\omega \sin \omega t \cos(\omega' t - \varphi) + \xi' \cos \omega t \sin(\omega' t - \varphi)]$ .

1)  $\mathcal{E} = B_0 ab \omega \sin 2\omega t$  при  $\varphi = 0$ ;

2)  $\mathcal{E} = B_0 ab \omega \cos 2\omega t$  при  $\varphi = -\pi/2$ .

**Задача 18.4.20** ([3], 385). Прямоугольная рамка ( $a \times b$ ) вращается вокруг одной из своих сторон в однородном магнитном поле с индукцией  $\mathbf{B}$ , перпендикулярной к оси вращения, с переменной угловой скоростью  $\omega = \omega_0 (1 - e^{-kt})$ . Определить величину индуцированной ЭДС, если в начальный момент плоскость рамки перпендикулярна индукции  $\mathbf{B}$ .

*Ответ:*  $\mathcal{E} = Bab \omega_0 \sin \left[ \omega_0 \left( t - \frac{1 - e^{-kt}}{k} \right) \right]$ .

## Глава 19

САМОИНДУКЦИЯ И ВЗАИМНАЯ ИНДУКЦИЯ.  
ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

## 19.1. Теоретический материал

**Самоиндукция** – это явление электромагнитной индукции в контуре при изменении потока индукции магнитного поля, создаваемого током самого контура.

Поток индукции магнитного поля  $\Phi$ , создаваемого током  $I$  контура, через любую поверхность, ограниченную контуром, (пронизывающий контур) равен:

$$\Phi = LI. \quad (19.1)$$

Коэффициент пропорциональности  $L$  между силой тока в контуре  $I$  и магнитным потоком  $\Phi$  называется **коэффициентом самоиндукции (индуктивностью)** контура. Индуктивность не зависит от силы тока  $I$  и в вакууме определяется только размерами и конфигурацией контура.

Единицей измерения индуктивности является *Генри*:

$$[L] = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{А}^2} \equiv \text{Гн}.$$

**Взаимная индукция** – это явление электромагнитной индукции в контуре при изменении магнитного потока поля, создаваемого токами в других контурах.

Поток индукции магнитного поля, создаваемый токами всех контуров и пронизывающий  $i$ -ый контур, равен:

$$\Phi_i = \sum_j L_{ij} I_j. \quad (19.2)$$

Коэффициент пропорциональности  $L_{ij}$  между магнитным потоком  $\Phi_j$ , создаваемым в  $j$ -м контуре магнитным полем тока  $I_j$ , протекающего по  $i$ -му контуру (при  $i \neq j$ ), называется **коэффициентом взаимной индукции контуров**.

Коэффициенты взаимной индукции  $L_{ij}$  не зависят от сил токов  $I_j$  в контурах и определяются взаимным расположением частей различных контуров. При  $i = j$  коэффициент  $L_{ij} \equiv L_{ii}$  является *коэффициентом самоиндукции*.

В вакууме или в средах с линейной магнитной восприимчивостью (диа- и парамагнетики) коэффициенты взаимной индукции симметричны по индексам:

$$L_{ij} = L_{ji}. \quad (19.3)$$

Единицей измерения коэффициента взаимной индукции  $L_{i \neq j}$

также является Генри:

$$[L_{ij}] = \frac{\text{Н} \cdot \text{М}}{\text{А}^2} \equiv \text{Гн}.$$

### Коэффициент самоиндукции параллельно и последовательно соединенных катушек индуктивности.

*А. Последовательное соединение катушек индуктивности.*

Катушки индуктивности  $\{L_i\}$  (взаимной индуктивностью которых можно пренебречь) соединяются в цепи так, что через них течет одинаковый ток  $I$  (см. рис. 19.1).

При этом коэффициент самоиндукции батареи катушек равен сумме коэффициентов самоиндукции соединенных катушек индуктивности:

$$L = \sum_i L_i. \quad (19.4)$$

*Б. Параллельное соединение катушек индуктивности.*

Катушки индуктивности соединены так, что напряжения  $U_{21}$  на их концах одинаковы (см. рис. 19.2). При этом обратная величина коэффициента самоиндукции батареи катушек (если взаимной индукцией катушек можно пренебречь) равна сумме обратных величин коэффициентов самоиндукции соединенных катушек индуктивности:

$$\frac{1}{L} = \sum_i \frac{1}{L_i}. \quad (19.5)$$

**Собственная (магнитная) энергия электрического тока** в контуре локализована в магнитном поле, создаваемом этим током, и равна:

$$W = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} I\Phi. \quad (19.6)$$

**Энергия магнитного поля в вакууме** распределена по всему пространству, в котором существует магнитное поле, и равна:

$$W = \int w dV = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 dV, \quad (19.7)$$



Рис. 19.1. Последовательное соединение индуктивностей.

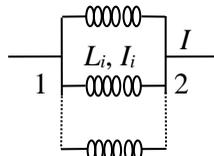


Рис. 19.2. Параллельное соединение индуктивностей.

где  $w = \frac{B^2}{2\mu_0}$  – *объемная плотность энергии магнитного поля*.

**Энергия системы неподвижных замкнутых контуров с током равна:**

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,j} L_{ij} I_i I_j = \frac{1}{2} \sum_i I \Phi_i. \quad (19.8)$$

Эту энергию можно разбить на две части:

$$W = \sum_i W_i + \sum_{i \neq j} W_{ij} = \frac{1}{2} \sum_i L_{ii} I_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} L_{ij} I_i I_j.$$

Первое слагаемое – сумма собственных энергий электрических токов в контурах  $W_i$ , которые всегда положительны, второе – сумма энергий их взаимодействия  $W_{ij}$ , которые могут быть как положительными, так и отрицательными. Полная энергия системы контуров всегда положительна.

## 19.2. Основные типы задач (классификация)

19.1. Нахождение индуктивности систем.

19.2. Определение коэффициента взаимной индукции контуров.

19.3. Расчет коэффициентов самоиндукции системы соединенных катушек индуктивности.

## 19.3. Методы решения и примеры решения задач

### Задачи типа 19.1

*Нахождение индуктивности систем.*

**Метод решения.** Определение индуктивности  $L$  может проводиться двумя способами:

1) на основе связи потока магнитной индукции  $\Phi$  с током  $I$  в контуре, создающим этот поток (19.1);

2) с использованием формулы для магнитной энергии электрического тока (19.6). При этом энергия магнитного поля, создаваемого током, должна быть найдена независимым образом из ее объемной плотности (19.7). Таким образом, индуктивность рассчитывается из соотношения:

$$W = \int_V \frac{B^2}{2\mu_0} dV = \frac{1}{2} LI^2.$$

**Задача 19.3.1.** По длинному сплошному прямому цилиндрическому проводу радиуса  $R$  из немагнитного материала течет ток  $I$ . Считая, что плотность тока одинакова во всем объеме проводника, найти энергию магнитного поля внутри провода в расчете на единицу его длины.

### Решение

Данная задача является примером вычисления энергии магнитного поля, что бывает необходимо при расчете индуктивности различных систем вторым из перечисленных способов.

Так как плотность тока одинакова во всем объеме проводника, то на расстоянии  $r$  от его оси индукцию магнитного поля можно рассчитать по теореме о циркуляции вектора  $\mathbf{B}$ :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r.$$

Объемная плотность энергии магнитного поля равна  $w = \frac{B^2}{2\mu_0}$ , то есть зависит от расстояния до оси проводника следующим образом:

$$w(r) = \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r \right)^2.$$

Для вычисления полной энергии внутри провода разобьем его на трубки малой толщины  $dr$ , радиуса  $r$  и длины  $l$ , соосные с проводом (рис. 19.3). Энергия магнитного поля внутри трубки равна:

$$dW(r) = w(r)dV = \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r \right)^2 2\pi r l dr,$$

где  $dV = 2\pi r l dr$  – объем трубки.

Тогда для искомой энергии системы в расчете на единицу длины получим:

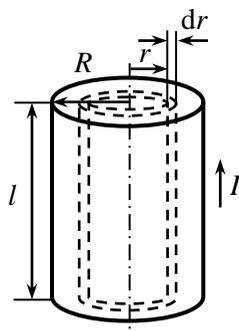


Рис. 19.3. К нахождению энергии магнитного поля внутри цилиндрического провода.

$$W_l = \frac{W}{l} = \frac{1}{l} \int_0^R \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r \right)^2 2\pi r l dr = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}.$$

**Ответ:**  $W_l = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}.$

**Задача 19.3.2.** Найти индуктивность длинного тонкого цилиндрического соленоида, имеющего  $N$  витков, длину  $l$  и площадь поперечного сечения  $S$  ( $l \gg \sqrt{S}$ ).

### Решение

Способ 1. Величина индукции магнитного поля в длинном соленоиде может быть найдена по теореме о циркуляции вектора  $\mathbf{B}$  и равна:

$$B = \mu_0 n I, \quad (19.9)$$

где  $n = N/l$  – плотность намотки.

Поскольку магнитное поле однородно, поток вектора  $\mathbf{B}$  через один виток составляет:

$$\Phi_1 = BS = \mu_0 n I S. \quad (19.10)$$

Полный поток индукции через все  $N$  витков равен:

$$\Phi = N\Phi_1 = \mu_0 \frac{N^2}{l} I S. \quad (19.11)$$

Используя определение индуктивности (19.1), из формулы (19.11) получаем:

$$L = \frac{\Phi}{I} = \mu_0 \frac{N^2}{l} S = \mu_0 n^2 V,$$

где  $V = Sl$  – объем соленоида.

Способ 2. Найдем энергию магнитного поля внутри соленоида, воспользовавшись формулой для плотности энергии  $w = \frac{B^2}{2\mu_0}.$

Ввиду однородности поля в длинном соленоиде для нахождения полной энергии магнитного поля надо просто умножить плотность энергии на объем соленоида  $V = Sl$ .

С учетом выражения (19.7) для энергии магнитного поля  $W$  получим:

$$W = \frac{B^2}{2\mu_0} V = \frac{V}{2\mu_0} (\mu_0 n I)^2 = \mu_0 n^2 V \frac{I^2}{2}. \quad (19.12)$$

Сравнивая выражение (19.12) с формулой (19.6) для энергии  $W = \frac{LI^2}{2}$ , находим индуктивность соленоида:

$$L = \mu_0 n^2 V.$$

**Ответ:**  $L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S = \mu_0 n^2 V$ , где  $V$  – объем соленоида.

**Задача 19.3.3.** Найти индуктивность тороидальной катушки прямоугольного сечения, имеющей  $N$  витков, внутренний радиус которой равен  $a$ , внешний  $b$  и высота  $h$  (рис.19.4).

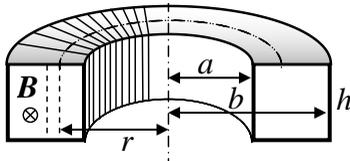


Рис. 19.4. Тороидальная катушка прямоугольного сечения.

### Решение

Ввиду осевой симметрии силовые линии внутри тора являются концентрическими окружностями с центром на его оси. Модуль вектора индукции найдем по теореме о циркуляции вектора  $\mathbf{B}$ :

$$B(r) = \mu_0 \frac{NI}{2\pi r}. \quad (19.13)$$

Магнитный поток через один виток равен потоку через поперечное сечение тора:

$$\Phi_1 = \int_{\sigma} B dS = \int_a^b \mu_0 \frac{NI}{2\pi r} h \cdot dr = \frac{\mu_0}{2\pi} NIh \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0}{2\pi} NIh \ln\left(\frac{b}{a}\right),$$

где учтено, что  $dS = h \cdot dr$ .

Полный магнитный поток через обмотку с  $N$  витками

$$\Phi = N\Phi_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} N^2 Ih \ln\left(\frac{b}{a}\right) = LI,$$

откуда получаем искомую индуктивность:

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} N^2 h \ln \frac{b}{a}.$$

**Ответ:**  $L = \frac{\mu_0}{2\pi} N^2 h \ln \frac{b}{a}.$

**Задача 19.3.4.** Найти индуктивность  $L'$  единицы длины двухпроводной ленточной линии, если расстояние между лентами  $h$  значительно меньше их ширины  $b$  (рис. 19.5).

### Решение

Пусть вдоль лент текут токи силы  $I$  в противоположных направлениях (рис. 19.5). Поскольку  $h \ll b$ , магнитное поле вдали от краев лент можно рассматривать как поле двух бесконечных плоскостей. Вектор магнитной индукции  $\mathbf{B}$  перпендикулярен направлению тока, а модуль равен (глава 16, задача 16.3.2):

$$B = \mu_0 i = \mu_0 \frac{I}{b},$$

где  $i$  – поверхностная плотность тока.

Ввиду того, что токи распределены по плоскостям, выделение контура для расчета магнитного потока здесь не очевидно, но индуктивность легко определить, используя её связь с энергией контура. Плотность энергии магнитного поля в пространстве между лентами равна:

$$w = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2} \mu_0 \left( \frac{I}{b} \right)^2.$$

Рассмотрим участок плоскости длиной  $l$ . Объем пространства между плоскостями на этом участке равен  $V = bhl$ . Энергия магнитного поля внутри него составляет:

$$W(l) = wV = \frac{1}{2} \mu_0 \left( \frac{I}{b} \right)^2 bhl = \frac{1}{2} LI^2,$$

откуда находим:

$$L(l) = \mu_0 l \frac{h}{b}$$

и для индуктивности единицы длины двухпроводной ленточной линии получаем:

$$L' = \frac{L}{l} = \mu_0 \frac{h}{b}.$$

**Ответ:**  $L' = \frac{L}{l} = \mu_0 \frac{h}{b}.$

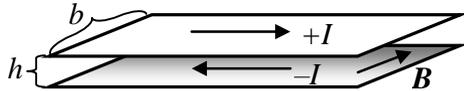


Рис. 19.5. Двухпроводная ленточная линия.

**Задача 19.3.5.** Коаксиальный кабель состоит из сплошного внутреннего проводника радиуса  $a$  и тонкого внешнего цилиндрического проводника радиуса  $b$ . Найти индуктивность единицы длины кабеля. Считать, что магнитная проницаемость материала проводников и зазора между ними  $\mu = 1$ , ток распределен по проводникам равномерно.

### Решение

Пусть по проводникам текут токи силы  $I$  в противоположных направлениях, перпендикулярных плоскости рисунка (рис. 19.6). Поскольку суммарный ток равен нулю, вне кабеля магнитное поле отсутствует.

Внешний проводник кабеля поля во внутренней области не создает. Магнитное поле в области  $r < b$  создается только внутренним проводником.

Применяя теорему о циркуляции вектора  $\mathbf{B}$ , найдем величину индукции магнитного поля. Внутри центрального цилиндрического проводника ( $r < a$ ) с однородной плотностью тока она равна:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r, \quad (19.14)$$

а снаружи ( $a < r < b$ ) составляет:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (19.15)$$

Найдем энергию магнитного поля, приходящуюся на длину  $l$  кабеля. Учитывая, что плотность энергии магнитного поля

$$w = \frac{B^2}{2\mu_0}, \text{ можно записать:}$$

$$r < a: \quad W_1 = \int_V w dV = \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \right)^2 \int_0^a r^2 l 2\pi r dr = \frac{\mu_0}{16\pi} l I^2.$$

$$a < r < b: \quad W_2 = \int_V w dV = \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi} \right)^2 \int_a^b \frac{1}{r^2} l 2\pi r dr = \frac{\mu_0}{4\pi} l I^2 \ln \left( \frac{b}{a} \right).$$

Полная энергия равна:

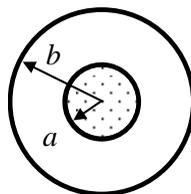


Рис. 19.6. Поперечное сечение коаксиального кабеля.

$$W = W_1 + W_2 = \frac{\mu_0}{16\pi} I^2 \left[ 1 + 4 \ln \left( \frac{b}{a} \right) \right] = \frac{1}{2} LI^2.$$

Отсюда получаем:

$$L(l) = \frac{\mu_0}{8\pi} l \left[ 1 + 4 \ln \left( \frac{b}{a} \right) \right]$$

и для единицы длины кабеля находим:

$$L_1 = \frac{L(l)}{l} = \frac{\mu_0}{8\pi} \left[ 1 + 4 \ln \left( \frac{b}{a} \right) \right].$$

*Примечание.* Обычно коаксиальные кабели используют для передачи токов высокой частоты, которые протекают в узком поверхностном слое провода. Тогда магнитным полем внутри центральной жилы можно пренебречь и учитывать энергию поля только между внутренней и внешней поверхностями кабеля. При этом искомая индуктивность единицы длины кабеля составит:

$$L_1 \cong \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left( \frac{b}{a} \right).$$

**Ответ:**  $L' = \frac{\mu_0}{8\pi} \left( 1 + 4 \ln \frac{b}{a} \right) \approx \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left( \frac{b}{a} \right).$

### Задачи типа 19.2

*Определение коэффициентов взаимной индукции контуров.*

**Метод решения.** При расчете коэффициента взаимной индукции основной является формула (19.2). Очень полезным бывает учет равенства коэффициентов взаимной индукции  $L_{ji} = L_{ij}$ , поскольку расчет одного из коэффициентов  $L_{ji}$  или  $L_{ij}$  часто бывает намного проще, чем другого.

**Задача 19.3.6.** Вычислить взаимную индуктивность длинного прямого провода и прямоугольной рамки со сторонами  $a$  и  $b$ . Рамка и прямой провод лежат в одной плоскости, причём ближайшая к проводу сторона рамки длиной  $b$  параллельна проводу и отстоит от него на расстояние  $l$ .

### Решение

Пусть по прямому проводу протекает ток  $I_1$  (см. рис. 19.7). Ток, текущий по проводу, создает магнитное поле, индукцию которого

можно найти по теореме о циркуляции вектора  $\mathbf{B}$ . На расстоянии  $r$  от провода модуль вектора индукции равен:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}. \quad (19.16)$$

Вектор индукции  $\mathbf{B}$  перпендикулярен плоскости рамки и при заданном направлении тока в проводе направлен в рисунок.

Рассчитаем поток индукции  $\Phi_2$ , пронизывающий рамку. Для этого разобьем плоскость рамки на узкие полоски ширины  $dr$ , параллельные проводу (см. рис. 19.7). Каждая полоска отстоит от провода на расстояние  $r$ .

Выберем положительное направление обхода рамки по часовой стрелке. При этом вектор нормали  $\mathbf{n}$  к плоскости рамки будет сонаправлен с вектором индукции  $\mathbf{B}$ . Поток через выбранную узкую полоску площади  $dS = bdr$  равен:

$$d\Phi_2 = (\mathbf{B}d\mathbf{S}) = Bbdr. \quad (19.17)$$

С учетом формулы (19.16) выражение (19.17) примет вид:

$$d\Phi_2(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} bdr.$$

Полный поток индукции через рамку составляет:

$$\Phi_2 = \int_l^{l+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} bdr = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \left( \frac{l+a}{l} \right). \quad (19.18)$$

По определению коэффициента взаимной индукции  $L_{12}$ :

$$\Phi_2 = L_{12} I_1. \quad (19.19)$$

Сравнивая формулы (19.18) и (19.19), получаем искомый коэффициент взаимной индукции:

$$L_{12} = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{a}{l} \right).$$

**Ответ:**  $L_{12} = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{a}{l} \right).$

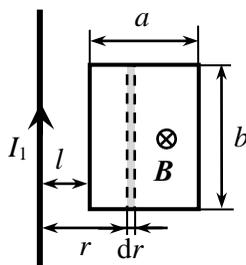


Рис. 19.7. К расчету взаимной индуктивности длинного прямого провода и прямоугольной рамки.

**Задача 19.3.7.** Замкнутая катушка в виде тора прямоугольного сечения (без сердечника) имеет  $N$  витков. В нее продето проволочное кольцо, в котором источником переменной ЭДС создается ток

$I = I_0 \cos \omega t$  (рис. 19.8). Найти ЭДС индукции, наводимой в обмотке тора. Внутренний радиус тороидальной катушки  $a$ , внешний  $b$ , высота  $h$ .

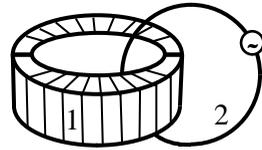


Рис. 19.8. Взаимное расположение тороидальной катушки и проволочного кольца.

**Решение**

Найти ЭДС индукции в катушке-торе (контур 1) можно по закону Фарадея:

$$\mathcal{E} = -d\Phi_1 / dt, \tag{19.20}$$

где  $\Phi_1$  – магнитный поток, пронизывающий все витки катушки, причем

$$\Phi_1 = L_{12} I_2, \tag{19.21}$$

где  $I_2 \equiv I$  – ток в кольце (контур 2),  $L_{12}$  – коэффициент взаимной индукции катушки и кольца.

Рассчитать  $L_{12}$  трудно, поскольку для этого надо знать пространственное распределение магнитного поля кольца во всем объеме, занимаемом тором. Поэтому воспользуемся равенством коэффициентов взаимной индукции  $L_{12} = L_{21}$  и рассчитаем  $L_{21}$ .

Пусть по тороидальной катушке течет ток  $I_1$ . Кольцо пронизывает магнитный поток, который локализован только в сечении тора и был рассчитан в задаче 19.3.2:

$$\Phi_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} N I_1 h \ln\left(\frac{b}{a}\right). \tag{19.22}$$

Исходя из определения коэффициента взаимной индукции  $L_{21}$ :

$$\Phi_2 = L_{21} I_1,$$

из формулы (19.22) получаем:

$$L_{21} = \frac{\mu_0}{2\pi} N h \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Теперь по формуле (19.20) с учетом соотношения (19.21) находим ЭДС, наводимую в тороидальной катушке:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt} = -L_{21} \frac{dI_2}{dt} = \frac{\mu_0}{2\pi} N h \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot I_0 \omega \sin \omega t.$$

*Замечание.* Здесь был рассчитан магнитный поток через перпендикулярное сечение тора, но величина потока не зависит от ориентации плоскости сечения, т.е. не зависит от ориентации кольца относительно тороида. Результат будет тот же и для петли любой формы, в том числе и не плоской, лишь бы она охватывала тороид.

**Ответ:**  $\mathcal{E} = \frac{\mu_0}{2\pi} N h \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot I_0 \omega \sin \omega t$ .

**Задача 19.3.8.** В центр сверхпроводящего кольца индуктивности  $L$  и радиуса  $a$  внесен точечный магнитный диполь с магнитным моментом  $\mathbf{p}_m$ , направленным по оси кольца (рис. 19.9). Какой ток  $I$  установится в кольце?

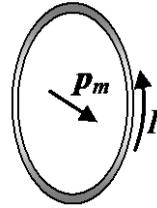


Рис. 19.9. Сверхпроводящее кольцо и магнитный диполь.

### Решение

Магнитный диполь можно представить как малую петлю (контур 1) с площадью  $S$  и таким током  $I_1$ , чтобы выполнялось условие  $p_m = I_1 S$ .

Закон Ома для кольца запишется в виде:

$$IR = \mathcal{E} = -\dot{\Phi},$$

что при  $R \rightarrow 0$  приводит к условию  $\dot{\Phi} = 0$ , т.е. в сверхпроводящем контуре магнитный поток "заморожен" ( $\Phi = \text{const}$ ). Поскольку первоначально он равнялся нулю, это значение не изменится и после внесения диполя.

Когда диполь будет в центре кольца, магнитный поток  $\Phi_2$  через кольцо (контур 2) будет создаваться током самого кольца  $I$  и магнитным полем, создаваемым петлей-диполем с током  $I_1$ :

$$\Phi_2 = LI + L_{12}I_1 = 0. \quad (19.23)$$

Здесь положительная нормаль выбрана параллельно направлению вектора  $\mathbf{p}_m$ , а положительное направление обхода кольца – по часовой стрелке, если смотреть вдоль  $\mathbf{p}_m$ .

Чтобы найти отсюда ток  $I$ , нужно знать коэффициент взаимной индукции контуров  $L_{21}$ , но в данном случае гораздо проще рассчитать равный ему коэффициент  $L_{12}$  следующим образом.

Пусть по кольцу течет ток  $I_2$ . Тогда в центре кольца модуль индукции магнитного поля будет равен:

$$B = \frac{\mu_0 I_2}{2a}.$$

Поскольку петля диполя очень мала, магнитное поле на ее площади почти однородно и магнитный поток через петлю диполя равен:

$$\Phi \cong BS = \frac{\mu_0 I_2}{2a} S = L_{12} I_2,$$

откуда находим коэффициент  $L_{12}$ :

$$L_{12} = \frac{\mu_0 S}{2a} = L_{21}.$$

Подставляя это выражение в приведенное выше условие (19.23) равенства нулю полного магнитного потока, получаем:

$$I = -I_1 \frac{L_{21}}{L} = -\mu_0 \frac{I_1 S}{2La} = -\mu_0 \frac{P_m}{2La}.$$

Знак минус означает, что индукционный ток в кольце направлен против часовой стрелки, т.е. магнитный момент кольца противоположен вектору магнитного момента диполя.

**Ответ:**  $I = -\mu_0 \frac{P_m}{2La}$ , ток направлен против часовой стрелки.

### Задачи типа 19.3

*Расчет коэффициентов самоиндукции системы соединенных катушек индуктивности.*

**Метод решения.** При расчете коэффициентов самоиндукции используются формулы для последовательного (19.4) и параллельного (19.5) соединения катушек индуктивности, если взаимной индукцией катушек можно пренебречь.

С учетом взаимной индукции катушек для определения индуктивности системы вычисляется суммарный магнитный поток  $\Phi$ , пронизывающий все катушки, с учетом как собственных потоков  $\Phi_{ii}$ , так и потоков  $\Phi_{ij}$ , созданных другими катушками.

**Задача 19.3.9.** Найти общую индуктивность системы из двух последовательно соединенных катушек, находящихся в вакууме и имеющих индуктивности  $L_1$  и  $L_2$ . Коэффициент взаимной индукции катушек  $L_{12}$ .

### Решение

При последовательном соединении ток в обеих катушках одинаков и равен  $I$ . Суммарный магнитный поток  $\Phi$ , пронизывающий обе катушки, равен алгебраической сумме потоков через первую и вторую катушки. Каждая из катушек пронизывается собственным потоком ( $\Phi_{11}$  или  $\Phi_{22}$ ) и потоком, созданным другой катушкой ( $\Phi_{21}$  или  $\Phi_{12}$ ). Таким образом,

$$\Phi = \Phi_{11} + \Phi_{22} + \Phi_{21} + \Phi_{12}. \quad (19.24)$$

Собственные потоки всегда положительны и определяются индуктивностью каждой катушки:

$$\Phi_{11} = L_1 I, \quad \Phi_{22} = L_2 I. \quad (19.25)$$

"Сторонние" потоки могут быть положительными или отрицательными в зависимости от направления индукции поля, созданного одной катушкой в витках другой. Знаки магнитных потоков  $\Phi_{21}$  и  $\Phi_{12}$  всегда совпадают (при изменении направления тока одновременно изменяются на противоположные и направление положительной нормали, и направление вектора индукции), а числовые значения их определяются взаимной индуктивностью:

$$\Phi_{21} = \pm L_{21} I_2, \quad \Phi_{12} = \pm L_{12} I_1.$$

Учитывая, что  $L_{21} = L_{12}$  и  $I_1 = I_2 = I$ , получаем:

$$\Phi_{21} = \Phi_{12} = \pm L_{12} I. \quad (19.26)$$

Знак в формуле (19.26) определяется взаимной ориентацией и полярностью подключения катушек. Если векторы индукций магнитных полей катушек сонаправлены, то "сторонние" потоки положительны:  $\Phi_{21} = \Phi_{12} = +L_{12} I$ . Если векторы индукции полей катушек направлены навстречу друг другу, то "сторонние" потоки отрицательны и  $\Phi_{21} = \Phi_{12} = -L_{12} I$  (так может получиться, если, не меняя расположения катушек, изменить направление тока в одной из них на противоположное, например, соединить начало второй катушки с началом первой (см. рис. 19.10).

Подставив выражения (19.25) и (19.26) в уравнение (19.24), получим для индуктивности двух катушек:

$$L = L_1 + L_2 \pm 2L_{12}. \quad (19.27)$$

*Замечание.* Если взаимной индукцией катушек можно пренебречь, формула (19.27) переходит в формулу (19.4) для последовательно соединенных катушек индуктивности:  $L = L_1 + L_2$ .

**Ответ:**  $L = L_1 + L_2 \pm 2L_{12}$ .

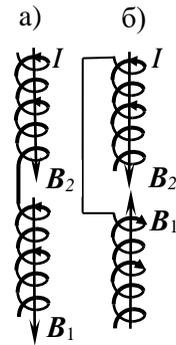


Рис. 19.10. Разные последовательные соединения катушек индуктивности.

### 19.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 19.4.1.** Замкнутая катушка в виде тонкого тора среднего радиуса  $a$  имеет  $N$  витков. Сечение тора – круг площади  $S$  ( $a \gg S^{1/2}$ ). Найти индуктивность этой катушки.

*Ответ:*  $L = \mu_0 \frac{N^2 S}{2\pi a} = \mu_0 n^2 V$ , где  $V = 2\pi a S$  – объем тора,  $n$  –

плотность катушки.

*Замечание.* Ввиду большого радиуса тора по сравнению с размером поперечного сечения его обмотки, его индуктивность совпадает с индуктивностью длинного соленоида, полученной в пренебрежении краевыми эффектами на его торцах.

**Задача 19.4.2.** Круговой виток радиуса  $a$  с собственной индуктивностью  $L$  установлен на расстоянии  $l$  от бесконечной сверхпроводящей плоскости (плоскость витка параллельна сверхпроводящей поверхности). Считая, что  $l \gg a$ , найти индуктивность  $L'$  витка в данных условиях.

*Указание:* использовать дипольное приближение, учитывая, что на поверхности сверхпроводника нормальная компонента вектора магнитной индукции  $B_n = 0$ . По аналогии с электростатикой применить метод изображений, т.е. ввести фиктивные источники поля, обеспечивающие выполнение граничных условий.

*Ответ:*  $L' = L - \frac{\mu_0 a^4}{16l^3}$ .

**Задача 19.4.3.** Найти индуктивность длинного соленоида, имеющего  $N$  витков, радиус  $r$  и длину  $l$ , который помещен внутри длинной сверхпроводящей трубы радиуса  $R$  вдали от ее торцов параллельно ее оси.

*Ответ:*  $L = \mu_0 \pi r^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \frac{N^2}{l}$ .

**Задача 19.4.4.** Найти индуктивность  $L'$  единицы длины двухпроводной линии в вакууме. Радиус проводов равен  $a$ , расстояние между их осями  $b$ , магнитная проницаемость проводов  $\mu = 1$ . Считать, что  $b \gg a$ , магнитным полем внутри проводов пренебречь.

$$\text{Ответ: } L' = \frac{\mu_0}{\pi} \ln\left(\frac{b}{a} - 1\right) \approx \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

*Замечание.* Точное решение с учетом поля внутри проводов дает  $L' = \frac{\mu_0}{\pi} \left( \ln \frac{b}{a} + \frac{1}{4} \right)$ .

**Задача 19.4.5.** Найти индуктивность  $L'$  единицы длины тонкого коаксиального кабеля. Внутренний и внешний проводники считать коаксиальными тонкими цилиндрическими трубами радиусов  $a$  и  $b$  соответственно.

$$\text{Ответ: } L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

**Задача 19.4.6.** Найти индуктивность системы из двух соединенных последовательно длинных соленоидов, один из которых вставлен внутрь другого. Внутренний соленоид имеет длину  $l_1$ , радиус  $r_1$  и плотность намотки  $n_1$ , внешний —  $l_2$ ,  $r_2$  и  $n_2$  соответственно ( $l_2 > l_1$ ,  $r_2 > r_1$ ). Рассмотреть два случая: когда направления токов в витках обоих соленоидов одинаковы и противоположны.

*Ответ:*  $L = \mu_0 \pi (r_1^2 l_1 n_1^2 + r_2^2 l_2 n_2^2 \pm 2n_1 n_2 r_1^2 l_1)$ . Знак плюс при одинаковом направлении токов.

**Задача 19.4.7.** Длинный соленоид окружен витком провода, в котором поддерживается ток  $I = I_0 \cos \omega t$  подключенным к нему источником переменного тока (рис. 19.11). Найти ЭДС индукции, наводимой в соленоиде. Длина соленоида  $l$ , радиус  $a$ , число витков  $N$ .

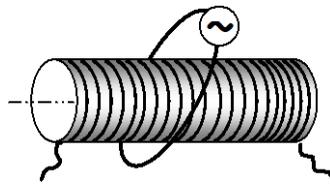


Рис. 19.11. Соленоид и виток тока вокруг него.

$$\text{Ответ: } \mathcal{E} = \mu_0 \frac{N}{l} \pi a^2 I_0 \omega \sin \omega t.$$

Результат не зависит от наклона и формы витка.

**Задача 19.4.8.** Точечный магнитный диполь пролетает насквозь через соленоид вдоль его оси. Магнитный момент диполя направлен параллельно его скорости. Соленоид через идеальный выпрямляющий элемент подключен к баллистическому гальванометру, измеряющему, таким образом, сумму модулей протекших

зарядов. Найти магнитный момент диполя  $p_m$ , если гальванометр показал заряд  $q$ . Соленоид имеет  $N$  витков, длина его  $l$ , общее сопротивление соленоида и измерительной цепи  $R$ .

Ответ: 
$$p_m = \frac{qRl}{2\mu_0 N}.$$

**Задача 19.4.9.** Квадратная рамка со стороной  $a$  лежит в одной плоскости с прямолинейным длинным проводом (рис. 19.12). Ближайшая сторона рамки параллельна проводу и отстоит от него на расстояние  $b$ . В рамке источником переменной ЭДС создается ток  $I = I_0 \sin(\omega t)$ . Найти ЭДС индукции  $\mathcal{E}(t)$ , наводимой в проводе.

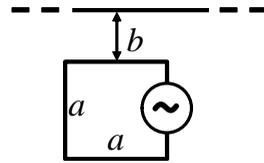


Рис. 19.12. Взаимное расположение рамки и прямолинейного провода.

Ответ:

$$\mathcal{E} = -\frac{\mu_0}{2\pi} a \ln\left(1 + \frac{a}{b}\right) \omega I_0 \cos(\omega t).$$

**Задача 19.4.10.** По оси кругового витка радиуса  $a$  на расстоянии  $l$  от его центра ( $l \gg a$ ) движется со скоростью  $v$  точечный магнитный диполь с дипольным моментом  $p_m$ , ориентированным параллельно вектору скорости. Оценить силу тока в витке, если его сопротивление равно  $R$ , а индуктивностью можно пренебречь.

Ответ: 
$$I = \frac{3}{2} \frac{\mu_0 p_m v}{R} \cdot \frac{a^2 l}{(a^2 + l^2)^{5/2}} \approx \frac{3\mu_0 p_m a^2 v}{2Rl^4}.$$

**Задача 19.4.11** ([2], 3.340 а). Два концентрических тонких проводника в форме окружностей с радиусами  $a$  и  $b$  лежат в одной плоскости. Имея в виду, что  $a \ll b$ , найти их взаимную индуктивность.

Ответ: 
$$L_{12} \approx \frac{\mu_0 \pi a^2}{2b}.$$

**Задача 19.4.12** ([2], 3.345). Имеются два неподвижных контура с взаимной индуктивностью  $L_{12}$ . В одном из контуров начали изменять ток по закону  $I_1 = \alpha t$ , где  $\alpha$  – постоянная,  $t$  – время. Найти закон

изменения тока  $I_2(t)$  в другом контуре, индуктивность которого  $L_2$  и сопротивление  $R$ .

*Ответ:*  $I_2 = [1 - \exp(-tR/L_2)]\alpha L_{12} / R$ .

**Задача 19.4.13** ([3], 411). Внутри тонкого воздушного соленоида вставлена маленькая плоская катушечка с числом витков  $n = 40$  и площадью витка  $S = 10 \text{ см}^2$ , по обмотке которой течет ток  $I = 1 \text{ А}$ . Длина соленоида  $l = 50 \text{ см}$ , число витков  $N = 10000$ . Определить магнитный поток, который посылает поле катушечки через обмотку соленоида.

*Указание:* использовать теорему о равенстве взаимных индуктивностей.

*Ответ:*  $\Phi_{21} = \mu_0 NnSI / l = 10^{-3} \text{ Вб}$ .

**Задача 19.4.14** ([2], 3.356). Две одинаковые катушки, каждая индуктивностью  $L$ , соединены а) последовательно; б) параллельно. Считая взаимную индуктивность катушек пренебрежимо малой, найти взаимную индуктивность системы в обоих случаях.

*Ответ:* а)  $L_{12} = 2L$ , б)  $L_{12} = L/2$ .

**Задача 19.4.15** ([2], 3.357). Две одинаковые катушки, каждая индуктивностью  $L$ , соединены последовательно и расположены так близко друг от друга, что магнитный поток одной катушки полностью пронизывает другую, усиливая поток через неё. Найти индуктивность системы из этих двух катушек.

*Ответ:*  $L_{12} = 4L$ .

**Задача 19.4.16** ([3], 407). На длинный цилиндр намотаны вплотную одна над другой две обмотки 1 - 1' и 2 - 2'. Индуктивность каждой обмотки равна 0,05 Гн.

Чему будет равна индуктивность  $L$  всей цепи, если: 1) концы 1' и 2' соединить, а в цепь включить концы 1 и 2; 2) 1 и 2' соединить, а в цепь включить концы 1' и 2; 3) концы 1' и 2' и 1 и 2 соединить и обе пары концов включить в цепь?

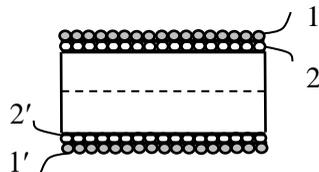


Рис. 19.13. Цилиндр с двумя обмотками.

*Ответ:* 1)  $L \approx 0$ ; 2)  $L = 0,2 \text{ Гн}$ ; 3)  $L = 0,05 \text{ Гн}$ .

**Задача 19.4.17** ([3], 402). Однослойная достаточно длинная катушка с железным сердечником разделена на две последовательно расположенные секции. Измерения индуктивностей секций дали следующие результаты: в первой секции  $L_1 = 0,04$  Гн, во второй секции  $L_2 = 0,09$  Гн. 1) Чему равна индуктивность  $L$  всей катушки? 2) Сколько витков  $N$  в катушке, если в первой секции 100 витков?

*Ответ:* 1)  $L = 0,25$  Гн; 2)  $N = 250$ .

## Глава 20

## ПОНДЕРОМОТОРНЫЕ СИЛЫ И РАБОТА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

### 20.1. Теоретический материал

**Пондеромоторные силы** – это силы, действующие на тела со стороны электрического и магнитного полей.

**Работа пондеромоторных сил:**

$$\delta A = \sum_j F_{x_j} dx_j,$$

где  $F_{x_j}$  – обобщенные пондеромоторные силы, действующие по направлению обобщенной координаты  $x_j$ . Обобщенные координаты системы – координаты, однозначно определяющие положение тел системы в пространстве.

Обобщенные пондеромоторные силы могут быть найдены из их работы при изменении обобщенных координат:

$$F_{x_j} = \frac{\partial A}{\partial x_j}. \quad (20.1)$$

**Закон изменения энергии системы контуров с током.**

Работа  $\delta A_{\text{ст}}$  сторонних (электродвижущих) сил в контурах равна сумме количества теплоты  $\delta Q$ , выделяющейся в контурах, работы пондеромоторных сил  $\delta A$ , действующих на контуры в магнитном поле, и изменения энергии  $dW$  магнитного поля:

$$\delta A_{\text{ст}} = \delta Q + \delta A + dW. \quad (20.2)$$

Если воспользоваться законами Джоуля-Ленца, Ома для полной цепи и электромагнитной индукции Фарадея, а также определением ЭДС сторонних сил, то из приведенного закона изменения энергии можно получить соотношение:

$$\delta A + dW = \sum_i I_i d\Phi_i, \quad (20.3)$$

где  $I_i$  – сила тока в  $i$ -ом контуре,  $d\Phi_i$  – изменение магнитного потока, пронизывающего  $i$ -й контур.

**Связь работы пондеромоторных сил с энергией магнитного поля.**

Для процессов, в которых сохраняются магнитные потоки  $\{\Phi_i\}$ , пронизывающие контуры с токами:

$$\delta A = -\delta W|_{\Phi_i = \text{const}}. \quad (20.4)$$

В данном случае механическая работа совершается за счет убыли магнитной энергии системы.

Для процессов, в которых постоянны силы тока  $\{I_i\}$  в контурах:

$$\delta A = +\delta W|_{I_i = \text{const}}. \quad (20.5)$$

В этом случае механическая работа и сопутствующее ей и равное по величине возрастание энергии магнитного поля происходит за счет работы источников ЭДС, поддерживающих постоянство силы тока.

Оба варианта описывают работу пондеромоторных сил, величина которых определяется величиной и взаимным расположением протекающих токов. Соотношения (20.4) и (20.5) удобно использовать для нахождения пондеромоторных сил.

### **Связь пондеромоторных сил с энергией магнитного поля.**

Для (виртуальных) процессов, в которых сохраняются магнитные потоки  $\{\Phi_i\}$ , пронизывающие контуры с токами, обобщенная пондеромоторная сила равна:

$$F_k = \left( \frac{\partial A}{\partial x_k} \right)_{\Phi} = - \left( \frac{\partial W}{\partial x_k} \right)_{\Phi}, \quad (20.6)$$

где  $\{x_k\}$  – обобщенные координаты, однозначно задающие положение и конфигурацию контуров в пространстве.

Чтобы воспользоваться формулой (20.6), необходимо энергию магнитного поля  $W$  выразить в виде функции магнитных потоков  $\{\Phi_i\}$  и обобщенных координат  $\{x_k\}$  в качестве независимых параметров.

Для (виртуальных) процессов, в которых постоянны силы тока  $\{I_i\}$  в контурах, обобщенная пондеромоторная сила равна:

$$F_i = \left( \frac{\partial A}{\partial x_i} \right)_{I} = \left( \frac{\partial W}{\partial x_i} \right)_{I}. \quad (20.7)$$

Чтобы воспользоваться формулой (20.7), необходимо энергию магнитного поля  $W$  выразить в виде функции сил токов  $\{I_i\}$  и обобщенных координат  $\{x_k\}$  в качестве независимых параметров.

**Энергия магнитного момента  $p_m$  во внешнем магнитном поле с индукцией  $B$  равна:**

$$W = -p_m \cdot B. \quad (20.8)$$

**Сила, действующая на точечный магнитный момент** (элементарный ток) во внешнем магнитном поле, равна

$$\mathbf{F} = i \left( \mathbf{p}_m \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \right) + j \left( \mathbf{p}_m \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \right) + k \left( \mathbf{p}_m \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} \right), \quad (20.9)$$

где  $\mathbf{p}_m$  – магнитный момент элементарного тока,  $\mathbf{B}$  – магнитная индукция внешнего поля.

В случае постоянного магнитного момента элементарного тока ( $\mathbf{p}_m = \text{const}$ ):

$$\mathbf{F} = i \frac{\partial (\mathbf{p}_m \mathbf{B})}{\partial x} + j \frac{\partial (\mathbf{p}_m \mathbf{B})}{\partial y} + k \frac{\partial (\mathbf{p}_m \mathbf{B})}{\partial z} = \text{grad} (\mathbf{p}_m \mathbf{B}) = \nabla (\mathbf{p}_m \mathbf{B}).$$

В случае отсутствия токов в области расположения магнитного момента (в стороне от источников магнитного поля):

$$\mathbf{F} = p_{m_x} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + p_{m_y} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} + p_{m_z} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} = (\mathbf{p}_m \nabla) \mathbf{B}.$$

**Момент силы, действующий на точечный магнитный момент во внешнем магнитном поле**

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m \mathbf{B}]. \quad (20.10)$$

## 20.2. Основные типы задач (классификация)

20.1. Определение сил, действующих на проводники с током в магнитном поле.

20.2. Расчет работы по перемещению контура с током в магнитном поле.

20.3. Определение вращающего момента и сил, действующих на контур с током и магнитный момент во внешнем магнитном поле.

## 20.3. Методы решения и примеры решения задач

### Задачи типа 20.1

*Определение сил, действующих на проводники с током в магнитном поле.*

**Метод решения.** Вычисление работы пондеромоторных сил при виртуальных перемещениях контуров с током в магнитном поле, использование формул (20.4) или (20.5), связывающих работу пондеромоторных сил с изменением энергии магнитного поля. Расчет сил по формулам (20.6) или (20.7).

**Задача 20.3.1.** По длинному однослойному соленоиду с  $n$  витками на единицу длины течет ток  $I$ . Определить давление, действующее на боковую поверхность соленоида.

### Решение

Каждый из витков соленоида представляет собой кольцо с током, находящееся во внешнем однородном (если пренебречь краевыми эффектами) магнитном поле, перпендикулярном его плоскости, которое создается всеми остальными витками соленоида (рис. 20.1). Пондеромоторные силы  $F$  стремятся увеличить радиус соленоида. Найдем эти силы через выражение для энергии магнитного поля.

Пусть радиус соленоида виртуально увеличился на  $dR$  при неизменной силе тока. Тогда работа сил давления на боковую поверхность соленоида будет равна приращению его энергии:

$$\delta A = p_r dV = p_r 2\pi R l dR = \delta W|_{I=\text{const}},$$

где  $V$  – объем соленоида,  $R$  – его радиус,  $l$  – длина.

Энергия соленоида равна:

$$W = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 \pi R^2 l I^2,$$

где использовано, что индуктивность соленоида  $L = \mu_0 n^2 V$  (см. задачу 19.3.1 главы 19).

Из этих соотношений находим величину бокового давления  $p_r$ :

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{1}{2\pi R l} \cdot \frac{\partial W}{\partial R} \Big|_I = \frac{1}{2\pi R l} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{2} \mu_0 n^2 \pi R^2 l I^2 \right) \Big|_I = \\ &= \frac{\mu_0 n^2 I^2}{4R} \cdot \frac{\partial}{\partial R} (R^2) = \frac{\mu_0 n^2 I^2}{2}. \end{aligned}$$

*Замечание 1.* Если учесть, что индукция магнитного поля на оси длинного соленоида  $B = \mu_0 n I$ , то ее можно связать с величиной бокового давления:

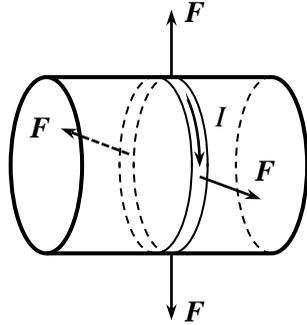


Рис. 20.1. Силы, действующие на виток соленоида с током со стороны его собственного магнитного поля.

$$p_r = \frac{\mu_0 n^2 I^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Из-за наличия сил давления, действующих на боковую поверхность соленоида, максимальное значение индукции магнитного поля, которое можно получить с помощью импульсных соленоидов, не превышает 50 Тл. При такой величине  $B$  на проволоку из бериллиевой бронзы, из которой изготавливаются импульсные соленоиды,

оказывается давление  $p = \frac{B^2}{2\mu_0} \approx 2 \cdot 10^9$  Па, близкое к её пределу

прочности.

*Замечание 2.* Вследствие взаимного притяжения витков соленоида на его торцевую поверхность будут действовать силы, стягивающие его. Величину давления, действующего на торцевую поверхность соленоида, можно определить аналогично решению данной задачи (см. задачу 20.4.2 для самостоятельного решения).

**Ответ:**  $p_r = \frac{\mu_0 n^2 I^2}{2}.$

**Задача 20.3.2.** Квадратная рамка со стороной  $a$ , изготовленная из тонкого проводника, расположена в одной плоскости с длинным прямым проводом, по которому течет ток  $I_0$ . Определить внешнюю силу, которая удерживает рамку в равновесии, если по ней течёт ток  $I$ , а расстояние между проводом и ближайшей к нему стороной рамки равно  $2a$  (рис. 20.2).

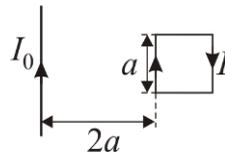


Рис. 20.2. Взаимное расположение проводников с токами.

### Решение

Определим силу, действующую на рамку с током  $I$  со стороны магнитного поля прямого провода с током  $I_0$ , исходя из выражения для энергии магнитного поля.

Направим ось  $X$  перпендикулярно проводу в плоскости рамки с началом координат на проводе и будем отсчитывать расстояние  $x$  от провода до ближайшей к нему стороны рамки.

При постоянстве токов, текущих в проводниках, согласно формуле (20.5)

$$\delta A = F dx = \delta W \Big|_{I_0, I = \text{const}}.$$

Так как в рассматриваемой задаче токи не изменяются по величине, то силу, действующую на рамку, можно найти как

$$F = \left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_{I_0, I = \text{const}}.$$

Будем рассматривать прямой провод с током  $I_0$  как элемент большого контура, замыкающегося на бесконечности. Тогда энергия магнитного поля, созданного двумя контурами с токами, складывается из собственных энергий магнитного поля контуров и их взаимной энергии. Собственные энергии контуров – постоянные величины. От координаты  $x$  зависит только энергия взаимодействия, поэтому

$$W(x) = W_{\text{взаим}} = L_{12}(x)I_0I,$$

где  $L_{12}$  – коэффициент взаимной индукции системы "провод – рамка".

Величина  $L_{12}$  для такой системы была вычислена в задаче 19.3.5 главы 19:

$$L_{12} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \left( \frac{x+a}{x} \right).$$

Окончательно, сила, действующая на рамку, равна:

$$F = \left. \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu_0 I_0 I a}{2\pi} \ln \left( \frac{x+a}{x} \right) \right) \right|_{I_0, I = \text{const}} = - \frac{\mu_0 I_0 I a}{2\pi} \frac{a}{x(x+a)}.$$

При  $x = 2a$

$$F = - \frac{\mu_0 I_0 I a}{12\pi}.$$

Так как получившаяся величина отрицательна, искомая сила направлена против направления оси  $X$ , что соответствует притяжению рамки к проводу и соответствует общему правилу: в неоднородном магнитном поле магнитный момент втягивается в область более сильного поля. Внешняя сила, которая удерживает рамку в равновесии, должна быть равна силе  $F$  и направлена противоположно ей, то есть вдоль оси  $X$ :

$$F_{\text{вн}} = -F = \frac{\mu_0 I_0 I a}{12\pi}.$$

**Ответ:**  $F_{\text{вн}} = \frac{\mu_0 I_0 I}{12\pi}$ ; сила направлена от провода в плоскости

рамки.

### Задачи типа 20.2

*Расчет работы по перемещению контура с током в магнитном поле.*

**Метод решения.** Использование закона изменения энергии системы контуров с током (формулы (20.3), (20.4) и (20.5)). В случае, когда ток в перемещаемом контуре остается неизменным, работа сил магнитного поля по перемещению контура с током равна:

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1),$$

где  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  – магнитные потоки, пронизывающие контур в начальный и конечный моменты соответственно.

**Задача 20.3.3.** В одной плоскости с длинным прямым проводом, по которому течет ток  $I_0$ , расположена прямоугольная рамка со сторонами  $a$  и  $b$ , по которой течет ток  $I$ . Ближайшая к проводу сторона рамки длиной  $b$  параллельна проводу и находится от него на расстоянии  $l$  (рис. 20.3). Найти работу внешней силы, которую нужно совершить при медленном повороте на  $180^\circ$  рамки вокруг дальней от провода с током стороны длиной  $b$ .

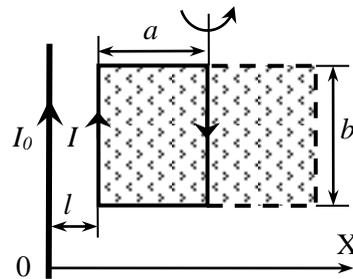


Рис. 20.3. Взаимное расположение рамки и прямого провода с током в начальный и конечный моменты времени.

### Решение

Ток, текущий по проводу, создает магнитное поле, модуль вектора индукции которого на расстоянии  $r$  от провода равен:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}. \quad (20.11)$$

Вектор индукции  $\mathbf{B}$  перпендикулярен плоскости рамки и при заданном направлении тока в проводе направлен в рисунок.

Работа внешних сил по повороту рамки равна работе сил магнитного поля провода с током  $A$ , взятой с обратным знаком. При  $I = \text{const}$  эта работа может быть вычислена по формуле:

$$A_{\text{внеш}} = -A = -I(\Phi_2 - \Phi_1) = I(\Phi_1 - \Phi_2), \quad (20.12)$$

где  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  – потоки магнитной индукции через рамку в начальном и конечном положениях рамки.

Выберем положительное направление обхода рамки по часовой стрелке. При этом вектор нормали  $\mathbf{n}$  к плоскости рамки в её начальном положении будет сонаправлен с вектором индукции  $\mathbf{B}$ , то есть угол между векторами  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{n}$  равен нулю. Поток вектора  $\mathbf{B}$  через любой участок рамки площадью  $d\mathbf{S}$  при этом положителен:  $d\Phi_1 = (\mathbf{B}d\mathbf{S}) > 0$ .

Полный поток индукции через рамку в начальный момент времени составляет (см. решение задачи 19.3.5 главы 19):

$$\Phi_1 = \int_l^{l+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} b dr = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \left( \frac{l+a}{l} \right) > 0. \quad (20.13)$$

После поворота рамки на  $180^\circ$  вокруг дальней от провода с током стороны направление нормали к плоскости рамки изменится на противоположное, поэтому поток вектора  $\mathbf{B}$  через любой участок рамки площадью  $d\mathbf{S}$  будет отрицательным:  $d\Phi_2 = (\mathbf{B}d\mathbf{S}) < 0$ . После поворота рамки расстояние до ближайшей к проводу её стороны станет равно  $r = l + a$ , а магнитный поток через рамку составит:

$$\Phi_2 = - \int_{l+a}^{l+2a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} b dr = - \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \left( \frac{l+2a}{l+a} \right) < 0. \quad (2.14)$$

Подставляя (20.13) и (20.14) в (20.12), находим работу внешних сил по повороту рамки:

$$A_{\text{внеш}} = \frac{\mu_0 I_0 I b}{2\pi} \ln \left[ \frac{(l+a)^2}{l(l+2a)} \right].$$

Совершаемая работа внешних сил положительна:  $A_{\text{внеш}} > 0$ .

**Ответ:** 
$$A_{\text{внеш}} = \frac{\mu_0 I_0 I b}{2\pi} \ln \left[ \frac{(l+a)^2}{l(l+2a)} \right].$$

**Задача 20.3.4.** В центре длинного соленоида с плотностью намотки  $n$  расположена плоская катушка, состоящая из  $N$  витков площадью  $S$  каждый. Плоскость витков катушки перпендикулярна оси соленоида. По обмотке соленоида течет ток  $I_1$ , по обмотке катушки – ток  $I_2$ , причем направления токов одинаковы. Определить работу внешних сил по поступательному перемещению катушки из центра соленоида в плоскость одного из его торцов вдоль оси соленоида.

### Решение

Работа внешних сил  $A_{\text{внеш}}$  по медленному перемещению катушки из центра соленоида в середину одного из его торцов будет равна взятой с обратным знаком работе сил поля. При указанном перемещении катушки внешние силы совершают положительную работу, так как в направлении от центра соленоида к торцу индукция магнитного поля уменьшается, и в таком неоднородном поле на катушку действуют силы, втягивающие её обратно в соленоид:

$$A_{\text{внеш}} = -A = -I_2(\Phi_2 - \Phi_1) = I_2(\Phi_1 - \Phi_2), \quad (20.15)$$

где  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  – потоки магнитной индукции, пронизывающие катушку в центре и на торце соленоида.

Индукция магнитного поля в соленоиде выражается формулой:

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 I n (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2), \quad (20.16)$$

где  $\alpha$  – угол, под которым видны верхние края торцов соленоида из точки, в которой определяется индукция.

Для центра длинного соленоида имеем:  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 0$  и

$$B_1 = \mu_0 I_1 n .$$

При этом поток магнитной индукции, пронизывающий все  $N$  витков катушки, равен:

$$\Phi_1 = NB_1 S = \mu_0 I_1 n NS . \quad (20.17)$$

На торце соленоида  $\alpha_1 = \pi/2$ ,  $\alpha_2 = 0$  и  $B_2 = \mu_0 I n / 2$  .

Поток магнитной индукции, пронизывающий витки катушки, равен:

$$\Phi_2 = NB_2 S = \mu_0 I_1 n NS / 2 . \quad (20.18)$$

Подставляя (20.17) и (20.18) в формулу (20.15), находим работу внешней силы:

$$A_{\text{внеш}} = \mu_0 I_1 I_2 n NS / 2 > 0 .$$

**Ответ:**  $A_{\text{внеш}} = \mu_0 I_1 I_2 n NS / 2 > 0$  .

### Задачи типа 20.3

*Определение вращающего момента и сил, действующих на контур с током и магнитный момент во внешнем магнитном поле.*

**Метод решения.** Определение индукции магнитного поля в месте, где находится магнитный момент. Если магнитный момент контура с током не известен, предварительно вычислить его по

формуле:  $\mathbf{p}_m = IS\mathbf{n}$ , где  $\mathbf{n}$  – нормаль к плоскости контура. Если магнитный момент находится в однородном магнитном поле, на него действует вращающий механический момент  $\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m \mathbf{B}]$  (20.10). В неоднородном магнитном поле на магнитный момент кроме вращающего механического момента (20.10) действует пондеромоторная сила, величина которой определяется по формуле (20.9).

**Задача 20.3.5.** Соленоид радиуса  $R$  и длины  $l$  ( $l \gg R$ ) имеет обмотку, состоящую из  $N$  витков. По соленоиду течет ток силы  $I$ . В центре соленоида на его оси помещена небольшая катушка, имеющая магнитный момент  $\mathbf{p}_m$ , направленный перпендикулярно оси соленоида. Определить величину момента сил  $M$ , действующих на катушку.

### Решение

Внутри длинного соленоида магнитное поле однородно. Вектор магнитной индукции такого поля направлен вдоль оси соленоида (см. рис. 20.4) и равен по модулю

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{l} I.$$

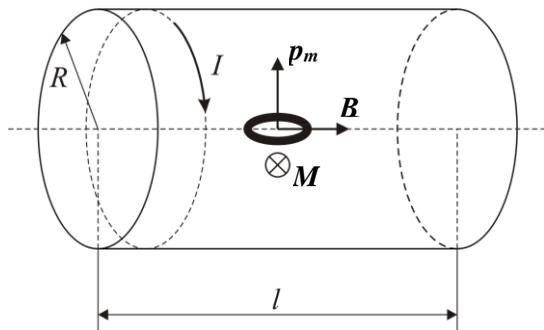


Рис. 20.4. К определению вращающего момента сил Ампера, действующего на магнитный диполь, помещенный на оси соленоида.

Будем рассматривать катушку, как точечный магнитный диполь. Тогда в соответствии с формулой (20.3) момент вращающих сил по модулю будет равен:

$$M = p_m B \sin \alpha = p_m \mu_0 \frac{N}{l} I,$$

где  $\alpha = 90^\circ$  – угол между векторами  $\mathbf{p}_m$  и  $\mathbf{B}$ .

*Замечание.* Если внутренняя катушка ориентирована соосно соленоиду, то в соответствии с (20.10) момент сил, действующих на неё со стороны магнитного поля соленоида, равен нулю.

**Ответ:**  $M = \frac{\mu_0 p_m N I}{l}$ .

**Задача 20.3.6.** На круглый короткий деревянный цилиндр объёмом  $V$  в один слой намотана катушка. По катушке течет ток, поверхностная плотность которого равна  $i$ . Определить величину механического момента, который удерживает цилиндр в равновесии, если он находится во внешнем однородном магнитном поле, вектор индукции которого  $\mathbf{B}$  образует угол  $\alpha$  с осью цилиндра.

### Решение

Рассмотрим элемент катушки длиной  $dl$ . Этот элемент можно рассматривать как магнитный момент

$$p_m = ISn = idl \pi R^2 n,$$

где  $R$  – радиус катушки, направленный вдоль оси цилиндра (см. рис. 20.6).

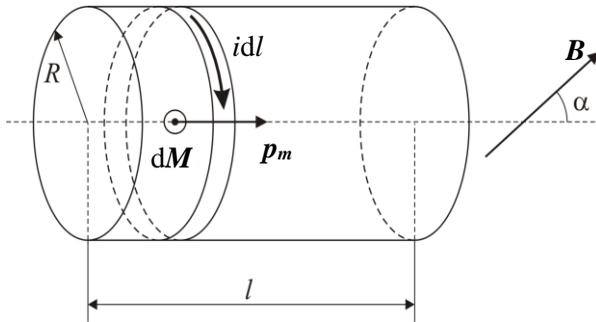


Рис. 20.5. Определение момента сил, действующих на элемент катушки с током во внешнем магнитном поле.

В соответствии с формулой (20.10) на этот элемент катушки со стороны магнитного поля действует вращающий момент, равный по модулю

$$dM = p_m B \sin \alpha = idl \pi R^2 B \sin \alpha.$$

Считая, что геометрические размеры катушки (радиус  $R$  и длина  $l$ ) совпадают с размерами деревянного цилиндра, на который она намотана, получим выражение для момента сил, действующего на всю катушку со стороны магнитного поля

$$M = \int_0^l dM = \int_0^l i \pi R^2 B \sin \alpha dl = iVB \sin \alpha.$$

При интегрировании учтено, что объём катушки равен  $V = l\pi R^2$ .

В условиях равновесия механический момент, который удерживает

живает цилиндр с катушкой в равновесии, равен по величине моменту сил со стороны магнитного поля, который стремится повернуть катушку.

**Ответ:**  $M = iVB\sin\alpha$ .

**Задача 20.3.7.** Круглая проволочная петля радиуса  $a$  сопротивлением  $R$  находится в однородном постоянном магнитном поле с индукцией  $\mathbf{B}$  и равномерно вращается вокруг своего диаметра, перпендикулярного  $\mathbf{B}$ , с угловой скоростью  $\omega$  (рис. 20.6). Пренебрегая индуктивностью петли, найти средний тормозящий момент  $\overline{M}$  сил, действующих на петлю со стороны магнитного поля, и среднюю мощность этих сил  $\overline{P}$ .

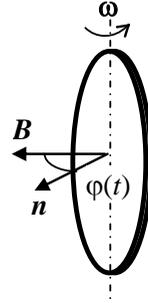


Рис. 20.6. Проволочная петля, вращающаяся во внешнем магнитном поле.

### Решение

Пусть  $\varphi(t) = \omega t$  – угол между вектором  $\mathbf{B}$  и вектором  $\mathbf{n}$  нормали к плоскости петли в момент времени  $t$ . Тогда магнитный поток через контур равен:

$$\Phi(t) = \pi a^2 B \cos \omega t,$$

а ЭДС индукции составляет:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \pi a^2 B \omega \sin \omega t.$$

Поскольку индуктивностью контура можно пренебречь, индукционный ток по закону Ома равен:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R} = \frac{1}{R} \pi a^2 B \omega \sin \omega t.$$

Такой круговой виток с током обладает магнитным моментом

$$\mathbf{p}_m(t) = I \mathbf{S} \mathbf{n} = \mathbf{n} \pi a^2 I = \mathbf{n} \frac{1}{R} (\pi a^2)^2 B \omega \sin \omega t.$$

Согласно формуле (20.10) на петлю будет действовать механический вращающий момент  $\mathbf{M}(t) = [\mathbf{p}_m \mathbf{B}]$ , направленный противоположно вектору  $\omega$  (следствие правила Ленца). Его проекция на направление вектора  $\omega$  равна

$$M(t) = -p_m(t) B \sin \omega t = -\frac{1}{R} (\pi a^2 B)^2 \omega \sin^2 \omega t.$$

Среднее за период значение  $\overline{\sin^2 \omega t} = 1/2$ , поэтому средняя величина момента составляет:

$$\overline{M} = -\frac{1}{2R}(\pi a^2 B)^2 \omega.$$

Поскольку мощность  $P(t) = M(t)\omega$ , а  $\omega = \text{const}$ , то средняя за период мощность равна:

$$\overline{P} = \overline{M}\omega = -\frac{1}{2R}(\pi a^2 B\omega)^2.$$

*Замечание.* Другой способ решения данной задачи, основанный на законе сохранения энергии, приведён в задаче 18.3.2.

$$\text{Ответ: } \overline{M} = -\frac{1}{2R}(\pi a^2 B)^2 \omega, \quad \overline{P} = -\frac{1}{2R}(\pi a^2 B\omega)^2.$$

**Задача 20.3.8.** Две катушки с магнитными моментами  $p_1$  и  $p_2$  расположены так, что их оси находятся на одной прямой. Расстояние  $L$  между катушками велико по сравнению с их размерами. Определить модуль силы взаимодействия катушек.

### Решение

Поскольку  $L$  намного больше размеров катушек, систему можно рассматривать как совокупность двух точечных магнитных моментов, один из которых находится в поле, создаваемом другим.

Будем рассматривать вторую катушку в поле первой. Направим ось  $X$  вдоль прямой, соединяющей центры катушек, а начало координат поместим в центр первой катушки (см. рис. 20.7). Тогда сила, действующая на вторую катушку, будет иметь только  $x$ -компоненту, и её модуль равен:

$$F = F_x = p_{2x} \frac{\partial B_{1x}}{\partial x}.$$

Индукция магнитного поля на оси точечного магнитного момента была вычислена в задаче 15.3.3 главы 15 (как предельный случай индукции магнитного поля на оси кольца с током при радиусе кольца, значительно меньшем расстояния до точки, в которой

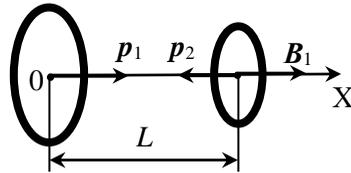


Рис. 20.7. Взаимное расположение катушек с разными магнитными моментами.

определяется индукция):  $B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2p_m}{x^3}$ , следовательно, индукция магнитного поля, создаваемого первой катушкой, составляет:

$$B_{1x} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{p_{1x}}{x^3}.$$

Окончательно для силы, действующей на вторую катушку, получим:

$$F_x = p_{2x} \left. \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{p_{1x}}{x^3} \right) \right|_{x=L} = -\frac{3\mu_0 p_{1x} p_{2x}}{2\pi L^4}.$$

Аналогичный результат получится, если рассматривать первую катушку в магнитном поле второй.

*Замечание.* Катушки притягиваются ( $F_x < 0$ ), если  $p_{1x}$  и  $p_{2x}$  имеют одинаковый знак ( $p_1 \uparrow \uparrow p_2$ ) и отталкиваются ( $F_x > 0$ ), если  $p_{1x}$  и  $p_{2x}$  имеют разные знаки ( $p_1 \uparrow \downarrow p_2$ ) – ситуация, приведённая на рис. 20.7.

**Ответ:**  $F = -\frac{3\mu_0 p_1 p_2}{2\pi L^4}.$

**Задача 20.3.9.** Точечный магнитный момент  $p_m$  расположен перпендикулярно длинному прямому проводу, по которому течет ток  $I$ , так, что продолжение вектора  $p_m$  проходит через провод (рис. 20.8). Определить силу, действующую на магнитный момент со стороны магнитного поля провода, если расстояние между проводом и магнитным моментом равно  $r$ .

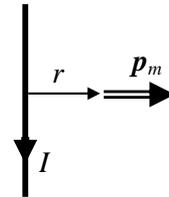


Рис. 20.8. Взаимная ориентация прямолинейного тока и магнитного диполя.

### Решение

Выберем декартову систему координат так, чтобы ось  $Z$  была параллельна проводу, а ось  $X$  – магнитному моменту  $p_m$ . Взаимная ориентация магнитного момента и провода в поперечной плоскости  $XY$  показана на рис. 20.9.

Задачу можно решить двумя способами – используя выражение для энергии магнитного поля и непосредственно формулу для силы, действующей на магнитный момент во внешнем магнитном поле.

Способ 1 (через энергию магнитного поля).

Чтобы воспользоваться этим методом, нужно найти зависимость энергии магнитного момента от его координат в магнитном поле прямого тока.

Линии индукции магнитного поля прямого провода имеют вид окружностей, центр которых лежит на проводе. Пусть магнитный момент  $\mathbf{p}_m$  параллелен оси  $X$  и находится в произвольной точке с координатами  $(x, y, 0)$  (рис. 20.10). Компоненты вектора магнитной индукции поля провода в этой точке можно записать как

$$\mathbf{B} = B \left\{ \frac{y}{r}, -\frac{x}{r}, 0 \right\},$$

где  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ .

Энергия магнитного момента  $\mathbf{p}_m$  в магнитном поле с индукцией  $\mathbf{B}$  равна:

$$W = -(\mathbf{p}_m \mathbf{B}) = -p_m B \frac{y}{r} = -p_m \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{y}{r^2}.$$

Силу, действующую на магнитный момент, можно найти по формуле:

$$\mathbf{F}_m = -\text{grad}W = -\left( \frac{\partial W}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial W}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial W}{\partial z} \mathbf{k} \right).$$

Так как магнитный момент, согласно условию задачи, находится в точке с координатами  $(r, 0, 0)$ , получаем:

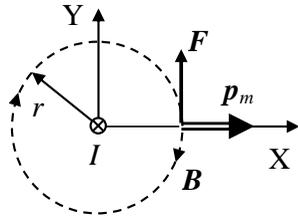


Рис. 20.9. Сила, действующая на магнитный момент в магнитном поле прямого провода с током.

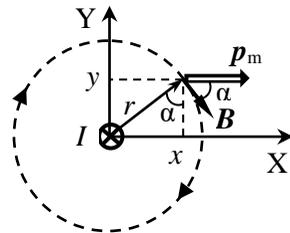


Рис. 20.10. К определению энергии взаимодействия диполя с магнитным полем прямого провода с током.

$$F_x = -\left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_{x=r, y=0} = p_m \mu_0 I \left. \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \right|_{x=r, y=0} = 0;$$

$$F_y = -\left. \frac{\partial W}{\partial y} \right|_{x=r, y=0} = p_m \mu_0 I \left. \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \right|_{x=r, y=0} = \frac{p_m \mu_0 I}{r^2};$$

$$F_z = \left. \frac{\partial W}{\partial z} \right|_{z=0} = 0.$$

В векторном виде сила, действующая на магнитный момент, запишется в виде:

$$\mathbf{F} = p_m \frac{\mu_0 I}{2\pi r^2} \mathbf{e}_y,$$

где  $\mathbf{e}_y$  – орт оси  $Y$  выбранной системы координат.

Эта сила направлена в положительном направлении оси  $Y$ , и смещение в этом направлении уменьшает энергию магнитного момента. В направлении оси  $X$  сила не действует, поскольку смещение по этой оси не меняет энергию.

### Способ 2 (непосредственный расчет сил).

Если постоянный магнитный момент  $\mathbf{p}_m$  находится в точке с координатами  $(x, y, 0)$  (рис. 20.10), то компоненты силы, действующей на него со стороны магнитного поля провода, равны:

$$F_x = \left( \mathbf{p}_m \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{p}_m, \mathbf{B});$$

$$F_y = \left( \mathbf{p}_m \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{p}_m, \mathbf{B});$$

$$F_z = \left( \mathbf{p}_m \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{p}_m, \mathbf{B}),$$

где модуль вектора магнитной индукции  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

Так как магнитный момент, согласно условию задачи, находится в точке с координатами  $(r, 0, 0)$ , аналогично способу 1 получаем:

$$F_x = 0, \quad F_y = \frac{p_m \mu_0 I}{2\pi r^2}, \quad F_z = 0.$$

**Ответ:**  $\mathbf{F} = p_m \frac{\mu_0 I}{2\pi r^2} \mathbf{e}_y.$

## 20.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 20.4.1.** Проводящую плоскость с током поместили во внешнее однородное магнитное поле. В результате индукция магнитного поля с одной стороны плоскости оказалась равной  $B_1$ , а с другой стороны –  $B_2$  (линии поля параллельны плоскости – см. рис. 20.11). Найти магнитное давление  $p$ , действующее на плоскость.

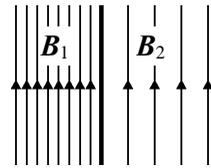


Рис. 20.11. Линии индукции магнитного поля с двух сторон от проводящей плоскости с током.

*Указание.* Для определения направления силы давления целесообразно найти направление поверхностного тока, текущего по плоскости.

*Ответ:*  $p = \frac{B_1^2 - B_2^2}{2\mu_0}$ , сила давления направлена вправо.

**Задача 20.4.2.** По длинному однослойному соленоиду, обмотка которого состоит из  $N$  витков, течет ток  $I$ . Определить продольную силу, действующее на торцы соленоида, если его длина равна  $l$ .

*Ответ:*  $F = \frac{\mu_0}{2} S \left( \frac{NI}{l} \right)^2$ , продольные силы сжимают соленоид.

**Задача 20.4.3.** Вдоль длинного тонкостенного круглого цилиндра радиуса  $R$  течет ток  $I$ . Какое давление испытывают стенки цилиндра?

*Ответ:*  $p = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^2}$ .

**Задача 20.4.4.** Прямоугольная рамка с током  $I$  и сторонами  $a$  и  $b$  лежит в одной плоскости с очень длинным проводом, по которому течет ток  $I_0$  (сторона рамки  $b$  параллельна проводу). Определить внешнюю механическую силу, которая удерживает рамку в равновесии. Расстояние между проводом и осью симметрии рамки равно  $r_0$ .

*Ответ:*  $F = \frac{2\mu_0 I_0 I a b}{\pi(4r_0^2 - a^2)}$ .

**Задача 20.4.5.** Два длинных соосных соленоида, радиусы которых примерно одинаковы  $R_1 \cong R_2 = R$ , а длина много больше  $R$ , частично вставлены один в другой. Определить силу, действующую на каждый из соленоидов. Плотность намотки и сила тока в соленоидах соответственно равны  $n_1, I_1$  и  $n_2, I_2$ . Краевыми эффектами пренебречь.

*Ответ:*  $F = \mu_0 n_1 n_2 I_1 I_2 \pi R^2$ . Соленоиды притягиваются, если токи в них имеют одинаковое направление, и отталкиваются в обратном случае.

**Задача 20.4.6.** В электромагнитном насосе для перекачки расплавленного металла участок трубы с металлом находится в однородном магнитном поле с индукцией  $\mathbf{B}$  (рис. 20.12). Через этот участок трубы в перпендикулярном вектору  $\mathbf{B}$  и оси трубы направлении пропускают однородный ток силой  $I$ . Найти избыточное давление, создаваемое насосом.

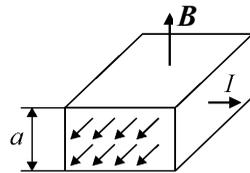


Рис. 20.12. Электромагнитный насос.

*Ответ:*  $\Delta p = \frac{IB}{a}$ .

**Задача 20.4.7.** Внутри длинного соленоида находится короткая катушка сечения  $S$ , состоящая из  $N$  витков. Ось катушки перпендикулярна оси соленоида и направлена вертикально. Внутренняя катушка укреплена на коромысле весов, которое в отсутствие тока находится в равновесии (рис. 20.13). Если в катушке и соленоиде текут одинаковые токи, то для уравновешивания весов на короткое плечо коромысла длиной  $l$  нужно поместить груз массы  $m$ . Определить силу этого тока  $I$ , если плотность намотки соленоида равна  $n$  витков на единицу длины.

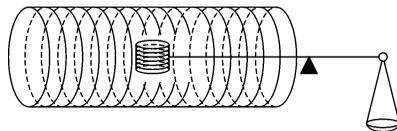


Рис. 20.13. Взаимное расположение катушек.

*Ответ:*  $I = \sqrt{\frac{mgl}{\mu_0 n S N}}$ .

**Задача 20.4.8.** Два одинаковых параллельных магнитных момента  $p_m$  лежат в одной плоскости и образуют одинаковые углы  $\theta$  с соединяющим их отрезком. Вычислить модуль силы взаимодействия между диполями. При каких углах  $\theta$  эта сила максимальна?

$$\text{Ответ: } F = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3p_m^2}{r^4} \sqrt{(1 - 3\cos^2 \theta)^2 + \sin^2 2\theta},$$

$$F_{\max} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{6p_m^2}{r^4} \text{ при } \theta = 0, \pi.$$

**Задача 20.4.9.** Точечный магнитный момент  $p_m$  расположен в одной плоскости с длинным прямым проводом, по которому течет ток  $I$ . Определить силу  $F$  и вращающий момент  $M$ , действующие на магнитный момент, если расстояние между ним и проводом равно  $r$ , а его компоненты в декартовых координатах соответственно равны  $p_{mx}$  и  $p_{my}$  (см. рис. 20.14).

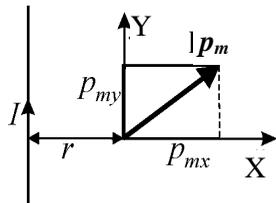


Рис. 20.14. Взаимное расположение магнитного диполя  $p_m$  и прямого провода с током  $I$ .

**Ответ:**  $F = \frac{\mu_0 I p_{mx}}{2\pi r^2}$ ; сила направлена от нас перпендикулярно плоскости рисунка;

$$M = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \sqrt{(p_{mx})^2 + (p_{my})^2}, \text{ момент направлен в плоскости рисунка под углом } \alpha = \arctg \frac{p_{mx}}{p_{my}} \text{ к оси X.}$$

кости рисунка под углом  $\alpha = \arctg \frac{p_{mx}}{p_{my}}$  к оси X.

**Задача 20.4.10.** Точечный магнитный момент  $p_m$  расположен перпендикулярно длинному прямому проводу, по которому течет ток  $I$  (рис. 20.15). Определить силу, действующую на диполь со стороны магнитного поля провода, если расстояние между проводом и диполем равно  $r$ .

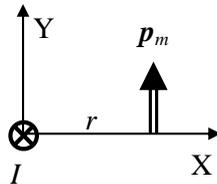


Рис. 20.15. Магнитный диполь в магнитном поле прямого провода с током  $I$ .

$$\text{Ответ: } F = F_x = \frac{\mu_0 p_m I}{2\pi r^2}.$$

**Задача 20.4.11** ([2], 3.272). Ток  $I$  течет по длинному однослойному соленоиду, радиус сечения которого  $R = 5,5$  см. Число витков на единицу длины соленоида  $n = 15$  см<sup>-1</sup>. Найти предельную силу тока, при которой может наступить разрыв обмотки, если предельная нагрузка на разрыв проволоки обмотки  $F_{\text{пред}} = 100$  Н.

*Ответ:*  $I_{\text{пред}} = \sqrt{2F_{\text{пред}} / \mu_0 n R} = 1,4$  кА.

**Задача 20.4.12** ([3], 322). Определить удлинение  $x$  вертикально висящей спиральной пружины, по которой течет постоянный ток  $I$  и к нижнему концу которой подвешен груз массой  $m$ . Длина недеформированной пружины равна  $l$ , диаметр витка  $D$ , число витков  $N$ . Предполагается, что деформации малы ( $x \ll l$ ) и подчиняются закону Гука (коэффициент упругости пружины равен  $k$ ).

*Ответ:*  $x = \frac{mg}{k} - \frac{\mu_0 \pi N^2 D^2 I^2}{8kl^2}$ .

**МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В МАГНЕТИКАХ.  
ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ  
И ПОНДЕРОМАТОРНЫЕ СИЛЫ  
В МАГНЕТИКАХ. ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК.  
ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В КОНТУРАХ**

**4**

- **МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В МАГНЕТИКАХ.  
ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ.  
МЕТОД МОЛЕКУЛЯРНЫХ ТОКОВ**
- **ПОЛЕ ПОСТОЯННЫХ МАГНИТОВ.  
МАГНЕТИКИ ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ  
ФАКТОРЫ ФОРМЫ МАГНЕТИКА**
- **ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ  
И ПОНДЕРОМАТОРНЫЕ СИЛЫ В МАГНЕТИКАХ**
- **ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ  
В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ**
- **РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА.  
МЕТОДЫ КОМПЛЕКСНЫХ АМПЛИТУД  
И ВЕКТОРНЫХ ДИАГРАММ.  
МОЩНОСТЬ В ЦЕПЯХ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА**
- **СВОБОДНЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ  
КОЛЕБАНИЯ В КОНТУРАХ.  
РЕЗОНАНС НАПРЯЖЕНИЙ И ТОКОВ**

## Глава 21

# МАГНИТНОМ ПОЛЕ В МАГНЕТИКАХ. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ. МЕТОД МОЛЕКУЛЯРНЫХ ТОКОВ

### 21.1. Теоретический материал

Любое вещество состоит из атомов и молекул, в которых электроны находятся в состоянии непрерывного движения, образуя микроскопические замкнутые токи, обладающие магнитным моментом. Кроме этого, электроны в атомах и нуклоны в атомных ядрах обладают спиновыми магнитными моментами.

**Магнитный момент атома** определяется векторной суммой магнитных моментов (орбитального и спинового) электронов и спинового момента атомного ядра. В отсутствие внешнего магнитного поля атомы разных элементов, в зависимости от строения их электронных оболочек, могут как иметь магнитный момент, так и не иметь его (при полной компенсации всех моментов внутри атома).

**Магнитный момент вещества** определяется векторной суммой магнитных моментов входящих в него атомов.

Под действием внешнего магнитного поля все вещества приобретают макроскопические собственные магнитные моменты, величины которых в разных веществах различаются на много порядков.

**Магнетиками** называются вещества, которые во внешнем магнитном поле или без него являются источниками магнитного поля. Такими свойствами в той или иной степени обладают все вещества.

#### **Классификация магнетиков.**

**Диамагнетики** – вещества, молекулы (атомы) которых не обладают собственным магнитным моментом в отсутствие внешнего поля. При внесении в магнитное поле молекулы (атомы) приобретают индуцированный суммарный магнитный момент и становятся источниками дополнительного поля. При снятии внешнего поля диамагнетик размагничивается.

**Парамагнетики** – вещества, молекулы (атомы) которых обладают магнитными моментами в отсутствие внешнего поля. Без внешнего магнитного поля магнитные моменты отдельных молекул (атомов) ориентированы совершенно беспорядочно, благодаря чему

индукция создаваемого ими суммарного магнитного поля равна нулю. При внесении парамагнетика в магнитное поле постоянные магнитные моменты переориентируются, образуя суммарный не равный нулю магнитный момент. При снятии внешнего поля парамагнетик размагничивается.

**Ферромагнетики** – вещества, молекулы (атомы) которых обладают постоянными магнитными моментами, и в которых без внешнего магнитного поля существуют области самопроизвольной намагниченности, называемые *доменами*. При внесении ферромагнетика во внешнее магнитное поле происходит изменение размеров, формы и ориентации магнитных доменов, в результате чего нелинейно меняется его намагниченность. При снятии внешнего поля ферромагнетик может оставаться намагниченным.

**Намагничивание** – процесс приобретения телами макроскопического магнитного момента под действием внешнего магнитного поля.

**Молекулярные токи** – орбитальное и спиновое движение заряженных частиц (в основном электронов), которые входят в состав атомов (молекул). Эти токи замыкаются внутри микроскопически малых объемов и являются токами связанных зарядов.

**Токи намагничивания** – молекулярные токи, усредненные по физически бесконечно малому макроскопическому объему магнетика:

$$\mathbf{j}_m \equiv \langle \mathbf{j}_{\text{мол}} \rangle \equiv \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \mathbf{j}_{\text{мол}} dV,$$

где  $\mathbf{j}_m$  и  $\mathbf{j}_{\text{мол}}$  – объемные плотности токов намагничивания и молекулярных токов соответственно.

Физически бесконечно малый макроскопический объем в данном случае – это макроскопический объем, содержащий большое число молекул, и, в то же время, достаточно малый объем – гораздо меньший характерных линейных размеров неоднородности тока намагничивания (объема, внутри которого ток намагничивания считается постоянным).

**Токи проводимости** – макроскопически усредненные токи свободных носителей зарядов в веществе:

$$\mathbf{j} \equiv \langle \mathbf{j}_{\text{своб}} \rangle \equiv \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \mathbf{j}_{\text{своб}} dV,$$

где  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{j}_{\text{своб}}$  – объемные плотности токов проводимости и токов свободных зарядов соответственно.

**Микроскопические и макроскопические магнитные поля в веществе.**

*Микроскопическое магнитное поле* является суперпозицией поля токов свободных носителей заряда и поля, создаваемого токами связанных зарядов (молекулярными токами), в вакууме.

*Макроскопическое магнитное поле* – усредненное по физически бесконечно малому макроскопическому объему магнетика микроскопическое магнитное поле. Физически бесконечно малый макроскопический объем в данном случае – это макроскопический объем, содержащий большое число молекул, и в то же время достаточно малый объем – гораздо меньший объема, внутри которого макроскопическое поле считается постоянным.

**Индукция  $\mathbf{B}$  магнитного поля** (макроскопического) **в магнетике** равна результату усреднения магнитной индукции  $\mathbf{B}_{\text{микро}}$  микроскопического поля по физически бесконечно малому макроскопическому объему  $\Delta V$  магнетика:

$$\mathbf{B} \equiv \langle \mathbf{B}_{\text{микро}} \rangle \equiv \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \mathbf{B}_{\text{микро}} dV.$$

**Теорема Гаусса для индукции магнитного поля.**

*Интегральная форма.* Поток индукции магнитного поля  $\mathbf{B}$  через любую замкнутую поверхность  $S$  равен нулю:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (21.1)$$

*Дифференциальная форма.* В любой точке магнетика

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (21.2)$$

Из теоремы Гаусса следует *граничное условие для нормальной составляющей индукции магнитного поля*: для произвольной поверхности раздела двух магнетиков:

$$\mathbf{B}_{2n} - \mathbf{B}_{1n} = 0, \quad (21.3)$$

где  $\mathbf{B}_{1n}$  и  $\mathbf{B}_{2n}$  – нормальные составляющие индукций магнитного поля в первой и второй средах у поверхности их раздела.

**Вектор намагниченности** (*намагниченность*) – магнитный момент единицы объема магнетика, создаваемый молекулярными токами:

$$\mathbf{M} \equiv \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_{i(\Delta V)} \mathbf{p}_{m_i},$$

где  $\mathbf{p}_{m_i}$  – магнитный момент отдельной молекулы, а суммирование проводится по всем молекулам, заключенным в физически бесконечно малом объеме  $\Delta V$ .

В системе единиц измерения СИ единицей измерения намагниченности является А/м:  $[M] = \text{А/м}$ .

**Связь вектора намагниченности с поверхностными токами намагничивания:**

$$\mathbf{i}_m = [M\mathbf{n}] \text{ или } \mathbf{M}_\tau = [n\mathbf{i}_m], \quad (21.4)$$

где  $\mathbf{n}$  – нормаль к поверхности рассматриваемого элемента магнетика,  $\mathbf{i}_m$  – линейная плотность поверхностного тока намагничивания магнетика,  $\mathbf{M}_\tau$  – тангенциальная составляющая вектора намагниченности.

**Граничное условие для тангенциальной составляющей вектора намагниченности.** Для произвольной поверхности раздела двух магнетиков:

$$\mathbf{M}_{2\tau} - \mathbf{M}_{1\tau} = -[n\mathbf{i}_m], \quad (21.5)$$

где  $\mathbf{M}_{1\tau}$  и  $\mathbf{M}_{2\tau}$  – тангенциальные составляющие векторов намагниченности первой и второй сред у поверхности их раздела,  $\mathbf{n}$  – нормаль к поверхности раздела двух сред, направленная от первой среды ко второй.

**Теорема о циркуляции для вектора намагниченности.**

*Интегральная форма.* Для любого замкнутого контура  $L$ :

$$\oint_L \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = I_m, \quad (21.6)$$

где  $I_m$  – сила объемного тока намагничивания, пронизывающего контур  $L$  (протекающего через любую поверхность, ограниченную контуром  $L$ ).

*Дифференциальная форма.* В любой точке магнетика

$$\text{rot } \mathbf{M} = \mathbf{j}_m, \quad (21.7)$$

где  $\mathbf{j}_m$  – объемная плотность тока намагничивания.

По определению **напряженность магнитного поля** равна:

$$\mathbf{H} \equiv \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}. \quad (21.8)$$

В системе единиц СИ размерность напряженности магнитного

поля  $[H] = A/m$  совпадает с размерностью намагниченности.

**Теорема о циркуляции для напряженности магнитного поля.**

*Интегральная форма.* Для любого замкнутого контура:

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I, \quad (21.9)$$

где  $I$  – сила объемного тока проводимости, пронизывающего контур  $L$  (протекающего через любую поверхность, ограниченную контуром  $L$ ).

*Дифференциальная форма.* В любой точке магнетика

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad (21.10)$$

где  $\mathbf{j}$  – объемная плотность тока проводимости.

**Граничное условие для тангенциальной составляющей напряженности магнитного поля.** Для произвольной поверхности раздела двух магнетиков:

$$\mathbf{H}_{2\tau} - \mathbf{H}_{1\tau} = -[n\mathbf{i}], \quad (21.11)$$

где  $\mathbf{H}_{1\tau}$  и  $\mathbf{H}_{2\tau}$  – тангенциальные составляющие напряженности магнитного поля в первой и второй средах у поверхности их раздела,  $\mathbf{n}$  – нормаль к поверхности раздела двух сред, направленная от первой среды ко второй,  $\mathbf{i}$  – линейная плотность поверхностного тока проводимости.

Если поверхностных токов проводимости нет, то тангенциальная компонента поля  $\mathbf{H}$  сохраняется:

$$\mathbf{H}_{2\tau} - \mathbf{H}_{1\tau} = 0. \quad (21.12)$$

**Граничное условие для тангенциальной составляющей индукции магнитного поля.** Для произвольной поверхности раздела двух магнетиков:

$$\mathbf{B}_{2\tau} - \mathbf{B}_{1\tau} = -\mu_0[n\mathbf{i} + \mathbf{i}_m], \quad (21.13)$$

где  $\mathbf{B}_{1\tau}$  и  $\mathbf{B}_{2\tau}$  – тангенциальные составляющие индукции магнитного поля в первой и второй средах у поверхности их раздела,  $\mathbf{n}$  – нормаль к поверхности раздела двух сред, направленная от первой среды ко второй.

**Материальные уравнения для магнитного поля, магнитные восприимчивость и проницаемость.**

Для линейных (слабомагнитных диа- и парамагнетиков) изотропных магнетиков

$$\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}, \quad (21.14)$$

где  $\chi$  – **магнитная восприимчивость вещества** магнетика, зависящая от свойств вещества (плотности, температуры, химического состава и т.д.), но не зависящая от напряженности магнитного поля. В этом случае магнитная индукция поля равна:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(1 + \chi)\mathbf{H} \equiv \mu_0\mu\mathbf{H}. \quad (21.15)$$

Здесь

$$\mu = (1 + \chi) \quad (21.16)$$

– **магнитная проницаемость вещества** магнетика.

Для диамагнетиков  $0 < \mu < 1$  ( $\chi < 0$ ), для парамагнетиков  $\mu > 1$  ( $\chi > 0$ ), и можно считать, что  $\chi$  и  $\mu$  постоянны ( $\mu$  мало отличается от единицы). В ферромагнетиках зависимости  $\mathbf{M}(\mathbf{H})$  и  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$  нелинейные и обладают гистерезисом (т.е.  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{B}$  зависят не только от  $\mathbf{H}$ , но и от предыстории намагничивания). В связи с этим магнитная проницаемость ферромагнетиков, если ее определить формально по формуле (21.15) как  $\mu = \frac{\mathbf{B}(\mathbf{H})}{\mu_0\mathbf{H}}$ , не будет константой, а

также является нелинейной гистерезисной функцией  $\mu(H)$  и может меняться в широких пределах: от  $10^3$ – $10^5$  в малых полях до  $\mu \rightarrow 1$  в сильных.

**Закон преломления линий индукции и напряженности магнитного поля.** На произвольной границе раздела двух непроводящих линейных изотропных магнетиков линии индукции и напряженности магнитного поля изменяют направление (см. рис. 21.1)), причем:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

**Взаимосвязь токов проводимости и намагничивания в линейном, однородном и изотропном непроводящем магнетике.**

Для любого замкнутого контура, расположенного внутри одного линейного, однородного и изотропного магнетика (контур не пересекает границу раздела двух сред):

$$I_m = (\mu - 1)I, \quad (21.17)$$

где  $I$  и  $I_m$  – токи проводимости и намагничивания, охватываемые замкнутым контуром.

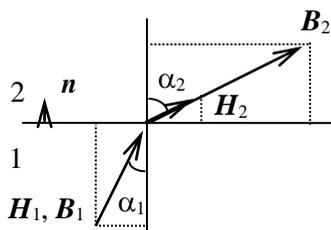


Рис. 21.1. Преломление линий индукции и напряженности магнитного поля на границе раздела двух диэлектриков.

В произвольной точке линейного, однородного и изотропного магнетика:

$$\mathbf{j}_m = (\mu - 1)\mathbf{j}, \quad (21.18)$$

где  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{j}_m$  – объемные плотности токов проводимости и намагничивания.

Если одна линейная, однородная и изотропная магнитная среда охватывает ленточные токи проводимости с двух сторон, то:

$$\mathbf{i}_m = (\mu - 1)\mathbf{i}, \quad (21.19)$$

где  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{i}_m$  – поверхностные плотности токов проводимости и намагничивания.

При заполнении всего пространства между поверхностями, образованными линиями индукции магнитного поля, линейным, однородным и изотропным магнетиком с магнитной проницаемостью  $\mu$  индукция магнитного поля в этом пространстве изменяется в  $\mu$  раз, а напряженность поля остается той же. В рассматриваемом случае напряженность магнитного поля определяется только токами проводимости.

**Магнитное поле в линейном, однородном и изотропном магнетике, заполняющем часть пространства с магнитным полем.**

При заполнении всего пространства между поверхностями, образованными линиями индукции магнитного поля, линейным, однородным и изотропным магнетиком с магнитной проницаемостью  $\mu$  индукция магнитного поля в этом пространстве изменяется в  $\mu$  раз, а напряженность поля остается той же. В рассматриваемом случае напряженность магнитного поля определяется только токами проводимости.

#### **Метод молекулярных токов.**

В данном методе поле с магнитной индукцией  $\mathbf{B}_m(\mathbf{r})$ , создаваемое намагниченным веществом с вектором намагниченности  $\mathbf{M}$ , описывается как поле, создаваемое токами намагничивания с объемной плотностью  $\mathbf{j}_m(\mathbf{r})$  в вакууме, причем

$$\mathbf{j}_m = \text{rot}\mathbf{M}.$$

При этом полный вектор магнитной индукции  $\mathbf{B}$  определяется эффективной плотностью тока  $\mathbf{j}_\Sigma$ , равной сумме плотностей токов проводимости и токов намагничивания:

$$\mathbf{j}_\Sigma = \mathbf{j} + \mathbf{j}_m.$$

Интегральное и дифференциальное уравнения (21.9) и (21.10) в

этом случае можно записать в виде

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{j}_\Sigma d\mathbf{S} = \mu_0 I_\Sigma, \quad (21.20)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_\Sigma, \quad (21.21)$$

где  $I_\Sigma = I + I_m$  – величина эффективного тока через поверхность  $S$ , опирающуюся на контур  $L$ .

В линейных однородных изотропных магнетиках плотность токов намагничивания пропорциональна плотности токов проводимости:

$$\mathbf{j}_m = \text{rot } \mathbf{M} = \chi \text{rot } \mathbf{H} = \chi \mathbf{j}. \quad (21.22)$$

В областях, где токов проводимости нет ( $\mathbf{j} = 0$ ), объемные токи намагничивания также отсутствуют, но поверхностные токи намагничивания могут присутствовать на границах раздела сред, если на них имеется скачок тангенциальной составляющей вектора  $\mathbf{M}$ . Граничное условие для тангенциальной составляющей вектора намагниченности имеет вид (21.5):

$$\mathbf{M}_{2\tau} - \mathbf{M}_{1\tau} = -[\mathbf{n} \mathbf{i}_m].$$

## 21.2. Основные типы задач (классификация)

21.1. Расчет потока вектора напряженности  $\mathbf{H}$ , циркуляции вектора индукции  $\mathbf{B}$ , характеристик магнитного поля и намагниченности при наличии границы раздела магнитных сред.

21.2. Нахождение характеристик магнитного поля, создаваемого токами проводимости в магнитной среде с линейной магнитной восприимчивостью.

## 21.3. Методы решения и примеры решения задач

### Задачи типа 21.1

*Расчет потока вектора напряженности  $\mathbf{H}$ , циркуляции вектора индукции  $\mathbf{B}$ , характеристик магнитного поля и намагниченности при наличии границы раздела магнитных сред.*

**Метод решения.** Использование граничных условий (21.5), (21.11) – (21.13).

**Задача 24.3.1.** Индукция магнитного поля в воздухе вблизи плоской поверхности изотропного магнетика, имеющего магнитную проницаемость  $\mu$ , равна  $\mathbf{B}_0$ , причем вектор индукции

перпендикулярен поверхности магнетика. Найти поток  $\Phi_H$  вектора напряженности  $\mathbf{H}$  через воображаемую цилиндрическую поверхность с образующими, перпендикулярными поверхности магнетика, и основаниями площади  $S$ . Нижнее основание цилиндра находится в магнетике, а верхнее – в воздухе (см. рис. 21.2). Магнитная проницаемость воздуха равна  $\mu_B$ .

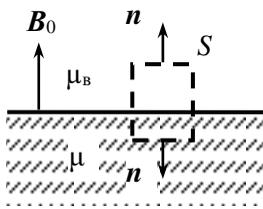


Рис. 21.2. К расчету потока вектора напряженности магнитного поля.

### Решение

Сечение воображаемой цилиндрической поверхности плоскостью рисунка показано на рис. 21.2 штриховой линией. Так как индукция внешнего магнитного поля  $\mathbf{B}_0$  направлена по нормали к поверхности магнетика, то, согласно граничным условиям для нормальных компонент векторов индукции  $\mathbf{B}$  ( $B_{1n} = B_{2n}$ ), в магнетике она будет везде иметь такое же значение  $\mathbf{B}_0$ . Учитывая материальное уравнение  $\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}$ , находим модули напряженности на основаниях воображаемого цилиндра:

$$H_1 = \frac{B_0}{\mu_0\mu}, \quad H_0 = \frac{B_0}{\mu_0\mu_B},$$

где  $H_1$  – напряженность поля в магнетике, а  $H_0$  – в воздухе.

Так как напряженность магнитного поля параллельна образующим цилиндра, то поток вектора  $\mathbf{H}$  через его боковую поверхность равен нулю. Поток  $\Phi_{H_0}$  через верхнее основание цилиндра, находящееся в воздухе, равен:

$$\Phi_{H_0} = \int_S \mathbf{H}_0 \cdot d\mathbf{S} = \frac{B_0}{\mu_0\mu_B} S. \quad (21.23)$$

При вычислении потока  $\Phi_{H_1}$  вектора  $\mathbf{H}_1$  через нижнее основание цилиндра следует учесть, что вектор  $\mathbf{H}_1$  и нормаль к площади основания направлены противоположно, т.е. угол между ними равен  $\pi$ . Тогда получим:

$$\Phi_{H_1} = \int_S \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{S} = -\frac{B_0 S}{\mu_0\mu}. \quad (21.24)$$

Полный поток вектора  $\mathbf{H}$  через поверхность цилиндра с учетом (21.23) и (21.24) составит:

$$\Phi_H = \frac{B_0 S}{\mu_0} \left( \frac{1}{\mu_B} - \frac{1}{\mu} \right).$$

*Замечание.* Поток вектора  $\mathbf{H}$  через исследуемую поверхность не равен нулю, в отличие от потока вектора  $\mathbf{B}$  через ту же поверхность. Однако для диа- и парамагнетиков величина  $\Phi_H$  невелика. Так, используя для воздуха известное значение  $\mu_B - 1 = 0,38 \cdot 10^{-6}$ , для такого парамагнетика, как Pt ( $\mu - 1 = 360 \cdot 10^{-6}$ ), получим:

$$\Phi_H \approx \frac{B_0 S}{\mu_0} \cdot 3,6 \cdot 10^{-4}.$$

**Ответ:** 
$$\Phi_H = \frac{B_0 S}{\mu_0} \left( \frac{1}{\mu_B} - \frac{1}{\mu} \right).$$

**Задача 24.3.2.** Бесконечный плоский слой парамагнетика с магнитной проницаемостью  $\mu$  граничит с вакуумом. Вектор намагниченности  $\mathbf{M}$  образует угол  $\alpha$  с нормалью к поверхности (рис. 21.3). Найти величину и направление вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}_2$  у поверхности магнетика в вакууме.

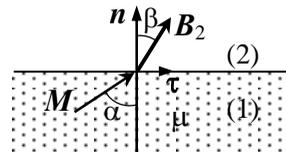


Рис. 21.3. Направление векторов магнитной индукции и намагниченности на границе магнетика с вакуумом.

### Решение

Параметры магнитных полей внутри и вне магнетика будем обозначать индексами 1 и 2 соответственно. Поскольку токов проводимости нет, граничные условия (21.13) и (21.11) имеют вид:

$$B_{1n} = B_{2n},$$

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}.$$

Выразим напряженность и индукцию магнитного поля внутри магнетика через заданный вектор намагниченности, используя материальные уравнения (21.14), (21.15):

$$\mathbf{H}_1 = \frac{\mathbf{M}}{\chi} = \frac{\mathbf{M}}{\mu - 1},$$

$$\mathbf{B}_1 = \mu_0 \mu \mathbf{H}_1 = \mu_0 \frac{\mu}{\mu - 1} \mathbf{M}.$$

Подставляя эти соотношения в граничные условия и учитывая, что  $\mathbf{H}_2 = \mathbf{B}_2 / \mu_0$ , получим:

$$B_{2n} = \frac{\mu}{\mu - 1} \mu_0 M \cos \alpha, \quad \frac{B_{2\tau}}{\mu_0} = \frac{M \sin \alpha}{\mu - 1},$$

откуда находим модуль вектора индукции:

$$B_2 = \frac{\mu_0 M}{\mu - 1} \sqrt{(\mu \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha} = \frac{\mu_0 M}{\mu - 1} \sqrt{(\mu^2 - 1) \cos^2 \alpha + 1}.$$

Ориентация вектора  $\mathbf{B}_2$  определяется углом  $\beta$ :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{B_{2\tau}}{B_{2n}} = \frac{1}{\mu} \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\text{Ответ: } B_2 = \frac{\mu_0 M}{\mu - 1} \sqrt{(\mu^2 - 1) \cos^2 \alpha + 1}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{B_{2\tau}}{B_{2n}} = \frac{1}{\mu} \operatorname{tg} \alpha.$$

### Задачи типа 21.2.

*Нахождение характеристик магнитного поля, создаваемого токами проводимости в магнитных средах с линейной восприимчивостью.*

#### Метод решения

а) *Пространственные токи в проводящей линейной изотропной магнитной среде* ( $\mu = \text{const}$ ). В этом случае плотность объемных токов намагничивания  $\mathbf{j}_m(\mathbf{r})$  пропорциональна плотности токов проводимости  $\mathbf{j}_m = \chi \mathbf{j}$  (21.22). Сумма этих токов приводит к эффективной плотности тока  $\mathbf{j}_\Sigma$ , которая в  $\mu$  раз больше плотности тока проводимости:

$$\mathbf{j}_\Sigma = \mathbf{j} + \mathbf{j}_m = (1 + \chi) \mathbf{j} = \mu \mathbf{j}. \quad (21.23)$$

В силу линейности уравнения (21.21) индукция магнитного поля  $\mathbf{B}$  в такой среде будет в  $\mu$  раз больше индукции  $\mathbf{B}_0$ , которая создавалась бы этими же токами проводимости в вакууме:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{B}_0 = \mu \mu_0 \mathbf{H}_0. \quad (21.24)$$

б) *Линейные токи в магнитной непроводящей среде.* При протекании тока проводимости  $I$  по тонкому линейному проводнику объемные токи намагничивания в окружающей непроводящей среде отсутствуют, так как в ней  $\mathbf{j} = 0$ . Но на границе среды с проводником возникает продольный поверхностный ток намагничивания, который в соответствии с (21.5) равен по величине намагниченности среды на границе с проводом:  $i_m' = M$ . Полный ток намагничивания вдоль линейного проводника равен

$$I_m = \chi I \quad (21.25)$$

(более подробно см. ниже **задачу 21.3.5**).

Ввиду подразумеваемой тонкости линейных проводников тока  $I$  и  $I_m$  можно считать пространственно совпадающими, поэтому влияние магнитной среды на поле вне проводника эквивалентно увеличению тока в проводнике в  $\mu$  раз:

$$I_{\Sigma} = I + I_m = (1 + \chi)I = \mu I .$$

Поэтому и в этом случае индукция магнитного поля  $\mathbf{B}$  снаружи проводников также увеличится в  $\mu$  раз по сравнению с индукцией  $\mathbf{B}_0$  поля этих линейных токов в вакууме.

Если же и провод сделан из магнетика, то его собственная намагниченность не влияет на индукцию вне провода, поскольку полный ток намагничивания через поперечное сечение самого проводника (объемный ток плюс поверхностный) всегда равен нулю (подробнее см. **задачу 21.3.4**).

Важно отметить, что все вышесказанное справедливо только в случае, если однородный магнетик бесконечен, или же занимает область, границы которой совпадают с линиями исходного поля с индукцией  $\mathbf{B}_0$  или линиями совпадающего с ним поля напряженности  $\mathbf{H}_0$ , какими они были бы в отсутствие магнитной среды (в вакууме). То же относится к случаю, когда среда неоднородна (т.е. проницаемость  $\mu = \mu(\mathbf{r})$  зависит от координат), но линии напряженности  $\mathbf{H}_0$  совпадают с поверхностями постоянства  $\mu$ . В этих случаях везде  $\operatorname{div} \mathbf{M} = 0$ , напряженность поля  $\mathbf{H}$  в магнетике определяется только токами проводимости и будет такой же, как в вакууме.

Поэтому решение для таких задач целесообразно начинать с нахождения напряженности поля  $\mathbf{H}$ , используя формулы для расчета магнитных полей от токов в вакууме, убрав из них множитель  $\mu_0$ . Затем, зная  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  можно найти по формулам (21.14) и (21.15) соответственно. Благодаря магнетизму индукция  $\mathbf{B}$  возрастет в  $\mu$  раз, а вместе с ней также возрастут в  $\mu$  раз и магнитные потоки через контуры и, соответственно, величины их коэффициентов самоиндукции и взаимной индукции.

Если же линии напряженности  $\mathbf{H}_0$  не параллельны границам магнетика или поверхностям постоянства  $\mu$ , нахождение магнитного поля требует точного решения краевой задачи. В некоторых случаях, когда можно достаточно просто найти распределение токов намагничивания по границам магнетика, задача допускает и элементарное решение (см. **задачу 21.3.6**).

**Задача 21.3.3.** По проводящей бесконечной плоскости течет постоянный ток поверхностной плотности  $i$  (рис. 21.4). С одной стороны к плоскости прилегает бесконечная пластина конечной толщины из материала с магнитной проницаемостью  $\mu$ . Найти во всем пространстве магнитную индукцию  $\mathbf{B}$ , напряженность  $\mathbf{H}$ , намагниченность  $\mathbf{M}$  и токи намагничивания.

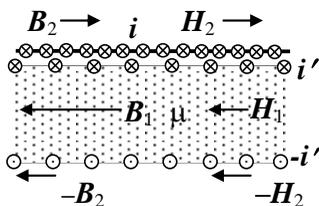


Рис. 21.4. К расчету параметров магнитного поля в пластине магнетика, прилегающей к плоскости с током.

### Решение

Пусть ток проводимости течет по направлению от нас в плоскость рисунка. В отсутствие магнетика векторы индукции в силу симметрии были бы равны по модулю, параллельны плоскости и противоположно направлены по ее разным сторонам ( $\mathbf{B}_2$  и  $-\mathbf{B}_2$  на рис. 21.4). Модуль индукции  $B_2$  может быть найден по теореме о циркуляции вектора индукции магнитного поля (см. задачу 16.3.1 главы 16), он равен:

$$B_2 = \mu_0 i / 2,$$

при этом модуль напряженности магнитного поля

$$H_2 = \frac{B_2}{\mu_0} = \frac{1}{2} i.$$

Поскольку полный ток намагничивания через поперечное сечение пластины равен нулю, то добавление пластины магнетика не меняет индукции магнитного поля *снаружи* от нее. В этих наружных областях векторы индукции равны по модулю, параллельны плоскости и противоположно направлены по ее разным сторонам.

Внутри магнитного слоя из-за сохранения тангенциальной компоненты вектора  $\mathbf{H}$  на границе раздела сред  $H_1 = H_2$ , а индукция в магнетике равна

$$B_1 = \mu_0 \mu H_1 = \frac{1}{2} \mu_0 \mu i.$$

Направления векторов индукции и напряженности магнитного поля и токов показаны на рис. 21.4.

Намагниченность магнетика  $\mathbf{M}$  выражается через напряженность поля в нем на основе материального уравнения:

$$M = (\mu - 1)H_1 = \frac{1}{2}(\mu - 1)i.$$

Поскольку намагниченность однородна, объемные токи намагничивания отсутствуют, и имеются только поверхностные токи намагничивания, противоположно направленные на верхней и нижней поверхностях. Их поверхностная плотность  $i_m$  равна:

$$i_m = M = \frac{1}{2}(\mu - 1)i.$$

**Ответ:**

$$\text{внутри пластины } B_1 = \frac{1}{2}\mu_0\mu i, \quad H_1 = \frac{1}{2}i, \quad M = i_m = \frac{1}{2}(\mu - 1)i;$$

$$\text{снаружи пластины } B_2 = \frac{1}{2}\mu_0 i; \quad H_2 = \frac{1}{2}i.$$

**Задача 21.3.4.** Прямой бесконечно длинный немагнитный провод радиуса  $a$ , по которому течет ток  $I$ , находится в непроводящей бесконечной однородной среде с магнитной проницаемостью  $\mu$ . Найти магнитную индукцию  $B(r)$ , напряженность поля  $H(r)$ , намагниченность  $M(r)$  в среде и ток намагничивания  $I_m(r)$  у поверхности провода.

### Решение

В силу осевой симметрии системы линии векторов  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$  являются окружностями, на которых их модули  $H$  и  $B$  постоянны (рис. 21.5). Записывая теорему о циркуляции вектора  $\mathbf{H}$  для контура радиуса  $r$ , получаем:

$$H(r) = \frac{I}{2\pi r}.$$

Ввиду магнитной однородности среды индукция поля  $B$  связана с напряженностью  $H$  материальным уравнением:

$$B(r) = \mu\mu_0 H(r) = \mu\mu_0 \frac{I}{2\pi r}.$$

Намагниченность среды выразится формулой:

$$M(r) = \chi H(r) = (\mu - 1)H(r) = (\mu - 1) \frac{I}{2\pi r}.$$

Здесь  $\chi$  – магнитная восприимчивость магнетика, которая связана с

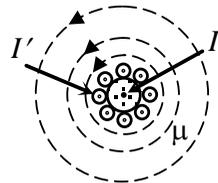


Рис. 21.5. К расчету параметров магнитного поля прямого немагнитного провода с током, находящегося в магнитной среде.

магнитной проницаемостью соотношением:  $\chi = \mu - 1$ .

Из-за однородности среды объемные токи намагничивания отсутствуют, но имеется поверхностный ток намагничивания на границе провода и среды. Его поверхностная плотность равна:

$$i_m = M(a) = (\mu - 1) \frac{I}{2\pi a},$$

где  $a$  – радиус провода.

Направление вектора поверхностной плотности тока  $i_m$  при  $\mu > 1$  совпадает с направлением тока в проводе. Полный поверхностный ток намагничивания составляет:

$$I_m = i_m \cdot 2\pi a = (\mu - 1)I.$$

Таким образом, влияние намагничиваемой среды на магнитное поле учитывается током намагничивания, который добавляется к току проводимости, текущему по проводнику. Магнитная индукция вне провода определяется величиной эффективного полного тока  $I_\Sigma = I + I_m = \mu I$ :

$$B(r) = \mu_0 \frac{I_\Sigma}{2\pi r} = \mu\mu_0 \frac{I}{2\pi r}.$$

$$\text{Ответ: } B(r) = \mu\mu_0 \frac{I}{2\pi r}, \quad H(r) = \frac{I}{2\pi r}, \quad M(r) = (\mu - 1) \frac{I}{2\pi r},$$

$$I_m = (\mu - 1)I.$$

**Задача 21.3.5.** Бесконечный прямолинейный однородный провод радиуса  $a$ , сделанный из материала с магнитной проницаемостью  $\mu_1$ , находится в непроводящей бесконечной однородной среде с магнитной проницаемостью  $\mu_2$ . По проводу течет постоянный ток  $I$ . Найти напряженность поля  $H(r)$ , магнитную индукцию  $B(r)$ , намагниченность  $M(r)$ , объемную  $j_m(r)$  и поверхностную  $i_m$  плотность токов намагничивания внутри провода и снаружи.

### Решение

В силу осевой симметрии системы линии векторов  $H$ ,  $B$  и  $M$  являются окружностями, на которых модули  $H$ ,  $B$  и  $M$  постоянны (рис. 21.6). Будем обозначать параметры внутри провода индексом 1, вне его – 2.

Область  $r \geq a$ . Решение для  $H(r)$ ,  $B(r)$  и  $M(r)$  в наружной области разобрано в предыдущей задаче, в полученных ответах нужно только поставить индекс 2.

Область  $r < a$ . Записывая теорему о циркуляции вектора  $\mathbf{H}$  для окружности радиуса  $r$ , получаем:

$$2\pi r H_1(r) = I(r) = I \frac{r^2}{a^2},$$

откуда находим:

$$H_1(r) = \frac{I}{2\pi a^2} r,$$

где  $I(r)$  обозначает ток, протекающий через круг радиуса  $r$ .

В результате определяем индукцию магнитного поля:

$$B_1(r) = \mu_0 \mu_1 H_1(r) = \mu_0 \mu_1 \frac{I}{2\pi a^2} r$$

и намагниченность среды:

$$M_1(r) = (\mu_1 - 1)H_1(r) = (\mu_1 - 1) \frac{I}{2\pi a^2} r.$$

Картина линий для векторов  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$  и качественный график их зависимости от  $r$  показаны на рис. 21.5 для случая  $\mu_1 > \mu_2$ .

Ввиду магнитной однородности материала провода плотность токов намагничивания (21.24) внутри него, согласно (21.25), равна:

$$j_{\text{ml}} = (\mu_1 - 1)j,$$

где  $j = \frac{I}{\pi a^2}$  – плотность токов проводимости.

Полная поверхностная плотность тока намагничивания на границе провод – среда составляет:

$$i_m = M_2(a) - M_1(a) = (\mu_2 - 1) \frac{I}{2\pi a} - (\mu_1 - 1) \frac{I}{2\pi a} = \frac{I}{2\pi a} (\mu_2 - \mu_1).$$

*Замечание.* Полный поверхностный ток намагничивания можно представить в виде суммы вкладов  $I_{m2\text{пов}}$  и  $I_{m1\text{пов}}$  соответственно от внешней и внутренней приграничной намагниченности:

$$I_m = 2\pi a i_m = I(\mu_2 - \mu_1) = (\mu_2 - 1)I - (\mu_1 - 1)I = I_{2\text{пов}} + I_{1\text{пов}}.$$

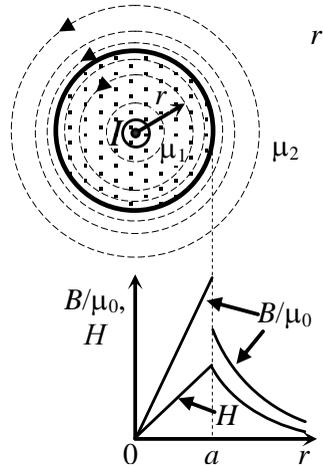


Рис. 21.6. К расчету магнитного поля, создаваемого бесконечным магнитным проводом в магнитной среде. Штриховые линии – линии напряженности поля  $\mathbf{H}$ .

Таким образом, поверхностный ток намагничивания, обусловленный намагниченностью материала провода, равен:

$$I_{\text{млпов}} = -(\mu_1 - 1)I.$$

Полный же объемный ток намагничивания в проводе

$$I_{\text{млоб}} = \pi a^2 j_m = (\mu_1 - 1)I.$$

Итак,  $I_{\text{млпов}} + I_{\text{млоб}} = 0$ .

Это – следствие общего положения, согласно которому ток намагничивания через площадь любого сечения намагниченного тела равен нулю. Поэтому суммарный ток намагничивания, существенный для расчета поля вне провода, равен  $I_m = (\mu_2 - 1)I$ , то есть определяется только внешней средой и не зависит от магнитной проницаемости самого провода.

$$\text{Ответ: } \underline{r < a:} \quad H_1(r) = \frac{I}{2\pi a^2} r, \quad B_1(r) = \mu_0 \mu_1 \frac{I}{2\pi a^2} r,$$

$$M_1(r) = (\mu_1 - 1) \frac{I}{2\pi a^2} r; \quad j_{m1} = (\mu_1 - 1) \cdot \frac{I}{\pi a^2};$$

$$\underline{r \geq a:} \quad H_2(r) = \frac{I}{2\pi r}, \quad B_2(r) = \mu_2 \mu_0 \frac{I}{2\pi r},$$

$$M_2(r) = (\mu_2 - 1) \frac{I}{2\pi r}; \quad j_m = 0;$$

$$\underline{r = a:} \quad i_m = \frac{I}{2\pi a} (\mu_2 - \mu_1).$$

**Задача 21.3.6.** Прямой тонкий бесконечно длинный провод малого радиуса  $a$ , по которому течет ток  $I$ , лежит на поверхности плоского непроводящего однородного магнетика с магнитной проницаемостью  $\mu$ , занимающего половину пространства (рис. 21.7а). Найти намагиченность  $M$ , магнитную индукцию  $B$ , напряженность  $H$  и токи намагничивания во всем пространстве.

### Решение

В силу однородности среды и отсутствия в ней токов проводимости объемные токи намагничивания отсутствуют. Рассмотрим распределение поверхностных токов намагничивания.

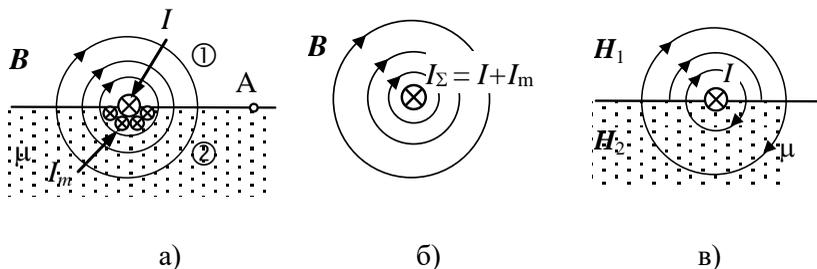


Рис. 21.7. К нахождению характеристик магнитного поля от провода с током  $I$ , находящегося на границе плоского магнетика: а) распределение тока намагничивания  $I_m$  и линии магнитной индукции  $B$ ; б) эквивалентная задача о магнитном поле прямого тока в вакууме; в) линии напряженности  $H$  магнитного поля.

Возьмем произвольный участок поверхности, не прилегающий к проводу (окрестность точки А на рис. 21.7а). Протекающий по нему поверхностный ток намагничивания  $i_m$  создал бы у поверхности этого участка только тангенциальные компоненты индукции  $B_{\tau 1, \tau 2} = \pm \frac{1}{2} \mu_0 i_m$ . Токи намагничивания, текущие на всей остальной поверхности магнетика, и ток проводимости, текущий по проводу, в окрестности точки А могут создать только нормальные компоненты поля  $B$ .

На поверхности магнетика токов проводимости нет, поэтому тангенциальные компоненты напряженности поля  $H$  на границе должны быть непрерывны. Учитывая, что  $H_1 = \frac{B_1}{\mu_0}$  и  $H_2 = \frac{B_2}{\mu \mu_0}$ ,

это граничное условие дает:

$$\frac{1}{2} i_m = -\frac{1}{2\mu} i_m,$$

откуда следует, что  $i_m = 0$ , то есть поверхностные токи намагничивания на плоской границе отсутствуют.

На границе самого провода с магнитной средой ( $r = a$ ) имеется скачок тангенциальной компоненты намагниченности, вызывающий ток намагничивания с поверхностной плотностью  $i_m = M(a)$  и полной величины  $I_m = i_m \cdot \pi a$ , который добавляется к току проводимости  $I$ , образуя с ним суммарный эффективный линейный ток величины

$$I_\Sigma = I + I_m.$$

Ввиду тонкости провода эффективный ток также можно считать линейным. Поэтому, заменяя поле, создаваемое магнитной средой, полем токов намагничивания, приходим к задаче о находящемся в вакууме прямом тонком бесконечном проводе с эффективным током  $I_\Sigma$  (рис. 21.7б). Линии магнитной индукции  $\mathbf{B}$  будут окружностями, а модуль индукции  $B$  в зависимости от расстояния до провода  $r$  определяется следующим образом:

$$B_1(r) = B_2(r) = B(r) = \mu_0 \frac{I_\Sigma}{2\pi r}.$$

Учитывая материальные уравнения  $\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}$  и  $\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}$ , заключаем, что линии напряженности  $\mathbf{H}$  и намагниченности  $\mathbf{M}$  также будут окружностями.

Так как эффективный ток  $I_\Sigma$  пока не известен, для нахождения величин  $B(r)$  и  $H(r)$  запишем теорему о циркуляции вектора  $\mathbf{H}$ , выбрав в качестве контура окружность радиуса  $r$ :

$$\pi r H_1 + \pi r H_2 = I.$$

Подставляя  $H_1 = \frac{B}{\mu_0}$  и  $H_2 = \frac{B}{\mu\mu_0}$ , получаем:

$$\pi r \left( \frac{B}{\mu_0} + \frac{B}{\mu_0\mu} \right) = I,$$

откуда следует, что индукция магнитного поля равна:

$$B(r) = \mu_0 \frac{\mu}{\mu + 1} \cdot \frac{I}{\pi r}.$$

Используя связь векторов индукции  $\mathbf{B}$  и напряженности  $\mathbf{H}$ , получаем значения напряженности магнитных полей в воздухе и в магнетике:

$$H_1(r) = \frac{\mu}{\mu + 1} \cdot \frac{I}{\pi r},$$

$$H_2(r) = \frac{1}{\mu + 1} \cdot \frac{I}{\pi r}.$$

Линии напряженности  $\mathbf{H}$  магнитного поля показаны на рис. 21.7в.

Затем находим намагниченность магнетика, исходя из её связи с напряженностью магнитного поля:

$$M(r) = (\mu - 1)H_2 = \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \cdot \frac{I}{\pi r}.$$

Плотность токов намагничивания в магнетике на границе с проводом получим, применяя формулу  $i_m = M_{2\tau} - M_{1\tau}$ , где  $M_{1\tau}$  и  $M_{2\tau}$  – тангенциальные компоненты намагниченности в магнетике и проводе, причем  $M_{1\tau} = 0$ . Тогда

$$i_m = M(a) = \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \cdot \frac{I}{\pi a},$$

где  $a$  – радиус провода.

Полный ток намагничивания на границе провода с магнетиком, представляющей в сечении полуокружность длины  $\pi a$ , равен:

$$I_m = \pi a \cdot i_m(a) = \pi a \cdot M(a) = I \cdot \frac{\mu - 1}{\mu + 1}.$$

*Замечание.* Векторное поле напряженности  $\mathbf{H}$  не является чисто вихревым, и его линии терпят разрыв на границе магнетика.

$$\text{Ответ: } M(r) = \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \cdot \frac{I}{\pi r}, \quad B(r) = \mu_0 \frac{\mu}{\mu + 1} \cdot \frac{I}{\pi r},$$

$$H_1(r) = \frac{\mu}{\mu + 1} \cdot \frac{I}{\pi r}, \quad H_2(r) = \frac{1}{\mu + 1} \cdot \frac{I}{\pi r}, \quad I_m = I \frac{\mu - 1}{\mu + 1}.$$

**Задача 21.3.7.** Длинный по сравнению со своим радиусом соленоид заполнен неоднородным парамагнетиком с восприимчивостью, зависящей от расстояния  $r$  до оси соленоида по закону  $\chi(r) = ar^2$ , где  $a = \text{const}$ . На оси соленоида индукция магнитного поля равна  $B_0$ . Найти намагниченность  $M(r)$ , магнитную индукцию  $B(r)$  и плотность объемных  $j_m(r)$  и поверхностных  $i_m$  токов намагничивания внутри соленоида. Краевыми эффектами пренебречь.

### Решение

Введем систему декартовых координат  $XYZ$  с осью  $Z$ , совпадающей с осью соленоида (см. рис. 21.8). В вакууме в соленоиде с длиной, много большей его радиуса, линии напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}_0$  параллельны его оси, а значит, и величина напряженности  $\mathbf{H}_0$  в соленоиде везде одинакова (кроме области вблизи его торцов). Поскольку линии напряженности  $\mathbf{H}_0$  параллельны поверхностям постоянства величины  $\mu(r) = \text{const}$ , напряженность поля  $\mathbf{H}$  при введении магнетика останется без изменения, и в данном случае определяется своим заданным по условию значением в центре:

$$H = H_z = \frac{B_0}{\mu\mu_0} = \frac{B_0}{\mu_0},$$

так как в центре  $\mu(0) = 1$ .

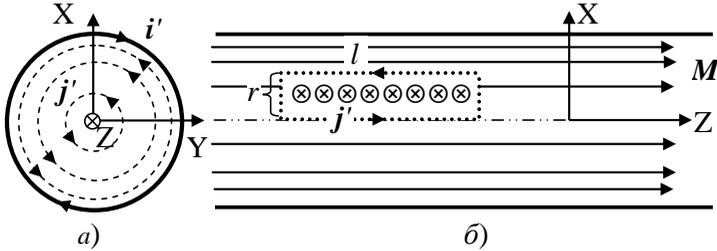


Рис. 21.8. К расчету магнитного поля соленоида, заполненного неоднородным магнетиком:

а) линии объемных ( $j'$ ) и поверхностных ( $i'$ ) токов намагничивания (вид с торца соленоида);

б) линии намагниченности  $M$  в центральном осевом сечении соленоида.

Исходя из известного значения  $H$ , используя формулы (21.14) и (21.15), получаем:

$$M(r) = M_z(r) = \chi(r)H = ar^2 H = ar^2 \frac{B_0}{\mu_0},$$

$$B(r) = \mu_0(1 + \chi)H = (1 + ar^2)B_0.$$

Чтобы найти токи намагничивания, можно воспользоваться интегральным уравнением, выражающим циркуляцию вектора  $M$  по замкнутому контуру:

$$I_m = \int_S \mathbf{j}_m \cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l}.$$

В силу осевой симметрии задачи линии токов намагничивания  $j_m$  являются окружностями, лежащими в перпендикулярных сечениях соленоида (рис. 21.8а). Рассмотрим в плоскости XZ прямоугольный контур длиной  $l$  и высотой  $r$ , одна сторона которого совпадает с осевой линией ( $r=0$ ) (пунктир на рис. 21.8б). Выберем направление обхода так, чтобы положительная нормаль к контуру совпадала с направлением орта  $e_\varphi$  цилиндрической системы координат. Так как на оси соленоида  $M(0) = ar^2 H = 0$ , то циркуляция вектора  $M$  по данному контуру равна:

$$\{M(0) - M(r)\}l = -ar^2 l \frac{B_0}{\mu_0}.$$

Приравнивая циркуляцию вектора  $\mathbf{M}$  току намагничивания  $I_m$  через данный контур, получаем соотношение:

$$\int_0^r j_m l dr = -ar^2 l \frac{B_0}{\mu_0}.$$

Дифференцируя его по  $r$ , находим:

$$j_m(r) = -2ar \frac{B_0}{\mu_0}.$$

Объемную плотность тока  $j_m(r)$  можно найти и непосредственно из дифференциального соотношения  $\mathbf{j}_m = \text{rot} \mathbf{M}$ , исходя из найденного выражения для  $\mathbf{M}(r)$ . Учитывая, что намагничённость имеет только  $z$ -компоненту, в цилиндрических координатах ротор будет иметь  $\varphi$ -компоненту, равную

$$j_m = j_{m\varphi} = (\text{rot } \mathbf{M})_{\varphi} = \frac{\partial M_r}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial r} = -\frac{\partial M_z}{\partial r} = -2ar \frac{B_0}{\mu_0}.$$

На границе магнитной среды ( $r = R$ ) плотность поверхностного тока намагничивания равна

$$i_m = i_{m\varphi} = M(R) = aR^2 \frac{B_0}{\mu_0}.$$

Направление линий токов  $\mathbf{j}_m$  и  $\mathbf{i}_m$  показано на рис. 21.7(а, б).

**Ответ:**  $M(r) = ar^2 \frac{B_0}{\mu_0}$ ,  $B(r) = (1 + ar^2)B_0$ ,

$$j_m(r) = -2ar \frac{B_0}{\mu_0}, \quad i_m = aR^2 \frac{B_0}{\mu_0}$$

**Задача 21.3.8.** Найти индуктивность соленоида длины  $l$  и радиуса  $a$  ( $l \gg a$ ), содержащего  $N$  витков, если он заполнен парамагнетиком с неоднородной магнитной проницаемостью  $\mu(r) = 1 + \alpha r$ , где  $r$  – расстояние от оси соленоида,  $\alpha = \text{const}$ .

### Решение

Поскольку линии напряженности магнитного поля внутри пу­стого соленоида  $\mathbf{H}_0$  параллельны поверхностям постоянства величины  $\mu(r)$ , напряженность  $\mathbf{H}$  при введении магнетика останется без изменения и будет, как и в вакууме, равна  $H = nI$ , где  $n = N/l$  – плотность катушки, а магнитная индукция

$$B(r) = \mu_0 \mu(r) H = \mu_0 (1 + \alpha r) n I.$$

Магнитный поток через один виток контура равен потоку через поперечное сечение соленоида площади  $S$ :

$$\Phi_1 = \int_S B(r) dS = \int_0^a \mu_0 n I (1 + \alpha r) \cdot 2\pi r dr = \mu_0 n I \pi a^2 \left( 1 + \frac{2\alpha}{3} \cdot a \right).$$

Полный поток через всю обмотку  $\Phi = N\Phi_1 = LI$ , откуда определяем индуктивность соленоида:

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} \pi a^2 \left( 1 + \frac{2\alpha}{3} a \right) = \mu_0 n^2 V \left( 1 + \frac{2\alpha}{3} a \right),$$

где  $V$  – объем соленоида.

*Замечание.* Если  $\mu = 1$  ( $\alpha = 0$ ), то получается известная формула для индуктивности соленоида в вакууме  $L = \mu_0 n^2 V$  (глава 19, задача 19.3.2).

**Ответ:**  $L = \mu_0 n^2 V \left( 1 + \frac{2\alpha}{3} a \right).$

## 21.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 21.4.1.** Бесконечная плоская пластина-магнит намагничена так, что вектор намагниченности  $\mathbf{M}$  перпендикулярен ее плоскости. Найти магнитную индукцию  $\mathbf{B}$  и напряженность поля  $\mathbf{H}$  внутри и вне пластины.

*Ответ:* внутри  $\mathbf{B} = 0$ ,  $\mathbf{H} = -\mathbf{M}$ ; снаружи  $\mathbf{B} = 0$ ,  $\mathbf{H} = 0$ .

**Задача 21.4.2.** Бесконечная плоская пластина-магнит намагничена так, что вектор намагниченности  $\mathbf{M}$  параллелен ее плоскости. Найти магнитную индукцию  $\mathbf{B}$  и напряженность поля  $\mathbf{H}$  внутри и вне пластины.

*Ответ:* внутри  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{M}$ ,  $\mathbf{H} = 0$ ; снаружи  $\mathbf{B} = 0$ ,  $\mathbf{H} = 0$ .

**Задача 21.4.3.** Плоский постоянный магнит граничит с вакуумом и имеет постоянную намагниченность  $\mathbf{M}$ , параллельную поверхности. Снаружи у поверхности вектор магнитной индукции имеет величину  $B$  и образует угол  $\alpha$  с нормалью к поверхности. Найти вектор магнитной индукции  $B_1$  внутри магнита (модуль и угол  $\beta$  с нормалью).

$$\text{Ответ: } B_1 = \sqrt{B^2 + 2\mu_0 MB \sin \alpha + (\mu_0 M)^2},$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha + \mu_0 M / B}{\cos \alpha}.$$

**Задача 21.4.4.** По бесконечному проводу круглого сечения радиуса  $a$ , находящемуся в вакууме, течет постоянный ток  $I$ . Магнитная проницаемость материала провода равна  $\mu(r) = 1 + \alpha \frac{r}{a}$ . Найти напряженность поля  $H(r)$ , магнитную индукцию  $B(r)$ , намагниченность  $M(r)$ , объемную  $j_m(r)$  и поверхностную  $i_m$  плотности токов намагничивания и полную величину этих токов  $I_{\text{тоб}}$  и  $I_m$ .

$$\text{Ответ: } \underline{r < a:} \quad H_1(r) = \frac{I}{2\pi a^2} r, \quad B_1(r) = \mu_0 \mu(r) \frac{I}{2\pi a^2} r,$$

$$M_1(r) = \alpha \frac{I}{2\pi a^3} r; \quad j_{m1} = \frac{3}{2} \alpha \frac{I}{\pi a^3} r;$$

$$\underline{r \geq a:} \quad H_2(r) = \frac{I}{2\pi r}, \quad B_2(r) = \mu_0 \frac{I}{2\pi r},$$

$$M_1(r) = 0; \quad j_{m2} = 0,$$

$$\underline{r \equiv a:} \quad i_m = \alpha \frac{I}{2\pi a^2}, \quad I_m = -I_{\text{тоб}} = \alpha I.$$

*Указание.* Для нахождения токов намагничивания можно считать  $\operatorname{rot} \mathbf{M}$  в декартовых координатах, либо использовать выражение ротора в цилиндрических координатах, в которых, учитывая, что вектор  $\mathbf{M}$  имеет только круговую  $\varphi$ -компоненту:

$$j_m - (\operatorname{rot} \mathbf{M})_z = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r M_\varphi) - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial M_r}{\partial \varphi}.$$

Другим способом является использование интегрального соотношения (21.6), как это было сделано в задаче 21.3.7.

**Задача 21.4.5.** Круговой тонкий виток, по которому течет ток силы  $I$ , лежит на плоской границе раздела вакуума и магнетика с магнитной проницаемостью  $\mu$ . Найти индукцию магнитного поля на оси контура в зависимости от расстояния  $z$  до его центра.

*Указание:* см. решение задачи 21.3.6.

Ответ:  $B = \frac{2\mu}{1+\mu} B_0$ , где  $B_0 = \frac{1}{2} \mu_0 I \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$  – магнитная индукция в отсутствие магнетика.

**Задача 21.4.6** ([2], 3.285). Бесконечно длинный прямой соленоид с током наполовину заполнен парамагнетиком, как показано на рис. 21.9. Изобразить примерные графики магнитной индукции  $B$ , напряженности  $H$  и намагниченности  $M$  на оси соленоида в зависимости от расстояния  $x$  вдоль оси соленоида.

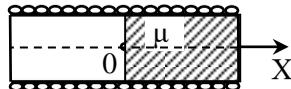


Рис. 21.9. Длинный соленоид, наполовину заполненный парамагнетиком.

Ответ:

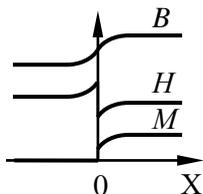


Рис. 21.20. Примерные графики магнитной индукции  $B$ , напряженности  $H$  и намагниченности  $M$  на оси соленоида в зависимости от расстояния  $x$  вдоль его оси.

## Глава 22

**ПОЛЕ ПОСТОЯННЫХ МАГНИТОВ.  
МАГНЕТИКИ ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ.  
ФАКТОРЫ ФОРМЫ МАГНЕТИКА**

**22.1. Теоретические вопросы**

**Граничное условие для нормальной составляющей индукции магнитного поля.**

Для произвольной поверхности раздела двух магнетиков:

$$B_{2n} - B_{1n} = 0, \quad (22.1)$$

где  $B_{1n}$  и  $B_{2n}$  – нормальные составляющие индукций магнитного поля в первой и второй средах у поверхности их раздела.

**Связь вектора намагниченности с поверхностными токами намагничивания.**

$$\mathbf{i}_m = [\mathbf{Mn}] \text{ или } M_\tau = [n\mathbf{i}_m], \quad (22.2)$$

где  $\mathbf{n}$  – нормаль к поверхности рассматриваемого элемента магнетика,  $\mathbf{i}_m$  – линейная плотность поверхностного тока намагничивания магнетика,  $M_\tau$  – тангенциальная составляющая вектора намагниченности.

**Граничное условие для тангенциальной составляющей вектора намагниченности.**

Для произвольной поверхности раздела двух магнетиков:

$$\mathbf{M}_{2\tau} - \mathbf{M}_{1\tau} = -[n\mathbf{i}_m], \quad (22.3)$$

где  $\mathbf{M}_{1\tau}$  и  $\mathbf{M}_{2\tau}$  – тангенциальные составляющие векторов намагниченности первой и второй сред у поверхности их раздела,  $\mathbf{n}$  – нормаль к поверхности раздела двух сред, направленная от первой среды ко второй.

**Теорема о циркуляции для вектора намагниченности в интегральной и дифференциальной формах.**

*Интегральная форма.* Для любого замкнутого контура L:

$$\oint_L \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = I_m, \quad (22.4)$$

где  $I_m$  – сила объемного тока намагничивания, пронизывающего контур (протекающего через любую поверхность, ограниченную контуром) L.

*Дифференциальная форма.* В любой точке магнетика

$$\operatorname{rot} \mathbf{M} = \mathbf{j}_m, \quad (22.5)$$

где  $\mathbf{j}_m$  – объемная плотность тока намагничивания.

**Теорема о циркуляции для напряженности магнитного поля в интегральной и дифференциальной формах.**

*Интегральная форма.* Для любого замкнутого контура L:

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I, \quad (22.6)$$

где  $I$  – сила объемного тока проводимости, пронизывающего контур L (протекающего через любую поверхность, ограниченную этим контуром).

*Дифференциальная форма.* В любой точке магнетика

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad (22.7)$$

где  $\mathbf{j}$  – объемная плотность тока проводимости.

**Граничное условие для тангенциальной составляющей напряженности магнитного поля.**

Для произвольной поверхности раздела двух магнетиков:

$$\mathbf{H}_{2\tau} - \mathbf{H}_{1\tau} = -[n\mathbf{i}], \quad (22.8)$$

где  $\mathbf{H}_{1\tau}$  и  $\mathbf{H}_{2\tau}$  – тангенциальные составляющие напряженности магнитного поля в первой и второй средах у поверхности их раздела,  $\mathbf{n}$  – нормаль к поверхности раздела двух сред, направленная от первой среды ко второй,  $\mathbf{i}$  – линейная плотность поверхностного тока проводимости.

**Граничное условие для тангенциальной составляющей индукции магнитного поля.**

Для произвольной поверхности раздела двух магнетиков:

$$\mathbf{B}_{2\tau} - \mathbf{B}_{1\tau} = -\mu_0 [n, (\mathbf{i} + \mathbf{i}_m)], \quad (22.9)$$

где  $\mathbf{B}_{1\tau}$  и  $\mathbf{B}_{2\tau}$  – тангенциальные составляющие индукции магнитного поля в первой и второй средах у поверхности их раздела,  $\mathbf{n}$  – нормаль к поверхности раздела двух сред, направленная от первой среды ко второй.

**Магнитное поле в пространственно ограниченных магнетиках, фактор формы.**

*Однородный и изотропный магнетик в форме эллипсоида во внешнем однородном магнитном поле намагничивается однородно.* При этом составляющие напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$  вдоль

осей эллипсоида определяются напряженностью внешнего поля  $\mathbf{H}_0$ , намагниченностью магнетика  $\mathbf{M}$  и тремя в общем случае различными размагничивающими факторами – факторами формы  $N_x, N_y, N_z$ :

$$\begin{aligned} H_x &= H_{0x} - N_x M_x, \\ H_y &= H_{0y} - N_y M_y, \\ H_z &= H_{0z} - N_z M_z. \end{aligned} \quad (22.10)$$

причем

$$N_x + N_y + N_z = 1 \text{ и } 0 \leq N_{x,y,z} \leq 1. \quad (22.11)$$

В общем случае напряженность поля (а значит, и магнитная индукция поля, и намагниченность) в пространственно ограниченном магнетике не коллинеарна внешнему полю.

Приведем значения факторов формы для частных случаев.

1. *Длинный цилиндр* (стержень) с осью  $Z$ :

$$N_z = 0 \text{ и } N_x = N_y = \frac{1}{2}. \quad (22.12)$$

2. *Тонкий диск* с осью  $Z$ :

$$N_z = 1, \quad N_x = N_y = 0. \quad (22.13)$$

3. *Шар*:

$$N_x = N_y = N_z = \frac{1}{3}. \quad (22.14)$$

Свяжем характеристики поля в магнетике с напряженностью внешнего поля. В случае однородного линейного изотропного магнетика в форме эллипсоида  $M_\alpha = \chi H_\alpha$  ( $\alpha = x, y, z$ ) и

$$H_\alpha = H_{0\alpha} - N_\alpha M_\alpha = H_{0\alpha} - N_\alpha \chi H_\alpha. \quad (22.15)$$

В результате для напряженности поля  $\mathbf{H}$ , магнитной индукции  $\mathbf{B}$  и вектора намагниченности  $\mathbf{M}$  получаем:

$$H_\alpha = \frac{1}{1 + N_\alpha \chi} H_{0\alpha}, \quad (22.16)$$

$$B_\alpha = \frac{1 + \chi}{1 + N_\alpha \chi} B_{0\alpha}, \quad (22.17)$$

$$M_\alpha = \frac{\chi}{1 + N_\alpha \chi} H_{0\alpha}. \quad (22.18)$$

**Ферромагнетики** – вещества, молекулы (атомы) которых обладают постоянными магнитными моментами, и в которых без внешнего магнитного поля существуют области самопроизвольной намагниченности, называемые доменами. При внесении ферромагнетика во внешнее магнитное поле происходит изменение размеров доменов и ориентации их магнитных моментов, в результате чего намагниченность ферромагнетика нелинейно меняется. При снятии внешнего поля ферромагнетик может оставаться намагниченным.

### Характерные особенности ферромагнетиков.

1. Сложная нелинейная связь между намагниченностью и напряженностью поля.

2. Гигантское значение максимальной магнитной восприимчивости  $\chi_{\max} \cong 10^4 \div 10^6$ .

3. В общем случае неоднозначные зависимости намагниченности  $M(H)$  и магнитной индукции  $B(H)$  от напряженности магнитного поля, которые определяются магнитной предысторией образца – *магнитный гистерезис* (рис. 22.1).

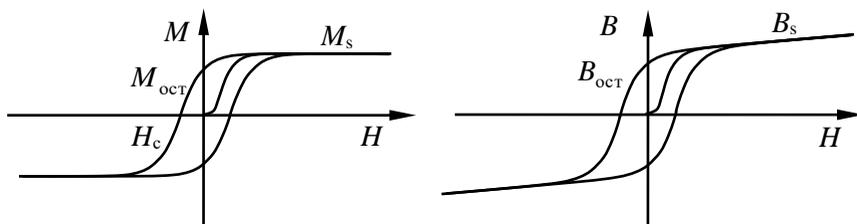


Рис. 22.1. Зависимости намагниченности  $M(H)$  и магнитной индукции  $B(H)$  ферромагнетика от напряженности магнитного поля.

На рисунке:  $M_{\text{ост}}$  и  $B_{\text{ост}}$  – значения намагниченности и магнитной индукции в отсутствие внешнего поля (остаточные намагниченность и магнитная индукция),  $H_c$  – коэрцитивная сила,  $M_s$  и  $B_s$  – намагниченность и магнитная индукция насыщения.

4. Наличие точки Кюри  $T_C$  – температуры, при переходе через которую вещество ферромагнетика претерпевает магнитный фазовый переход – переходит из ферромагнитного в парамагнитное состояние.

### Магнитный гистерезис и кривая Столетова.

В соответствии с поведением намагниченности и магнитной индукции в зависимости от напряженности магнитного поля магнитные восприимчивость  $\chi = \frac{M}{H}$  и проницаемость  $\mu = \frac{B}{\mu_0 H} = \chi + 1$  являются нелинейными функциями напряженности поля  $H$  (рис. 22.2).

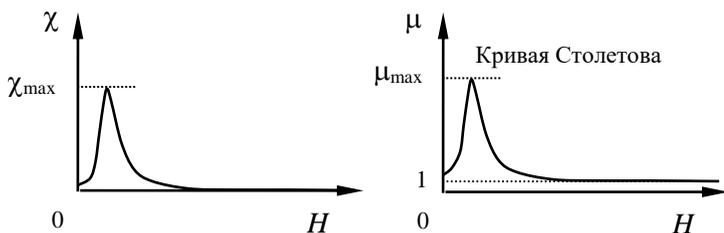


Рис. 22.2. Зависимости магнитной восприимчивости  $\chi(H)$  и магнитной проницаемости  $\mu(H)$  ферромагнетика от напряженности магнитного поля.

Зависимость магнитной проницаемости от напряженности поля  $\mu(H)$  носит название кривой Столетова. Функции  $\chi(H)$  и  $\mu(H)$  сначала возрастают с ростом  $H$ , затем проходят через максимум, и, наконец, в сильных полях, когда достигнуто состояния насыщения, магнитная восприимчивость стремится к нулю, а магнитная проницаемость – к единице.

**Метод «магнитных зарядов».** Некоторые из задач, относящихся к теме семинара, удобно решать *методом "магнитных зарядов"*, используя *аналогию электростатического и магнитостатического полей*.

Данный метод удобен при рассмотрении задач, в которых нет токов проводимости (например, случай постоянных магнитов или непроводящих магнитных сред).

Введем вспомогательную функцию

$$\rho_m(\mathbf{r}) = -\operatorname{div} \mathbf{M}. \quad (22.19)$$

Тогда при отсутствии токов проводимости ( $\mathbf{j} = 0$ ) уравнения магнитостатики можно записать в виде:

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \rho_m, \quad (22.20)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0. \quad (22.21)$$

Данные уравнения идентичны уравнениям электростатики:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (22.22)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (22.23)$$

Как видим,  $\rho_m(\mathbf{r})$  формально играет роль объемной плотности "магнитных зарядов", которые являются источниками "потенциального" магнитного поля напряженностью  $\mathbf{H}$  и по своей роли эквивалентны плотности электрических зарядов (точнее, величине  $\rho/\varepsilon_0$ ) в электростатике.

В однородно намагниченных средах  $\rho_m = 0$ , но на границах сред могут быть поверхностные "магнитные заряды", величина которых равна

$$\sigma_m = -(M_{2n} - M_{1n}) = -(\mathbf{n} \cdot (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1)), \quad (22.24)$$

где вектор нормали  $\mathbf{n}$  направлен от первой среды ко второй.

В связи с этой аналогией для нахождения магнитостатического поля можно использовать известные методы и готовые решения, полученные для электростатических задач (см. Главы 1 и 2), а затем произвести формальные замены:

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}, \quad (22.25)$$

$$\frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \rightarrow \mathbf{M}, \quad (22.26)$$

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow \rho_m, \quad (22.27)$$

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \rightarrow \sigma_m. \quad (22.28)$$

Например, напряженность магнитного поля на расстоянии  $\mathbf{r}$  от точечного "магнитного заряда"  $q_m$  определяется таким же соотношением, как и для электростатического поля точечного электрического заряда:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{q_m}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (22.29)$$

а сила, действующая на точечный "магнитный заряд", равна:

$$\mathbf{F} = q_m \mu_0 \mathbf{H}. \quad (22.30)$$

## 22.2 Основные типы задач (классификация)

22.1 Применение метода молекулярных токов и «магнитных зарядов» при расчете магнитного поля постоянных магнитов.

22.2 Задачи с гистерезисными ферромагнитными средами.

## 22.3. Методы решения и примеры решения задач

### Задачи типа 22.1

*Применение метода молекулярных токов и магнитных зарядов при расчете магнитного поля постоянных магнитов.*

**Метод решения.** Использование соотношений (22.2) – (22.5) или (22.24) – (22.29) теоретического материала.

**Задача 22.3.1.** Постоянный магнит в виде цилиндра радиуса  $R$  и длины  $2l$  изготовлен из материала с однородной намагниченностью  $M$ , направленной вдоль его оси. Найти величину индукции и напряженности магнитного поля на оси цилиндра вне и внутри него, считая, что намагниченность не зависит от магнитного поля.

### Решение

*Метод молекулярных токов.*

Усреднённые по физически малому объёму молекулярные токи называют токами намагничивания. Так как намагниченность однородна, объёмные токи намагничивания отсутствуют, а на боковой поверхности цилиндрического магнита имеется круговой поверхностный ток намагничивания плотности

$$i_m = M. \quad (22.31)$$

Создаваемое этими токами магнитное поле аналогично полю соленоида с такой же поверхностной плотностью тока:

$$In = i_m, \quad (22.32)$$

где  $I$  – сила тока в цепи соленоида,  $n$  – число витков катушки соленоида на единицу длины.

Модуль магнитной индукции  $B$  на оси соленоида определяется соотношением, полученным в задаче 15.3.5:

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 In (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2),$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – углы, под которыми видны крайние точки соленоида из точки наблюдения. При выбранном здесь одинаковом направлении отсчета углов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  данная формула без изменений пригодна для точек как внутри, так и снаружи соленоида.

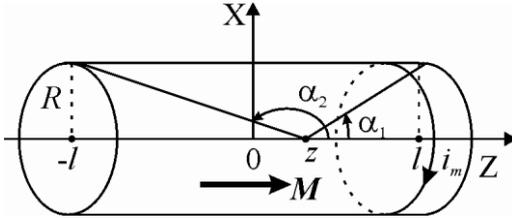


Рис. 22.3а. К расчёту магнитной индукции намагниченного цилиндра методом молекулярных токов.

Введем декартову систему координат, ось Z которой направлена вдоль оси соленоида, а центр совпадает с центром соленоида. Тогда положение точки наблюдения на оси задается координатой  $z$ , а косинусы углов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$

определяются выражениями (рис. 22.3а):

$$\cos\alpha_1 = \frac{l-z}{\sqrt{R^2+(l-z)^2}}, \quad (22.33)$$

$$\cos\alpha_2 = -\frac{l+z}{\sqrt{R^2+(l+z)^2}}. \quad (22.34)$$

С учетом (22.31) – (22.34) модуль магнитной индукции поля, создаваемого постоянным цилиндрическим магнитом на его оси в точке с координатой  $z$ , как внутри, так и снаружи магнита равен:

$$B(z) = \frac{1}{2}\mu_0 M \left( \frac{l-z}{\sqrt{R^2+(l-z)^2}} + \frac{l+z}{\sqrt{R^2+(l+z)^2}} \right).$$

Модуль напряженности  $H$  магнитного поля внутри магнита в соответствии с определением находится из соотношения

$$H = \frac{B}{\mu_0} - M, \text{ что дает}$$

$$H(z) = \frac{1}{2}M \left( \frac{l-z}{\sqrt{R^2+(l-z)^2}} + \frac{l+z}{\sqrt{R^2+(l+z)^2}} - 2 \right). \quad (22.35)$$

Отметим, что для нахождения  $H$  внутри магнита нельзя применить материальное уравнение  $M = \chi H$ , поскольку, согласно условию задачи, намагниченность не зависит от  $H$ .

Вне магнита  $\mathbf{M} = 0$  и  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ , следовательно:

$$H(z) = \frac{B(z)}{\mu_0} = \frac{1}{2} M \left( \frac{l-z}{\sqrt{R^2 + (l-z)^2}} + \frac{l+z}{\sqrt{R^2 + (l+z)^2}} \right). \quad (22.36)$$

Метод "магнитных зарядов"

Ввиду однородности намагниченности внутри магнита «магнитные заряды» возникают только на его торцах и имеют поверхностные плотности

$$\sigma_m = \pm M.$$

Таким образом, поле напряженностью  $\mathbf{H}$  создается двумя противоположно заряженными соосными тонкими дисками, расположенными на расстоянии  $2l$  друг от друга. Электростатическим аналогом, применимым к этой задаче, является равномерно заряженный тонкий диск, напряженность электрического поля на оси которого была найдена в задаче 1.3.6:

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z_0}{\sqrt{R^2 + z_0^2}} \right),$$

где  $z_0$  – расстояние от центра диска,  $\sigma$  – поверхностная плотность электрического заряда.

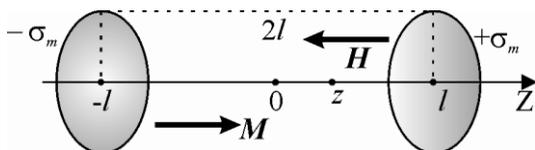


Рис. 22.36. К расчёту магнитной индукции намагниченного цилиндра методом «магнитных зарядов».

Проведем замену  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$ ,  $\sigma/\epsilon_0 \rightarrow \sigma_m$  и перейдем в выбранную нами систему координат (рис. 22.36). Для правого торца с положительным зарядом надо

взять  $z_0 = l - z$ , а для левого, с отрицательным зарядом,  $z_0 = l + z$ . Складывая напряженности магнитных полей от обоих торцов с учетом их направления, получаем те же, полученные выше, формулы (22.34) и (22.35) для  $H(z)$  внутри и вне цилиндра:

внутри цилиндра:

$$H(z) = \frac{1}{2} M \left( \frac{l-z}{\sqrt{R^2 + (l-z)^2}} + \frac{l+z}{\sqrt{R^2 + (l+z)^2}} - 2 \right);$$

вне цилиндра:

$$H(z) = \frac{1}{2}M \left( \frac{l-z}{\sqrt{R^2 + (l-z)^2}} + \frac{l+z}{\sqrt{R^2 + (l+z)^2}} \right).$$

Графики зависимостей  $M(z)$ ,  $B(z)$  и  $H(z)$  на оси магнита приведены на рис. 22.3в.

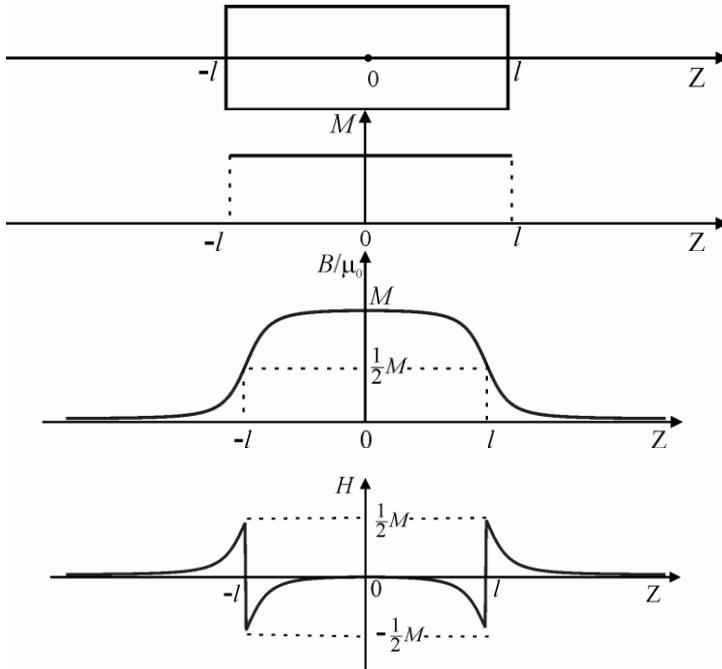


Рис. 22.3в. Графики зависимостей  $M(z)$ ,  $B(z)$  и  $H(z)$  на оси цилиндрического магнита.

Индукции магнитных полей  $\mathbf{B}$  для соленоида и цилиндрического магнита совпадают как внутри них, так и снаружи. Напряжённости магнитных полей  $\mathbf{H}$  совпадают только снаружи. Внутри соленоида  $H = B/\mu_0$ , а в магните величина  $H$  быстро уменьшается с удалением от его торцов. Для тонкого (длинного) цилиндрического магнита ( $l \gg R$ ) можно считать, что  $H = 0$  в большей части его объема, кроме областей в непосредственной близости от его торцов, где  $H$  испытывает скачок величиной  $\pm M/2$ . Отметим, что все найденные величины относятся к осевой линии цилиндра.

**Ответ:**

внутри магнита:

$$B(z) = \frac{1}{2} \mu_0 M \left( \frac{l-z}{\sqrt{R^2 + (l-z)^2}} + \frac{l+z}{\sqrt{R^2 + (l+z)^2}} \right),$$

$$H(z) = \frac{1}{2} M \left( \frac{l-z}{\sqrt{R^2 + (l-z)^2}} + \frac{l+z}{\sqrt{R^2 + (l+z)^2}} - 2 \right);$$

вне магнита:

$$H(z) = \frac{1}{2} M \left( \frac{l-z}{\sqrt{R^2 + (l-z)^2}} + \frac{l+z}{\sqrt{R^2 + (l+z)^2}} \right).$$

**Задача 22.3.2.** Постоянный магнит в виде длинного цилиндра с однородной намагниченностью  $M$ , направленной вдоль его оси, разрезан поперек пополам и половинки разведены на расстояние, малое по сравнению с его радиусом  $a$ . Найти: индукцию  $B_1$  и напряженность  $H_1$  магнитного поля в зазоре и внутри магнита вдали от зазора ( $B_2$  и  $H_2$ ), а также силу притяжения  $F$  двух половинок магнита.

### Решение

Сначала найдём индукцию и напряжённость магнитного поля внутри и вне магнита двумя методами.

*Метод «магнитных зарядов».*

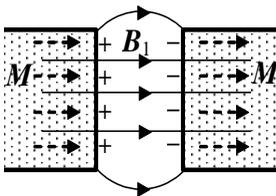


Рис. 22.4а. Линии индукции магнитного поля в магните с зазором.

Ввиду разрыва нормальной компоненты вектора  $M$  (штриховые линии на рис. 22.4а) на границах зазора появляются «магнитные заряды» противоположного знака  $\pm q_m$  с поверхностной плотностью

$$\sigma_m = \pm M.$$

Таким образом, зазор эквивалентен тонкому плоскому электрическому конденсатору. Напряженность

электрического поля внутри плоского конденсатора, как известно из электростатики,  $E = \sigma/\epsilon_0$ . Проведа замены (22.24) – (22.28):

$$E \rightarrow H_1,$$

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} \rightarrow \sigma_m,$$

получаем:

$$H_1 = \sigma_m = M,$$

$$B_1 = \mu_0 H_1 = \mu_0 M.$$

Направление вектора  $H_1$  совпадает с направлением  $B_1$  (рис. 22.46).

Вне "конденсатора" напряжённость магнитного поля  $H$  близка к нулю, т.е. внутри обеих половинок магнита вдали от зазора

$$H_2 = 0$$

и в силу непрерывности нормальной составляющей вектора индукции магнитного поля  $B$  на границе раздела двух сред:

$$B_2 = B_1 = \mu_0(H_2 + M) = \mu_0 M.$$

*Метод молекулярных токов.*

Так как намагниченность постоянного магнита однородна, объёмные токи намагничивания отсутствуют, а на боковой поверхности цилиндрического магнита имеется круговой поверхностный ток намагничивания плотности

$$i_m = M.$$

Магнитная индукция  $B$  внутри длинного цилиндра будет та же, что и внутри соленоида с поверхностным током  $i = i_m$ , т. е.

$$B = \mu_0 i = \mu_0 M.$$

При этом, в отличие от соленоида, напряжённость магнитного поля внутри цилиндра равна нулю:

$$H_2 = \frac{B_2}{\mu_0} - M = 0.$$

Если поперечный зазор в цилиндре узкий, то можно пренебречь краевыми эффектами, то есть считать, что линии индукции  $B$  не отклоняются от продольного направления. Тогда вектор  $B$  в зазоре сохранит ту же величину  $B = \mu_0 M$  в силу сохранения нормальной компоненты  $B_n$  на границе сред, при этом внутри зазора

$$H_1 = B/\mu_0 = M,$$

а напряжённость поля  $H$  вдали от зазора останется нулевой.

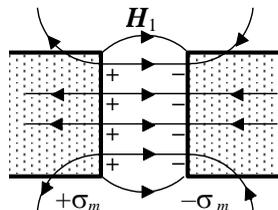


Рис. 22.46. Линии напряжённости магнитного поля в магните с зазором.

Теперь определим силу притяжения половинок магнита друг к другу. Эту силу можно найти как притяжение двух пластин заряженного конденсатора по аналогии с соответствующей электростатической задачей:

$$F = \frac{1}{2} \mu_0 H_1 q_m = \frac{1}{2} \mu_0 M \cdot S \sigma_m = \frac{1}{2} S \mu_0 M^2 = \frac{1}{2} \pi a^2 \mu_0 M^2.$$

**Ответ:**  $H_1 = M, H_2 = 0, B_1 = B_2 = \mu_0 M, F = \frac{1}{2} \pi a^2 \mu_0 M^2.$

**Задача 22.3.3.** Тонкий диск толщины  $h$  и радиуса  $R$  ( $h \ll R$ ) имеет однородную постоянную намагниченность с вектором намагниченности  $\mathbf{M}$ , лежащим в его плоскости. Найти:

1) модуль магнитной индукции  $B$  и напряженность магнитного поля  $H$  в центре диска;

2) модуль магнитной индукции  $B_x(z)$  на оси диска на расстоянии  $z$  от него в дипольном приближении.

### Решение

Ввиду разрыва нормальной компоненты вектора  $\mathbf{M}$  на боковой поверхности диска появляются "магнитные заряды" с поверхностной плотностью  $\sigma_m$ , равной:

$$\sigma_m = M \cos \varphi.$$

1). Направим ось  $X$  параллельно вектору намагниченности, начало отсчёта совместим с центром диска. Ввиду симметрии задачи магнитное поле в плоскости диска будет иметь только  $x$ -компоненту.

Рассмотрим бесконечно малый участок боковой поверхности диска, расположенный под углом  $\varphi$  к оси  $X$  и имеющий длину  $dl = R d\varphi$  и площадь  $dS = hR d\varphi$ . На нем находится «магнитный заряд» (рис. 22.5)

$$dq_m(\varphi) = \sigma_m(\varphi) dS = MhR \cos \varphi d\varphi,$$

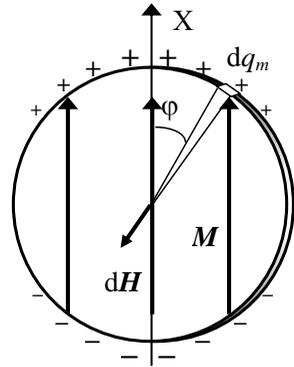


Рис. 22.5. К определению напряжённости магнитного поля в центре диска.

который (по аналогии с точечным электрическим зарядом) создает в центре диска поле с напряжённостью  $d\mathbf{H}$ , проекция которой на ось  $X$  равна:

$$dH_x = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{dq_m}{R^2} \cos \varphi = -\frac{1}{4\pi R} M h \cos^2 \varphi d\varphi.$$

Интегрируя это выражение по углу  $\varphi$ , получаем модуль напряжённости поля  $\mathbf{H}$  в центре диска:

$$H = H_x = -M \frac{h}{4\pi R} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = -M \frac{h}{4R},$$

и затем, в соответствии с определением напряженности магнитного поля, находим модуль магнитной индукции:

$$B = B_x = \mu_0 (H + M) = \mu_0 M \left( 1 - \frac{h}{4R} \right).$$

2). По определению намагниченности магнитный момент однородно намагниченного диска равен по модулю  $p_m = MV = M\pi R^2 h$  и сонаправлен с вектором намагниченности  $\mathbf{M}$ , то есть направлен по оси  $X$ . В дипольном приближении ( $z \gg R$ ) индукция магнитного поля на оси  $Z$ , перпендикулярной оси диполя (см. главу 15), равна:

$$B_x(z) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{p_m}{z^3} = -\mu_0 M \frac{R^2 h}{4z^3}.$$

**Ответ:** 1)  $B = B_x = \mu_0 M \left( 1 - \frac{h}{4R} \right)$ ,  $H = H_x = -M \frac{h}{4R}$ ;

2)  $B_x(z) = -\mu_0 M \frac{R^2 h}{4z^3}$ .

**Задача 22.3.4.** Длинный цилиндр радиуса  $R$  изготовлен из материала с "замороженной" однородной намагниченностью, направленной вдоль его оси. Индукция магнитного поля в центре торца данного цилиндра равна  $B_1$ . Найти индукцию  $B_2$  в центре тонкого диска толщины  $h$  ( $h \ll R$ ), отрезанного от этого цилиндра.

### Решение

Так как намагниченность  $M$  однородна, то объемные молекулярные токи отсутствуют, а на боковой поверхности

цилиндра имеется круговой поверхностный ток намагничивания плотности  $i' = M$ . Создаваемое этим током поле аналогично полю соленоида с такой же поверхностной плотностью тока. Величина магнитной индукции в центре торца соленоида равна

$$B_1 = \frac{1}{2} \mu_0 i' = \frac{1}{2} \mu_0 M \quad (\text{глава 15, задача 15.3.5}).$$

Из этого соотношения находим величину намагниченности материала:

$$M = \frac{2B_1}{\mu_0}.$$

Требуемое поле в центре тонкого диска с той же намагниченностью можно представить как поле кругового витка с током намагничивания  $I' = hi' = hM$  (см. рис. 22.6). По известной формуле (глава 15, задача 15.3.3) величина индукции в центре

витка равна  $B = \mu_0 \frac{I'}{2R}$ , откуда следует

$$B_2 = \mu_0 \frac{I'}{2R} = \mu_0 M \frac{h}{2R} = B_1 \frac{h}{R}.$$

**Ответ:**  $B_2 = B_1 \frac{h}{R}.$

**Задача 22.3.5.** Постоянный магнит имеет форму тонкого диска радиуса  $R$  и толщины  $h$  ( $h \ll R$ ). Магнитный момент диска  $p_m$  перпендикулярен его плоскости (рис. 22.6). Предполагая, что намагниченность диска однородна, найти величину магнитной индукции на оси диска в зависимости от расстояния  $z$  от его центра.

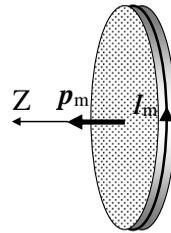


Рис. 22.6. К расчету магнитного поля на оси нормально намагниченного диска.

### Решение

Найдем намагниченность материала диска:

$$M = \frac{p_m}{V} = \frac{p_m}{\pi R^2 h}.$$

Так как намагниченность однородна, то объемные токи намагничивания отсутствуют, а на боковой поверхности диска в соответствии с (22.2) течет поверхностный молекулярный ток

плотности  $i' = M$ . Полный поверхностный ток намагничивания, текущий по периметру диска, равен:

$$I' = i' h = Mh = \frac{P_m}{\pi R^2}.$$

Поскольку диск тонкий, этот ток можно считать линейным, и создаваемое им магнитное поле будет совпадать с полем на оси кольца с током  $I = I'$ , определяемым следующей формулой (см. глава 15, **задача 15.3.3**)

$$B(z) = \frac{1}{2} \mu_0 I \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Подставляя сюда значение силы тока намагничивания  $I'$ , окончательно получаем:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{P_m}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

**Ответ:** 
$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{P_m}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

*Замечание.* На больших расстояниях от диска  $z \gg R$  данная формула переходит в  $B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{P_m}{z^3}$ , что совпадает с известным выражением для магнитной индукции на оси магнитного диполя.

Вблизи центра диска  $B(0) = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{Mh}{R}$ , что при тонком диске ( $\frac{h}{R} \ll 1$ ) дает  $B(0) \approx 0$ . Такой же близкой к нулю будет величина вектора индукции и внутри диска. Это легко сразу получить из рассмотрения задачи методом "магнитных зарядов". Однородно намагниченный диск эквивалентен тонкому "конденсатору", заряженному с поверхностной плотностью зарядов  $\sigma_m = \pm M$ . Как известно из электростатики, напряженность поля у наружной стороны пластины конденсатора вдали от его краев  $H \approx 0$ , а внутри  $H = \sigma_m = M$ , откуда согласно (22.24) следует  $B = \mu_0(H - M) = 0$ .

**Задача 22.3.6.** Шар радиуса  $R$  имеет однородную "замороженную" намагниченность с вектором намагниченности  $\mathbf{M}$

(рис. 22.7). Найти магнитную индукцию  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  и напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  внутри (1) и снаружи (2) шара.

### Решение

Задачу удобно решить методом "магнитных зарядов".

Поскольку намагниченность внутри шара однородна, объемных магнитных зарядов нет, но на поверхности согласно (22.20) возникают заряды (рис. 22.7) с поверхностной плотностью

$$\sigma_m(\vartheta) = M_n = M \cos \vartheta.$$

Аналогичная электростатическая задача для однородно поляризованного шара была решена выше (глава 10, задача 10.3.6) где было получено, что внутри шара напряженность электрического поля

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P},$$

где  $\mathbf{P}$  – вектор поляризации, а снаружи поле совпадает с полем точечного диполя, расположенного в центре шара, имеющего дипольный момент

$$\mathbf{p} = \frac{4}{3} \pi R^3 \mathbf{P}.$$

Произведя замены (22.25) – (22.26)

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}, \quad \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \rightarrow \mathbf{M}, \quad \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}_m$$

для области внутри шара, получаем:

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{3} \mathbf{M},$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \frac{2}{3} \mu_0 \mathbf{M}.$$

**Ответ:** внутри шара  $\mathbf{H} = -\frac{1}{3} \mathbf{M}$ ,  $\mathbf{B} = \frac{2}{3} \mu_0 \mathbf{M}$ ;

снаружи  $\mathbf{H}_2(r) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{(\mathbf{p}_m \mathbf{r}) \mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_m}{r^3} \right)$ ,  $\mathbf{B}_2(r) = \mu_0 \mathbf{H}_2(r)$ ,

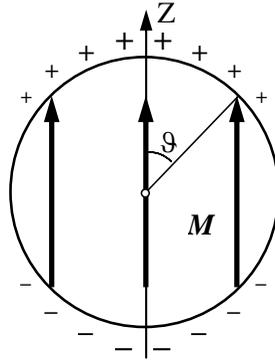


Рис. 22.7. К нахождению магнитного поля однородно намагниченного шара.

где  $\mathbf{p}_m = \frac{4}{3}\pi R^3 \mathbf{M}$  – вектор магнитного дипольного момента шара.

*Замечание.* Магнитное поле, порождаемое однородной намагниченностью внутри конечных тел, называется размагничивающим полем (поскольку оно направлено против направления намагниченности). При однородной намагниченности тела это поле будет однородным только для тел в форме эллипсоида или его частных случаев – шара или сфероида.

Для эллипсоида размагничивающее поле  $\mathbf{H}_p = -\hat{N}\mathbf{M}$ , где  $\hat{N}$  – тензор размагничивающих факторов. В главных осях эллипсоида тензор  $\hat{N}$  диагонален, и сумма диагональных элементов всегда равна 1. Поэтому в шаре все коэффициенты размагничивания равны  $\frac{1}{3}$ . Аналогичным способом можно решить задачу для длинного цилиндра с поперечной поляризацией (без учета неоднородности поля на торцах, то есть, аппроксимируя его длинным сфероидом). В этом случае оба коэффициента размагничивания в его поперечном сечении равны  $\frac{1}{2}$ , а продольный равен нулю.

**Задача 22.3.7.** В однородном магнитном поле находится проводящее кольцо, плоскость которого перпендикулярна линиям индукции. Модуль индукции магнитного поля медленно изменяется по гармоническому закону  $B = B_0 \cos \omega t$ . Во сколько раз изменится ЭДС индукции в витке, если его надеть на шар из магнетика с магнитной проницаемостью  $\mu$ ? Считать, что кольцо располагается по экватору шара, а его ориентация к линиям индукции магнитного поля не изменяется.

### Решение

Первоначально ЭДС индукции в кольце в соответствии с законом Фарадея равнялась  $\mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = B_0 \omega S \sin \omega t$ .

После того, как кольцо надели на шар из магнетика, в соответствии с принципом суперпозиции индукция магнитного поля в плоскости кольца стала равна  $\mathbf{B}_1$ :

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B} + \mathbf{B}_m,$$

где  $\mathbf{B}_m$  – индукция магнитного поля, создаваемого магнетиком.

Согласно материальному уравнению намагниченность шара равна

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}_1 = (\mu - 1)(\mathbf{H} + \mathbf{H}_m).$$

Учитывая связь напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}_m$ , создаваемого магнетиком, с намагниченностью шара –

$$\mathbf{H}_m = -\frac{1}{3}\mathbf{M},$$

получим:

$$\mathbf{M} = (\mu - 1) \left( \mathbf{H} - \frac{1}{3}\mathbf{M} \right).$$

Из последнего соотношения выразим намагниченность шара  $\mathbf{M}$ :

$$\mathbf{M} = \frac{3(\mu - 1)}{\mu + 2} \mathbf{H} = \frac{3(\mu - 1)}{\mu_0(\mu + 2)} \mathbf{B}.$$

Тогда напряжённость поля внутри шара равна

$$\mathbf{H}_1 = \frac{\mathbf{M}}{\mu - 1} = \frac{3\mathbf{H}}{\mu + 2} = \frac{3\mathbf{B}}{\mu_0(\mu + 2)}.$$

Для магнитной индукции внутри шара получаем:

$$\mathbf{B}_1 = \mu\mu_0 \mathbf{H}_1 = \frac{3\mu}{\mu + 2} \mathbf{B}.$$

В этом случае ЭДС индукции в кольце равна

$$\mathcal{E}_1 = \frac{3\mu}{\mu + 2} B_0 \omega S \sin \omega t.$$

Окончательно получим:  $\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}} = \frac{3\mu}{\mu + 2}.$

**Ответ:**  $\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}} = \frac{3\mu}{\mu + 2}.$

### Задачи типа 22.2

Задачи для ферромагнитных сред с гистерезисом намагничивания.

**Метод решения.** Для таких сред  $\mu \neq \text{const}$ , поэтому при нахождении полей нужно учитывать нелинейную зависимость намагниченности  $M(H)$  или индукции  $B(H)$  от напряженности поля  $H$  внутри ферромагнетика, задаваемую петлей гистерезиса ферромагнитного материала. Для связи векторов  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{M}$  нужно использовать общее соотношение  $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$  и условия на

границах сред (22.8), (22.9). При наличии симметрии удобно использовать закон полного тока – интегральное соотношение для напряженности поля  $\mathbf{H}$  (22.6).

**Задача 22.3.8.** Ферромагнитный материал имеет остаточную намагниченность  $M_r$  и коэрцитивную силу  $H_c$ , а часть кривой размагничивания можно приближенно аппроксимировать четвертью эллипса (рис. 22.8). Из данного материала изготовлен постоянный магнит в виде тонкого тора среднего радиуса  $R$  с тонким зазором ширины  $h$  ( $h \ll R$ ). Найти индукцию магнитного поля в зазоре.

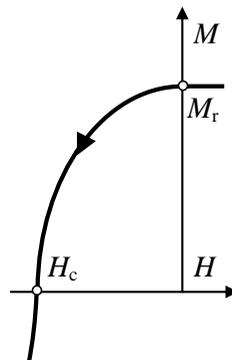


Рис. 22.8. Идеализированный участок петли гистерезиса ферромагнетика.

### Решение

Ввиду малой толщины тора по сравнению с его средним радиусом пренебрежем зависимостью магнитного поля от радиуса.

Пусть  $H_1$  – средняя напряженность магнитного поля внутри тора,  $H_2$  – напряженность в зазоре, а силовые линии магнитной индукции  $\mathbf{B}$  и напряженностей  $\mathbf{H}_{1,2}$  ввиду большой магнитной проницаемости ферромагнетика не выходят наружу и являются окружностями. Запишем закон полного тока (22.6) для циркуляции вектора  $\mathbf{H}$  по окружности радиуса  $R$ :

$$(2\pi R - h) H_1 + h H_2 = 0.$$

Непрерывность нормальной компоненты индукции  $B_n$  на границах тонкого зазора дает:

$$\mu_0 (H_1 + M_1) = \mu_0 H_2.$$

Связь  $M_1$  и  $H_1$  определяется формой кривой размагничивания (эллипс):

$$\frac{M_1^2}{M_r^2} + \frac{H_1^2}{H_c^2} = 1.$$

Решая систему из этих трех уравнений, получаем:

$$B = \mu_0 H_2,$$

$$\text{где } H_2 = \left(1 - \frac{2\pi R}{h}\right) \frac{M_r}{\sqrt{\frac{M_r^2}{H_c^2} + \left(\frac{2\pi R}{h}\right)^2}}.$$

$$\text{Ответ: } B = \mu_0 \left(1 - \frac{2\pi R}{h}\right) \frac{M_r}{\sqrt{\frac{M_r^2}{H_c^2} + \left(\frac{2\pi R}{h}\right)^2}}.$$

**Задача 22.3.9.** Тонкое кольцо из ферромагнетика имеет средний радиус  $R = 6$  см. На него намотано  $N = 200$  витков тонкого провода, по которому течет ток  $I = 2$  А. В кольце сделана поперечная прорезь ширины  $l = 0,5$  мм (рис. 22.9). Найти магнитную проницаемость вещества сердечника  $\mu$ , если напряженность магнитного поля в веществе  $H = 500$  А/м.

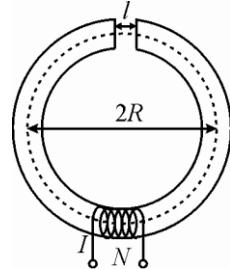


Рис. 22.9. Катушка, намотанная на кольцо из ферромагнетика с прорезью.

### Решение

Согласно теореме о циркуляции для вектора напряжённости магнитного поля по средней линии ферромагнитного кольца можно записать:

$$H(2\pi R - l) + H_3 l = NI,$$

где  $H_3$  – напряжённость магнитного поля в прорези.

Согласно граничным условиям нормальная компонента вектора индукции магнитного поля не изменяется при переходе через границу раздела двух сред ( $B_n = \text{const}$ ) и так как из симметрии

задачи следует, что касательная составляющая вектора  $\mathbf{B}$  равна нулю (пренебрегаем рассеянием поля в зазоре), то

$$B_c = B_3 = B.$$

Используя связь векторов индукции и напряженности магнитного поля

$$H = \frac{B_c}{\mu\mu_0} = \frac{B}{\mu\mu_0};$$

$$H_3 = \frac{B_3}{\mu_0} = \frac{B}{\mu_0},$$

получим:

$$\frac{B}{\mu\mu_0}(2\pi R - l + \mu l) = NI.$$

Тогда напряжённость магнитного поля в сердечнике равна:

$$H = \frac{NI}{2\pi R - l + \mu l}.$$

Для искомой магнитной проницаемости сердечника получаем:

$$\mu = \frac{NI - H(2\pi R - l)}{Hl} \approx 846.$$

$$\text{Ответ: } \mu = \frac{NI - H(2\pi R - l)}{Hl} \approx 846.$$

## 22.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 22.4.1.** Бесконечная плоская пластина-магнит намагничена так, что вектор намагниченности  $\mathbf{M}$  перпендикулярен ее плоскости. Найти магнитную индукцию  $\mathbf{B}$  и напряженность поля  $\mathbf{H}$  внутри и вне пластины.

*Ответ:* внутри  $\mathbf{B} = 0$ ,  $\mathbf{H} = -\mathbf{M}$ ; снаружи  $\mathbf{B} = 0$ ,  $\mathbf{H} = 0$ .

**Задача 22.4.2.** Бесконечная плоская пластина-магнит намагничена так, что вектор намагниченности  $\mathbf{M}$  параллелен ее плоскости. Найти магнитную индукцию  $\mathbf{B}$  и напряженность поля  $\mathbf{H}$  внутри и вне пластины.

*Ответ:* внутри  $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{H} = 0$ ; снаружи  $\mathbf{B} = 0$ ,  $\mathbf{H} = 0$ .

**Задача 22.4.3.** Диск радиуса  $R$  из ферромагнетика ( $\mu \gg 1$ ) помещен в магнитное поле с вектором индукции  $B_0$ , параллельным его оси. Оценить, при какой толщине  $l$  диска индукция в центре диска будет отличаться от  $B_0$  не более, чем на величину  $\Delta B = \eta B_0$ ,  $\eta = 0,01$ .

$$\text{Ответ: } l \leq \eta \frac{2\mu}{\mu - 1} R.$$

**Задача 22.4.4.** Бесконечно длинный цилиндр из однородного изотропного магнетика с магнитной проницаемостью  $\mu$  поместили в однородное постоянное магнитное поле с вектором индукции  $B_0$ , который перпендикулярен оси цилиндра. Найти намагниченность магнетика.

$$\text{Ответ: } M = 2 \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \cdot \frac{B_0}{\mu_0}.$$

**Задача 22.4.5.** Электромагнит с тонким сердечником квадратного сечения со стороной  $a$ , сделанный из материала с большой магнитной проницаемостью  $\mu$ , имеет тонкий плоский поперечный зазор ширины  $l$  (рис. 22.10), в котором создается магнитное поле с индукцией  $B$ . Оценить в дипольном приближении магнитную индукцию в точке А, лежащей в плоскости зазора на большом расстоянии  $r$  от его центра ( $r \gg a$ ,  $R \gg a \gg l$ , где  $R$  – средний радиус тора).

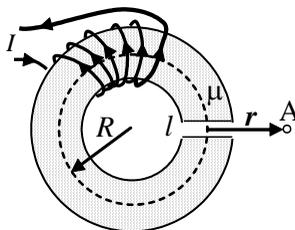


Рис. 22.10. Электромагнит в задаче 22.4.5.

$$\text{Ответ: } B(r) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{p_m}{r^3}, \text{ где } p_m = \frac{\mu - 1}{\mu} \cdot \frac{B}{\mu_0} a^2 l.$$

**Задача 22.4.6.** Намагниченность насыщения материала составляет  $M_s$  и достигается в поле насыщения с напряжённостью  $H_s$ . Из этого материала изготовлен тонкий тор среднего радиуса  $R$ , в котором сделан малый воздушный зазор  $l$  ( $l \ll R$ ). На тор намотано  $N$  витков провода. 1) При какой величине силы тока  $I_s$  через обмотку наступит насыщение материала? 2) Как будет меняться индукция в зазоре при  $I > I_s$ ?

Ответ:

$$1) I_s = \frac{1}{N} (2\pi R H_s + M_s l);$$

$$2) B(I) = \mu_0 \left( \frac{NI}{2\pi R} + M_s \right) = \mu_0 (H_s + M_s + N \frac{I - I_s}{2\pi R}).$$

**Задача 22.4.7.** Постоянный магнит имеет вид тонкого кольца среднего радиуса  $R$  с узким поперечным воздушным зазором. Материал имеет остаточную намагниченность  $M_r$  и коэрцитивную силу  $H_c$ , а петлю гистерезиса можно приблизительно аппроксимировать прямоугольником (рис. 22.11).

1) Какова ширина зазора  $h_{\max}$ , при дальнейшем увеличении которой величина индукция в зазоре начнет резко уменьшаться?

2) Чему равна величина магнитной индукции  $B$  в зазоре при его ширине  $h_{\max}$ ?

Ответ:  $h_{\max} = 2\pi R \frac{|H_c|}{M_r}$ ,  $B(h_{\max}) = \mu_0 (M_r - |H_c|)$ .

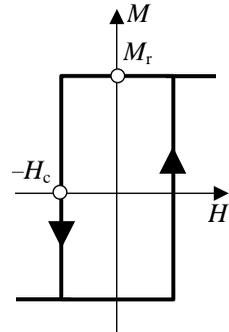


Рис. 22.11. Прямоугольная петля гистерезиса.

**Задача 22.4.8.** Постоянный магнит имеет вид кольца среднего радиуса  $R$  с узким воздушным поперечным зазором ширины  $h$ . Материал имеет остаточную намагниченность  $M_r$  и коэрцитивную силу  $H_c$ , а участок кривой гистерезиса на участке размагничивания можно аппроксимировать прямой линией (рис. 22.12).

Найти магнитную индукцию внутри зазора, пренебрегая рассеянием магнитного поля на его краях.

Ответ:  $B = \frac{\mu_0 M_r}{1 + \frac{h}{2\pi R} \cdot \frac{M_r}{H_c}}$ .

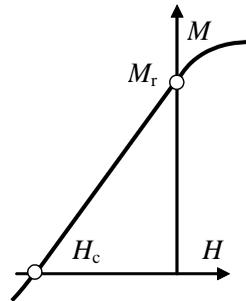


Рис. 22.12. Часть петли гистерезиса в задаче 22.4.8.

**Задача 22.4.9** ([2], 3.289). На постоянный магнит, имеющий форму цилиндра длины  $l = 15$  см, намотали равномерно  $N = 300$  витков тонкого провода. При пропускании через него тока силой  $I$  поле вне магнита исчезло. Найти коэрцитивную силу  $H_c$  материала магнита.

$$\text{Ответ: } H_c = \frac{NI}{l} = 6 \text{ кА/м.}$$

**Задача 22.4.10** ([2], 3.290). Постоянный магнит имеет вид кольца с узким зазором между полюсами. Средний диаметр кольца  $d = 20$  см. Ширина зазора  $b = 2$  мм, индукция магнитного поля в зазоре  $B = 40$  мТл. Пренебрегая рассеянием магнитного потока на краях зазора, найти модуль напряжённости магнитного поля внутри магнита.

$$\text{Ответ: } H = \frac{bB}{\mu_0 \pi d} = 0,1 \text{ кА/м.}$$

**Задача 22.4.11** ([2], 3.292). На железном сердечнике в виде тора со средним радиусом  $R = 250$  мм имеется обмотка с общим числом витков  $N = 1000$ . В сердечнике сделана поперечная прорезь шириной  $b = 1$  мм. При токе  $I = 0,85$  А через обмотку индукция магнитного поля в зазоре  $B = 0,75$  Тл. Пренебрегая рассеянием магнитного потока на краях зазора, найти магнитную проницаемость железа в этих условиях.

$$\text{Ответ: } \mu = \frac{2\pi RB}{\mu_0 NI - bB} = 3,7 \cdot 10^3.$$

**Задача 22.4.12** ([3], 347). Железный сердечник имеет форму тороида квадратного сечения (сторона  $a = 4$  см) с диаметром  $D = 40$  см. На сердечник равномерно в один слой намотано  $N = 500$  витков тонкой проволоки. В тороиде имеется воздушный зазор размера  $d_1 = 1$  мм, и при некоторой силе тока в обмотке поток магнитной индукции в сердечнике равен  $\Phi_1 = 3$  Вб. Когда воздушный зазор увеличили до размера  $d_2 = 2$  мм, то при той же силе тока значение потока индукции оказалось равным  $\Phi_2 = 2,5$  Вб.

Пренебрегая рассеянием линий индукции в зазоре, определить магнитную проницаемость железа.

$$\text{Ответ: } \mu = \frac{\pi D(\Phi_1 - \Phi_2)}{\Phi_2 d_2 - \Phi_1 d_1} + 1 = 315 .$$

## Глава 23

## ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ И ПОНДЕРОМОТОРНЫЕ СИЛЫ В МАГНЕТИКАХ

## 23.1 Теоретический материал

**Энергия магнитного поля при наличии магнетика** рассчитывается по формуле:

$$W = \frac{1}{2} \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV, \quad (23.1)$$

где  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$  – напряженность и индукция магнитного поля; интегрирование ведется по всей области пространства, где локализовано магнитное поле.

**Объемная плотность энергии магнитного поля** равна

$$w(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}). \quad (23.2)$$

Если связь напряженности  $\mathbf{H}$  и индукции  $\mathbf{B}$  магнитного поля линейная и изотропная ( $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu\mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r})$ ), то для плотности энергии магнитного поля можно записать:

$$w(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mu\mu_0 H^2(\mathbf{r}) = \frac{B^2(\mathbf{r})}{2\mu\mu_0}. \quad (23.3)$$

**Закон изменения энергии системы подвижных изолированных контуров с токами при наличии внешних сил и ЭДС.**

Сумма работ внешних сил  $A_{\text{внеш}}$  и ЭДС  $A_{\text{ст}}$  (сторонних сил) при квазистатическом (физически бесконечно медленном) изменении состояния системы контуров с током равна сумме количества теплоты  $Q$ , выделившейся в контурах, и изменения энергии магнитного поля  $\Delta W$ , создаваемого токами в контурах:

$$A_{\text{внеш}} + A_{\text{ст}} = Q + \Delta W.$$

Заметим, что при квазистатическом изменении состояния системы контуров с током сумма работ внешних сил  $A_{\text{внеш}}$  и пондеромоторных сил со стороны магнитного поля  $A$  равна нулю:

$$A_{\text{внеш}} + A = 0.$$

**Пондеромоторные силы** – это силы, действующие на тела со стороны электрического и магнитного полей.

**Работа пондеромоторных сил:**

$$\delta A = \sum_j F_{x_j} dx_j,$$

где  $F_{x_j}$  – обобщенные пондеромоторные силы, действующие по направлению обобщенной координаты  $x_j$ . Обобщенные координаты системы – координаты, однозначно определяющие положение тел системы в пространстве.

Обобщенные пондеромоторные силы могут быть найдены из их работы при изменении обобщенных координат:

$$F_{x_j} = \frac{\partial A}{\partial x_j}. \quad (23.5)$$

**Объемная плотность пондеромоторных сил, действующих на магнетик в магнитном поле.**

Для жестких магнетиков, в которых нет заметной корреляции между магнитным моментом молекулы и магнитной индукцией действующего на нее поля, объемная плотность пондеромоторных сил, действующих на магнетик, равна:

$$\mathbf{f} = i \left( \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \right) + j \left( \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \right) + k \left( \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} \right). \quad (23.6)$$

Здесь  $\mathbf{B}$  – магнитная индукция поля в магнетике и  $\mathbf{M}$  – вектор намагниченности магнетика.

Пусть магнетик линеен и изотропен и для него справедливо материальное уравнение  $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H} = \frac{\mu - 1}{\mu_0 \mu} \mathbf{B}$ , тогда:

$$\mathbf{f} = \frac{\mu - 1}{2\mu_0 \mu} \text{grad} (B^2). \quad (23.7)$$

**Связь пондеромоторных сил с энергией магнитного поля.**

Для (виртуальных) процессов, в которых сохраняются магнитные потоки  $\{\Phi_i\}$ , обобщенная пондеромоторная сила равна:

$$F_{x_j} = - \left( \frac{\partial W}{\partial x_j} \right)_{\Phi_i}. \quad (23.8)$$

Для (виртуальных) процессов, в которых постоянны силы тока  $\{I_i\}$ , обобщенная пондеромоторная сила равна:

$$F_{x_j} = \left( \frac{\partial W}{\partial x_j} \right)_{I_i}. \quad (23.9)$$

**Максвелловские силы натяжения в магнитном поле** – силы, действующие на поверхность раздела двух сред и возникающие под влиянием нормальной компоненты магнитного поля. Поверхностные плотности этих сил со стороны первой  $f_{1x}^n$  и второй  $f_{2x}^n$  сред (см. рис. 23.1) равны объемной плотности энергии, приходящейся на нормальную составляющую поля в этих средах, и направлены каждая в сторону своей среды (тянут к себе поверхность раздела):

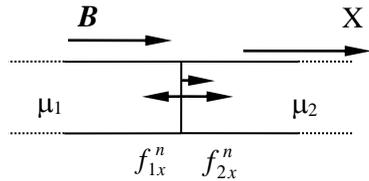


Рис. 23.1. Максвелловские силы натяжения в магнитном поле

$$f_{1x}^n = -w_1^n = -\frac{H_{1n}B_{1n}}{2}, \quad f_{2x}^n = w_2^n = \frac{H_{2n}B_{2n}}{2}. \quad (23.10)$$

Полная поверхностная плотность сил натяжения действует в сторону магнетика с меньшей магнитной проницаемостью и равна:

$$f_x^n = -(w_1^n - w_2^n) = \frac{B_n^2}{2\mu_0} \left( \frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1} \right). \quad (23.11)$$

**Максвелловские силы давления в магнитном поле** – силы, действующие на поверхность раздела двух сред и возникающие под влиянием тангенциальной компоненты магнитного поля. Поверхностные плотности этих сил со стороны первой  $f_{1x}^\tau$  и второй  $f_{2x}^\tau$  сред (см. рис. 23.2) равны объемной плотности энергии, приходящейся на тангенциальную составляющую поля в этих средах, и направлены каждая в сторону другой среды (давят на поверхность раздела):

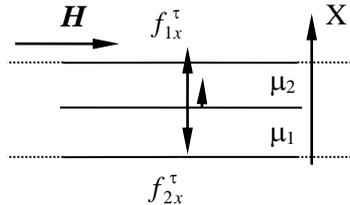


Рис. 23.2. Максвелловские силы давления в магнитном поле

$$f_{1x}^\tau = w_1^\tau = \frac{H_{1\tau}B_{1\tau}}{2}, \quad f_{2x}^\tau = -w_2^\tau = -\frac{H_{2\tau}B_{2\tau}}{2}. \quad (23.12)$$

Полная поверхностная плотность сил давления действует в сторону магнетика с меньшей магнитной проницаемостью и равна:

$$f_x^\tau = w_1^\tau - w_2^\tau = \frac{1}{2} \mu_0 H_\tau^2 (\mu_1 - \mu_2). \quad (23.13)$$

## 23.2. Основные типы задач (классификация)

- 23.1. Вычисление энергии магнитного поля в магнетиках.  
 23.2. Расчет максвелловских сил давления и натяжения.  
 23.3. Определение сил и моментов сил, действующих на магнетики в неоднородном магнитном поле.  
 23.4. Нахождение сил взаимодействия намагниченных тел.

## 23.3. Методы решения и примеры решения задач

### Задачи типа 23.1

*Вычисление энергии магнитного поля в магнетиках.*

*Метод решения.* Использование формул (23.1) – (23.3).

**Задача 23.3.1.** На тороидальный железный сердечник прямоугольного сечения с внутренним радиусом  $a$ , внешним  $b$  и высотой  $h$  намотана катушка с числом витков  $N$ , по которой течет ток силы  $I$  (рис. 23.3). Магнитная проницаемостью железа  $\mu$ . Найти энергию магнитного поля, заключенную в сердечнике.

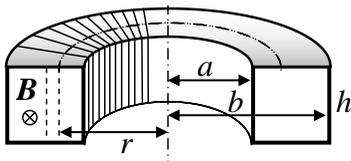


Рис. 23.3. Тороидальная катушка прямоугольного сечения.

### Решение

Ввиду осевой симметрии силовые линии внутри тора являются концентрическими окружностями с центром на его оси. Применим теорему о циркуляции напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$  по окружности радиуса  $r$ , проходящей внутри сердечника и имеющей длину  $2\pi r$ :  $H \cdot 2\pi r = IN$ , откуда находим:

$$H(r) = \frac{NI}{2\pi r}.$$

Для вычисления полной энергии магнитного поля внутри сердечника разобьем его на трубки малой толщины  $dr$ , радиуса  $r$  и высоты  $h$  (рис. 23.3). Энергия магнитного поля внутри такой трубки согласно формуле (23.3) равна:

$$dW(r) = w(r)dV = \frac{1}{2} \mu_0 \mu H^2(r) dV = \frac{1}{2} \mu_0 \mu \left( \frac{NI}{2\pi r} \right)^2 2\pi r h dr,$$

где  $dV = 2\pi r h dr$  – объем трубки.

При этом в сердечнике будет запасена энергия:

$$W = \int_a^b \mu_0 \mu \left( \frac{NI}{2\pi r} \right)^2 \pi r h dr = \frac{1}{4\pi} \mu_0 \mu N^2 I^2 h \ln \frac{b}{a}.$$

**Ответ:**  $W = \frac{1}{4\pi} \mu_0 \mu N^2 I^2 h \ln \frac{b}{a}.$

### Задачи типа 23.2

*Расчет максвелловских сил давления и натяжения.*

**Метод решения.** Использование формул (23.10) – (23.13).

**Задача 23.3.2.** Длинный вертикально расположенный соленоид, намотанный на тонкостенную немагнитную трубку с плотностью намотки  $n$  витков на единицу длины, погружен одним концом в парамагнитную жидкость с плотностью  $\rho$ . Радиус соленоида много меньше его длины. После включения тока силы  $I$  жидкость в трубке поднялась на высоту  $h$  (рис. 23.4). Найти магнитную проницаемость жидкости. Капиллярными эффектами пренебречь.

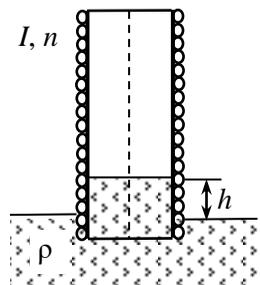


Рис. 23.4. Вертикальный соленоид, частично погруженный в парамагнитную жидкость.

### Решение

В данной задаче напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$ , строго говоря, не будет совпадать с напряженностью поля пустого соленоида  $\mathbf{H}_0$ , поскольку линии  $\mathbf{H}_0$  перпендикулярны поверхности магнитной жидкости. Действительно, на этой границе нормальная компонента  $\mathbf{H}$  будет иметь скачок  $H_{2n} - H_{1n} = M_n$ , вызванный полем возникающих на границе поверхностных "магнитных зарядов" плотности  $\sigma = M_n$ . Однако ввиду малости поперечного сечения соленоида поле от этих "магнитных зарядов" будет быстро спадать с удалением от границы (по аналогии с графиком  $H(z)$  в задаче 22.3.1). Поэтому в остальной части длинного соленоида напряженность поля  $\mathbf{H}$  не изменится и будет, как и в вакууме, равна  $H = nI$ .

Магнитная индукция над жидкостью равна

$$B_1 = \mu_0 H$$

и внутри жидкости составляет

$$B_2 = \mu\mu_0 H.$$

Поскольку эти величины не зависят от положения уровня жидкости, удобно решить задачу, исходя из выражения для давления, оказываемого на границу раздела двух сред с разными объемными плотностями  $w$  энергии магнитного поля (23.13):

$$p = w_2 - w_1 = \frac{1}{2} H(B_2 - B_1) = \frac{1}{2} \mu_0 (\mu - 1) H^2 = \frac{1}{2} \mu_0 (\mu - 1) (nI)^2.$$

Поскольку  $w_2 > w_1$ , при смещении границы жидкости вверх энергия магнитного поля возрастает. Так как токи остаются постоянными, механическая работа также положительна. Эту работу за счет работы источника ЭДС, поддерживающего ток в соленоиде, совершают силы давления, направленные вверх, которые и вызывают подъем жидкости. При равновесии давление, оказываемое на поверхность жидкости в магнитном поле, должно компенсироваться гидростатическим давлением:  $p = \rho gh$ .

Приравняем эти два давления:

$$\frac{1}{2} \mu_0 (\mu - 1) (nI)^2 = \rho gh,$$

и окончательно находим:

$$\mu = 1 + \frac{2\rho gh}{\mu_0 (nI)^2}.$$

*Замечание 1.* То, что  $B_1 \neq B_2$ , не противоречит условию непрерывности нормальной компоненты вектора  $\mathbf{B}$  на границе раздела сред, которое всегда выполняется. Приведенные выражения для величин индукций  $B_{1,2}$  и напряженности  $H$  справедливы при достаточно большом удалении от границы жидкости. На самой границе поле неоднородно, вектор  $\mathbf{B}$  не перпендикулярен к границе, и часть линий индукции  $\mathbf{B}$  из нижней части, где ее величина больше и линии идут гуще, выходит за пределы соленоида, не проходя в верхнюю часть.

*Замечание 2.* Несмотря на неоднородность поля в окрестности границы раздела сред, при нахождении давления, оказываемого на границу раздела, надо использовать величины полей, взятых вдали от границы. Действительно, при малом смещении приграничной области, где поля неоднородны, вся она смещается как целое, и ее магнитная энергия остается постоянной. Полная же энергия меняется только из-за изменения объемов верхней и нижней частей, где поля однородны и были найдены выше.

**Ответ:**  $\mu = 1 + \frac{2\rho gh}{\mu_0 (nI)^2}.$

### Задачи типа 23.3

*Определение сил и моментов сил, действующих на магнетики в неоднородном магнитном поле.*

**Метод решения.** Определение магнитных моментов  $\mathbf{M}$  тел, находящихся в неоднородном магнитном поле, с учетом их факторов формы. Затем расчет сил, действующих на тела, с помощью формулы (23.6). При расчете моментов сил  $\mathbf{N}$ , действующих на тела с магнитными моментами  $\mathbf{p}_m$ , использовать формулу  $\mathbf{N} = [\mathbf{p}_m \mathbf{B}]$  или метод "магнитных зарядов" (см. п. 22.1. Теоретический материал в Главе 22 ).

**Задача 23.3.3.** Длинный тонкий цилиндрический стержень радиусом  $a$  из парамагнетика с магнитной проницаемостью  $\mu$  расположен вдоль оси длинного соленоида. Один конец стержня находится в середине соленоида, второй совпадает с его торцом (см. рис. 23.5). Найти силу, действующую на стержень. Считать  $a \ll l$  ( $l$  – длина стержня).

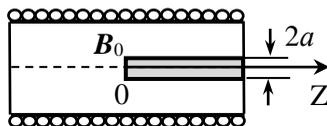


Рис. 23.5. Взаимное расположение тонкого парамагнитного стержня и катушки с током.

### Решение

Направим ось  $Z$  вдоль оси соленоида, начало отсчета совместим с левым концом стержня. В магнитном поле катушки у стержня появляется намагниченность

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H} = (\mu - 1) \mathbf{H},$$

где  $\chi = \mu - 1$  – магнитная восприимчивость материала,  $\mathbf{H}$  – напряженность магнитного поля в стержне.

В соленоиде поле неоднородно: оно убывает от середины соленоида к его торцу. В длинном соленоиде на его оси индукция магнитного поля меняется от  $B_0$  в середине до величины  $B_1 = \frac{1}{2} B_0$  в центре торца (глава 15, задача 15.3.5). При этом в месте нахождения тонкого стержня векторы индукции поля  $\mathbf{B}$ , напряженности  $\mathbf{H}$  и намагниченности  $\mathbf{M}$  направлены вдоль оси катушки и зависят только от координаты  $z$ . Для нахождения величины напряженности в

стержне используем материальное уравнение  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ , на основе которого получаем:

$$H_\mu = \frac{B_\mu}{\mu_0 \mu},$$

где  $B_\mu$  – индукция магнитного поля в стержне.

Из граничных условий для нормальных компонент вектора  $\mathbf{B}$  следует, что в центре соленоида  $B_\mu = B_0$ .

Со стороны магнитного поля соленоида на стержень будут действовать пондеромоторные силы с объемной плотностью  $\mathbf{f}$ , которая равна (23.6):

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= M \frac{d\mathbf{B}_\mu}{dz} \mathbf{e}_z = (\mu - 1) H_\mu \frac{d\mathbf{B}_\mu}{dz} \mathbf{e}_z = \frac{\mu - 1}{\mu_0} \cdot B \cdot \frac{dB}{dz} \mathbf{e}_z = \\ &= \frac{\mu - 1}{\mu_0 \mu} \cdot B_\mu \frac{dB_\mu}{dz} \mathbf{e}_z = \frac{\mu - 1}{2\mu_0 \mu} \cdot \frac{d(B_\mu^2)}{dz} \mathbf{e}_z, \end{aligned} \quad (23.14)$$

где  $\mathbf{e}_z$  – единичный орт в направлении оси  $Z$ .

Величина силы, действующей на элемент объема  $dV$ , имеющий длину  $dz$  и площадь поперечного сечения  $S = \pi a^2$ , равна:

$$dF = f dV = \frac{\mu - 1}{2\mu_0 \mu} \cdot \frac{d(B_\mu^2)}{dz} \cdot S dz. \quad (23.15)$$

Проекцию вектора силы на ось  $Z$  находим, интегрируя выражение (23.15) в пределах от  $B_0$  до  $B_1 = B_0/2$ :

$$F = S \frac{\mu - 1}{2\mu_0 \mu} \int_{B_0}^{B_1} d(B^2) = S \frac{\mu - 1}{2\mu_0 \mu} (B_1^2 - B_0^2) = -\frac{3}{8} S \frac{\mu - 1}{\mu \mu_0} B_0^2.$$

Знак "минус" показывает, что сила направлена против оси  $Z$ , то есть стремится втянуть парамагнитный стержень в центр соленоида.

$$\text{Ответ: } F = -\frac{3}{8} S \frac{\mu - 1}{\mu \mu_0} B_0^2 \mathbf{e}_z.$$

**Задача 23.3.4.** Небольшой парамагнитный шарик объемом  $V$  подвешен на тонкой нерастяжимой нити над горизонтальным кольцом радиуса  $R$ , по которому течет ток  $I$ , на расстоянии  $d = R$  от плоскости кольца (рис. 23.6). Шарик изготовлен из материала с

магнитной проницаемостью  $\mu$ . Какая сила будет действовать на шарик со стороны магнитного поля кольца?

### Решение

Введем ось  $X$ , направленную вдоль оси кольца, с началом отсчета в его центре (рис. 23.6). Кольцо с током силы  $I$  создает магнитное поле, модуль индукции которого на оси кольца был рассчитан в задаче 15.3.3 главы 15 и равен:

$$B = \frac{\mu_0 R^2 I}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}, \quad (23.16)$$

где  $x$  – расстояние до плоскости кольца.

Индукция  $\mathbf{B}$  направлена вдоль оси кольца. При направлении тока, указанном на рис. 23.6, вектор индукции ориентирован в положительном направлении оси  $X$ .

В магнитном поле шарик приобретет магнитный момент

$$\mathbf{p}_m = \mathbf{M}V = (\mu - 1)V\mathbf{H}_m, \quad (23.17)$$

где  $\mathbf{H}_m$  – напряженность магнитного поля в шарике,  $\mathbf{M}$  – вектор намагниченности парамагнетика.

Считаем, что из-за малости шарика в месте его нахождения индукция внешнего поля  $\mathbf{B}$  неизменна. Напряженность поля в шарике  $\mathbf{H}_m$  складывается из напряженности внешнего поля  $\mathbf{H}$  и напряженности поля  $\mathbf{H}_i$ , созданного в шаре в результате его намагничивания. Напряженность поля в шаре с учетом фактора формы шара  $N_i = 1/3$  можно рассчитать следующим образом.

Согласно линейному материальному уравнению

$$\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}_m = (\mu - 1)(\mathbf{H} + \mathbf{H}_i).$$

Учитывая связь  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{H}_i$ :

$$\mathbf{H}_i = -\frac{1}{3}\mathbf{M},$$

получим:

$$\mathbf{M} = (\mu - 1)\left(\mathbf{H} - \frac{1}{3}\mathbf{M}\right),$$

откуда выразим намагниченность шара  $\mathbf{M}$ :

$$\mathbf{M} = \frac{3(\mu - 1)}{\mu + 2}\mathbf{H}_0 = \frac{3(\mu - 1)}{\mu_0(\mu + 2)}\mathbf{B}_0.$$

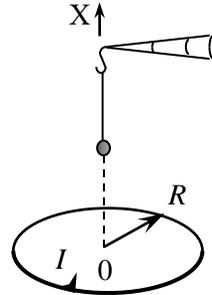


Рис. 23.6. Парамагнитный шарик, подвешенный над кольцом с током.

В результате находим напряжённость магнитного поля внутри шара:

$$H_{\text{ш}} = \frac{M}{\mu - 1} = \frac{3H}{\mu + 2} = \frac{3B}{\mu_0(\mu + 2)}, \quad (23.18)$$

где  $B$  – индукция магнитного поля в месте нахождения шарика.

Сила, действующая на шарик в неоднородном магнитном поле, индукция которого зависит только от одной переменной  $x$ , равна

$$F = p_m \frac{\partial B}{\partial x} \quad (23.19)$$

и направлена в сторону возрастания индукции поля, т.е. к плоскости кольца. Найдем производную  $\frac{\partial B}{\partial x}$ :

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\mu_0 R^2 I}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \frac{2x}{(R^2 + x^2)^{5/2}} = -\frac{3\mu_0 R^2 I}{2} \cdot \frac{x}{(R^2 + x^2)^{5/2}}. \quad (23.20)$$

Подставляя соотношения (23.17), (23.18) и (23.20) в формулу (23.19), находим проекцию на ось  $X$  силы  $F$ , действующей на шарик:

$$\begin{aligned} F_x &= (\mu - 1) V H_{\text{ш}} \frac{\partial B}{\partial x} = \\ &= -(\mu - 1) V \cdot \frac{3}{2 + \mu} \cdot \frac{R^2 I}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} \cdot \frac{3\mu_0 R^2 I}{2} \cdot \frac{x}{(R^2 + x^2)^{5/2}} = \\ &= -\frac{9(\mu - 1) V \mu_0 I^2 R^4}{4(2 + \mu)} \cdot \frac{x}{(R^2 + x^2)^4}. \end{aligned}$$

Подставляя в полученное выражение для силы  $F$  значение  $x = d = R$ , окончательно получаем ответ:

$$F_x = -\frac{9(\mu - 1) V \mu_0 I^2 R^4}{4(2 + \mu)} \cdot \frac{R}{(R^2 + R^2)^4} = -\frac{9\mu_0(\mu - 1) V I^2}{64(2 + \mu) R^3}.$$

Поскольку у парамагнетика  $\mu > 1$ , сила  $F$  будет ориентирована в отрицательном направлении оси  $X$ , и шарик будет притягиваться к кольцу с током.

**Ответ:**  $|F| = \frac{9\mu_0(\mu - 1) V I^2}{64(2 + \mu) R^3}$ , сила направлена по оси кольца с

током к кольцу.

**Задача 23.3.5.** Тонкая парамагнитная палочка массы  $m$ , обладающая магнитной восприимчивостью  $\chi$ , расположена в центре длинного соленоида перпендикулярно его оси (см. рис. 23.7). Палочка изготовлена из материала с плотностью  $\rho$ , её длина значительно меньше радиуса соленоида. Палочку, не меняя её ориентации, медленно переместили вдоль оси соленоида из его центра, где индукция магнитного поля равна  $B_0$ , в середину одного из торцов. Какую работу совершили при этом против сил магнитного поля?

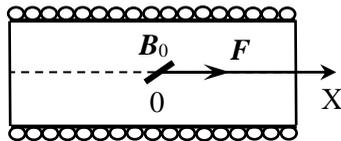


Рис. 23.7. Парамагнитная палочка в центре длинного соленоида.

### Решение

Магнитное поле соленоида с током неоднородно: оно убывает от середины соленоида, где по условию задачи равно  $B_0$ , к его торцу, где для длинного соленоида составляет  $B_1 \cong \frac{1}{2} B_0$ .

Ввиду малости палочки можно считать, что в её объеме магнитное поле однородно и постоянно. Тогда в магнитном поле соленоида парамагнитная палочка приобретет магнитный момент  $p_m = MV = \chi V H_1$ , где  $V$  — объем палочки,  $H_1$  — напряженность магнитного поля внутри неё,  $M$  — вектор намагниченности парамагнетика. Так как палочка парамагнитная ( $\chi > 0$ ), её магнитный момент будет сонаправлен с вектором  $H_1$ .

Считая палочку достаточно тонкой по сравнению с её длиной, воспользуемся тем, что для длинного цилиндра факторы формы в его поперечном сечении  $N_1 = N_2 = 1/2$ , а в продольном направлении  $N_3 = 0$ . Тогда внутри палочки напряженность "размагничивающего" поля  $H' = -M/2 = -\chi H_1/2$ .

При этом полная напряженность магнитного поля складывается из напряженности  $H$  внешнего поля соленоида и напряженности  $H'$  "размагничивающего" поля:

$$H_1 = H + H' = H - \frac{1}{2} \chi H_1.$$

Для напряженности поля внутри палочки получаем:

$$H_1 = \frac{2}{2 + \chi} H = \frac{2B}{(2 + \chi)\mu_0}, \quad (23.21)$$

где  $H$  — напряженность внешнего поля соленоида.

Магнитный момент  $\mathbf{p}_m$ , приобретенный палочкой в магнитном поле, будет направлен по одной линии с индукцией  $\mathbf{B}$  поля соленоида в месте нахождения палочки, поэтому вращающий момент сил  $\mathbf{M}_B = [\mathbf{p}_m \mathbf{B}] = 0$ , и палочка поворачиваться не будет.

Направим ось  $X$  вдоль оси соленоида, начало отсчета совместим с его центром (рис. 23.7). Поскольку вдоль оси соленоида индукция поля  $\mathbf{B}$ , а также векторы  $\mathbf{H}_1$  и  $\mathbf{M}$  зависят только от координаты  $x$ , величину силы, действующей на палочку в неоднородном магнитном поле, можно представить в виде:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p}_m \nabla) \mathbf{B} = p_m \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} = \chi V H_1 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}. \quad (23.22)$$

Эта сила направлена в сторону увеличения магнитной индукции, т.е. к центру соленоида, и стремится втянуть палочку обратно, поэтому для её перемещения надо приложить внешнюю силу, равную по величине силе  $\mathbf{F}$  со стороны магнитного поля и противоположно ей направленную. Работа, совершаемая внешней силой по перемещению палочки на расстояние  $dx$ , равна:

$$\delta A_{\text{внеш}} = F dx = p_m \frac{dB}{dx} dx = \chi V H_1 dB. \quad (23.23)$$

Так как объем палочки  $V = m / \rho$ , с учетом формулы (23.21) находим искомую работу по перемещению палочки, интегрируя выражение (23.23):

$$A_{\text{внеш}} = \chi V \int_{B_1}^{B_0} \frac{2B}{\mu_0(2+\chi)} dB = \frac{2\chi(m/\rho)}{2\mu_0(2+\chi)} (B_0^2 - B_1^2) = \frac{3\chi m B_0^2}{4\mu_0(2+\chi)\rho}.$$

**Ответ:**  $A_{\text{внеш}} = \frac{3\chi m B_0^2}{4\mu_0(2+\chi)\rho}.$

**Задача 23.3.6.** Найти период малых горизонтальных крутильных колебаний стрелки компаса вокруг вертикальной оси, перпендикулярной бесконечному горизонтальному проводу с током  $I$ . Стрелка расположена над проводом на расстоянии  $h$  от него (рис. 23.8a). Стрелку считать тонким цилиндром длины  $2l$  с постоянной продольной намагниченностью  $M$ , изготовленной из материала с плотностью  $\rho$ .

## Решение

В положении равновесия стрелка установится перпендикулярно проводу, поскольку силовые линии магнитного поля являются концентрическими окружностями, плоскость которых перпендикулярна направлению тока.

На торцах цилиндрической стрелки нормальная компонента намагнитченности имеет разрыв, из-за чего на них появятся поверхностные "магнитные заряды" противоположного знака с плотностью  $\sigma_m = \pm M$ , а полная величина "заряда" на каждом торце будет  $q_m = \pm \sigma S$ , где  $S$  – площадь основания цилиндра.

Ввиду тонкости цилиндра-стрелки можно считать, что магнитное поле, создаваемое проводом, на поверхности торца стрелки однородно и имеет индукцию:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi h} \cos \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол между осью  $Z$  и перпендикуляром, опущенным из торца на ось провода (рис. 23.6б).

Силы со стороны магнитного поля будут приложены к торцам стрелки, направлены по касательным к силовой линии (пунктир на рис. 23.8б) и равны  $F_{1,2} = F = B(r) q_m$ .

Для расчета момента этих сил относительно оси  $Z$  требуется их  $x$ -компонента:

$$F_x = F \cos \alpha = \pm \frac{\mu_0 I}{2\pi h} q_m \cos^2 \beta = \pm \frac{\mu_0 I q_m}{2\pi h} \frac{h^2}{h^2 + l'^2},$$

где  $l' = l \cos \varphi$  – проекция половины стрелки на ось  $X$ .

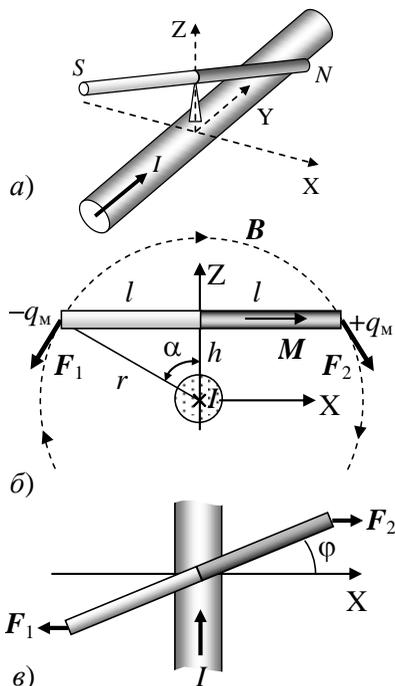


Рис. 23.8. К нахождению периода колебаний стрелки компаса над проводом с током: а) общий вид; б) вид вдоль провода; в) вид сверху.

При отклонении стрелки от положения равновесия на угол  $\varphi$  возникает возвращающий момент магнитных сил

$$N_z = -2l F_x \sin\varphi$$

(рис. 23.8в). В приближении малых колебаний ( $\varphi \ll 1$ ,  $l \approx h$ ) момент этих сил будет пропорционален углу  $\varphi$  и равен:

$$N_z = -\frac{\mu_0 I q_m}{\pi} \frac{hl}{h^2 + l^2} \varphi = -D\varphi,$$

где через  $D$  обозначен данный коэффициент пропорциональности.

Уравнение малых колебаний стрелки имеет вид:

$$J\ddot{\varphi} = -D\varphi,$$

где  $J = \frac{1}{12} m(2l)^2 = \frac{2}{3} \rho S l^3$  – момент инерции тонкого цилиндра

длины  $2l$  относительно оси, проходящей через его центр.

Для квадрата круговой частоты колебаний получаем:

$$\omega^2 = \frac{D}{J} = \frac{3\mu_0 IM}{2\pi\rho h} \frac{1}{1 + \left(\frac{l}{h}\right)^2},$$

откуда находим период крутильных колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{2\pi\rho h \left(1 + (l/h)^2\right)}{3\mu_0 IM}}.$$

*Замечание.* При малом размере магнитной стрелки по сравнению с расстоянием до провода ( $l \ll h$ ) можно использовать дипольное приближение. Дипольный момент стрелки-цилиндра равен  $p_m = MV = 2MSl$ , а действующий на него вращающий момент

$N_z = [p_m \mathbf{B}]_z = -p_m B \sin\varphi$ , где  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi h}$ . Подставляя эти выражения в

уравнение колебаний, получаем:  $\omega^2 = \frac{3\mu_0 IM}{2\pi\rho h}$ , что совпадает с

найденным выше ответом при  $l/h \rightarrow 0$ .

**Ответ:** 
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{2\pi\rho h \left(1 + (l/h)^2\right)}{3\mu_0 IM}}.$$

### Задачи типа 23.4

*Нахождение сил взаимодействия намагниченных тел.*

**Метод решения.** Нахождение напряженности магнитного поля

с помощью теоремы о циркуляции напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$ , затем определение энергии магнитного поля системы тел. Если магнитное поле создается контуром с током, то для нахождения сил удобно использовать соотношение:

$$\delta A = \delta W|_{I = \text{const}} = \frac{1}{2} I^2 \delta L,$$

где  $\delta A$  – механическая работа, совершаемая искомыми силами при малом изменении конфигурации системы, а  $\delta W|_{I = \text{const}}$  – происходящее при этом изменение магнитной энергии при условии, что ток через контур поддерживается постоянным,  $\delta L$  – соответствующее малое изменение индуктивности контура.

**Задача 23.3.7.** Найти силу притяжения двух половинок тонкого тороидального сердечника среднего радиуса  $R$ , имеющего квадратное поперечное сечение площади  $S$  ( $R \gg \sqrt{S}$ ). Сердечник сделан из ферромагнитного материала с большой магнитной проницаемостью  $\mu$  ( $\mu \gg 1$ ). На нем намотано  $N$  витков провода, по которому течет ток силы  $I$ .

### Решение

Силу в данной задаче можно найти несколькими способами. Определим её через выражение для энергии магнитного поля.

Мысленно раздвинем половинки тора на расстояние  $x$ , малое по сравнению с его поперечными размерами (см. рис. 23.9). В процессе увеличения расстояния на величину  $dx$  внешние силы совершают работу, которая будет равна изменению энергии сердечника:

$$\delta A = F dx = \delta W|_{I = \text{const}},$$

откуда

$$F = \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)_I.$$

Учитывая, что энергия магнитного поля тора равна

$$W = \frac{1}{2} LI^2,$$

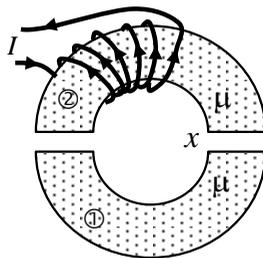


Рис. 23.9. Разделенный на две половины тороидальный сердечник.

где  $L$  – индуктивность катушки с сердечником, получаем:

$$F = \left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_{I=\text{const}} = \frac{1}{2} I^2 \frac{\partial L}{\partial x}. \quad (23.24)$$

Найдем зависимость индуктивности  $L$  от расстояния  $x$ . Поскольку  $\mu \gg 1$ , будем считать, что магнитное поле сконцентрировано внутри сердечника, линии магнитной индукции  $\mathbf{B}$  являются окружностями и не искажаются при пересечении тонкого зазора. Ввиду малой толщины тора пренебрежем также зависимостью индукции магнитного поля от его радиуса.

Пусть  $H_1$  – напряженность магнитного поля в нижней половине тора,  $H_2$  – в верхней,  $H_3$  – в зазоре. Запишем теорему о циркуляции вектора  $\mathbf{H}$  для контура в виде окружности радиуса  $R$ , учитывая, что он охватывает  $N$  витков с током  $I$ :

$$\pi R H_1 + \pi R H_2 + 2xH_3 = NI. \quad (23.25)$$

Поскольку зазор тонкий и нормальная компонента индукции  $B_n$  непрерывна на границах зазора, модуль вектора  $\mathbf{B}$  будет одинаков как в торе, так и в зазоре. Из материального уравнения  $\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}$  следует, что

$$H_1 = H_2 = \frac{B}{\mu\mu_0}, \quad H_3 = \frac{B}{\mu_0}. \quad (23.26)$$

Подставляя в соотношение (23.25) выражения для напряженностей полей (23.26), получим:

$$\frac{2\pi RB}{\mu\mu_0} + \frac{2xB}{\mu_0} = NI,$$

откуда находим величину индукции  $B(x)$ :

$$B(x) = \mu_0 \frac{NI}{\pi R} \cdot \frac{1}{\frac{2}{\mu} + \frac{2x}{\pi R}}.$$

Учитывая, что полный поток магнитной индукции через обмотку  $\Phi = NSB = LI$ , находим индуктивность  $L$  катушки с сердечником:

$$L(x) = \mu_0 S \frac{N^2}{\pi R} \cdot \frac{1}{\frac{2}{\mu} + \frac{2x}{\pi R}}. \quad (23.27)$$

Подставляя выражение (23.27) в формулу (23.24), получаем зависимость силы взаимодействия половинок тора от расстояния  $x$  между ними:

$$F(x) = \frac{I^2}{2} \cdot \frac{\partial L}{\partial x} = -\mu_0 S \left( \frac{N}{\pi R} \right)^2 \frac{I^2}{\left( \frac{2}{\mu} + \frac{2x}{\pi R} \right)^2}.$$

Когда половинки тора полностью прижаты ( $x = 0$ ), сила будет равна:

$$F(0) = -\mu_0 S \left( \frac{N}{\pi R} \right)^2 \frac{I^2}{(2/\mu)^2} = -\mu_0 S \left( \frac{\mu N}{2\pi R} \right)^2 I^2.$$

Отрицательный знак силы означает, что она направлена против увеличения расстояния  $x$ , то есть вызывает взаимное притяжение половинок сердечника.

*Замечание.* Силу притяжения можно найти и как притяжение "магнитных зарядов", образующихся на границах зазоров, как было рассмотрено в задаче 22.3.2 главы 22. Используя полученное там выражение для силы и найденную здесь величину индукции поля  $B$ , а также учитывая наличие двух зазоров, получаем:

$$F = 2 \cdot \frac{1}{2} S \mu_0 M^2 = S \mu_0 \left( \frac{\mu - 1}{\mu \mu_0} B \right)^2 = \mu_0 S \left( \frac{\mu - 1}{\mu} \right)^2 \left( \frac{N}{\pi R} \right)^2 \frac{I^2}{\left( \frac{2}{\mu} + \frac{2x}{\pi R} \right)^2}.$$

В использованном приближении ( $\mu \gg 1$ ,  $(\mu - 1)/\mu \rightarrow 1$ ) это выражение совпадает с полученным выше.

**Ответ:**  $F = \mu_0 S \left( \frac{\mu N}{2\pi R} \right)^2 I^2.$

**Задача 23.3.8.** Электромагнит в форме подковы, изготовленный из железа с магнитной проницаемостью  $\mu \gg 1$ , имеет площадь поперечного сечения  $S$ . Общая длина сердечника с якорем по средней линии (длина магнитной цепи) равна  $l$ . Число витков обмотки  $N$  (см. рис. 23.10). Якорь магнита с нагрузкой весит  $P$  и отстоит от сердечника на расстояние  $x \ll l$ . Какой ток  $I$  надо пустить по обмотке электромагнита, чтобы он притянул якорь? Рассеянием магнитного поля в зазоре пренебречь.

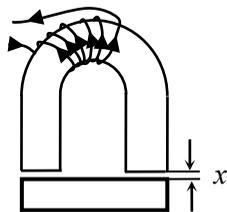


Рис. 23.10. Электромагнит с якорем.

## Решение

При небольшом виртуальном перемещении якоря электромагнита на расстояние  $dx$  внешние силы совершают работу, равную изменению энергии магнитного поля:

$$\delta A = F dx = \delta W \Big|_{I=\text{const}},$$

откуда

$$F = \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)_I.$$

Подставляя энергию магнитного поля

$$W = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} I \Phi,$$

где  $L$  – индуктивность катушки с сердечником,  $\Phi = LI$  – поток магнитной индукции, пронизывающий все витки обмотки (потокосцепление), получаем:

$$F = \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{I=\text{const}} = \frac{1}{2} I \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (23.28)$$

Найдем магнитный поток  $\Phi$ . Для этого запишем теорему о циркуляции вектора  $\mathbf{H}$  для контура, проходящего внутри сердечника с якорем длиной  $l$ , включая зазоры между якорем и сердечником длиной  $x$  каждый:

$$H_1 l + 2x H_2 = NI, \quad (23.29)$$

где  $H_1$  – напряженность магнитного поля в сердечнике,  $H_2$  – в зазорах.

Учитывая непрерывность нормальной компоненты  $B_n$  на границах зазоров и материальное уравнение  $\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}$ , находим:

$$H_1 = \frac{B}{\mu \mu_0}, \quad H_2 = \frac{B}{\mu_0}. \quad (23.30)$$

При этом уравнение (23.29) принимает вид:

$$\frac{Bl}{\mu \mu_0} + \frac{2xB}{\mu_0} = NI,$$

откуда определяем величину индукции  $B(x)$ :

$$B(x) = \frac{\mu_0 \mu NI}{l + 2\mu x}. \quad (23.31)$$

Учитывая, что полный поток магнитной индукции через обмотку  $\Phi = NSB$ , находим:

$$\Phi(x) = NS \frac{\mu_0 \mu N I}{l + 2\mu x} = \frac{\mu_0 \mu N^2 I S}{l + 2\mu x}. \quad (23.32)$$

Подставляя выражение (23.32) в формулу (23.28), получаем силу, притягивающую якорь электромагнита:

$$F(x) = \frac{I}{2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} = - \frac{\mu_0 \mu^2 N^2 I^2 S}{(l + 2\mu x)^2}, \quad (23.33)$$

где  $S' = 2S$  – площадь контакта якоря с сердечником.

Отрицательный знак силы означает, что она направлена против увеличения расстояния  $x$ , то есть вызывает взаимное притяжение якоря и сердечника.

Приравнявая силу притяжения якоря к магниту и вес якоря с нагрузкой, находим искомую силу тока в обмотке магнита:

$$I = \sqrt{\frac{P}{\mu_0 S}} \cdot \frac{l + 2\mu x}{\mu N}.$$

*Замечание.* Выражение (23.33) можно переписать в виде:

$$F(x) = - \frac{\mu_0 \mu^2 N^2 I^2 S}{(l + 2\mu x)^2} = - \frac{B^2}{2\mu_0} \cdot 2S,$$

где  $S' = 2S$  – площадь контакта якоря с сердечником,  $B$  выражается формулой (23.31).

Полученное выражение определяет силу притяжения якоря к магниту  $F$  через поверхностную плотность максвелловских сил давления  $B^2 / (2\mu_0)$ .

**Ответ:** 
$$I = \sqrt{\frac{P}{\mu_0 S}} \cdot \frac{l + 2\mu x}{\mu N}.$$

### 23.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 23.4.1.** Длинный соленоид длины  $l$  и радиуса  $R$  с плотностью намотки  $n$  витков на метр и протекающим по нему током  $I$  погружен горизонтально до середины в парамагнитную жидкость с магнитной проницаемостью  $\mu$ . Найти давление, действующее на поверхность жидкости, и полную силу, действующую на соленоид.

*Ответ:*  $p = (1/2) \mu_0 (\mu - 1) n^2 I^2$ ;  $F = 2IRp$ , сила направлена вниз.

**Задача 23.4.2.** Небольшой шарик объема  $V$  из парамагнитного материала с проницаемостью  $\mu$  переместили из точки с магнитной индукцией  $B$  в точку, где магнитное поле отсутствует. Какую работу совершили силы магнитного поля?

$$\text{Ответ: } A = -(\mu - 1)V \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

**Задача 23.4.3.** Найти силу притяжения двух половинок тонкого тора радиуса  $R$ , имеющего квадратное поперечное сечение площади  $S$  ( $R \gg \sqrt{S}$ ), сделанных из материалов с большой магнитной проницаемостью  $\mu_1$  и  $\mu_2$  соответственно. Обмотка на торе имеет  $N$  витков, и по ней идет ток  $I$ .

$$\text{Ответ: } F = \mu_0 S \left( \frac{N}{\pi R} \right)^2 \left( \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \right)^2 I^2.$$

**Задача 23.4.4.** В сердечнике тороидального электромагнита радиуса  $R$  и круглого сечения площади  $S$  ( $R \gg \sqrt{S}$ ) имеется малый зазор ширины  $l$  ( $l \ll \sqrt{S}$ ), в который помещена пластинка из того же материала (рис. 23.11). По обмотке из  $N$  витков течет ток  $I$ . Магнитная проницаемость материала  $\mu$  ( $\mu \gg 1$ ). Какую работу нужно совершить против сил магнитного поля, чтобы удалить пластинку из зазора?

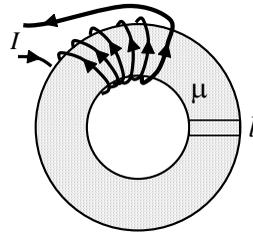


Рис. 23.11. Сердечник электромагнита с магнитной прокладкой в зазоре.

$$\text{Ответ: } A = \frac{\mu_0 S (\mu N I)^2}{4\pi R \left( \mu + \frac{2\pi R}{l} \right)}.$$

**Задача 23.4.5.** Бесконечный прямолинейный тонкий провод расположен на расстоянии  $a$  от плоской бесконечной поверхности магнетика с проницаемостью  $\mu$  параллельно поверхности. Найти силу, действующую на единицу длины провода, если по нему течет ток силы  $I$ .

$$\text{Ответ: } F = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \cdot \frac{I^2}{a}.$$

**Задача 23.4.6** ([2], 3.298). Длинный прямой соленоид, содержащий  $n$  витков на единицу длины, погрузили наполовину в парамагнитную жидкость, как показано на рис. 23.12. Найти силу, действующую со стороны магнитного поля на единицу поверхности жидкости, если её магнитная восприимчивость равна  $\chi$  и через соленоид течет ток  $I$ . Куда направлена эта сила?

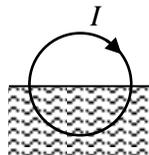


Рис. 23.12. Прямой соленоид, погруженный наполовину в парамагнитную жидкость.

$$\text{Ответ: } F_1 = \mu_0 \chi n^2 I^2 / 2, \text{ сила направлена вверх.}$$

**Задача 23.4.7** ([3], 363). Между полюсами сильного электромагнита помещают U – образную трубку так, что одно колено (капиллярное) находится в магнитном поле, а другое (широкое) – вне поля. В трубку наливают жидкость, магнитная восприимчивость которой  $\chi$ , а плотность  $\rho$ . На сколько изменится уровень жидкости в капилляре при включении магнитного поля с индукцией  $\mathbf{B}$ ? Магнитную восприимчивость пара и воздуха над жидкостью считать равной 1.

$$\text{Ответ: жидкость опустится на высоту } h = \frac{\chi B^2}{2\mu_0 \rho g}, \text{ если } \chi < 0,$$

и поднимется на  $h$ , если  $\chi > 0$ .

**Задача 23.4.8** ([3], 349). Электромагнит из железного бруса в форме подковы (см. рис. 23.13) имеет размеры:  $a = 5$  см,  $b = 10$  см,  $d = 5$  см,  $h = 10$  см,  $R = 7,5$  см. Число витков обмотки  $N = 200$ . Сила тока  $I = 2$  А. Какова подъемная сила  $F$  электромагнита, если  $\mu = 200$ ?

$$\text{Ответ: } F \approx 50 \text{ Н.}$$

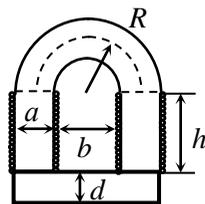


Рис. 23.13. Электромагнит в форме подковы.

**Задача 23.4.9** ([3], 276). Постоянный магнит в форме подковы с круглым сечением, диаметр которого  $D = 2$  см, способен удерживать якорь с грузом, которые вместе имеют массу  $m = 10$  кг. Чему равны

напряженность  $H$  магнитного поля вблизи полюсов магнита и поверхностная плотность  $\sigma$  "магнитных зарядов" на полюсах магнита?

*Ответ:*  $H \approx 78,6$  А/м,  $\sigma \approx 1,83 \cdot 10^{-3}$  Кл/м<sup>2</sup>.

**Задача 23.4.10** ([3], 271). Магнитный момент стрелки компаса  $p_m$ , её масса  $m$ , длина  $l$ . Горизонтальная составляющая индукции магнитного поля Земли  $B_r$ . Рассматривая магнитную стрелку как тонкий стержень, определить период  $T$  её колебаний в магнитном поле Земли.

*Ответ:* 
$$T = 2\pi l \sqrt{\frac{m}{3p_m B_r}} .$$

**Задача 23.4.11** ([3], 272). Магнит с магнитным моментом  $p_m$  в виде цилиндрического стержня массой  $m$  и радиусом  $R$  подвешен за свою середину на нити следующим образом: в середине стержня перпендикулярно к оси просверлено очень малое отверстие, в котором закреплена нить. Как расположится стержень в магнитном поле Земли, горизонтальная и вертикальная составляющие индукции которого соответственно равны  $B_r$  и  $B_v$ ?

*Ответ:* с вертикалью стержень образует угол  $\beta$ , определяемый соотношением:  $\operatorname{tg} \beta = \frac{mgR + B_r p_m}{p_m B_v}$ ; с плоскостью магнитного меридиана он образует угол  $\alpha$ , который находится из уравнения:  $C(\alpha - \alpha_0) = p_m B \sin \alpha$ , где  $\alpha_0$  – угол, отсчитываемый от плоскости магнитного меридиана, при котором нить не закручена,  $C$  – модуль кручения нити.

## Глава 24

**ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ****24.1. Теоретический материал**

**Квазистационарные электромагнитные процессы** – процессы, для которых характерное время изменения электромагнитных физических величин гораздо больше времени установления электромагнитного равновесия в электрической цепи.

**Условия квазистационарности.**

*Локальное условие.* Характерное время рассматриваемого процесса  $\tau$  должно быть гораздо больше, чем характерное время установления локального равновесия (рассасывания избыточного свободного заряда в среде), так называемое время диэлектрической релаксации или время релаксации Максвелла  $\tau_M$ :

$$\tau \gg \tau_M = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\lambda}. \quad (24.1)$$

*Нелокальное условие.* Для того, чтобы мгновенные значения всех электрических величин в каждой части электрической цепи были такими же, как в случае постоянного тока, необходимо, чтобы характерное время рассматриваемого процесса  $\tau$  было гораздо больше, чем максимальное время  $\tau_{\max}$  распространения электромагнитного возмущения вдоль цепи:

$$\tau \gg \tau_{\max} = \frac{l_{\max}}{v} = \sqrt{\varepsilon \mu} \frac{l_{\max}}{c}, \quad (24.2)$$

где  $l_{\max}$  – максимальная длина электрической цепи,  $\varepsilon$  и  $\mu$  – диэлектрическая и магнитная проницаемости.

**Переходные процессы в электрических цепях, уравнения процессов и начальные условия.**

*Переходный процесс в электрической цепи* – переход из одного стационарного состояния электрической цепи в другое, происходящий при изменении параметров цепи – ЭДС  $\mathcal{E}$ , емкостей  $C$ , индуктивностей  $L$  и сопротивлений  $R$  (в частности при замыкании или размыкании ключей).

*Стационарное состояние электрической цепи* – состояние цепи, в котором не меняются во времени физические величины, определяющие это состояние (заряды на обкладках конденсаторов  $q_C$ , силы токов  $I$  и разности потенциалов  $U_C$  и  $U_L$  на участках цепи) при фиксированных параметрах цепи.

В исходном стационарном состоянии электрической цепи физические величины, определяющие ее состояние ( $q_C$ ,  $I$ ), находятся с помощью законов Ома и правил Кирхгофа в результате решения системы линейных алгебраических уравнений.

После изменения параметров электрической цепи система осуществляет квазистационарный процесс – последовательно проходит через стационарные состояния. В этом процессе физические величины, определяющие состояние цепи, находятся с помощью законов Ома и правил Кирхгофа для квазистационарных процессов. Основное отличие в использовании этих законов и правил от случая стационарных состояний – появление в уравнениях ЭДС индукции  $\mathcal{E}^{\text{инд}}$  на участках цепи, содержащих индуктивности, и токов  $I_C$  на участках цепи, содержащих конденсаторы.

В результате появляется система линейных дифференциальных уравнений, в решении которой необходимо использовать начальные условия – значения искомых величин и их первых производных в один и тот же, начальный, момент времени – сразу после перехода системы в квазистационарное состояние.

При изменении параметров цепи не могут претерпевать скачки сила тока  $I_L$ , текущего через индуктивность, а также заряд  $q_C$  (и разность потенциалов  $U_C$ ) на конденсаторе при наличии сопротивления  $R$  или индуктивности  $L$  в цепи конденсатора.

**Взаимосвязь между током и напряжением на отдельных участках цепи** (резисторе, конденсаторе и катушке индуктивности, которые рассматриваются как элементы с сосредоточенными параметрами).

**Резистор:**

$$U_R = R I_R, \quad (24.3)$$

где  $U_R$  – напряжение на резисторе;  $I_R$  – сила тока, протекающего через этот резистор;  $R$  – сопротивление резистора.

**Конденсатор:**

$$U_C = \frac{Q}{C}, \quad I_C = C \frac{dU_C}{dt}. \quad (24.4)$$

Здесь  $U_C$  – напряжение на конденсаторе;  $I_C$  – сила тока, протекающего через конденсатор;  $Q$  – заряд конденсатора,  $C$  – емкость конденсатора.

Из соотношений (24.4) следует:

$$U_C(t) = U_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t I_C dt, \quad (24.5)$$

где  $U_C(0)$  – напряжение на конденсаторе в момент времени  $t = 0$ .

**Катушка индуктивности:**

$$U_L = L \frac{dI_L}{dt}, \quad (24.6)$$

где  $U_L$  – напряжение на катушке индуктивности,  $I_L$  – сила тока, протекающего через катушку;  $L$  – индуктивность катушки.

Напряжение на катушке индуктивности  $U_L$  равно взятой с обратным знаком ЭДС самоиндукции, возникающей в катушке. Поэтому можно либо учитывать напряжение на катушке индуктивности в сумме с другими напряжениями в контуре, либо включить этот элемент в состав ЭДС, действующих в контуре. Из соотношения (24.6) следует:

$$I_L(t) = I_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t U_L dt. \quad (24.7)$$

где  $I_L(0)$  – сила тока через катушку в момент времени  $t = 0$ .

Реальная катушка наряду с индуктивностью  $L$ , обладает также омическим (активным) сопротивлением  $r$ , и напряжение  $U_{rL}$  на ней равно

$$U_{rL} = rI_L + L \frac{dI_L}{dt}. \quad (24.8)$$

**Генератор напряжения** – это устройство, напряжение на выходе которого  $\mathcal{E}(t)$  не зависит от величины тока, протекающего через этот генератор. Внутреннее сопротивление такого генератора принимается равным нулю; в реальности, это источник ЭДС с внутренним сопротивлением, много меньшим сопротивления внешней цепи.

**Генератор тока** – это устройство, которое обеспечивает силу тока в цепи  $I(t)$ , не зависящую от напряжений на элементах этой цепи. Такой генератор имеет бесконечное внутреннее сопротивление, а в реальности – это источник ЭДС с внутренним сопротивлением, значительно превышающим сопротивление внешней цепи.

**Уравнение собственных затухающих колебаний в контуре и его решение, время затухания.**

*Уравнение собственных затухающих колебаний в контуре:*

$$\ddot{\xi}(t) + 2\beta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = 0, \quad (24.9)$$

где  $\beta \equiv R/2L$  – коэффициент затухания,  $\omega_0$  – круговая частота собственных гармонических колебаний.

Время затухания (релаксации) – время  $\tau = 1/\beta = 2L/R$ , в течение которого амплитуда уменьшается в  $e \cong 2.71$  раз.

Решение уравнения (закон) собственных затухающих колебаний с затуханием меньше критического ( $\beta < \omega_0$  или  $R < 2\sqrt{L/C}$ ):

$$\xi(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (24.10)$$

Здесь  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  – круговая частота собственных затухающих колебаний.

Решение уравнения (закон) собственных затухающих колебаний с затуханием больше критического ( $\beta > \omega_0$  или  $R > 2\sqrt{L/C}$ ):

$$\xi(t) = A_1 e^{-(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{-(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}, \quad (24.11)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  – постоянные величины, определяемые начальными условиями (рис. 24.1).

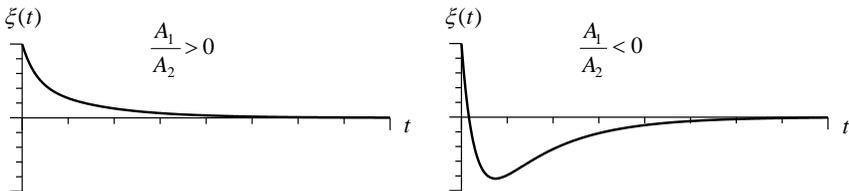


Рис. 24.1. Собственные затухающие колебания с затуханием больше критического.

Решение уравнения (закон) собственных затухающих колебаний с критическим затуханием ( $\beta = \omega_0$  или  $R = 2\sqrt{L/C}$ ):

$$\xi(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\beta t} \quad (\text{рис. 24.2}). \quad (24.12)$$

В дальнейшем все рассматриваемые процессы будем считать квазистационарными и применять к ним правила Кирхгофа.

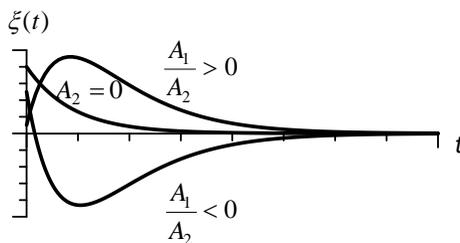


Рис. 24.2. Собственные затухающие колебания с критическим затуханием.

**Мощность, подводимая к элементу цепи, равна**

$$P(t) = U(t)I(t), \quad (24.13)$$

где  $U(t)$  и  $I(t)$  – напряжение на данном элементе (сопротивлении, конденсаторе, катушке) и ток через этот элемент. Эта мощность может выделяться на резисторе в виде тепла или расходоваться на создание электрического поля в конденсаторе (зарядку конденсатора) и магнитного поля в катушке индуктивности.

## 24.2. Основные типы задач (классификация)

24.1. Определение временных зависимостей напряжения на элементах цепи или силы тока при переходных процессах в  $RC$ - и  $RL$ -цепях.

24.2. Определение временных зависимостей зарядов, напряжений и токов в  $RLC$ -цепях.

24.3. Расчет энергетических характеристик процессов (мощности, энергии, количества выделенного тепла и т. д.).

## 24.3. Методы решения и примеры решения задач

### Задачи типа 24.1

*Определение временных зависимостей напряжения на элементах цепи или силы тока при переходных процессах в  $RC$ - и  $RL$ -цепях.*

**Метод решения.** Метод решения задач сводится к процедурам, описанным ниже.

Из условия задачи определить переменную  $\xi(t)$ , поведение которой следует исследовать (сила тока, напряжение, заряд).

Для указанной в условиях задачи схемы записать правила Кирхгофа и, пользуясь выше приведенными соотношениями

(24.3) – (24.8), получить дифференциальное уравнение для искомой величины  $\xi(t)$ .

Используя математические преобразования, привести полученное дифференциальное уравнение цепи к стандартному виду, например, к уравнению собственных затухающих колебаний в контуре (24.9).

Записать начальные условия для  $\xi(0)$  и  $\xi'(0)$ . Для определения установившегося стационарного значения  $\xi_\infty$  нужно в полученном уравнении цепи приравнять нулю все производные по времени и решить это уравнение.

Исходя из типа полученного уравнения цепи, выбрать решение в виде выше приведенных соотношений (24.10) – (24.12).

Из начальных условий найти все неизвестные коэффициенты в выбранном решении.

Проанализировать решение и написать ответ.

**Задача 24.3.1.** Заряженный до напряжения  $U_0$  конденсатор емкостью  $C$  и резистор сопротивлением  $R$  соединены последовательно (рис. 24.3а). Определить зависимость напряжения на конденсаторе от времени после замыкания ключа  $K$ .

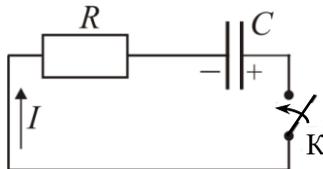


Рис. 24.3а. Схема  $RC$ -цепи для расчета  $U_C(t)$  при разрядке конденсатора.

### Решение

По второму правилу Кирхгофа сумма падений напряжения на резисторе  $U_R$  и конденсаторе  $U_C$  после замыкания ключа в любой момент времени должна быть равна нулю:

$$U_C + U_R = 0.$$

Выразим  $U_R$  через искомую переменную  $U_C$ . Заряд на конденсаторе равен  $q = CU_C$ , поэтому сила тока в цепи будет:

$$I = \frac{dq}{dt} = C \frac{dU_C}{dt}.$$

Следовательно,

$$U_R = IR = RC \frac{dU_C}{dt}.$$

В результате получаем уравнение:

$$\frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{RC}U_C = 0,$$

которое решим методом разделения переменных:

$$\frac{dU_C}{U_C} = -\frac{dt}{RC};$$

$$\ln U_C = -\frac{t}{RC} + \text{const.}$$

Постоянную интегрирования определим из начального условия. В соответствии с условием задачи при  $t=0$   $U_C = U_0$ . Отсюда находим:

$$\text{const} = \ln U_0.$$

Таким образом, искомая зависимость напряжения на конденсаторе от времени после замыкания ключа будет:

$$U_C = U_0 \exp(-t/RC).$$

Произведение  $RC$  имеет размерность времени и часто обозначается  $\tau$ . Эта величина называется *временем релаксации* цепи. В задаче она определяет время, за которое напряжение на конденсаторе уменьшается в  $e$  раз. Время релаксации является одной из основных характеристик цепи, определяется только параметрами цепи и не зависит от начальных условий.

График полученной зависимости  $U_C(t)$  приведен на рис. 24.36. За время  $\tau$  напряжение на конденсаторе оказывается чуть больше одной трети первоначального.

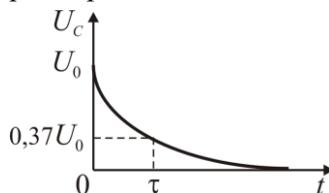


Рис. 24.36. Закон изменения напряжения на конденсаторе при его разрядке.

**Ответ:**  $U_C = U_0 \exp(-t/RC)$ .

**Задача 24.3.2.** Резистор сопротивлением  $R$ , незаряженный конденсатор емкостью  $C$  и источник постоянного напряжения с ЭДС  $\mathcal{E}$  соединены последовательно (рис. 24.4а). Определить зависимость от времени заряда на конденсаторе после замыкания ключа  $K$ .

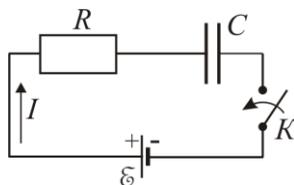


Рис. 24.4а. Схема  $RC$ -цепи для расчета  $U_C(t)$  при зарядке конденсатора.

### Решение

По второму правилу Кирхгофа сумма падений напряжения на резисторе  $U_R$  и конденсаторе  $U_C$  после замыкания ключа в любой момент времени должна быть равна  $\mathcal{E}$ :

$$U_C + U_R = \mathcal{E}.$$

Так как все элементы цепи соединены последовательно, сила тока на всех участках цепи одинакова:

$$I(t) = I_R = I_C.$$

Падение напряжения на резисторе

$$U_R = IR = R \frac{dq}{dt},$$

где  $q$  – заряд, проходящий по цепи и накапливающийся на конденсаторе.

Падение напряжения на конденсаторе  $U_C = \frac{q}{C}$ . В результате получаем уравнение для заряда на конденсаторе:

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E},$$

которое перепишем в стандартном виде:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{\mathcal{E}}{R}. \quad (24.14)$$

Напомним, что произведение  $RC$  имеет размерность времени, называется временем релаксации цепи и часто обозначается буквой  $\tau$ :  $\tau = RC$ . Получено неоднородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Оно может быть сведено к однородному уравнению заменой переменной

$$q^* = q - C\mathcal{E}$$

и решено интегрированием после разделения переменных.

Рассмотрим другое более общее решение (с произвольной постоянной интегрирования), согласно которому решение неоднородного уравнения есть сумма двух слагаемых:

$$q = q_1 + q_2.$$

Первое слагаемое  $q_1$  – общее решение однородного уравнения

$$\frac{dq_1}{dt} + \frac{q_1}{\tau} = 0,$$

которое получается методом разделения переменных:

$$\frac{dq_1}{q_1} = -\frac{dt}{\tau},$$

$$\ln q_1 = -\frac{t}{\tau} + \ln B,$$

$$q_1 = B \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (24.15)$$

Постоянную интегрирования  $B$  в формуле (24.15) в дальнейшем определим из начального условия задачи, когда будет получено полное решение.

Второе слагаемое  $q_2$  в общем решении находим как любое частное решение полного (неоднородного) уравнения. Если правая часть полного уравнения есть постоянная, то и решение  $q_2$  тоже величина постоянная. Ее определяем, подставляя постоянную  $q_2$  в исходное неоднородное уравнение (24.14) и получаем:

$$q_2 = C\mathcal{E}.$$

Теперь записываем полное решение:

$$q = B \exp(-t/\tau) + C\mathcal{E} \quad (24.16)$$

и определяем постоянную интегрирования  $B$ , используя начальное условие: при  $t = 0$  заряд на конденсаторе  $q = 0$ . Подставляем эти значения в полученное решение (24.16) и находим:

$$B = -C\mathcal{E}.$$

Окончательно для искомой зависимости от времени заряда на конденсаторе после замыкания ключа имеем:

$$q = C\mathcal{E}[1 - \exp(-t/\tau)] = C\mathcal{E}\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right].$$

График полученной зависимости  $q(t)$  приведен на рис. 24.46.

*Замечание 1.* Используя полученный результат, можно определить зависимость от времени и всех остальных параметров цепи: силы тока  $I(t)$ , напряжения на резисторе  $U_R(t)$  и напряжения на конденсаторе  $U_C(t)$ :

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = (\mathcal{E}/R)\exp(-t/\tau);$$

$$U_R(t) = I(t)R = \mathcal{E}\exp(-t/\tau);$$

$$U_C(t) = q(t)/C = \mathcal{E}(1 - \exp(-t/\tau)).$$

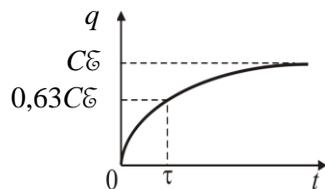


Рис. 24.46. Закон изменения напряжения на конденсаторе при его зарядке.

*Замечание 2.* Сила тока в цепи в момент замыкания ключа изменяется скачком. За очень малое по сравнению с  $\tau$  время она изменяется от нуля до  $I_0 = \mathcal{E}/R$ . В задаче величина  $\tau$ , входящая в исходное уравнение и в его решение, определяет время, за которое сила тока в цепи  $I(t)$  уменьшается в  $e$  раз. Эта величина и есть время релаксации цепи, т.е. время, за которое процесс зарядки практически завершен.

**Ответ:**  $q = C\mathcal{E} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right]$ .

**Задача 24.3.3.** Два конденсатора с емкостями  $C_1$  и  $C_2$  и резистор с сопротивлением  $R$ , соединенные последовательно, подключены к источнику напряжения  $\mathcal{E}$ . Определить зависимость от времени заряда на обкладках конденсатора  $C_1$  после замыкания ключа в схеме, приведенной на рис. 24.5.

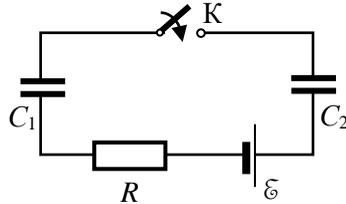


Рис. 24.5. Схема цепи к задаче 24.3.3.

### Решение

Так как конденсаторы с емкостями  $C_1$  и  $C_2$  соединены последовательно, их можно заменить одним эквивалентным конденсатором с емкостью

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

При этом заряд на обкладках эквивалентного конденсатора будет таким же, как на обкладках конденсатора  $C_1$ .

Решение задачи выполняется в точности так же, как в рассмотренной ранее задаче 24.3.2. Поэтому можно сразу записать ответ:

$$q(t) = C\mathcal{E} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right) = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \mathcal{E} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t(C_1 + C_2)}{RC_1 C_2}\right) \right).$$

Время зарядки (время релаксации)

$$\tau = RC = R \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

теперь зависит как от  $C_1$ , так и от  $C_2$ . Зарядка будет происходить до тех пор, пока сумма напряжений на конденсаторах не станет равной напряжению источника.

*Замечание.* В цепи из последовательно соединенных элементов сила тока одинакова на любом участке. Поэтому накопление заряда на двух конденсаторах будет происходить одинаково. Записывая уравнение, следующее из второго правила Кирхгофа с учетом равенства поступающих на конденсаторы зарядов, приходим к тому же результату.

$$\text{Ответ: } q = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \mathfrak{E} \left( 1 - \exp \left( - \frac{t(C_1 + C_2)}{RC_1 C_2} \right) \right).$$

**Задача 24.3.4.** Параллельно соединенные резистор  $R$  и конденсатор  $C$  подсоединены к генератору тока  $I(t)$  (рис. 24.6а), который формирует ступенчатый сигнал:  $I(t) = 0$  при  $t < 0$ ,  $I(t) = I_0$  при  $t > 0$  (рис. 24.6б). Определить, как изменяется со временем напряжение  $U$  на конденсаторе и ток, протекающий через конденсатор.

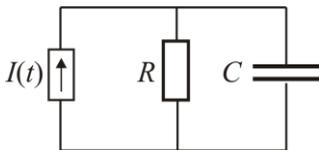


Рис.24.6а. Схема параллельного соединения резистора  $R$ , конденсатора  $C$  и генератора тока  $I(t)$  (задача 24.3.4).

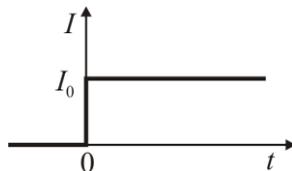


Рис.24.6б. Ступенчатый сигнал, формируемый генератором тока (задача 24.3.4).

### Решение

Используя первое правило Кирхгофа, можем записать

$$I_0 = I_R + I_C.$$

Здесь  $I_R$  и  $I_C$  – силы токов, протекающих через резистор и конденсатор, а  $I_0$  – сила полного тока в цепи, создаваемого генератором тока.

Так как резистор и конденсатор соединены параллельно, второе правило Кирхгофа запишется в виде:

$$U_R = U_C = U.$$

Тогда, используя выражения для напряжений на резисторе и конденсаторе (24.3) и (24.4), можно записать:

$$I_R = \frac{U}{R}, \quad I_C = C \frac{dU}{dt}.$$

Получим уравнение цепи:

$$C \frac{dU}{dt} + \frac{U}{R} = I_0$$

или, приводя к стандартному виду:

$$\frac{dU}{dt} + \frac{1}{RC}(U - RI_0) = 0$$

Напряжение на конденсаторе не может мгновенно измениться, поэтому начальное условие в нашем случае имеет следующий вид:

$$U(0) = 0.$$

Установившееся значение напряжения на конденсаторе  $U_\infty = I_\infty R = I_0 R$ .

Используя выражение для  $U_\infty$ , получим:

$$U(t) = U_\infty - [U_\infty - U(0)]e^{-t/\tau} = I_0 R(1 - e^{-t/\tau}),$$

$$I_C(t) = C \frac{d}{dt}(I_0 R(1 - e^{-t/\tau})) = I_0 e^{-t/\tau},$$

где  $\tau = RC$ .

**Ответ:**  $U(t) = I_0 R(1 - e^{-t/\tau})$ ,  $I_C(t) = I_0 e^{-t/\tau}$ , где  $\tau = RC$ .

**Задача 24.3.5.** Определить зависимость от времени напряжения  $U_2(t)$  на конденсаторе  $C_2$  в цепи, представленной на рис. 24.7а, если генератор напряжения  $\xi(t)$  формирует ступенчатый сигнал  $\xi(t) = 0$  при  $t < 0$ ,  $\xi(t) = \xi_0$  при  $t > 0$  (рис. 24.7б). При  $t < 0$  напряжения и токи в цепи равны нулю. При расчёте положить  $C_1 = C_2 = C$ ,  $R_1 = R_2 = R$ .

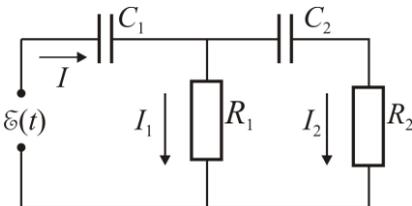


Рис. 24.7 а. Соединение элементов цепи в задаче 24.3.5.

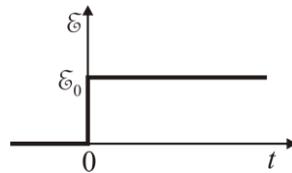


Рис. 24.7 б. Ступенчатый сигнал, формируемый генератором напряжения.

**Решение**

Для контура  $(\mathcal{E}, C_1, C_2, R_2)$ , согласно второму правилу Кирхгофа, запишем.

$$\frac{Q_1}{C} + U_2 + R_2 I_2 = \mathcal{E}(t).$$

Чтобы получить уравнение относительно неизвестной  $U_2$ , вначале продифференцируем полученное уравнение

$$\frac{1}{C} \cdot \frac{dQ_1}{dt} + \frac{dU_2}{dt} + R \frac{dI_2}{dt} = \frac{d\mathcal{E}(t)}{dt}.$$

Выразим напряжения на элементах цепи через  $U_2$  и учтём, что при  $t > 0$  производная  $\frac{d\mathcal{E}(t)}{dt}$  для ступенчатого сигнала равна нулю.

Используя первое правило Кирхгофа и соотношение (24.4), получим:

$$I = I_1 + I_2,$$

$$I = \frac{dQ_1}{dt},$$

$$I_2 = \frac{dQ_2}{dt} = C \frac{dU_2}{dt},$$

где  $Q_1$  и  $Q_2$  – заряды на конденсаторах  $C_1$  и  $C_2$ ;  $I, I_1, I_2$  – токи в цепи (см. рис. 24.7а).

Так как резистор  $R_1$  и последовательная цепочка  $R_2 C_2$  соединены параллельно, то напряжения на них одинаковы:

$$RI_1 = U_2 + RI_2.$$

Используем взаимосвязь между током  $I_2$  и напряжением  $U_2$ :

$$I_1 = \frac{U_2}{R} + C \frac{dU_2}{dt}.$$

Таким образом, получим:

$$\frac{dQ_1}{dt} = I_1 + I_2 = \frac{U_2}{R} + C \frac{dU_2}{dt} = \frac{U_2}{R} + 2C \frac{dU_2}{dt};$$

$$\frac{dI_2}{dt} = C \frac{d^2 U_2}{dt^2}.$$

Для уравнения цепи имеем:

$$RC \frac{d^2 U_2}{dt^2} + 3 \frac{dU_2}{dt} + \frac{1}{RC} U_2 = 0.$$

Разделим обе части уравнения на  $RC$

$$\frac{d^2 U_2}{dt^2} + \frac{3}{RC} \cdot \frac{dU_2}{dt} + \frac{1}{(RC)^2} U_2 = 0.$$

Это уравнение совпадает с уравнением (24.9) если ввести обозначения:

$$\beta = \frac{3}{2RC}, \quad \Omega = \frac{1}{RC}.$$

Решение можно представить в виде (24.11)

$$U_2(t) = A_1 e^{-\beta_1 t} + B_1 e^{-\beta_2 t},$$

где  $\beta_{1,2} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \Omega^2}$ .

Для нахождения констант  $A_1$  и  $B_1$  определим начальные условия.

Сразу после «скачка» напряжения  $\mathfrak{E}(t)$  от нуля до  $\mathfrak{E}_0$  напряжения на конденсаторах  $C_1$  и  $C_2$  равны нулю. Тогда в этот момент

$$\mathfrak{E}_0 = R_2 I_2 = RC \left. \frac{dU_2}{dt} \right|_{t=0}.$$

и начальные условия имеют вид:

$$\begin{cases} U_2(0) = 0; \\ U_2'(0) = \frac{\mathfrak{E}_0}{RC}, \end{cases}$$

откуда получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 0 = A_1 + B_1; \\ \frac{\mathfrak{E}_0}{RC} = -\beta_1 A_1 - \beta_2 B_1, \end{cases}$$

решениями которой являются:

$$A_1 = -B_1 = -\frac{\mathfrak{E}_0}{2RC\sqrt{\beta^2 - \Omega^2}} = -\frac{\mathfrak{E}_0}{\sqrt{5}}.$$

Используя функцию «гиперболический синус»:

$$\text{sh}(\gamma t) = \frac{e^{\gamma t} - e^{-\gamma t}}{2},$$

результат можно представить в виде:

$$U_2(t) =$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{5}} \exp[(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \Omega^2})t] + \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{5}} \exp[(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \Omega^2})t] = \\
 &= \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{5}} e^{-\beta t} \cdot 2 \frac{e^{t\sqrt{\beta^2 - \Omega^2}} - e^{-t\sqrt{\beta^2 - \Omega^2}}}{2} = 2 \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{5}} e^{-\beta t} \operatorname{sh}(t\sqrt{\beta^2 - \Omega^2}).
 \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\beta = \frac{3}{2RC}$  и  $\sqrt{\beta^2 - \Omega^2} = \frac{\sqrt{5}}{2RC}$ , окончательно получим:

$$U_2(t) = \frac{2\mathcal{E}_0}{\sqrt{5}} \exp\left(-\frac{3}{2RC}t\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{5}}{2RC}t\right).$$

**Ответ:** 
$$U_2(t) = \frac{2\mathcal{E}_0}{\sqrt{5}} \exp\left(-\frac{3}{2RC}t\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{5}}{2RC}t\right).$$

**Задача 24.3.6.** Резистор сопротивлением  $R$ , катушка индуктивности  $L$  и источник напряжения с ЭДС  $\mathcal{E}$  соединены последовательно (рис. 24.8). Определить зависимость силы тока в цепи от времени после замыкания ключа.

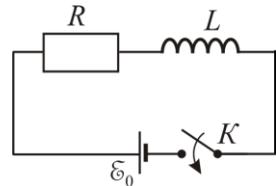


Рис. 24.8. Схема  $RL$ -цепи к задаче 24.3.6.

### Решение

Так как все элементы цепи соединены последовательно, сила тока на всех участках цепи одинакова:

$$I(t) = I_R = I_L.$$

Согласно второму правилу Кирхгофа

$$U_R + U_L = \mathcal{E}.$$

Падение напряжения на катушке индуктивности  $U_L$  равно взятой с обратным знаком ЭДС самоиндукции, возникающей в катушке. Поэтому можно либо учитывать падение напряжения на катушке индуктивности  $U_L = L \frac{dI}{dt}$  в сумме с другими падениями

напряжения в контуре, либо включить этот элемент в состав источников ЭДС, действующих в контуре:  $\mathcal{E}_L = -L \frac{dI}{dt}$ . Оба

варианта записи эквивалентны друг другу.

Используя формулы

$$U_R = IR \text{ и } U_L = L \frac{dI}{dt},$$

получаем уравнение:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{\mathcal{E}}{L}.$$

Это уравнение решаем так же, как в задаче 24.3.2, где подробно описана процедура получения решения. Начальное условие: при  $t = 0$  сила тока в цепи  $I = 0$ . Окончательно искомая зависимость силы тока в цепи от времени после замыкания ключа имеет вид:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left( 1 - \exp\left(-\frac{R}{L} t\right) \right) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right),$$

где время релаксации теперь равно  $\tau = \frac{L}{R}$ . При  $t \rightarrow \infty$  сила тока в цепи нарастает, асимптотически стремясь к установившемуся значению  $I_0 = \mathcal{E}/R$ .

*Замечание.* Если в цепи имеется катушка индуктивности, то сила тока в цепи не может измениться скачком, потому что в этом случае энергия, запасенная в катушке, также должна измениться скачком, что невозможно. По такой же причине в цепи, содержащей конденсатор, не может измениться скачком напряжение на конденсаторе.

$$\text{Ответ: } I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right), \text{ где } \tau = \frac{L}{R}.$$

**Задача 24.3.7.** Резистор  $R$ , катушка индуктивности  $L$  и генератор напряжения  $\mathcal{E}$  соединены последовательно (последовательная  $RL$ -цепь, рис. 24.9а). Определить зависимость напряжения на резисторе от времени, если напряжение генератора меняется со временем по закону, показанному на рис. 24.9б:

$$\mathcal{E}(t) = 0 \text{ при } t < 0, t > T_{\text{и}};$$

$$\mathcal{E}(t) = E_0 \text{ при } 0 < t < T_{\text{и}}.$$

При решении считать, что при  $t < 0$  сила тока в цепи равна нулю, а время релаксации существенно меньше длительности импульса ( $\tau \ll T_{\text{и}}$ ).

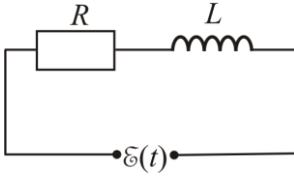


Рис.24.9а. Схема к расчёту переходных процессов в последовательной  $RL$ -цепи (задача 24.3.7).

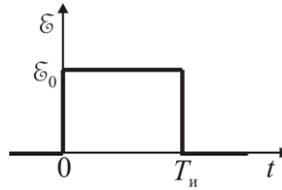


Рис.24.9б. Сигнал, формируемый генератором прямоугольных импульсов напряжения.

### Решение

*Интервал времени:*  $0 < t < T_n$ .

Используя второе правило Кирхгофа, запишем:

$$U_R + U_L = \varepsilon_0.$$

Так как все элементы цепи соединены последовательно, сила тока на всех участках цепи одинакова:

$$I(t) = I_R = I_L.$$

Согласно выражениям (24.3) и (24.6)

$$U_R = R I_R,$$

$$U_L = L \frac{dI}{dt} = \frac{L}{R} \cdot \frac{dU_R}{dt}.$$

Выберем в качестве исследуемой величины напряжение на резисторе  $U_R$ . Используя записанные выше соотношения, получим уравнение цепи:

$$U_R + \frac{L}{R} \cdot \frac{dU_R}{dt} = \varepsilon_0.$$

Приведём это уравнение к стандартному виду (24.9):

$$\frac{dU_R}{dt} + \frac{R}{L}(U_R - \varepsilon_0) = 0.$$

Сила тока в цепи не может измениться скачком, следовательно, начальное условие можно записать в виде  $U_R(0) = 0$ .

Решением полученного уравнения будет функция:

$$U_R(t) = \varepsilon_0(1 - e^{-t/\tau}),$$

где время релаксации  $\tau = R/L$ . График этой зависимости представлен на рис. 24.9в.

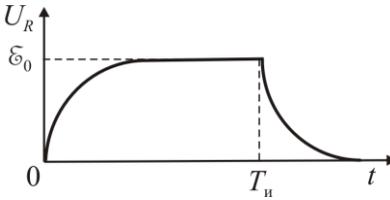


Рис. 24.9в. Зависимость напряжения на резисторе от времени в последовательной  $RL$ -цепи (задача 24.3.7).

*Интервал времени:*  $t \geq T_n$ .

Рассуждая аналогично первой части данной задачи, запишем уравнение цепи для этого промежутка времени:

$$\frac{dU_R}{dt} + \frac{R}{L}U_R = 0.$$

Так как согласно условию  $T_n \gg \tau$ , то при  $t = T_n$  напряжение на резисторе можно считать равным

$$U_R(T_n) = \epsilon_0(1 - e^{-T_n/\tau}) \approx \epsilon_0.$$

Тогда получим зависимость напряжения на резисторе от времени:

$$U_R(t) = \epsilon_0 e^{-(t-T_n)/\tau},$$

где время релаксации  $\tau = R/L$ .

График этой зависимости представлен на рисунке 24.9в.

**Ответ:**  $U_R(t) = \epsilon_0(1 - e^{-tL/R})$ , при  $0 < t < T_n$ ;

$$U_R(t) = \epsilon_0 e^{-(t-T_n)L/R}, \text{ при } t \geq T_n.$$

**Задача 24.3.8.** Параллельно соединённые резисторы сопротивлением  $R$  и  $R/99$  соединены последовательно с катушкой индуктивности  $L$  и генератором постоянного напряжения  $\epsilon_0$  (рис. 24.10а). Определить, как изменяется со временем напряжение  $U(t)$  между точками А и В при замыкании и размыкании ключа К.

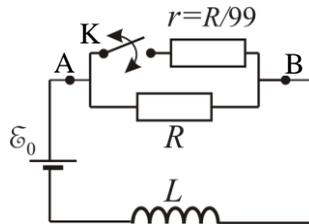


Рис. 24.10а. Схема цепи к задаче 24.3.8.

### Решение

*Ключ замыкают.*

Используя 2-е правило Кирхгофа, составляем уравнение для тока  $I$ , который протекает через индуктивность  $L$  и источник ЭДС  $\mathcal{E}_0$ .

$$R_0 I = \mathcal{E}_0 - L \frac{dI}{dt},$$

где  $R_0 = R/100$  – сопротивление двух параллельно соединенных резисторов  $R$  и  $r$ . Приведем уравнение цепи к виду:

$$\frac{L}{R_0} \cdot \frac{dU}{dt} + (U - \mathcal{E}_0) = 0$$

или

$$\frac{dU}{dt} + \frac{R_0}{L} (U - \mathcal{E}_0) = 0.$$

Время релаксации при замыкании ключа равно  $\tau_1 = L/R_0$ .

Для определения начального условия  $U(0)$  используем тот факт, что ток в цепи сразу после включения ключа  $I(0)$  имеет то же значение, что и до включения:

$$I(0) = \frac{\mathcal{E}_0}{R}.$$

Тогда при  $t = 0$  имеем:

$$U(0) = I(0)R_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R} R_0.$$

Установившееся значение исследуемого напряжения равно  $U_\infty = \mathcal{E}_0$  (так как катушка не обладает омическим сопротивлением).

Используя выражения для  $U(0)$  и  $U_\infty$ , получим:

$$U(t) = U_\infty - [U_\infty - U(0)]e^{-t/\tau_1} = \mathcal{E}_0 \left[ 1 - \left( 1 - \frac{R_0}{R} \right) e^{-t/\tau_1} \right].$$

*Ключ размыкают.*

Проводя аналогичные расчеты и учитывая изменившиеся начальные условия ( $U(0) = \mathcal{E}_0$ ), получим:

$$U(t) = \mathcal{E}_0 \left[ 1 + \left( \frac{R}{R_0} - 1 \right) e^{-t/\tau_2} \right],$$

где  $\tau_2 = \frac{L}{R}$ .

Схематично графики этих релаксационных процессов показаны на рис. 24.10б.

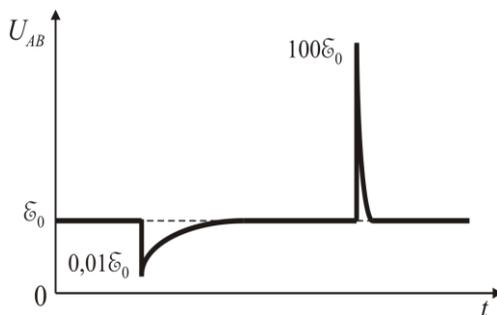


Рис. 24.10 б. Зависимость напряжения между точками А и В от времени при замыкании и размыкании ключа (задача 24.3.8).

*Замечание.* Времена релаксации в рассматриваемых случаях имеют существенно разные значения:

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{R}{R_0} = 100.$$

**Ответ:** при замыкании ключа  $U(t) = \varepsilon_0 \left( 1 - 0,99 \exp\left(-\frac{tR}{100L}\right) \right)$ ;

при размыкании ключа  $U(t) = \varepsilon_0 \left( 1 + 99 \exp\left(-\frac{tR}{L}\right) \right)$ .

**Задача 24.3.9.** Квадратная рамка со стороной  $a$  находится в однородном магнитном поле индукции  $B$ . В начальный момент плоскость рамки параллельна направлению индукции поля. Затем её очень быстро поворачивают на  $90^\circ$ , так, что ее плоскость становится перпендикулярной направлению индукции магнитного поля. Индуктивность рамки равна  $L$ , омическое сопротивление проводника, из которого сделана рамка, равно  $R$ . Определить, как изменится ток в рамке после ее поворота. До поворота ток в рамке был равен нулю.

### Решение

1. При быстром повороте рамки из-за изменения величины потока магнитной индукции внешнего поля через плоскость рамки

согласно закону электромагнитной индукции возникает ЭДС индукции  $\mathcal{E}(t) = -\frac{d\Phi}{dt}$  и, как следствие, появляется индукционный ток  $I(t)$ .

При повороте рамки полный поток магнитной индукции  $\Phi(t)$  через плоскость рамки складывается из потока  $\Phi_B(t)$ , обусловленного наличием внешнего магнитного поля и потока  $\Phi_I(t)$ , создаваемого индукционным током:

$$\Phi(t) = \Phi_B(t) + \Phi_I(t),$$

где  $\Phi_B(t) = Ba^2 \sin \alpha(t)$ , угол между плоскостью рамки и направлением магнитного поля  $\alpha(t)$  изменяется от  $\alpha = 0$  (до поворота рамки) до  $\alpha = \pi/2$  (после поворота), а  $\Phi_I(t) = LI(t)$ , где  $L$  – индуктивность рамки.

Определим величину индукционного тока сразу после поворота. Поскольку

$$\mathcal{E}(t)dt = I(t)Rdt = -dC,$$

то, проинтегрировав правую и левую часть этого уравнения по времени от 0 до  $\Delta t$ , где  $\Delta t$  – время поворота, получим:

$$R \int_0^{\Delta t} I(t)dt = -[\Phi(\Delta t) - \Phi(0)].$$

Сила индукционного тока  $I(t)$  всегда ограничена по своей величине и не может принимать бесконечно большие значения (это одно из следствий закона Ленца). Поэтому при очень быстром повороте рамки ( $\Delta t \rightarrow 0$ ) интеграл  $\int_0^{\Delta t} I(t)dt$  стремится к нулю,

откуда следует:

$$\Phi(\Delta t) - \Phi(0) \approx 0.$$

До поворота рамки  $\Phi(0) = 0$ , так как ток в рамке отсутствовал, а плоскость рамки была параллельна направлению индукции магнитного поля. Отсюда следует, что

$$\Phi(\Delta t) = \Phi_B(\Delta t) + LI(\Delta t) = Ba^2 + LI(\Delta t) = 0.$$

Таким образом, сила индукционного тока сразу после поворота рамки равна (с точностью до знака)

$$I(\Delta t) = \frac{Ba^2}{L}.$$

2. После поворота рамки поток не изменяется со временем и равен  $\Phi_B = Ba^2$ .

Поэтому ЭДС индукции в рамке после окончания поворота существует только за счёт изменения силы тока (ЭДС самоиндукции)

$$\varepsilon = RI = -L \frac{dI}{dt}.$$

Для расчёта зависимости индукционного тока от времени после поворота рамки преобразуем это уравнение к стандартному виду:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = 0.$$

За начало отсчёта времени примем теперь конец интервала времени  $\Delta t$ , за который поворот рамки был завершён. Зная найденное выше начальное значение силы тока  $I(0) = I(\Delta t)$ , далее, аналогично задаче 24.3.3, получим зависимость силы тока от времени:

$$I(t) = \frac{Ba^2}{L} e^{-t/\tau},$$

$$\text{где } \tau = \frac{L}{R}.$$

*Замечание 1.* После окончания поворота рамки магнитный поток через её плоскость изменяется по закону:

$$\Phi(t) = Ba^2 - LI(t) = Ba^2(1 - e^{-t/\tau}),$$

$$\text{где } \tau = \frac{L}{R} \text{ (рис. 24.11).}$$

*Замечание 2.* Термин «очень быстро» в условии задачи имеет относительный характер. Для того, чтобы приведённое выше решение было справедливым, необходимо, чтобы время, за которое совершается поворот рамки, было намного меньше времени релаксации

$$\Delta t \ll \tau = \frac{L}{R}. \quad \text{В случае}$$

сверхпроводящей рамки ( $R = 0$ ) время релаксации  $\tau \rightarrow \infty$ . В этом

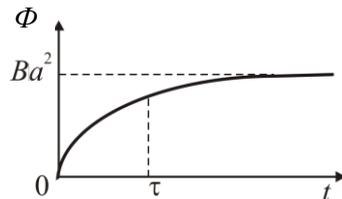


Рис. 24.11. Зависимость магнитного потока через рамку от времени после окончания её поворота (задача 24.3.9).

случае решение остаётся справедливым и при сколь угодно медленном повороте рамки.

**Ответ:** 
$$I(t) = \frac{Ba^2}{L} e^{-\frac{R}{L}t}.$$

### Задачи типа 24.2

*Определение временных зависимостей напряжения на элементах цепи или силы тока при переходных процессах в RCL-цепях.*

**Метод решения.** Практически сводится к процедурам, описанным для задач типа 24.1.

**Задача 24.3.10.** Резистор с сопротивлением  $r$ , конденсатор емкостью  $C$ , катушка индуктивности  $L$  подсоединены к источнику постоянного напряжения с ЭДС  $\mathcal{E}$  (ключ в положении 1). Определить зависимость от времени заряда на обкладках конденсатора после перевода ключа в положение 2 (рис. 24.12а).

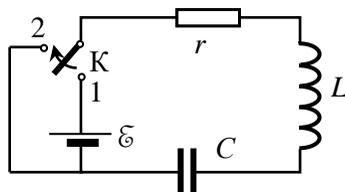


Рис. 24.12а. Схема RCL-цепи к задаче 24.3.10.

### Решение

Применяя второе правило Кирхгофа к цепи после перевода ключа в положение 2 и используя выражения для падений напряжения на резисторе  $U_r = rI$ , конденсаторе —  $U_C = \frac{q}{C}$  и

катушке  $U_L = L \frac{dI}{dt}$ , получаем уравнение:

$$rI + \frac{q}{C} + L \frac{dI}{dt} = 0,$$

где  $I$  — сила тока в цепи,  $q$  — заряд на конденсаторе.

Перепишем полученное уравнение, используя лишь одну переменную  $q$  и ее первую производную  $\frac{dq}{dt} = I$ . Кроме того, разделим почленно это уравнение на коэффициент при старшей производной. В результате для заряда  $q$  получим однородное

линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{r}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0.$$

Вводя обозначения  $\frac{r}{L} = 2\beta$ ,  $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$ , запишем это уравнение

в стандартном виде:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0. \quad (24.17)$$

Параметр  $\beta$  называется *коэффициентом затухания*, а  $\omega_0^2$  есть квадрат частоты свободных незатухающих гармонических колебаний, имеющих место при  $\beta = 0$ .

Будем искать решение уравнения в комплексном виде, предполагая, что оно имеет вид

$$\hat{q}(t) = \hat{q}_0 \exp(kt),$$

где  $\hat{q}_0$  - комплексная амплитуда, а  $k$  - в общем случае комплексная величина.

Подставляя эту функцию в (24.17), приходим к алгебраическому уравнению для определения возможных значений числа  $k$ :

$$k^2 + 2\beta k + \omega_0^2 = 0.$$

Если  $\beta^2 \neq \omega_0^2$ , то находим два решения:

$$k_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2},$$

$$k_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}.$$

Общее решение однородного уравнения записывается как линейная комбинация двух полученных решений с произвольными коэффициентами:

$$\hat{q} = A \exp(k_1 t) + B \exp(k_2 t).$$

Здесь коэффициенты  $A$  и  $B$  определяются начальными условиями.

Характер решения зависит от соотношения параметров  $\beta^2$  и  $\omega_0^2$ . Если  $\beta > \omega_0$ , то оба показателя в экспонентах отрицательные, решение будет вещественным и его можно записать в виде:

$$q = e^{-\beta t} \left[ A e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + B e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} \right]. \quad (24.18)$$

Такой процесс называется *апериодическим*.

В особом случае  $\beta = \omega_0$ , решение имеет вид:

$$q = (A + Bt)e^{-\beta t}. \quad (24.19)$$

Протекающий при этом процесс называется *критическим затуханием* (демпфированием).

Если, наконец,  $\beta < \omega_0$ , то в системе возникают свободные затухающие колебания. Действительно, в этом случае имеем:

$$\hat{q}(t) = \exp(-\beta t) [A_1 \exp(i\omega t) + B_1 \exp(-i\omega t)],$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ . Коэффициенты  $A_1$  и  $B_1$  здесь следует понимать как комплексные числа, имеющие и вещественную, и мнимую части.

Поскольку заряд  $q$  является вещественной физической величиной, а вещественная часть комплексного решения также является решением однородного линейного дифференциального уравнения с постоянными вещественными коэффициентами, то:

$$q(t) = \text{Re } \hat{q}(t) = e^{-\beta t} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)], \quad (24.20)$$

где  $A$  и  $B$  – вещественные коэффициенты и определяются начальными условиями.

В результате мы получили закон свободных затухающих колебаний с частотой  $\omega$ . Заряд на конденсаторе, осциллируя, убывает по экспоненциальному закону и становится в  $e$  раз меньше первоначального за время релаксации  $\tau = \frac{1}{\beta}$ . По этой причине  $\beta$

называют *коэффициентом затухания*.

Для полного решения задачи осталось определить из начальных условий значения постоянных интегрирования. В начальном положении до отключения источника напряжения ток в цепи идет до тех пор, пока напряжение на конденсаторе не станет равным напряжению подключенного источника ЭДС. После этого ток в системе прекратится. Поэтому начальные условия имеют вид: при  $t = 0$  заряд на конденсаторе  $q(0) = \xi C$  и сила тока в цепи  $I(0) = 0$ .

1. Рассмотрим случай  $\beta > \omega_0$ , когда реализуется решение (24.18).

В общем виде для тока  $I(t)$  получаем выражение:

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = -\beta q(t) + e^{-\beta t} \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \left[ A e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} - B e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} \right]. \quad (24.21)$$

Константы  $A$  и  $B$  находим из начальных условий:

$$q(0) = A + B = \mathcal{E}C, \quad (24.22)$$

$$I(0) = -\beta \mathcal{E}C + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} (A - B) = 0,$$

откуда

$$A - B = \mathcal{E}C \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}}. \quad (24.23)$$

Из выражений (24.22) и (24.23) получаем:

$$A = \frac{\mathcal{E}C}{2} \left( 1 + \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} \right),$$

$$B = \frac{\mathcal{E}C}{2} \left( 1 - \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} \right).$$

Окончательно для искомой зависимости заряда на обкладках конденсатора от времени имеем:

$$q(t) = \frac{\mathcal{E}C}{2} e^{-\beta t} \left[ \left( 1 + \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} \right) e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + \left( 1 - \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} \right) e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} \right].$$

Время релаксации этого процесса  $\tau = \frac{1}{\beta}$ .

2. В случае решения (24.19) при  $\beta = \omega_0$  находим аналогично:

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = [B - \beta(A + Bt)]e^{-\beta t};$$

$$q(0) = \mathcal{E}C = A,$$

$$I(0) = B - \beta A = 0,$$

откуда:

$$B = \beta A = \beta \mathcal{E}C.$$

Окончательно получаем:

$$q(t) = \mathcal{E}C e^{-\beta t} (1 + \beta t).$$

3. Наконец, для решения (24.20) при  $\beta < \omega_0$  имеем:

$$I(t) = e^{-\beta t} \{ \omega [-A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)] - \beta [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] \};$$

$$q(0) = \mathcal{E}C = A,$$

$$I(0) = \omega B - \beta A = 0,$$

откуда:

$$B = (\beta / \omega) A = (\beta / \omega) \mathcal{E}C.$$

В итоге находим:

$$q(t) = \mathcal{E}C e^{-\beta t} [\cos(\omega t) + (\beta / \omega) \sin(\omega t)].$$

Пример зависимости  $q(t)$  для данного случая приведен на рис. 24.12б.

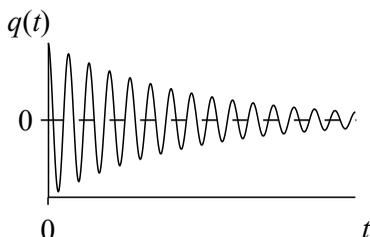


Рис. 24.12б. Зависимость заряда на обкладках конденсатора от времени.

**Ответ:**

при  $\beta > \omega_0$ :

$$q(t) = \frac{\mathcal{E}C}{2} e^{-\beta t} \left[ \left( 1 + \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} \right) e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + \left( 1 - \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} \right) e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} \right];$$

при  $\beta = \omega_0$ :

$$q(t) = \mathcal{E} C e^{-\beta t} (1 + \beta t);$$

при  $\beta < \omega_0$ :

$$q(t) = \mathcal{E} C e^{-\beta t} [\cos(\omega t) + (\beta / \omega) \sin(\omega t)];$$

где  $\beta = \frac{r}{2L}$ ,  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ,  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ .

**Задача 24.3.11.** Резистор сопротивлением  $r$ , конденсатор емкостью  $C$ , катушка индуктивности  $L$  и источник постоянного напряжения с ЭДС  $\mathcal{E}$  соединены в последовательную цепь. Определить зависимость от времени заряда на обкладках

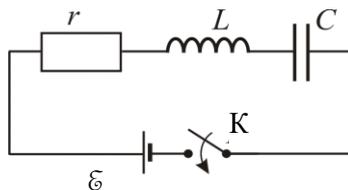


Рис. 24.13а. Схема RCL-цепи к задаче 24.3.11.

конденсатора после замыкания ключа (рис. 24.13а).

### Решение

Применяя второе правило Кирхгофа и используя выражения для падений напряжения на резисторе  $U_r = rI$ , катушке  $U_L = L \frac{dI}{dt}$

и конденсаторе  $U_C = \frac{q}{C}$ , получаем уравнение:

$$rI + \frac{q}{C} + L \frac{dI}{dt} = \mathcal{E},$$

где  $I$  – сила тока в цепи,  $q$  – заряд на конденсаторе.

Воспользовавшись обозначениями, введенными в предыдущей задаче, записываем уравнение для замкнутой электрической цепи в стандартном виде:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{\mathcal{E}}{L}.$$

Решение этого неоднородного уравнения получаем, добавляя постоянную  $q_0 = \frac{\mathcal{E}}{\omega_0^2 L} = \mathcal{E}C$  к общему решению, полученному в предыдущей задаче.

Начальные условия теперь другие: при  $t = 0$  заряд на конденсаторе  $q = 0$  и сила тока в цепи  $I = 0$ .

Итак, получаем общие решения:

при  $\beta > \omega_0$ :

$$q(t) = e^{-\beta t} \left[ A \exp\left(\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t\right) + B \exp\left(-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t\right) \right] + \mathcal{E}C; \quad (24.24)$$

при  $\beta = \omega_0$ :

$$q(t) = (A + Bt)e^{-\beta t} + \mathcal{E}C; \quad (24.25)$$

при  $\beta < \omega_0$ :

$$q(t) = e^{-\beta t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) + \mathcal{E}C. \quad (24.26)$$

Постоянные  $A$  и  $B$  определяем из начальных условий аналогично тому, как это было сделано в предыдущих задачах. Общие выражения для токов  $I(t)$  совпадают с выражениями, полученными в задаче 24.3.10 для соответствующих случаев.

1. В случае решения (24.24) находим:

$$q(0) = A + B + \varepsilon C = 0,$$

$$I(0) = (A - B)\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = 0,$$

откуда:

$$A = B = -\frac{1}{2}\varepsilon C.$$

Окончательно получаем:

$$q(t) = \varepsilon C \left[ 1 - \frac{e^{-\beta t}}{2} \left( e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} \right) \right].$$

2. В случае решения (23.25) находим:

$$q(0) = 0 = A + \varepsilon C,$$

$$I(0) = B - \beta A = 0,$$

откуда:

$$A = -\varepsilon C; \quad B = -\beta \varepsilon C.$$

Окончательно получаем:

$$q(t) = \varepsilon C [1 - (1 + \beta t)e^{-\beta t}].$$

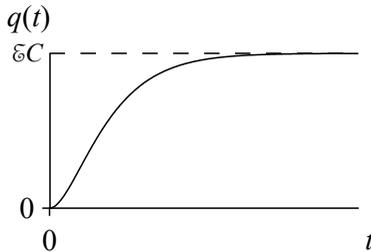


Рис. 24.13б. Закон изменения заряда на обкладках конденсатора от времени.

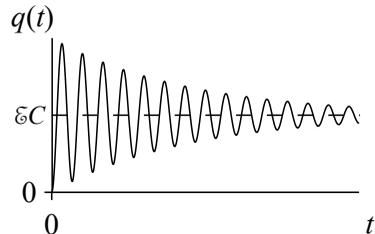


Рис.24.13в. Закон изменения заряда на обкладках конденсатора от времени.

Пример зависимости  $q(t)$  для случая  $\beta = \omega_0$  приведен на рис. 24.13б.

3. В случае решения (24.26) находим:

$$q(0) = 0 = A + \varepsilon C,$$

$$I(0) = 0 = B\omega - \beta A,$$

откуда:

$$A = -\varepsilon C; \quad B = -(\beta/\omega)\varepsilon C.$$

В итоге получаем:

$$q(t) = \mathcal{E}C \left\{ 1 - e^{-\beta t} \left[ \cos(\omega t) + \frac{\beta}{\omega} \sin(\omega t) \right] \right\}.$$

Пример зависимости  $q(t)$  для случая  $\beta < \omega_0$  приведен на рис. 24.13в.

**Ответ:**

$$\text{при } \beta > \omega_0: q(t) = \mathcal{E}C \left[ 1 - \frac{e^{-\beta t}}{2} \left( e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} \right) \right];$$

$$\text{при } \beta = \omega_0: q(t) = \mathcal{E}C [1 - (1 + \beta t)e^{-\beta t}];$$

$$\text{при } \beta < \omega_0: q(t) = \mathcal{E}C \left\{ 1 - e^{-\beta t} \left[ \cos(\omega t) + \frac{\beta}{\omega} \sin(\omega t) \right] \right\};$$

$$\text{где } \beta = \frac{r}{2L}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

**Задача 24.3.12.** Схема состоит из резистора сопротивлением  $R$ , конденсатора емкостью  $C$ , катушки индуктивности  $L$  и источника напряжения  $\mathcal{E}$ , соединенных, как показано на рис. 24.14. Определить закон изменения силы тока  $I_L(t)$ , текущего в катушке индуктивности после замыкания ключа.

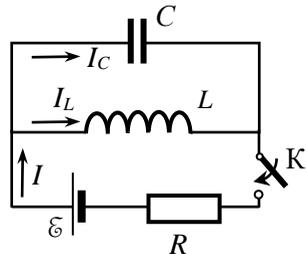


Рис. 24.14. Схема цепи к задаче 24.3.12.

### Решение

Следуя правилам Кирхгофа, составляем систему уравнений для этой цепи при обходе контуров по часовой стрелке:

$$I = I_C + I_L, \quad (24.27)$$

$$IR + \frac{q}{C} = \mathcal{E}, \quad (24.28)$$

$$\frac{q}{C} - L \frac{dI_L}{dt} = 0, \quad (24.29)$$

где использованы обозначения сил токов, указанные на рис. 24.14. Здесь  $q$  – заряд на конденсаторе, поэтому

$$I_C = \frac{dq}{dt}.$$

Дифференцируя по времени уравнение (24.29) и используя соотношения (24.27) и (24.28), приходим к уравнению второго порядка для искомой переменной  $I_L(t)$ :

$$\begin{aligned} I_C &= CL \frac{d^2 I_L}{dt^2}, \\ (I_C + I_L)R + L \frac{dI_L}{dt} &= \mathcal{E}, \\ CLR \frac{d^2 I_L}{dt^2} + L \frac{dI_L}{dt} + RI_L &= \mathcal{E}. \end{aligned} \quad (24.30)$$

Разделим уравнение (24.30) на  $CRL$  и введем следующие обозначения:

$$2\beta = \frac{1}{RC}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Для функции  $I_L(t)$  получили дифференциальное уравнение второго порядка в каноническом виде:

$$\frac{d^2 I_L}{dt^2} + 2\beta \frac{dI_L}{dt} + \omega_0^2 I_L = \frac{\mathcal{E}}{CRL}.$$

Решение такого уравнения было подробно изложено в **задачах 24.3.10** и **24.3.11**. Теперь начальные условия таковы: при  $t=0$   $I_L(0) = 0$  и  $L \frac{dI_L}{dt}(0) = \mathcal{E}$ .

Общее решение такого уравнения (см. **задачи 24.3.10** и **24.3.11**) в зависимости от соотношения параметров  $R$ ,  $C$  и  $L$  допускает как аperiодический, так и колебательный процессы.

1. При  $\beta > \omega_0$ :

$$\begin{aligned} I_L(t) &= \exp(-\beta t) [A \exp(\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t) + \\ &+ B \exp(-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t)] + \frac{\mathcal{E}}{\omega_0^2 CRL}. \end{aligned}$$

2. При  $\beta = \omega_0$ :

$$I_L(t) = (A + Bt) \exp(-\beta t) + \frac{\mathcal{E}}{\omega_0^2 CRL}.$$

3. При  $\beta < \omega_0$ :

$$I_L(t) = \exp(-\beta t)(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) + \frac{\xi}{\omega_0^2 CRL}.$$

Постоянные интегрирования  $A$  и  $B$  определяем из начальных условий так же, как это было сделано в задаче 24.6. Учтем также, что

$$\frac{\xi}{\omega_0^2 CRL} = \frac{\xi}{R}.$$

После простых преобразований получаем ответ.

$$I_L(t) = \frac{\xi}{R} \left\{ 1 - e^{-\beta t} \left[ \cos(\omega t) + \frac{\beta}{\omega} \sin(\omega t) \right] \right\};$$

где  $\beta = \frac{1}{2RC}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ ,  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ .

**Ответ:**

при  $\beta > \omega_0$ :

$$I_L(t) = \frac{\xi}{R} \left[ 1 - e^{-\beta t} \left( \operatorname{ch} \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t + \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}} \operatorname{sh} \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t \right) \right];$$

при  $\beta = \omega_0$ :  $I_L(t) = \frac{\xi}{R} [1 - (1 + \beta t)e^{-\beta t}]$ ;

при  $\beta < \omega_0$ :  $I_L(t) = \frac{\xi}{R} \left\{ 1 - e^{-\beta t} \left[ \cos(\omega t) + \frac{\beta}{\omega} \sin(\omega t) \right] \right\}$ ;

где  $\beta = \frac{1}{2RC}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ ,  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ .

### Задачи типа 24.3

*Расчет энергетических характеристик процессов (мощности, энергии, количества выделенного тепла и т. д.).*

**Метод решения.** Токи и напряжения во всех рассмотренных цепях рассчитываются по методам, описанным для задач типа 24.1 и 24.2, после чего для расчета энергетических характеристик используется закон Джоуля–Ленца (13.11) или соотношение (24.13) из этой главы.

**Задача 24.3.13.** Конденсатор ёмкости  $C$  заряжается от источника постоянного напряжения  $\mathcal{E}_0$  через сопротивление  $R$  (см. рис. 24.15). Определить зависимость от времени мощности  $P(t)$ , подводимой к конденсатору.

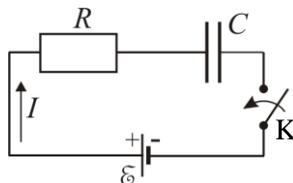


Рис. 24.15. Электрическая схема для расчета к задаче 24.3.13.

### Решение

Мощность  $P(t)$ , подводимая к конденсатору, равна (24.13)

$$P(t) = U(t)I(t).$$

Здесь  $U$  и  $I$  – падение напряжения и ток через конденсатор.

В задаче 24.3.2 получено, что при зарядке конденсатора постоянной ЭДС, напряжение на нём меняется по закону

$$U(t) = \mathcal{E}_0(1 - e^{-t/RC}),$$

а в замечании 1 к этой же задаче отмечено, что при зарядке конденсатора в последовательной  $RC$ -цепи сила тока в ней изменяется по закону

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} e^{-t/RC}.$$

Отсюда получаем:

$$P(t) = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R} (1 - e^{-t/RC}) e^{-t/RC}.$$

*Замечание.* Возможно решение этой задачи и другим, энергетическим, способом, что позволяет не находить зависимость силы тока от времени.

При зарядке конденсатора его энергия изменяется со временем по закону

$$W(t) = \frac{CU^2(t)}{2} = \frac{C\mathcal{E}_0^2(1 - e^{-t/RC})^2}{2}.$$

А значит, для этого необходимо подводить к нему мощность

$$P(t) = \frac{dW(t)}{dt} = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R} (1 - e^{-t/RC}) e^{-t/RC}.$$

**Ответ:** 
$$P(t) = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R} (1 - e^{-t/RC}) e^{-t/RC}.$$

**Задача 24.3.14.** Катушка

сопротивлением  $R$  и индуктивностью  $L$  в момент времени  $t = 0$  попадает на время  $\Delta t$  под напряжение  $U$  (ключ в положении 1) (см. рис. 24.16). Затем ключ переводят в положение 2. Какое полное количество теплоты  $Q$  выделится в катушке за все время протекания тока в цепи? Какое количество теплоты  $Q_1$  выделится в катушке за время  $\Delta t$ ?

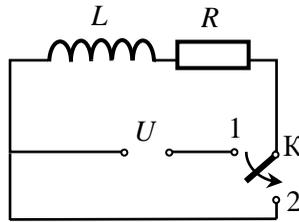


Рис. 24.16. Схема цепи к задаче 24.3.14

**Решение**

За промежуток времени  $\Delta t$  источник напряжения совершает работу, которая вся в конечном счете превратится в тепло  $Q$ . Количество теплоты выделяется только на активном сопротивлении  $R$ , где нет сдвига фаз между током и напряжением. Для вычисления работы источника можно применить формулу:

$$\delta A = UI dt,$$

из которой следует, что

$$A = U \int_0^{\Delta t} I dt. \quad (24.31)$$

Силу тока в цепи определим, как в задаче 24.3.6:

$$I = (U/R)(1 - e^{-(t/\tau)}), \quad (24.32)$$

$$\text{где } \tau = \frac{L}{R}.$$

Подставляя выражение (24.32) в формулу (24.31), для полного количества теплоты  $Q$ , выделившегося в катушке за все время протекания тока в цепи, получаем:

$$Q = A = \frac{U^2}{R} \int_0^{\Delta t} (1 - e^{-(t/\tau)}) dt = \frac{U^2}{R} \left[ \Delta t + \tau \left( e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} - 1 \right) \right]. \quad (24.33)$$

Количество теплоты  $Q_1$ , выделившееся в катушке за время  $\Delta t$ , найдем из закона Джоуля–Ленца:

$$Q_1 = \int_0^{\Delta t} I^2 R dt = \frac{U^2}{R} \left[ \Delta t + 2\tau \left( e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} - 1 \right) - \frac{\tau}{2} \left( e^{-\frac{2\Delta t}{\tau}} - 1 \right) \right]. \quad (24.34)$$

К концу промежутка времени  $\Delta t$  в катушке образовался запас энергии:

$$W = \frac{1}{2} LI^2(\Delta t).$$

Воспользовавшись формулами (24.33) и (24.34), легко проверить, что в соответствии с законом сохранения энергии  $Q = Q_1 + W$ :

$$\begin{aligned} Q - Q_1 &= \frac{U^2 \tau}{2R} \left[ e^{-\frac{2\Delta t}{\tau}} - 2e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} + 1 \right] = \frac{1}{2} L \left( \frac{U}{R} \right)^2 \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} LI^2(\Delta t) = W. \end{aligned}$$

*Замечание.* Катушка индуктивности всегда обладает некоторым сопротивлением. Если это сопротивление мало по сравнению с другими в схеме, то его просто не включают в схему. Если же им пренебречь нельзя, то при расчетах его изображают в схеме как отдельный резистор, которому приписывается сопротивление катушки.

$$\text{Ответ: } Q = \frac{U^2}{R} \left[ \Delta t + \tau \left( e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} - 1 \right) \right],$$

$$Q_1 = \frac{U^2}{R} \left[ \Delta t + 2\tau \left( e^{-(\Delta t/\tau)} - 1 \right) - \frac{\tau}{2} \left( e^{-2(\Delta t/\tau)} - 1 \right) \right].$$

#### 24.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 24.4.1.** Определить зависимость от времени заряда  $Q(t)$  на обкладках конденсатора  $C$  в схеме, приведенной на рис. 24.17, после замыкания ключа  $K$ .

*Ответ:*

$$Q(t) = \varepsilon_0 C \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right),$$

где  $\tau = \frac{CR_1 R_2}{R_1 + R_2}$ .

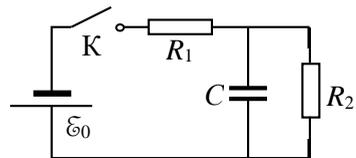


Рис. 24.17. Схема цепи к задаче 24.4.1

**Задача 24.4.2.** Определить закон изменения силы тока  $I(t)$  через источник постоянного напряжения  $\mathcal{E}_0$  после замыкания ключа К в схеме, приведенной на рис. 24.18.

*Ответ:*

$$I(t) = \mathcal{E}_0 \left[ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right],$$

где  $\tau = \frac{1}{R_2 C}$ .

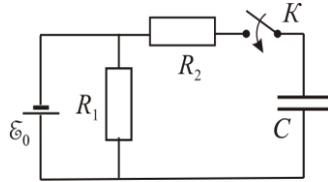


Рис. 24.18. Схема цепи в задаче 24.4.2.

**Задача 24.4.3.** Определить зависимость от времени силы тока  $I_L(t)$  через катушку индуктивности  $L$  в схеме, приведенной на рис. 24.19 после замыкания ключа К.

*Ответ:*

$$I_L(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R_1} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right),$$

где  $\tau = L \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ .

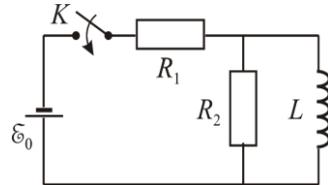


Рис. 24.19. Схема цепи в задаче 24.4.3.

**Задача 24.4.4.** Определить  $U_L(t)$  после замыкания ключа К в схеме, приведенной на рис. 24.20.

*Ответ:*

$$U_L(t) = \frac{\mathcal{E}_0 R_2}{R_1 + R_2} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),$$

где  $\tau = L \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ .

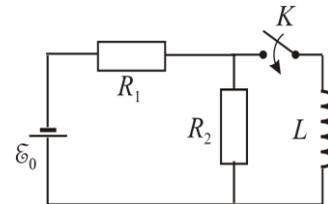


Рис. 24.20. Схема цепи в задаче 24.4.4.

**Задача 24.4.5.** Определить, как изменяется со временем напряжение на индуктивности в схеме, представленной на рис. 24.21, для двух случаев.

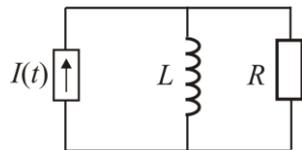


Рис. 24.21. Схема цепи в задаче 24.4.5.

Генератор тока формирует:

1) ступенчатый сигнал:

$$I(t) = 0 \text{ при } t < 0;$$

$$I(t) = I_0 \text{ при } t > 0.$$

2) прямоугольный импульс:

$$I(t) = 0 \text{ при } t < 0, t > T;$$

$$I(t) = I_0 \text{ при } 0 < t < T.$$

Ответ:

1.  $U_L(t) = 0$ , при  $t < 0$ .

$$U_L(t) = I_0 R \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \text{ при } t > 0, \text{ где } \tau = \frac{L}{R}.$$

2.  $U_L(t) = 0$ , при  $t < 0$ ,

$$U_L(t) = I_0 R \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \text{ при } 0 < t < T,$$

$$U_L(t) = I_0 R \left[ \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right) - \exp\left(-\frac{t-T}{\tau}\right) \right] \text{ при } t > T.$$

**Задача 24.4.6.** Две катушки, имеющие активные сопротивления  $r_1$  и  $r_2$ , индуктивности  $L_1$  и  $L_2$ , соединены параллельно и подключены к конденсатору ёмкости  $C$ , заряженному до напряжения  $U_0$  (см. рис. 24.22). Какие заряды протекут через каждую из катушек при разрядке конденсатора?

$$\text{Ответ: } Q_1 = \frac{CU_0 r_2}{r_1 + r_2}, \quad Q_2 = \frac{CU_0 r_1}{r_1 + r_2}.$$

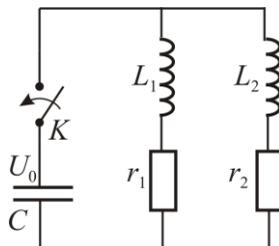


Рис. 24.22. Схема цепи в задаче 24.4.6.

**Задача 24.4.7.** В условиях задачи 24.4.6 определить, чему равен полный заряд  $q$ , который протечёт через поперечное сечение проводника, из которого сделана рамка, после завершения релаксационного процесса.

$$\text{Ответ: } q = \frac{Ba^2}{R}.$$

**Задача 24.4.8.** В схеме, представленной на рис. 24.23, определить зависимость от времени напряжения  $U_2(t)$  на

конденсаторе  $C_2$ . Генератор напряжения  $\varepsilon(t)$  формирует ступенчатый сигнал:

$$\varepsilon(t) = 0 \text{ при } t < 0;$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \text{ при } t > 0.$$

Первоначально ( $t < 0$ ) токи и напряжения в цепи были равны нулю. При расчёте положить  $C_1 = C_2 = C$ ;  $R_1 = R_2 = R$ .

*Ответ:*

$$U_2(t) = \frac{2\varepsilon_0}{\sqrt{5}} e^{-\beta t} \operatorname{sh}(\gamma t),$$

где  $\beta = \frac{3}{2RC}$ ,  $\gamma = \frac{\sqrt{5}}{2RC}$ ,  $\operatorname{sh}(\gamma t) = (e^{\gamma t} - e^{-\gamma t})/2$  – гиперболический синус.

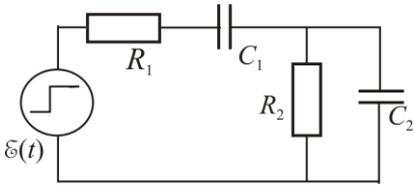


Рис. 24.23. Схема цепи к задаче 24.4.8.

**Задача 24.4.9.** Конденсатор  $C$  заряжается от источника с постоянной ЭДС  $\varepsilon_0$  через катушку с индуктивностью  $L$  и сопротивление  $R$ , причем  $R^2 = 4L/C$ . Определить:

- 1) как изменяется сила тока со временем;
- 2) через какое время сила тока достигнет максимума;
- 3) чему равно напряжение на конденсаторе в этот момент;
- 4) чему равно максимальное значение силы тока.

*Ответ:*

$$1) I = \frac{\varepsilon_0}{L} t e^{-t/\tau};$$

$$2) t = \frac{2L}{R};$$

$$3) U = \varepsilon_0 \frac{e-2}{e};$$

$$4) I_{\max} = \frac{2\varepsilon_0}{eR}.$$

**Задача 24.4.10.** ([2], 3.333) Замкнутая цепь состоит из последовательно соединенных включенных источника постоянной

ЭДС  $\mathcal{E}$  и дросселя индуктивности  $L$ . Активное сопротивление всей цепи равно  $R$ . В момент времени  $t = 0$  индуктивность дросселя скачком уменьшили в  $\eta$  раз. Найти ток в цепи как функцию времени  $t$ .

**Указание.** При скачкообразном изменении индуктивности полный магнитный поток (потокосцепление) останется неизменным.

*Ответ:*  $I = [1 + (\eta - 1)\exp(-\eta R/L)]\mathcal{E}/R$ .

**Задача 24.4.11.** Найти силу тока  $I_L(t)$  в индуктивности  $L$  после замыкания ключа  $K$  в схеме, приведенной на рис. 24.24. Параметры  $L$ ,  $C$ ,  $R$  удовлетворяют условию  $L > 4CR^2$ .

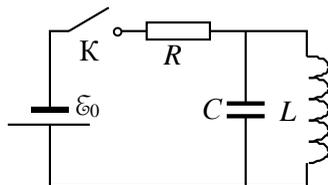


Рис. 24.24. Схема цепи в задаче 24.4.11.

*Ответ:*

$$I_L(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \left[ 1 - \frac{\beta_2 e^{-\beta_1 t} - \beta_1 e^{-\beta_2 t}}{\beta_2 - \beta_1} \right],$$

где  $\beta_1 = \beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ ,  $\beta_2 = \beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ ,  $\beta = \frac{1}{2RC}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ .

**Задача 24.4.12.** Колебательный контур состоит из конденсатора и катушки с индуктивностью  $L = 1$  Гн, которые соединены последовательно. Чему равно омическое сопротивление контура  $r$ , если известно, что амплитуда собственных колебаний в нём за время 0,1 секунды уменьшается в  $e = 2,718$  раз?

*Ответ:*  $r = 20$  Ом.

**Задача 24.4.13.** Предварительно заряженный до разности потенциалов  $U_0$  конденсатор емкости  $C$  разряжается через сопротивление  $R$ . Найти зависимость энергии конденсатора от времени.

*Ответ:*  $W_C(t) = \frac{CU_0^2}{2} \exp\left(-\frac{2}{RC}t\right)$ .

**Задача 24.4.14.** Конденсатор емкости  $C$  заряжается от источника ЭДС величиной  $\mathcal{E}_0$  с внутренним сопротивлением  $r$ .

Определить зависимость от времени количества теплоты, выделившейся в цепи при зарядке конденсатора.

$$\text{Ответ: } Q(t) = \frac{C\mathcal{E}_0^2}{2} \left( 1 - \exp\left(-\frac{2t}{rC}\right) \right).$$

## Глава 25

## РАСЧЕТ ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА. МЕТОДЫ КОМПЛЕКСНЫХ АМПЛИТУД И ВЕКТОРНЫХ ДИАГРАММ. МОЩНОСТЬ В ЦЕПЯХ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

### 25.1. Теоретический материал

#### Метод комплексных амплитуд.

В основе метода комплексных амплитуд лежит замена гармонически меняющейся во времени вещественной физической величины  $A(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi)$  комплексным представлением этой величины  $\hat{A}(t)$  так, что:

$$\begin{aligned}\hat{A}(t) &= A_0 e^{i\varphi} e^{i\omega t} = \hat{A}_0 e^{i\omega t} = A_0 e^{i(\omega t + \varphi)} = \\ &= A_0 \cos(\omega t + \varphi) + i \cdot A_0 \sin(\omega t + \varphi), \\ A(t) &= \operatorname{Re}(\hat{A}(t)) = A_0 \cos(\omega t + \varphi).\end{aligned}\quad (25.1)$$

Здесь  $\hat{A}_0 = A_0 e^{i\varphi}$  – комплексная амплитуда,  $A_0$  – амплитуда и  $\varphi$  – (начальная) фаза гармонических колебаний.

Если законам постоянных токов и определениям используемых физических величин соответствуют линейные (в том числе дифференциальные) уравнения с постоянными вещественными коэффициентами, то они справедливы и для комплексных представлений соответствующих электрических величин.

#### Комплексное сопротивление (импеданс) участка цепи.

Комплексным сопротивлением (импедансом)  $Z$  участка цепи называется отношение комплексного напряжения  $\hat{U}(t)$  к комплексной силе тока  $\hat{I}(t)$  (комплексных амплитуд напряжения  $\hat{U}_0$  и силы тока  $\hat{I}_0$ ) на этом участке:

$$Z \equiv \frac{\hat{U}(t)}{\hat{I}(t)} = \frac{\hat{U}_0 e^{i\omega t}}{\hat{I}_0 e^{i\omega t}} = \frac{\hat{U}_0}{\hat{I}_0} = \frac{U_0}{I_0} e^{i(\varphi_U - \varphi_I)}.\quad (25.2)$$

Здесь  $\hat{U}(t)$  и  $\hat{I}(t)$  – напряжение и сила тока на участке цепи в комплексной форме:

$$\begin{aligned}\hat{I}(t) &= \hat{I}_0 e^{i\omega t} = I_0 e^{i(\omega t + \varphi_I)}, \\ \hat{U}(t) &= \hat{U}_0 e^{i\omega t} = U_0 e^{i(\omega t + \varphi_U)}.\end{aligned}\quad (25.3)$$

где  $\hat{I}_0$  и  $\hat{U}_0$  – комплексные амплитуды,  $I_0$  и  $U_0$  – амплитуды, а  $\varphi_I$  и  $\varphi_U$  – фазы гармонически меняющихся силы тока и напряжения на участке цепи. При этом:

$$\begin{aligned} I(t) &= \operatorname{Re}(\hat{I}(t)) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_I), \\ U(t) &= \operatorname{Re}(\hat{U}(t)) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_U). \end{aligned} \quad (25.4)$$

В общем случае комплексное сопротивление участка цепи можно представить в виде:

$$Z = X + iY = |Z|e^{i\varphi} = |Z|\cos\varphi + i|Z|\sin\varphi, \quad (25.5)$$

где  $X = \operatorname{Re} Z = |Z|\cos\varphi$  – активное и  $Y = \operatorname{Im} Z = |Z|\sin\varphi$  – реактивное сопротивления цепи,  $|Z| = \sqrt{X^2 + Y^2}$  – полное сопротивление цепи (модуль импеданса),  $\varphi = \varphi_U - \varphi_I$  – аргумент комплексного сопротивления, равный фазе, на которую напряжение опережает силу тока на данном участке цепи, причем

$$\cos\varphi = \frac{X}{|Z|} \quad \text{и} \quad \sin\varphi = \frac{Y}{|Z|}.$$

Для комплексных сопротивлений соединенных последовательно  $Z_s$  и параллельно  $Z_p$  участков электрической цепи можно записать:

$$Z_s = \sum_j Z_j, \quad (25.6)$$

$$\frac{1}{Z_p} = \sum_j \frac{1}{Z_j}, \quad (25.7)$$

где  $Z_j$  – комплексное сопротивление  $j$ -го участка цепи.

**Комплексные сопротивления резистора, катушки индуктивности и конденсатора.**

Для резистора сопротивлением  $R$ :

$$\begin{aligned} Z_R &= R, \\ |Z_R| &= R, \quad \varphi_R = 0, \quad X_R = R, \quad Y_R = 0. \end{aligned} \quad (25.8)$$

Для катушки индуктивности индуктивностью  $L$ :

$$\begin{aligned} Z_L &= i\omega L = \omega L e^{i\frac{\pi}{2}}, \\ |Z_L| &= \omega L, \quad \varphi_L = \frac{\pi}{2}, \quad X_L = 0, \quad Y_L = \omega L. \end{aligned} \quad (25.9)$$

Для конденсатора емкостью  $C$ :

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-i\frac{\pi}{2}},$$

$$|Z_C| = \frac{1}{\omega C}, \quad \varphi_C = -\frac{\pi}{2}, \quad X_C = 0, \quad Y_C = -\frac{1}{\omega C}. \quad (25.10)$$

**Закон Ома для гармонических токов в комплексной форме.**

$$\hat{U}(t) = Z\hat{I}(t),$$

$$\hat{U}_0 = Z\hat{I}_0,$$

$$U_0 = |Z|I_0. \quad (25.11)$$

**Обобщенный закон Ома в комплексной форме.**

$$Z_{12}\hat{J} = \hat{U}_{12} + \mathcal{E}_{12}. \quad (25.12)$$

**Формулы для правил Кирхгофа** (см. п. 14.1. Теоретический материал в Главе 14) **в комплексной форме.**

*Первое правило Кирхгофа:*

$$\sum_k \hat{I}_k = 0. \quad (25.13)$$

*Второе правило Кирхгофа:*

$$\sum_k Z_k \hat{I}_k = \sum_k \mathcal{E}_k. \quad (25.14)$$

**Метод векторных диаграмм.**

Гармонические колебания физических величин и их комплексное представление можно изображать графически с помощью векторных диаграмм. При постоянной частоте колебаний  $\omega$  некоторой физической величине  $A(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi)$  (в комплексной форме  $\hat{A}(t) = \hat{A}_0 e^{i\omega t} = A_0 e^{i(\omega t + \varphi)}$ ) с амплитудой  $A_0$  и начальной фазой  $\varphi$  однозначно соответствует вектор длины  $A_0$ , который вращается с угловой скоростью  $\omega$  в плоскости, например, против часовой стрелки, составляя в любой момент времени угол  $\omega t + \varphi$  с произвольно выбранной осью X (рис. 25.1).

Оказывается удобным зафиксировать картину совместного вращения векторов в начальный момент времени, т.е. однозначно сопоставить каждой гармонически меняющейся физической величине  $A(t)$  (точнее ее комплексной амплитуде  $\hat{A}_0$ ) вектор  $\mathbf{A}$  на плоскости, задав его длину, равную амплитуде  $A_0$ , и угол относительно произвольно выбранного направления оси X, равный начальной фазе  $\varphi$  (рис. 25.1):

$$A(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow \mathbf{A}.$$

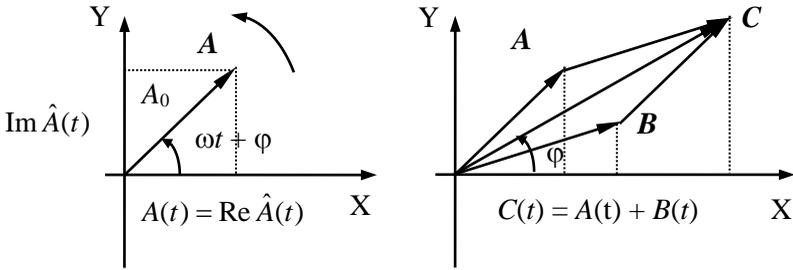


Рис. 25.1. Представление гармонически меняющихся величин на комплексной плоскости.

Проекция этого вектора на ось X равна самой физической величине. Все векторы на такой координатной плоскости, изображающие физические величины, которые меняются со временем по гармоническому закону с одинаковой частотой, будут вращаться вместе, не меняя взаимного расположения (рис. 25.1).

При этом легко видеть (рис. 25.1), что линейной комбинации гармонически меняющихся с одинаковой частотой величин  $C(t) = A(t) + B(t)$  соответствует такая же линейная комбинация соответствующих им векторов  $C = A + B$ :

$$C(t) = A(t) + B(t) \Leftrightarrow C = A + B.$$

Заметим, что векторная диаграмма – это, по существу, представление комплексной величины на комплексной плоскости, где по осям декартовой системы координат откладываются вещественная  $\text{Re } \hat{A}_0(t)$  и мнимая  $\text{Im } \hat{A}_0(t)$  части комплексной амплитуды.

### **Векторные диаграммы силы тока и напряжения для резистора, катушки индуктивности и конденсатора.**

*Векторные диаграммы силы тока и напряжения для резистора, катушки индуктивности и конденсатора* представлены на рис. 25.2(а – в).

Как видим, падение напряжения на резисторе, амплитуда которого равна  $U_{R0} = RI$ , совпадает по фазе с силой тока, падение напряжения на индуктивности с амплитудой  $U_{L0} = \omega LI_0$  опережает силу тока по фазе на  $\pi/2$ , а падение напряжения на конденсаторе с амплитудой  $U_{C0} = \frac{1}{\omega C} I_0$  отстает по фазе от силы тока на  $\pi/2$ .

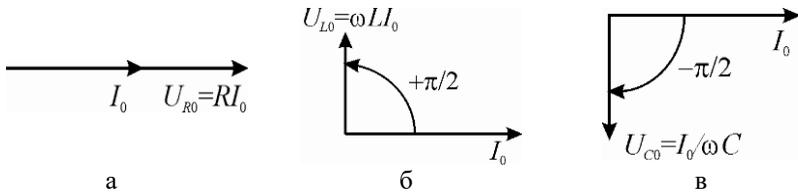


Рис. 25.2. Векторные диаграммы силы тока и напряжения: а – для резистора сопротивлением  $R$ ; б – для катушки с индуктивностью  $L$ ; в – для конденсатора емкостью  $C$ .

**Действующие (эффективные) значения силы тока и напряжения.**

Действующими (эффективными) значениями силы тока и напряжения для переменного тока называют величины силы тока и напряжения для постоянного тока, который производит такую же работу за период, что и рассматриваемый переменный ток.

Действующие (эффективные) значения силы тока и напряжения для гармонически меняющегося тока равны:

$$I_{\text{eff}} \equiv \frac{I_0}{\sqrt{2}}, \quad (25.15)$$

$$U_{\text{eff}} \equiv \frac{U_0}{\sqrt{2}}. \quad (25.16)$$

**Коэффициент мощности цепи.**

Коэффициент мощности цепи – отношение активного сопротивления ( $X$ ) к полному сопротивлению ( $|Z| = \sqrt{X^2 + Y^2}$ ) цепи:

$$\cos \varphi = \frac{X}{|Z|} = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}. \quad (25.17)$$

**Мощность в цепях переменного тока.**

Средняя за период мощность гармонического тока (работа сил электрического поля по перемещению заряда за единицу времени)  $\langle P(t) \rangle_T$  равна:

$$\langle P(t) \rangle_T = \frac{U_0 I_0}{2} \cos \varphi = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi. \quad (25.18)$$

## 25.2. Основные типы задач (классификация)

- 25.1. Задачи с неразветвлёнными цепями.  
 25.2. Задачи с разветвлёнными цепями.  
 25.3. Задачи на определение мощности в цепях переменного тока.

## 25.3. Методы решения и примеры решения задач

### Задачи типа 25.1

*Задачи с неразветвлёнными цепями.*

#### **Методы решения.**

При расчёте тока и напряжений, действующих в неразветвленной цепи, вначале рекомендуется определить комплексную амплитуду тока  $\hat{I}$ . В соответствии с выражением для комплексного сопротивления совокупности последовательно соединённых участков цепи (25.6) и вторым правилом Кирхгофа (25.14) ток в неразветвленной цепи равен

$$\hat{I} = \frac{\hat{\mathcal{E}}}{\sum_k Z_k}.$$

где

$$\hat{\mathcal{E}} = \sum_m \hat{\mathcal{E}}_m$$

– суммарная комплексная ЭДС всех последовательно соединённых источников в цепи с учетом их относительных сдвигов фаз (подобно  $\hat{U}(t)$  в (25.3)). Затем определяется амплитудное значение тока и сдвиг его фазы относительно ЭДС. Напряжения на резисторах, индуктивностях и конденсаторах рассчитываются по формулам (25.8)–(25.10).

При расчёте модуля полного сопротивления цепи часто бывает удобно использовать следующее выражение для модуля комплексного сопротивления:

$$Z_0 = \operatorname{Re}(\hat{Z}) \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}. \quad (25.19)$$

Этот результат легко получить, используя комплексную форму представления полного сопротивления цепи:

$$\hat{Z} = \operatorname{Re}(\hat{Z}) + i \operatorname{Im}(\hat{Z}) = \operatorname{Re}(\hat{Z}) \left( 1 + i \frac{\operatorname{Im}(\hat{Z})}{\operatorname{Re}(\hat{Z})} \right). \quad (25.20)$$

Поскольку  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{Im}(Z)}{\operatorname{Re}(Z)}$ , то

$$\hat{Z} = \operatorname{Re}(\hat{Z})(1 + i \operatorname{tg} \varphi). \quad (25.21)$$

Модуль этой величины равен вышеприведенному значению  $Z_0$  (25.19).

Вначале рекомендуется ознакомиться с решениями задач 25.3.1–25.3.3, т.к. при решении ряда последующих используются результаты, полученные в этих задачах.

**Задача 25.3.1.** Конденсатор емкостью 20 мкФ и резистор, сопротивление которого равно 160 Ом, соединены последовательно с генератором переменного напряжения (частота  $\nu = 50$  Гц, эффективное напряжение  $U_{\text{eff}} = 120$  В).

Определить зависимость от времени силы тока в цепи  $I(t)$  и напряжений на конденсаторе  $U_C(t)$  и резисторе  $U_R(t)$ .

### Решение

Положим, что ЭДС зависит от времени как  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(2\pi\nu t)$ , где  $\mathcal{E}_0 = \sqrt{2} U_{\text{eff}} \approx 170$  В – амплитуда источника ЭДС.

При решении этой задачи можно воспользоваться как методом векторных диаграмм, так и методом комплексных амплитуд.

1) Решение методом векторных диаграмм (рис. 25.3).

Выберем в качестве исходного направления направление вектора тока  $I$ , поскольку ток одинаков во всей цепи.

Вектор  $U_R$  параллелен вектору тока  $I$  и имеет длину  $U_R = IR$ .

Вектор напряжения на конденсаторе  $U_C$  перпендикулярен к  $I$  (сдвинут по фазе на угол  $-\frac{\pi}{2}$ ), его длина  $U_C = \frac{I}{\omega C}$ .

Все элементы цепи соединены последовательно, поэтому  $\mathcal{E}_0 = U_R + U_C$  (векторная сумма).

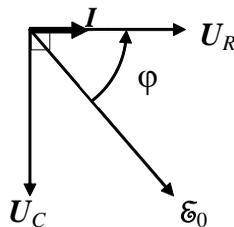


Рис. 25.3. Векторная диаграмма для последовательной RC-цепи.

Поскольку исходной для нас является зависимость ЭДС от времени, то фазы остальных напряжений будем отсчитывать относительно вектора  $\mathcal{E}_0$ . Тогда фаза  $\varphi$  напряжения  $U_R$  и тока  $I$  положительна и определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_C}{U_R} = \frac{1}{\omega RC},$$

а фаза напряжения  $U_C$  будет равна  $\varphi - \frac{\pi}{2}$ .

Учитывая, что  $U_R = \varepsilon_0 \cos \varphi$ ,  $U_C = \varepsilon_0 \sin \varphi$  и используя известные из тригонометрии соотношения

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}, \quad \sin \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}},$$

можем записать:

$$U_R(t) = \varepsilon_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} \cos(2\pi\nu t + \varphi),$$

$$I(t) = \frac{U_R(t)}{R}.$$

$$U_C(t) = \varepsilon_0 \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} \cos(2\pi\nu t + \varphi - \frac{\pi}{2}).$$

При данных в условии задачи значениях  $R$ ,  $C$  и  $\nu$  имеем  $\operatorname{tg} \varphi \approx 1$ , т.е.  $\varphi = \pi/4$  или  $45^\circ$ . Подставляя эти значения и заданные величины  $\varepsilon_0$  и  $\nu$  в предыдущие соотношения, получаем:

$$U_R(t) = 120 \cos(100\pi t + \pi/4) \text{ В},$$

$$U_C(t) = 120 \cos(100\pi t - \pi/4) \text{ В},$$

$$I(t) = U_R(t)/R = 0.75 \cos(100\pi t + \pi/4) \text{ А}.$$

## 2) Решение методом комплексных амплитуд.

Как и в методе векторных диаграмм, для комплексных амплитуд  $\hat{\varepsilon}_0$ ,  $\hat{U}_C$ ,  $\hat{U}_R$  можно записать следующее соотношение:

$$\hat{\varepsilon}_0 = \hat{U}_C + \hat{U}_R,$$

$$\text{где } \hat{U}_R = \hat{I} R, \quad \hat{U}_C = \frac{\hat{I}}{i\omega C} = \frac{\hat{I}}{\omega C} e^{-i\pi/2}.$$

$$\text{Отсюда получим: } \hat{\varepsilon}_0 = \hat{I} \left( R + \frac{1}{i\omega C} \right) = \hat{Z} \hat{I},$$

где  $\hat{Z} = Z_0 e^{i\varphi}$  – комплексное сопротивление (импеданс) цепи. Здесь

$$Z_0 = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}} = R \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}, \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{\omega RC} < 0.$$

В отличие от предыдущего рассмотрения, в этих формулах  $\varphi$  представляет собой сдвиг фазы ЭДС относительно фазы тока, поэтому  $\varphi < 0$ . Окончательный результат в комплексной записи будет иметь следующий вид:

$$\hat{I} = \frac{\xi_0}{Z_0} e^{-i\varphi} = \frac{\xi_0}{Z_0} e^{+i|\varphi|}, \quad \hat{U}_R = \hat{I}R,$$

$$\hat{U}_C = \frac{\xi_0}{\omega CZ_0} e^{i(-\varphi - \pi/2)} = \frac{\xi_0}{\omega CZ_0} e^{i(|\varphi| - \pi/2)}.$$

Переходя к действительным переменным, получим тот же результат, что и при использовании метода векторных диаграмм.

**Ответ:**  $U_R(t) = 120 \cos(100\pi t + \pi/4)$  В,  
 $U_C(t) = 120 \cos(100\pi t - \pi/4)$  В,  
 $I(t) = U_R(t)/R \approx 0.75 \cos(100\pi t + \pi/4)$  А.

**Задача 25.3.2.** Резистор сопротивлением  $R = 100$  Ом и катушка индуктивностью  $L = 0,318$  Гн соединены последовательно и включены в цепь с гармонически меняющейся ЭДС  $\xi(t) = \xi_0 \cos(2\pi\nu t)$  с эффективным напряжением  $U_{\text{eff}} = 120$  В и частотой  $\nu = 50$  Гц (рис. 25.4а). Определить зависимости от времени тока в цепи  $I(t)$  и напряжений на индуктивности  $U_L(t)$  и резисторе  $U_R(t)$ .

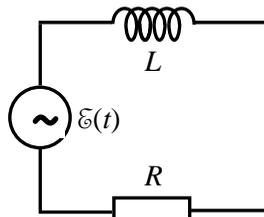


Рис. 25.4а. Схема  $RL$ -цепи переменного тока.

### Решение

В соответствии с условием задачи амплитудное значение ЭДС источника  $\xi_0 = \sqrt{2} U_{\text{eff}} \approx 170$  В.

При решении задачи можно воспользоваться методом векторных диаграмм или методом комплексных амплитуд.

1) Решение методом векторных диаграмм (рис. 25.4б).

Выберем в качестве исходного направление вектора тока  $I_0$ , поскольку ток одинаков во всей цепи.

Вектор напряжения на резисторе  $U_{R0}$  сонаправлен с вектором тока  $I_0$  и имеет длину

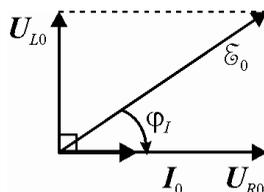


Рис. 25.4б. Векторная диаграмма  $RL$ -цепи переменного тока.

$$U_{R0} = I_0 R,$$

где  $U_{R0}$  и  $I_0$  – амплитуды напряжения на резисторе и силы тока в цепи.

Вектор напряжения на индуктивности  $U_{L0}$  перпендикулярен к вектору  $I_0$  (сдвинут по фазе на угол  $\pi/2$ ), его длина равна:

$$U_{L0} = \omega L I_0,$$

где  $U_{L0}$  – амплитуда напряжения на индуктивности.

Все элементы цепи соединены последовательно, поэтому

$$\mathcal{E}_0 = U_{R0} + U_{L0} \text{ (векторная сумма).}$$

Поскольку зависимость ЭДС от времени задана в условии задачи, то фазы остальных напряжений будем отсчитывать относительно вектора  $\mathcal{E}_0$ . Тогда фаза  $\varphi_I$  тока  $I_0$  и напряжения  $U_{R0}$  отрицательна и определяется соотношением:

$$\operatorname{tg} \varphi_I = -\frac{U_{L0}}{U_{R0}} = -\frac{\omega L}{R},$$

а фаза напряжения  $U_{L0}$  будет равна  $\varphi_I + \pi/2$ .

Учитывая, что

$$U_{R0} = |\mathcal{E}_0 \cos \varphi_I|, \quad U_{L0} = |\mathcal{E}_0 \sin \varphi_I|,$$

и используя известные из тригонометрии соотношения:

$$\cos \varphi_I = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_I}}, \quad \sin \varphi_I = \frac{\operatorname{tg} \varphi_I}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_I}},$$

можем записать:

$$U_R(t) = \mathcal{E}_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_I}} \cos(2\pi\nu t + \varphi_I),$$

$$I(t) = \frac{U_R(t)}{R};$$

$$U_L(t) = \mathcal{E}_0 \cdot \frac{|\operatorname{tg} \varphi_I|}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_I}} \cos(2\pi\nu t + \varphi_I + \frac{\pi}{2}).$$

При заданных в условии задачи значениях  $R$ ,  $L$  и  $\nu$  получим:

$$\operatorname{tg} \varphi_I = -\frac{\omega L}{R} = -\frac{6,28 \cdot 50 \cdot 0,318}{100} \approx -1,$$

т.е.  $\varphi_I \approx -\pi/4$ . Подставляя эти значения и заданные величины  $\mathcal{E}_0$  и  $\nu$  в предыдущие соотношения, получаем:

$$U_R(t) \cong 120 \cos(100\pi t - \pi/4) \text{ В,}$$

$$U_L(t) \cong 120 \cos(100\pi t + \pi/4) \text{ В,}$$

$$I(t) \cong U_R(t)/R = 1,2 \cos(100\pi t - \pi/4) \text{ А.}$$

2) Решение методом комплексных амплитуд.

Запишем II-е правило Кирхгофа для комплексных напряжений  $\hat{\mathcal{E}}$ ,  $\hat{U}_L$  и  $\hat{U}_R$  в рассматриваемой цепи:

$$\hat{\mathcal{E}} = \hat{U}_L + \hat{U}_R,$$

или

$$\hat{\mathcal{E}}_0 e^{i\omega t} = L \frac{d(\hat{I}_0 e^{i\omega t})}{dt} + \hat{I}_0 e^{i\omega t} R,$$

где  $\hat{\mathcal{E}}_0$  и  $\hat{I}_0$  – комплексные амплитуды ЭДС и силы тока в цепи.

После дифференцирования и сокращения на  $e^{i\omega t}$  в правой и левой частях равенства получаем соотношение между комплексными амплитудами:

$$\hat{\mathcal{E}}_0 = i\omega L \hat{I}_0 + \hat{I}_0 R.$$

Отсюда следует, что

$$\hat{\mathcal{E}}_0 = \hat{I}_0 (R + i\omega L) = \hat{Z}_0 \hat{I}_0,$$

где  $\hat{Z}_0 = Z e^{i\varphi_z}$  – комплексное сопротивление (импеданс) цепи. Здесь

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = R \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_z},$$

$$\operatorname{tg} \varphi_z = \frac{\omega L}{R} > 0.$$

В отличие от предыдущего способа решения в этих формулах  $\varphi_z$  представляет собой сдвиг фазы ЭДС относительно фазы тока, поэтому  $\varphi_z = -\varphi_I$ . Окончательный результат в комплексной записи будет иметь следующий вид:

$$\hat{I}_0 = \frac{\hat{\mathcal{E}}_0}{Z_0} e^{-i\varphi_z},$$

$$\hat{U}_{R0} = \hat{I} R,$$

$$\hat{U}_{L0} = \frac{\omega L \hat{\mathcal{E}}_0}{Z_0} e^{i(-\varphi_z + \pi/2)}.$$

Переходя к действительным переменным, получим тот же результат, что и при использовании метода векторных диаграмм.

**Ответ:**  $U_R(t) = 120 \cos(100\pi t - \pi/4)$  В,

$$U_L(t) = 120 \cos(100\pi t + \pi/4)$$
 В,

$$I(t) = 1,2 \cos(100\pi t - \pi/4)$$
 А.

**Задача 25.3.3.** Конденсатор и резистор соединены последовательно и включены в цепь переменного тока с

напряжением  $\mathcal{E}_{\text{eff}} = 50 \text{ В}$  и частотой  $\nu = 50 \text{ Гц}$ . Какую емкость должен иметь конденсатор для того, чтобы через резистор протекал ток  $I = 0,1 \text{ А}$  и напряжение на резисторе было равно  $U_R = 30 \text{ В}$ ? Напряжения и токи понимаются как эффективные.

### Решение

При решении этой задачи можно использовать два способа. Первый способ основан на непосредственном использовании результатов задачи 25.3.1. Полученные там соотношения для амплитуд тока и напряжения можно поделить на  $\sqrt{2}$  и сразу записать их для эффективных значений:

$$U_R = \mathcal{E}_{\text{eff}} \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \varphi}}, \text{tg} \varphi = -\frac{1}{\omega RC},$$

где  $R = \frac{U_R}{I}$ ,  $\omega = 2\pi\nu$ .

Отсюда следует:

$$C = \frac{I}{\omega U_R \text{tg} \varphi},$$

где  $\text{tg} \varphi = \sqrt{\left(\frac{\mathcal{E}_0}{U_R}\right)^2 - 1}$ .

Окончательно получаем:

$$C = \frac{1}{2\pi\nu} \frac{I}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 - U_R^2}}.$$

Подстановка численных значений дает:  $C = 7,96 \text{ мкФ}$ .

Во втором способе решения используется тот факт, что на векторной диаграмме векторы амплитуд  $\mathcal{E}_0$ ,  $U_{0R}$  и  $U_{0C}$  образуют прямоугольный треугольник ( $\mathcal{E}_0$  – гипотенуза,  $U_{0R}$  и  $U_{0C}$  – катеты, см. задачу 25.3.1). Тогда

$$U_{0C} = \sqrt{\mathcal{E}_0^2 - U_{0R}^2},$$

или для их эффективных значений:

$$U_C = \sqrt{\mathcal{E}_0^2 - U_R^2}.$$

Напряжение на конденсаторе  $U_C$  и ток в цепи  $I$  связаны соотношением:

$$U_C = \frac{I}{\omega C},$$

откуда следует:

$$U_C = \sqrt{\varepsilon_{eff}^2 - U_R^2} = \frac{I}{\omega C}.$$

Отсюда получаем тот же ответ:

$$C = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{I}{\sqrt{\varepsilon_{eff}^2 - U_R^2}}.$$

$$\text{Ответ: } C = \frac{1}{2\pi\nu} \cdot \frac{I}{\sqrt{\varepsilon_{eff}^2 - U_R^2}} = 7,96 \text{ мкФ}.$$

**Задача 25.3.4.** В цепь переменного тока включены последовательно генератор с эффективным напряжением  $\varepsilon_{eff} = 220$  В, конденсатор емкости  $C$ , катушка индуктивности  $L$  и резистор  $R$ . Найти напряжение  $U_R$  на резисторе, если известно, что напряжение на конденсаторе  $U_C = 2U_R$  и напряжение на катушке индуктивности  $U_L = 3U_R$  (напряжения рассматриваются как эффективные).

### Решение

В последовательной цепи напряжение на индуктивности  $U_L$  опережает по фазе ток в цепи (и напряжение на резисторе  $U_R$ ) на угол  $+90^\circ$  (рис. 25.4б). Напряжение на конденсаторе отстает по фазе от тока (сдвиг фаз равен  $-90^\circ$ , рис. 25.3). Таким образом,  $U_L$  и  $U_C$  находятся в противофазе. Соотношения между эффективными величинами напряжений те же, что и для амплитудных величин, поэтому напряжение на участке  $LC$

$$(U_L + U_C) = 3U_R - 2U_R = U_R$$

и опережает ток по фазе на  $90^\circ$ . Отсюда получаем:

$$\varepsilon_{eff}^2 = (U_L + U_C)^2 + U_R^2 = 2U_R^2, U_R = \frac{\varepsilon_{eff}}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Ответ: } U_R = \frac{\varepsilon_{eff}}{\sqrt{2}}.$$

### Задачи типа 25.2

Задачи с разветвлёнными цепями.

**Метод решения.** В дополнение к методам, предложенным для решения задач типа 25.1, следует использовать правила Кирхгофа (25.13) и (25.14).

**Задача 25.3.5.** На участке цепи, изображенном на рис. 25.5а, заданы величины  $L$ ,  $R$ ,  $C$  и сила тока

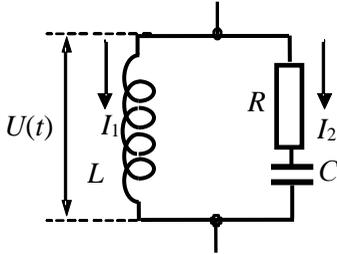


Рис. 25.5а. Схема участка цепи переменного тока с параллельным соединением  $RC$  и катушки индуктивности  $L$ .

$I_2 = I_0 \cos \omega t$  через участок с конденсатором. Найти напряжение  $U(t)$ , ток через катушку  $I_1(t)$  и сдвиг фазы  $\varphi$  между  $U(t)$  и напряжением  $U_C$  на конденсаторе.

### Решение

1) Решение методом векторных диаграмм.

Напряжение  $U(t)$  можно сразу найти, зная ток  $I_2(t)$  и импеданс правой части цепи. В комплексных амплитудах:

$$\begin{aligned}\hat{U}_0 &= \left( R + \frac{1}{i\omega C} \right) \hat{I}_{20} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}} e^{i\varphi_0} \hat{I}_{20} = \\ &= \frac{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}{\omega C} e^{-i|\varphi_0|} \hat{I}_{20},\end{aligned}$$

где  $\hat{I}_{20} = I_0$ ,  $\varphi_0$  – фазовый сдвиг напряжения  $U(t)$  относительно тока  $I_2(t)$ , определяемый из соотношения:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{1}{\omega RC} < 0.$$

Возьмем действительную часть от  $\hat{U}_0 e^{i\omega t}$  и найдем напряжение  $U(t)$ :

$$U(t) = \frac{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}{\omega C} I_0 \cos(\omega t - |\varphi_0|).$$

Теперь можно найти силу тока в левой части цепи:

$$\hat{I}_{10} = \frac{\hat{U}_0}{i\omega L} = \frac{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}{\omega^2 LC} e^{i(-\varphi_0 - \pi/2)} \hat{I}_{20}.$$

Действительная часть от  $\hat{I}_{10} e^{i\omega t}$  дает ток  $I_1(t)$ :

$$I_1 = \frac{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}{\omega^2 LC} I_0 \cos(\omega t - |\varphi_0| - \pi/2).$$

Чтобы найти сдвиг фазы  $\varphi$  между  $U(t)$  и напряжением  $U_C(t)$ , запишем выражение для комплексной амплитуды  $\hat{U}_{C0}$ :

$$\hat{U}_{C0} = \frac{1}{i\omega C} \hat{I}_{20} = \frac{1}{\omega C} e^{-i\pi/2} \hat{I}_{20}.$$

Разность фаз между найденной выше комплексной амплитудой  $\hat{U}_0$  и  $\hat{U}_{C0}$  составляет

$$\varphi = -|\varphi_0| - (-\pi/2) = \pi/2 - |\varphi_0|.$$

## 2) Решение методом комплексных амплитуд.

Векторная диаграмма, соответствующая поставленной задаче, представлена на рис. 25.56.

В качестве исходного вектора для отсчета углов фазового сдвига, как и выше, берем вектор силы тока  $I_{20}$ . Вектор напряжения на резисторе  $U_{R0}$  параллелен вектору  $I_{20}$  и имеет модуль  $U_{R0} = I_0 R$ . Вектор напряжения на конденсаторе  $U_{C0}$  перпендикулярен к  $I_{20}$  (повернут на  $-\pi/2$ ) и его длина равна

$$U_{C0} = \frac{I_0}{\omega C}.$$

Векторы  $U_{R0}$  и  $U_{C0}$  являются катетами прямоугольного треугольника. Поэтому амплитуда напряжения  $U(t)$  равна:

$$U_0 = \sqrt{U_R^2 + U_C^2} = I_0 \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}.$$

Модуль разности фаз между  $U(t)$  и  $I_2(t)$  определяется равенством:

$$\operatorname{tg}|\varphi_0| = \frac{U_{C0}}{U_{R0}} = \frac{1}{\omega RC}.$$

Сама разность фаз  $\varphi_0$  отрицательна, поскольку напряжение  $U(t)$  запаздывает по фазе относительно силы тока  $I_2(t)$ :

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = -\frac{1}{\omega RC} < 0.$$

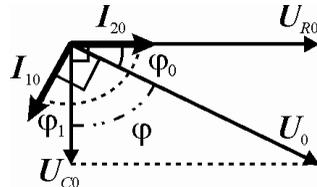


Рис. 25.56. Векторная диаграмма участка цепи переменного тока с параллельным соединением  $RC$  и  $L$ .

Модуль разности фаз  $\varphi$  между  $U(t)$  и напряжением на конденсаторе  $U_C(t)$  определяется соотношением:

$$\operatorname{tg}|\varphi| = \frac{U_{R0}}{U_{C0}} = \omega RC = \operatorname{ctg}|\varphi_0|.$$

Напряжение  $U_C(t)$  запаздывает по фазе относительно  $U(t)$ , поэтому  $\varphi < 0$  и

$$\operatorname{tg}\varphi = -\omega RC.$$

Амплитуда тока  $I_1(t)$  равна

$$I_{10} = \frac{U_{L0}}{\omega L} = \frac{U_0}{\omega L}.$$

Ток  $I_1(t)$  в катушке индуктивности отстает от напряжения на ней на  $\pi/2$ , поэтому вектор  $I_{10}$  перпендикулярен вектору  $U_0$  и повернут относительно него на  $-\pi/2$ . Как видно на рис. 25.5б, угол между векторами  $I_{10}$  и  $I_{20}$  по модулю равен

$$|\varphi_1| = (\pi/2 + |\varphi_0|).$$

Сдвиг фаз между токами  $I_1(t)$  и  $I_2(t)$  с учетом отставания тока  $I_1(t)$  отрицателен и равен

$$\varphi_1 = -(\pi/2 + |\varphi_0|).$$

Окончательный ответ, с учётом знака сдвига фаз, имеет следующий вид:

$$U(t) = \frac{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}{\omega C} I_0 \cos(\omega t - |\varphi_0|),$$

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = -\frac{1}{\omega RC};$$

$$I_1 = \frac{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}{\omega^2 LC} I_0 \cos(\omega t - |\varphi_0| - \pi/2).$$

**Ответ:** 
$$U(t) = \frac{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}{\omega C} I_0 \cos(\omega t - |\varphi_0|),$$

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = -\frac{1}{\omega RC};$$

$$I_1 = \frac{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}{\omega^2 LC} I_0 \cos(\omega t - |\varphi_0| - \pi/2).$$

**Задача 25.3.6.** На рис. 25.6а представлена схема простейшего фазовращателя ( $R_1 = R_2 = R$ ,  $C_1 = C_2 = C$ ). Определить амплитуду  $U_{AB}$  и фазу  $\varphi_0$  выходного напряжения, действующего между точками А и В, относительно входного напряжения.

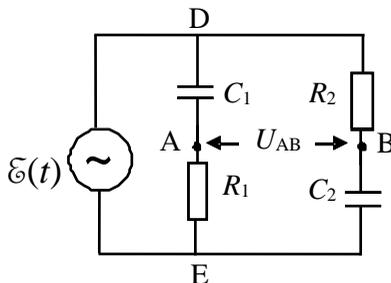


Рис. 25.6а. Схема фазовращателя.

### Решение

#### 1) Решение методом векторных диаграмм.

Рассмотрим векторную диаграмму напряжений (рис. 25.6б). В каждой из параллельных цепей векторы напряжений на соответствующем конденсаторе и на резисторе всегда взаимно перпендикулярны, т.к. напряжение на конденсаторе отстает от напряжения на сопротивлении на  $90^\circ$ . Поскольку в сумме эти два вектора составляют постоянный вектор  $\mathcal{E}$ , то точки А и В лежат на окружности с диаметром  $\mathcal{E}$ , а  $U_{AB} = \mathcal{E}$ , поскольку прямая АВ проходит через центр этой окружности и также является ее диаметром.

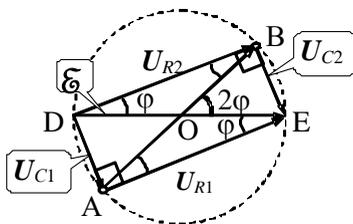


Рис. 25.6б. Векторная диаграмма фазовращателя.

Угол  $\varphi$  между вектором  $\mathcal{E}$  и вектором напряжения на резисторе  $U_{R1}$  определяется соотношением:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_{C1}}{U_{R1}} = \frac{1}{\omega RC}.$$

Угол АOE поворота вектора выходного напряжения  $U_{AB}$  относительно входного  $\mathcal{E}$  вдвое больше угла АВЕ и равен

$$\varphi_0 = 2\varphi.$$

#### 2) Решение методом комплексных амплитуд.

Ток, протекающий через каждую из RC-цепей, одинаков и равен:

$$\hat{I} = \frac{\hat{\mathcal{E}}_0}{R - \frac{i}{\omega C}}.$$

Напряжения в точках А и В относительно нижнего проводника схемы равны соответственно:

$$\hat{U}_A = R\hat{I} \quad \text{и} \quad \hat{U}_B = \frac{\hat{I}}{i\omega C}.$$

Искомое выходное напряжение равно:

$$\hat{U}_{AB} = \hat{U}_A - \hat{U}_B = \hat{\epsilon}_0 \frac{R + i/\omega C}{R - i/\omega C} = \hat{\epsilon}_0 e^{i\varphi_0}.$$

Модуль дроби в данном выражении равен единице, поэтому амплитуда выходного напряжения равна  $\hat{\epsilon}_0$ . Сдвиг фаз равен:

$$\varphi_0 = 2\varphi,$$

$$\text{где } \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\omega RC}.$$

**Ответ:**  $U_{AB} = \epsilon_0,$

$$\varphi_0 = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\omega RC}.$$

**Задача 25.3.7.** В цепи, изображенной на рис. 25.7а,  $R = 50$  Ом,  $R_1 = 20$  Ом,  $L = 0,5$  Гн,  $L_1 = 0,01$  Гн,  $C = 10$  мкФ. Через резистор  $R_1$  течет ток  $I_1 = 0,5 \cos(600t)$  А. Найти ЭДС  $\hat{\epsilon}(t)$  в цепи.

### Решение

Исходя из условий задачи, наметим следующий путь ее решения. По заданному току  $I_1$  и импедансу последовательно соединенных резистора с сопротивлением  $R_1$  и катушки с индуктивностью  $L_1$  определим напряжение  $U_{AB}$  на участке цепи АВ; по найденному напряжению определим силу тока  $I_2$  через емкость  $C$ ; суммируя параллельные токи (заданный  $I_1$  и найденный ток  $I_2$ ), определим общий ток  $I$  в цепи ЭДС; по найденному току  $I$  и импедансу  $RL$ -цепи найдем падение напряжения  $U$  на этом участке; сумма  $U$  и  $U_{AB}$  даст искомый ответ, т.е.  $\hat{\epsilon}(t)$ .

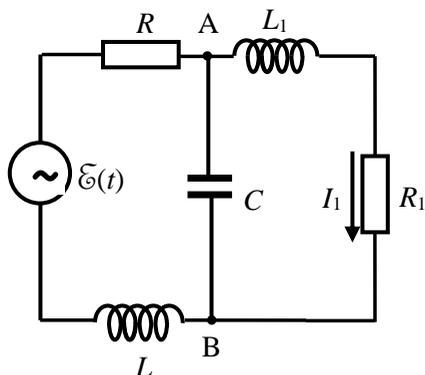


Рис. 25.7а. Схема разветвленной цепи переменного тока.

Следует иметь в виду, что расчет указанных переменных токов и напряжений предполагает определение их амплитуд и фаз (по отношению к заданному току  $I_1$ ) методом комплексных амплитуд, а для сложения соответствующих токов или напряжений удобно использовать метод векторных диаграмм. Однако реализация этого решения в общем виде приводит к громоздким выкладкам уже на первых этапах, а построение полной векторной диаграммы затруднительно без предварительной оценки длины векторов и их взаимной ориентации. Поэтому предпочтительным оказывается последовательное численное решение, исходя из данных задачи, и построение частных диаграмм для отдельных участков цепи, которые в конце решения могут быть объединены в общую диаграмму.

Векторная диаграмма для  $R_1L_1$ -цепи с произвольной длиной векторов показана на рис. 25.76:

$$|U_{L10}| = \omega L_1 I_{10},$$

$$|U_{R10}| = R_1 I_{10},$$

где через  $I_{10}$  обозначена амплитуда заданного тока ( $I_{10} = 0,5 \text{ A}$ ). Модуль импеданса  $R_1L_1$ -цепи равен:

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + (\omega L_1)^2} \approx 21 \text{ Ом};$$

тогда:

$$U_{AB0} = I_{10} Z_1 = 10,5 \text{ В};$$

$$\text{tg} \varphi_1 = \frac{\omega L_1}{R_1} = 0,3; \varphi_1 \approx 16,7^\circ.$$

Таким образом, напряжение на участке цепи АВ может быть записано как

$$U_{AB}(t) = 10,5 \cos(600t + \varphi_1) \text{ В},$$

а диаграмма скорректирована в сторону существенного уменьшения длины стрелки  $U_{L0}$  и величины угла  $\varphi_1$ .

Запишем ток  $I_2$  через емкость, учитывая, что его амплитуда равна

$$I_{20} = \omega C U_{AB0} = 0,063 \text{ A}$$

и опережает напряжение  $U_{AB}$  на  $\pi/2$  (рис. 25.6в):

$$\begin{aligned} I_2(t) &= I_{20} \cos(600t + \varphi_1 + \pi/2) \text{ A} \\ &= 0,063 \cos(600t + \varphi_1 + \pi/2) \text{ A}. \end{aligned}$$

Так как  $I_{20} \ll I_{10}$ , то при

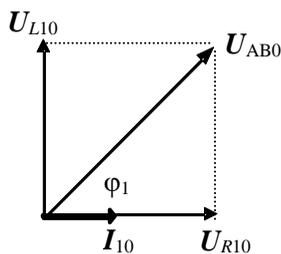


Рис. 25.76. Векторная диаграмма участка цепи  $R_1L_1$ .

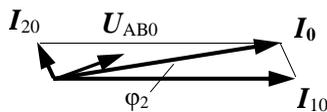


Рис. 25.7в. Векторная диаграмма для участка цепи с конденсатором.

сложении векторов  $I_{10}$  и  $I_{20}$  получим (см. рис. 25.6в), что  $I_0 \approx I_{10} = 0,5$  А, а сдвиг по фазе:

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{0,063}{0,5} = 0,126; \varphi_2 \approx 7,18^\circ.$$

Теперь можно записать закон изменения силы тока во времени:  $I(t) \approx 0,5\cos(600t + \varphi_2)$  А.

Далее, используя модуль импеданса последнего участка цепи

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{50^2 + 300^2} \approx 320 \text{ Ом},$$

находим падение напряжения  $U_{20}$  на этом участке цепи, его сдвиг фазы  $\varphi_3$  относительно тока  $I_0$  (рис. 25.7г) и закон изменения:

$$U_{20} = I_0 Z = 0,5 \cdot 320 = 160 \text{ В},$$

$$\operatorname{tg}\varphi_3 = \frac{\omega L}{R} = \frac{300}{50} = 6; \varphi_3 = 80,54^\circ;$$

$$U_{20}(t) = U_{20}\cos(600t + \varphi_3 + \varphi_2).$$

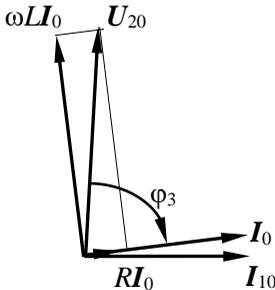


Рис. 25.7г. Векторная диаграмма для участка цепи с RL.

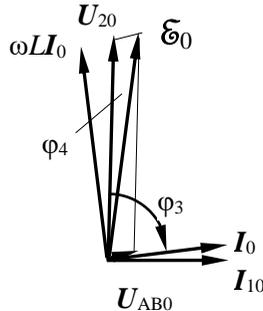


Рис. 25.7д. Векторная диаграмма для нахождения ЭДС.

Находим ЭДС  $\mathcal{E}$  как сумму напряжений  $U_{AB0}$  и  $U_{20}$  (рис. 25.7д), а также ее сдвиг фазы  $\varphi_4$  относительно  $U_{20}$ . Поскольку  $U_{AB0} \ll U_{20}$ , получим:

$$\mathcal{E}_0 \approx U_{20} = 160 \text{ В};$$

$$\operatorname{tg}\varphi_4 = \frac{U_{AB0}}{U_{20}} = 0,0656;$$

$$\varphi_4 = 3,75^\circ;$$

$$\mathcal{E}(t) = E_0\cos(600t + \varphi_3 + \varphi_2 - \varphi_4);$$

$$\varphi_3 + \varphi_2 - \varphi_4 = 84^\circ = 0,47\pi \text{ (рад.)}.$$

Окончательно получаем:

$$\mathcal{E}(t) = 160\cos(600t + 0,47\pi).$$

**Ответ:**  $\varepsilon(t) = 160\cos(600t + 0,47\pi)$ .

**Задача 25.3.8.** К источнику переменного напряжения с внутренним сопротивлением  $R_0 = 5$  Ом подключена нагрузка: параллельно соединенные резистор  $R$  и реактивное сопротивление с импедансом  $\hat{Z}$  (рис. 25.8). Амплитуда напряжения на нагрузке  $U_0 = 100$  В, через сопротивления  $R$  и  $Z$  текут равные по амплитуде токи  $I_{10} = I_{20}$ , а через источник течет ток с амплитудой  $I_0 = 10$  А. Найти амплитуду  $\varepsilon_0$  ЭДС источника.

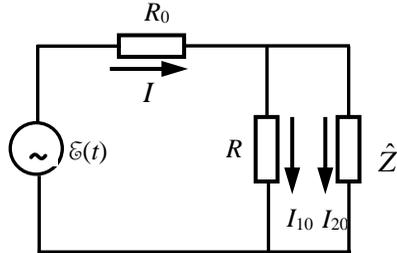


Рис. 25.8. Схема разветвленной цепи переменного тока.

### Решение

Так как равны амплитуды токов  $I_{10} = I_{20}$ , равны и величины активного и реактивного сопротивлений:

$$R = |\hat{Z}|,$$

то есть:

$$\hat{Z} = \pm iR,$$

откуда полный импеданс нагрузки  $\hat{Z}_{RZ}$  может быть найден как:

$$\frac{1}{\hat{Z}_{RZ}} = \frac{1}{R} \pm \frac{1}{iR} = \frac{1 \pm i}{iR};$$

$$\hat{Z}_{RZ} = \frac{iR}{1 \pm i},$$

$$|\hat{Z}_{RZ}| = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Тогда  $R$  может быть найдено из закона Ома для амплитудных значений тока  $I_0$  и напряжения  $U_0$ :

$$U_0 = I_0 |\hat{Z}_{RZ}| = I_0 \frac{R}{\sqrt{2}},$$

откуда получим:

$$R = \sqrt{2} \frac{U_0}{I_0} \approx 14,1 \text{ Ом.}$$

Импеданс  $Z_0$  всей цепи равен:

$$\hat{Z}_0 = R_0 + \hat{R}_{RZ} = R_0 + \frac{iR}{1 \pm i} = R_0 + \frac{R}{2} \pm \frac{iR}{2},$$

$$|\hat{Z}_0| \approx 14 \text{ Ом.}$$

Окончательно находим искомую амплитуду ЭДС  $\mathcal{E}_0$ :

$$\mathcal{E}_0 = I_0 |\hat{Z}_0| \approx 140 \text{ В.}$$

**Ответ:**  $\mathcal{E}_0 \approx 140 \text{ В.}$

**Задача 25.3.9.** В схеме, показанной на рис. 25.9, известны  $R$  и  $L$ . На вход схемы подается напряжение  $U_{in}(t) = U_0 \cos \omega t$ . Найти амплитуду выходного напряжения и сдвиг фаз между входным и выходным напряжениями.

### Решение

Введем комплексное обозначение  $\hat{U}_{in}$  для входного напряжения и комплексные токи  $\hat{I}_1$  и  $\hat{I}_2$  в плечах моста; запишем II-е правило Кирхгофа:

$$\hat{U}_{in} = \hat{I}_1(R + i\omega L) = \hat{I}_2(R + i\omega L),$$

$$\hat{U}_{out} = -\hat{I}_1 Z_L + \hat{I}_2 R = -\hat{I}_1(i\omega L) + \hat{I}_2 R.$$

Выразив токи через входные и выходные напряжения, а также импедансы соответствующих участков цепи через их параметры, получаем:

$$\begin{aligned} \hat{U}_{out} &= -\frac{\hat{U}_{in}}{R + i\omega L} i\omega L + \frac{\hat{U}_{in}}{R + i\omega L} R = \hat{U}_{in} \frac{-i\omega L + R}{i\omega L + R} = \\ &= \hat{U}_{in} \frac{(R - i\omega L)^2}{R^2 + \omega^2 L^2} = \hat{U}_{in} \frac{R^2 - \omega^2 L^2 - 2i\omega LR}{R^2 + \omega^2 L^2}, \end{aligned}$$

откуда

$$|\hat{U}_{out}| = \frac{U_0}{R^2 + \omega^2 L^2} \sqrt{(R^2 - \omega^2 L^2)^2 + 4\omega^2 L^2 R^2} = U_0 \frac{R^2 + \omega^2 L^2}{R^2 + \omega^2 L^2} = U_0.$$

Сдвиг фаз между входным и выходным напряжениями определяется выражением:

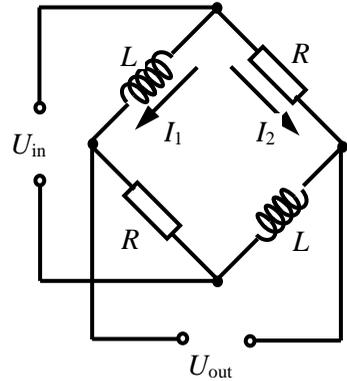


Рис. 25.9. Схема моста переменного тока.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\omega LR}{\omega^2 L^2 - R^2}.$$

$$\text{Ответ: } |\hat{U}_{\text{out}}| = U_0, \operatorname{tg} \varphi = \frac{2\omega LR}{\omega^2 L^2 - R^2}.$$

### Задачи типа 25.3

Задачи на определение мощности в цепях переменного тока.

**Метод решения:** В дополнение к методам, предложенным для решения задач типа 25.1, 25.2, и правилам Кирхгофа (25.13) и (25.14), используются формулы (25.17) и (25.18) для мощности, выделяющейся в цепях переменного тока.

**Задача 25.3.10.** Катушка с индуктивностью  $L$  и активным сопротивлением  $r$  соединена последовательно с резистором  $R$  и подключена к источнику переменного напряжения частоты  $\omega$  с эффективным напряжением  $\mathcal{E}_{\text{eff}}$  (рис. 25.10). При каком значении сопротивления  $R$  на нем будет выделяться максимальная тепловая мощность? Чему она равна?

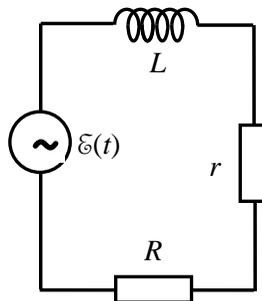


Рис. 25.10. Схема цепи переменного тока к задаче 25.3.10.

### Решение

В последовательной цепи будет течь ток с комплексной амплитудой

$$\hat{I}_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R+r+i\omega L} = \frac{\mathcal{E}_0}{R+r} \cdot \frac{1}{1+i \operatorname{tg} \varphi},$$

где  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R+r}$  – тангенс сдвига фаз напряжения и тока в цепи,

$\mathcal{E}_0 = \sqrt{2}\mathcal{E}_{\text{eff}}$  – амплитуда ЭДС источника тока.

Полная мощность, выделяемая в цепи, равна:

$$\begin{aligned} P &= I_{\text{eff}}^2 (R+r) = \frac{1}{2} |\hat{I}_0|^2 (R+r) = \frac{\mathcal{E}_{\text{eff}}^2}{R+r} \cdot \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{\mathcal{E}_{\text{eff}}^2}{R+r} \cos^2 \varphi = \\ &= \frac{\mathcal{E}_{\text{eff}}^2}{\omega L} \operatorname{tg} \varphi \cos^2 \varphi = \frac{\mathcal{E}_{\text{eff}}^2}{2\omega L} \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

Максимум выделяемой мощности  $P$  достигается при  $\varphi = \pi/4$ , в этом случае  $\operatorname{tg} \varphi = 1$ . Отсюда получаем, что максимальная тепловая мощность выделяется при

$$R = \omega L - r,$$

и равна:

$$P_{\max} = \frac{\xi_{\text{eff}}^2}{2\omega L}$$

$$\text{Ответ: } R = \omega L - r; P_{\max} = \frac{\xi_{\text{э}}^2}{2\omega L}.$$

**Задача 25.3.11.** К источнику переменного синусоидального напряжения с внутренним сопротивлением  $R_0 = 10$  Ом подключена нагрузка с импедансом  $Z$  (рис. 25.10). Амплитуда тока в цепи  $I_0 = 12$  А, падение напряжения на нагрузке  $U_0 = 120$  В. Определить:

1) КПД  $\eta$  цепи, если сдвиг фаз между током в цепи и падением напряжения на  $Z$  равен  $\varphi = 60^\circ$ ;

2) КПД  $\eta'$  цепи при условии, что сопротивление нагрузки чисто активное.

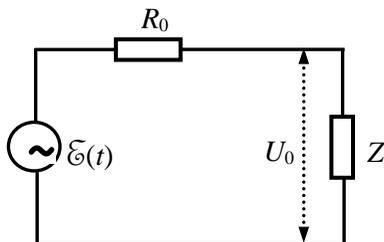


Рис. 25.11. Схема цепи переменного тока к задаче 25.3.11.

### Решение

По определению КПД цепи равен отношению мощности  $W$ , выделяющейся в нагрузке, к полной мощности  $W_0$ , выделяющейся во всей цепи:

$$\eta = \frac{W}{W_0}.$$

В общем случае мощности  $W$  и  $W_0$  можно записать через амплитуды силы тока  $I_0$  и напряжения  $U_0$ , а также разности фаз  $\varphi$  между током и напряжением:

$$W = 0,5 I_0 U_0 \cos \varphi,$$

$$W_0 = 0,5 (I_0^2 R_0 + I_0 U_0 \cos \varphi).$$

Окончательно получаем:

$$\eta = \frac{W}{W_0} = \frac{I_0 U_0 \cos \varphi}{I_0^2 R_0 + I_0 U_0 \cos \varphi} = \frac{1}{3}.$$

В случае чисто активной нагрузки  $\cos \varphi = 1$  и

$$\eta' = \frac{U_0}{I_0 R_0 + U_0} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \eta = \frac{U_0 \cos \varphi}{I_0 R_0 + U_0 \cos \varphi} = \frac{1}{3}, \quad \eta' = \frac{U_0}{I_0 R_0 + U_0} = \frac{1}{2}.$$

**Задача 25.3.12.** Для измерения мощности, выделяющейся при протекании переменного тока через катушку индуктивности с омическим сопротивлением, применяется так называемый метод трех амперметров. Параллельно катушке (ее параметры не известны) подключается резистор с известным сопротивлением  $R$ . Три амперметра включаются, как показано на рис. 25.12а. Найти мощность по токам  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$ , измеренным амперметрами, и заданному  $R$ .

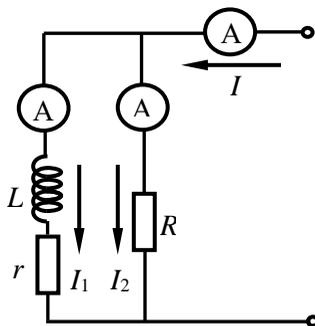


Рис. 25.12а. Схема для определения мощности по методу трех амперметров.

### Решение

Считая заданные здесь  $U$  и  $I$  эффективными, запишем мощность, выделяющуюся на участке цепи с катушкой индуктивности в виде:

$$W = I_1 U \cos \varphi = I_1 I_2 R \cos \varphi,$$

где  $U$  – напряжение на катушке и на сопротивлении  $R$ .

Векторная диаграмма токов и напряжения на параллельных ветвях цепи показана на рис. 25.12б. Как видно на диаграмме, амплитудные значения токов связаны между собой по теореме косинусов:

$$I^2 = I_1^2 + I_2^2 + 2I_1 I_2 \cos \varphi,$$

откуда

$$I_1 I_2 \cos \varphi = \frac{I^2 - I_1^2 - I_2^2}{2}.$$

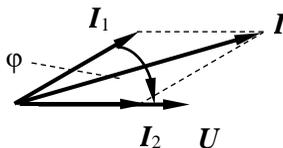


Рис. 25.12б. Векторная диаграмма в методе трех амперметров.

Это произведение подставим в формулу для  $W$  и получим искомое выражение для расчета мощности, выделяющейся в катушке индуктивности:

$$W = \frac{I^2 - I_1^2 - I_2^2}{2} R.$$

*Замечание.* Поскольку результат не зависит от параметров участка цепи, на котором выделяется мощность (информация о них содержится в «измеренных» значениях токов), метод трех амперметров может быть использован для определения  $W$  на произвольном реактивном сопротивлении с омической составляющей.

**Ответ:**  $W = \frac{I^2 - I_1^2 - I_2^2}{2} R.$

#### 25.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задача 25.4.1.** Катушка с сопротивлением 10 Ом и индуктивностью  $L$  включена в цепь переменного тока с частотой 50 Гц. Определить индуктивность катушки, если известно, что сдвиг фаз между током и напряжением равен  $60^\circ$ .

*Ответ:*  $L = 0,055$  Гн.

**Задача 25.4.2.** Источник переменного напряжения ( $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ ,  $\mathcal{E}_0 = 200$  В), конденсатор и резистор ( $R = 50$  Ом) соединены в последовательную цепь. Определить разность фаз между током и напряжением источника, если амплитуда тока в цепи равна 2 А.

*Ответ:* ток отстает на угол  $\varphi = 60^\circ$ .

**Задача 25.4.3.** Последовательный  $RLC$ -контур ( $R = 100$  Ом,  $L = 1$  Гн,  $C = 1$  мкФ) подключён к генератору переменного напряжения (частота  $\nu = 50$  Гц). Найти сдвиг фаз между током и напряжением на концах всей цепи.

*Ответ:*  $\varphi = 88^\circ$ ; ток опережает по фазе напряжение.

**Задача 25.4.4** ([2], 4.138). Концы цепи, состоящей из последовательно включенных конденсатора и активного сопротивления  $R = 110$  Ом, подсоединили к переменному напряжению с амплитудой  $U_m = 110$  В. При этом амплитуда

установившегося тока в цепи  $I_m = 0,50$  А. Найти разность фаз между током и подаваемым напряжением.

*Ответ:* ток опережает напряжение по фазе на угол  $\varphi = 60^\circ$ , определяемый уравнением  $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{(U_m / RI_m)^2 - 1}$ .

**Задача 25.4.5.** Определить полное сопротивление цепи  $Z_0$  и тангенс сдвига фаз  $\operatorname{tg}\varphi$  между напряжением источника переменного тока (частота  $\omega$ ) и полным током в цепи, если резистор  $R$  и катушка индуктивности  $L$  подключены к источнику параллельно.

*Ответ:*  $Z_0 = \frac{R}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}}$ ,  $\operatorname{tg}\varphi = +\frac{\omega L}{R}$ .

**Задача 25.4.6.** Катушка индуктивности  $L = 0,0184$  Гн и резистор  $R$  соединены параллельно и включены в цепь переменного тока частотой 50 Гц. Найти величину  $R$ , если известно, что сдвиг фаз между током и напряжением равен  $60^\circ$ .

*Ответ:*  $R = 10$  Ом.

**Задача 25.4.7.** Конденсатор с емкостью 1 мкФ и резистор с сопротивлением 1000 Ом включены в цепь переменного тока (частота 50 Гц). Найти полное сопротивление цепи, если конденсатор и резистор включены:

1) последовательно; 2) параллельно.

*Ответ:* 1)  $Z_0 = 3340$  Ом; 2)  $Z_0 = 954$  Ом.

**Задача 25.4.8.** Имеются две цепи. В первой генератор переменного напряжения, индуктивность  $L$  и резистор  $R$  соединены последовательно. Во второй – источник переменного напряжения с той же частотой, конденсатор (емкость –  $C$ ) и резистор  $R$  соединены параллельно. При каком соотношении между  $L$ ,  $C$  и  $R$  сдвиг фаз между током и напряжением генератора в обоих случаях будет одинаков по абсолютной величине?

*Ответ:*  $L = CR^2$ .

**Задача 25.4.9.** Сдвиг фаз между напряжением  $\mathcal{E}(t)$  генератора переменного напряжения и напряжением  $U_{AB}$  равен  $90^\circ$  (рис. 25.13).

1) При каких значениях  $R$ ,  $L$ ,  $\omega$  это

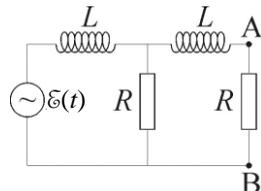


Рис. 25.13. Схема цепи в задаче 25.4.9.

возможно?

2) Чему при этом будет равно отношение амплитуд  $U_{AB}$  и  $\mathcal{E}$ ?

Ответ: 1)  $R = \omega L$ ; 2)  $E/U_{AB} = 3$ .

**Задача 25.4.10.** Показать, что напряжение  $U_{AB}$  между точками А и В (рис. 25.14) равно нулю при одновременном выполнении следующих условий:

$$(r_1/r_2) = (R_1/R_2) + (C_1/C_2);$$

$$\omega = (R_1R_2C_1C_2)^{-1/2}.$$

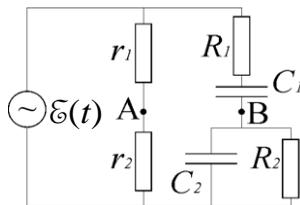


Рис. 25.14. Схема цепи в задаче 25.4.10.

**Задача 25.4.11.** На вход схемы, изображённой на рис. 25.15, подается синусоидальная ЭДС (частота  $\omega$ , амплитуда  $\mathcal{E}_0$ ). Определить амплитуду и сдвиг фазы выходного напряжения между точками В и А ( $U_{BA} = \varphi_B - \varphi_A$ ) относительно фазы ЭДС в зависимости от величины сопротивления  $R$ .

Ответ: амплитуды входного и выходного напряжений совпадают; сдвиг фаз равен  $2\varphi$ , где  $\text{tg } \varphi = \omega L/R$  ( $U_{BA}$  опережает ЭДС).

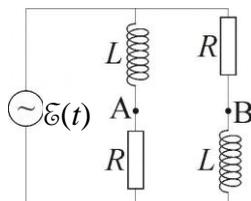


Рис. 25.15. Схема цепи в задаче 25.4.11.

**Задача 25.4.12** ([2], 4.161). Найти полное сопротивление участка цепи, состоящего из параллельно включенного конденсатора емкости  $C = 73$  мкФ и активного сопротивления  $R = 100$  Ом, для переменного тока частоты  $\omega = 314$  с<sup>-1</sup>.

Ответ:  $Z = R / \sqrt{1 + (\omega CR)^2} = 40$  Ом.

**Задача 25.4.13** ([2], 4.164). К источнику синусоидального напряжения с частотой  $\omega$  подключили параллельно конденсатор емкости  $C$  и катушку с активным сопротивлением  $R$  и индуктивностью  $L$ . Найти разность фаз между подводимым к контуру током и напряжением на источнике.

Ответ:  $\text{tg } \varphi = [\omega C(R^2 + \omega^2 L^2) - \omega L]/R$ .

**Задача 25.4.14** ([2], 4.165). Участок цепи состоит из параллельно включенных конденсатора емкости  $C$  и катушки с активным сопротивлением  $R$  и индуктивностью  $L$ . Найти полное сопротивление этого участка для переменного напряжения с частотой  $\omega$ .

$$\text{Ответ: } Z = \sqrt{\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{(\omega CR)^2 + (1 - \omega^2 CL)^2}}.$$

**Задача 25.4.15.** Резистор  $R$  и индуктивность  $L$  соединены параллельно и включены в цепь переменного тока с эффективным напряжением  $\mathcal{E} = 400$  В и частотой  $\nu = 50$  Гц. Найти сопротивление  $R$  и индуктивность  $L$ , если известно, что мощность  $P$ , поглощаемая в этой цепи, равна 400 Вт. Сдвиг фаз между током и ЭДС источника равен  $45^\circ$ .

$$\text{Ответ: } R = \frac{\mathcal{E}^2}{P} = 400 \text{ Ом. } L = \frac{R}{2\pi\nu \operatorname{tg} \varphi} = 1,27 \text{ Гн.}$$

**Задача 25.4.16.** В цепь переменного тока с эффективным напряжением  $\mathcal{E} = 200$  В и частотой 50 Гц включена катушка, обладающая как индуктивностью, так и активным сопротивлением. Сдвиг фаз между током и напряжением равен  $15^\circ$ . Определить индуктивность катушки, если известно, что она поглощает мощность  $P = 400$  Вт.

$$\text{Ответ: } L = \frac{\mathcal{E}^2}{2\omega P} \sin 2\varphi = 0,08 \text{ Гн.}$$

**Задача 25.4.17.** Найти среднюю по времени мощность, суммарно развиваемую всеми тремя источниками переменной ЭДС на частоте  $\omega = 1/\sqrt{LC}$  (рис. 25.16). ЭДС источников составляют  $\mathcal{E}_1(t) = \mathcal{E}_3(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ ;  $\mathcal{E}_2(t) = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$ . Стрелки у источников указывают положительное направление ЭДС.

$$\text{Ответ: } P = (\omega C U_0)^2 R.$$

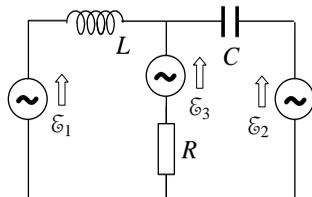


Рис. 25.16. Схема цепи в задаче 25.4.17.

**Задача 25.4.18** ([2], 4.154). Соленоид с индуктивностью  $L = 7$  мГн и активным сопротивлением  $R = 44$  Ом подключили сначала к источнику постоянного напряжения  $U_0$ , а затем к генератору синусоидального напряжения с действующим значением  $U = U_0$ . При какой частоте генерируемая мощность, потребляемая соленоидом, будет в  $\eta = 5,0$  раз меньше, чем в первом случае?

*Ответ:*  $\nu = (R / 2\pi L)\sqrt{\eta - 1} = 2$  кГц.

**Задача 25.4.19** ([2], 4.155). К сети с действующим напряжением  $U = 100$  В подключили катушку, индуктивное сопротивление которой  $X_L = 30$  Ом и импеданс  $Z = 50$  Ом. Найти разность фаз между током и напряжением, а также тепловую мощность, выделенную в катушке.

*Ответ:* ток отстает по фазе от напряжения на  
 $\varphi = \arccos \sqrt{1 - (X_L / Z)^2} \approx 37^\circ$ ;  $P = (U / Z)^2 \sqrt{Z^2 - X_L^2} = 0,16$  кВт.

**Задача 25.4.20** ([2], 4.156). Катушка с индуктивностью  $L = 0,70$  Гн и активным сопротивлением  $r = 20$  Ом соединена последовательно с безиндукционным сопротивлением  $R$ , и между концами этой цепи приложено переменное напряжение с действующим значением  $U = 220$  В и частотой  $\omega = 314$  с<sup>-1</sup>. При каком значении сопротивления  $R$  в цепи будет выделяться максимальная тепловая мощность? Чему она равна?

*Ответ:* при  $R = \omega L - r = 0,20$  кОм;  $P_{\max} = U^2 / 2\omega L = 0,11$  кВт.

**Задача 25.4.21** ([2], 4.157). Цепь, состоящая из последовательно соединенных конденсатора и катушки, подключена к сети. Изменив емкость конденсатора, добились увеличения выделяемой тепловой мощности в катушке в  $n = 1,7$  раза. На сколько процентов изменилось при этом значение  $\cos\varphi$ ?

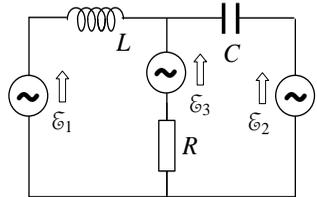
*Ответ:* увеличилось на  $\sqrt{n} - 1 \approx 30$  %.

**Задача 25.4.22** ([2], 4.159). Цепь, состоящую из последовательно соединенных безиндукционного сопротивления  $R = 0,16$  кОм и катушки с активным сопротивлением, подключили к сети с действующим напряжением  $U = 220$  В. Найти тепловую мощность, выделяемую на катушке, если действующие напряжения

на сопротивлении  $R$  и катушке равны соответственно  $U_1 = 80$  В и  $U_2 = 180$  В.

Ответ:  $P_2 = (U^2 - U_1^2 - U_2^2) / 2R = 30$  Вт.

**Задача 25.4.23.** Найти среднюю по времени мощность, суммарно развиваемую всеми тремя источниками переменной ЭДС на частоте  $\omega = 1 / \sqrt{LC}$  (рис. 25.17). ЭДС



источников:  $\mathcal{E}_1(t) = \mathcal{E}_3(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ ;  
 $\mathcal{E}_2(t) = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$ . Стрелки у источников указывают положительное направление ЭДС.

Рис. 25.17. Схема цепи в задаче 25.4.23.

Ответ:  $P = (\omega C \mathcal{E}_0)^2 R$ .

## Глава 26

**СВОБОДНЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В КОНТУРАХ. РЕЗОНАНС НАПРЯЖЕНИЙ И ТОКОВ.****26.1. Теоретический материал**

**Колебательный контур** – замкнутый электрический контур, состоящий из последовательно соединенных конденсатора (емкостью  $C$ ), катушки индуктивности (индуктивностью  $L$ ) и резистора (сопротивлением  $R$ ) (рис. 26.1).

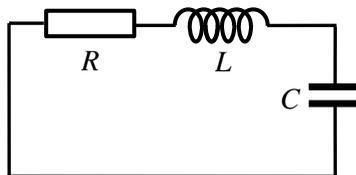


Рис. 26.1. Колебательный контур.

**Собственные (свободные) колебания в контуре** – колебания в изолированном электрическом контуре, предоставленном самому себе.

**Уравнение гармонических колебаний:**

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0, \quad (26.1)$$

где  $\xi$  – одна из обобщенных переменных, которая может быть зарядом на конденсаторе  $q$ , силой тока  $I$  в контуре, напряжением на резисторе  $U_R$ , конденсаторе  $U_C$  или катушке индуктивности  $U_L$  –

$\xi \in (q, I, U_R, U_C, U_L)$ ,  $\omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}$  – *круговая частота собственных гармонических колебаний* в контуре.

**Общее решение уравнения (закон) гармонических колебаний** есть незатухающее гармоническое колебание с частотой собственных гармонических колебаний электрического контура  $\omega_0$ , определяемой только параметрами самого контура:

$$\xi(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (26.2)$$

где постоянные величины – амплитуда  $A$  и начальная фаза  $\varphi$ , определяются начальными условиями.

**Формула Томсона.** *Период собственных гармонических колебаний в контуре равен:*

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (26.3)$$

### Преобразования энергии при гармонических колебаниях в колебательном контуре.

Временные зависимости энергии электрического поля  $W_q(t)$ , запасенной в конденсаторе  $C$ , и энергии магнитного поля  $W_I(t)$ , запасенной в катушке индуктивности  $L$ , при гармонических колебаниях имеют вид (рис. 26.2):

$$W_q(t) = \frac{q^2(t)}{2C} = \frac{A^2}{2C} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = W_0 \frac{1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi)}{2},$$

$$W_I(t) = \frac{LI^2(t)}{2} = \frac{LA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = W_0 \frac{1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)}{2}.$$

Здесь  $W_0 = \frac{A^2}{2C} = \frac{LA^2\omega_0^2}{2}$ .

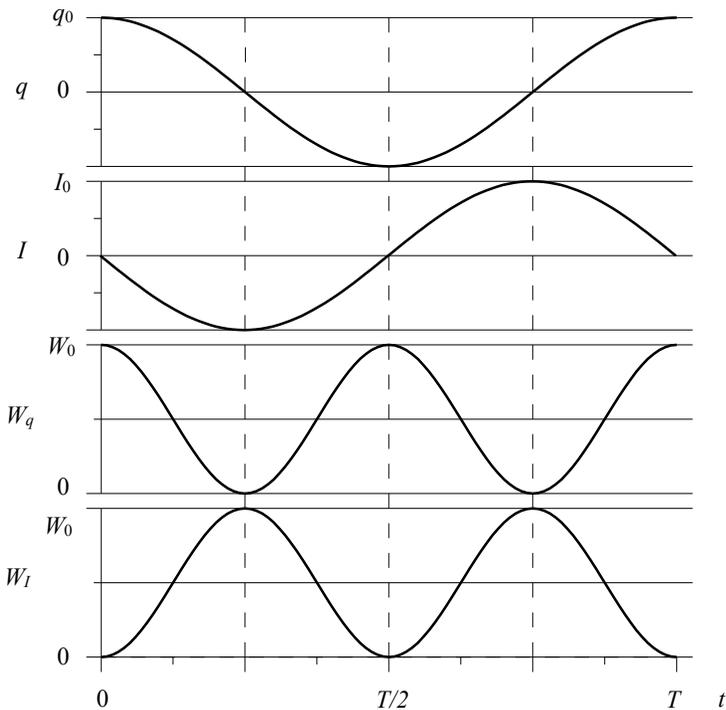


Рис. 26.2. Зависимость от времени заряда конденсатора, силы тока в цепи, энергии электрического поля конденсатора и магнитного поля катушки при гармонических колебаниях.

При этом вся запасенная в колебательном контуре энергия  $W$  не меняется со временем:

$$W(t) = W_q(t) + W_I(t) = W_0 = \frac{A^2}{2C} = \frac{LA^2\omega_0^2}{2} = \text{const} . \quad (26.4)$$

**Уравнение собственных затухающих колебаний в контуре и его решение, время затухания.**

*Уравнение собственных затухающих колебаний в контуре:*

$$\ddot{\xi}(t) + 2\beta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = 0 , \quad (26.5)$$

где  $\beta \equiv \frac{R}{2L}$  – коэффициент затухания,  $\omega_0$  – круговая частота собственных гармонических колебаний.

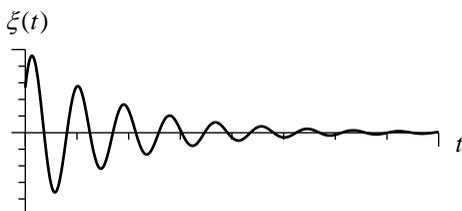


Рис. 26.3. Собственные затухающие колебания с затуханием меньше критического.

*Решение уравнения (закон) собственных затухающих колебаний с затуханием меньше критического ( $\beta < \omega_0$  или  $R < 2\sqrt{L/C}$ ):*

$$\xi(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0) . \quad (26.6)$$

Здесь  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  – круговая частота собственных затухающих колебаний.

*Время затухания* (релаксации) – время  $\tau = 1/\beta = 2L/R$ , в течение которого амплитуда уменьшается в  $e \cong 2,71$  раз.

**Энергия колебательного контура при затухающих колебаниях, средняя мощность потерь.**

Поскольку энергия электрического поля  $W_q$  квадратично зависит от заряда  $q(t) \sim e^{-\beta t}$  на обкладках конденсатора, а энергия магнитного поля  $W_I$  – от силы тока  $I(t) \sim e^{-\beta t}$  в цепи индуктивности, средняя энергия колебательного контура с током

$\langle W \rangle_T$  за период  $T$  меняется со временем по экспоненциальному закону с удвоенным показателем степени экспоненты:

$$\langle W \rangle_T = \langle W_q \rangle_T + \langle W_l \rangle_T = W_0 e^{-2\beta t}. \quad (26.7)$$

При этом *средняя мощность потерь*  $\langle P \rangle_T$  равна:

$$\langle P \rangle_T \equiv - \left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle_T = - \frac{d\langle W \rangle_T}{dt} = 2\beta W_0 e^{-2\beta t}. \quad (26.8)$$

**Логарифмический декремент затухания**  $\vartheta$  – логарифм отношения значений обобщенной координаты в моменты времени  $t$  и  $t + T$ :

$$\vartheta \equiv \ln \frac{\xi(t)}{\xi(t+T)} = \beta T. \quad (26.9)$$

Если  $\tau$  – время затухания, а  $N_e$  – число полных колебаний (периодов затухающих колебаний), за которое амплитуда уменьшается в  $e \cong 2,71$  раз, то:

$$\vartheta = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{\tau/T} = \frac{1}{N_e}, \quad (26.10)$$

$$\vartheta = \beta T = \frac{R}{2L} \cdot \frac{2\pi}{\omega} \cong \pi \frac{R}{L} \sqrt{LC} = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (26.11)$$

**Добротность колебательной системы**  $Q$  равна умноженному на  $2\pi$  отношению средней за период энергии системы к средней энергии потерь за тот же период:

$$Q \equiv 2\pi \frac{\langle W \rangle_T}{\langle P \rangle_T T} = 2\pi \frac{E_0 e^{-2\beta t}}{2\delta E_0 e^{-2\beta t} T} = \frac{\pi}{\delta T} = \frac{\pi}{\vartheta} = \frac{\omega}{2\beta}. \quad (26.12)$$

**Уравнение вынужденных колебаний** в колебательном контуре, в который включен источник переменной ЭДС (рис. 26.4):

$$\ddot{\xi}(t) + 2\beta \dot{\xi} + \omega_0^2 \xi = X(t),$$

где  $X(t)$  – внешняя обобщенная вынуждающая сила.

Уравнение описывает изменение во времени не только величины заряда на обкладках конденсатора  $q(t)$ , но и

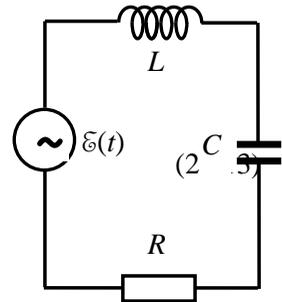


Рис. 26.4. Колебательный контур с переменной Э.

напряжение на этих обкладках  $U_C(t)$ , силу тока в колебательном контуре  $I(t)$ , напряжение на резисторе  $U_R(t)$  и напряжение на индуктивности  $U_L(t)$ , только вынуждающая сила для каждой из этих величин будет своя:

$$X_q(t) = \frac{1}{L} \mathcal{E}(t), \quad X_{U_C}(t) = \frac{1}{LC} \mathcal{E}(t),$$

$$X_I(t) = \frac{1}{L} \cdot \frac{d\mathcal{E}(t)}{dt}, \quad X_R(t) = \frac{R}{L} \cdot \frac{d\mathcal{E}(t)}{dt},$$

$$X_{U_L}(t) = -X_{U_{ind}} = \frac{d^2 \mathcal{E}(t)}{dt^2}.$$

**Общее решение уравнения вынужденных колебаний в контуре, его свойство.**

Общее решение неоднородного уравнения  $\xi(t)$  (в том числе с комплексной вынуждающей силой  $Z(t)$  такой, что  $X(t) = \text{Re}(Z(t))$ ) равно сумме частного решения этого уравнения (закона установившихся вынужденных колебаний  $\xi_b(t)$ ) и общего решения соответствующего ему однородного уравнения (закона собственных затухающих колебаний  $\xi_c(t)$ ):

$$\xi(t) = \xi_b(t) + \xi_c(t). \quad (26.14)$$

Общее решение однородного уравнения собственных (свободных) затухающих колебаний  $\xi_c(t)$  независимо от конкретных значений параметров системы и начальных условий содержит в качестве множителя экспоненту  $e^{-\beta t}$ . Это означает, что со временем собственные колебания всегда экспоненциально затухают, и остаются только вынужденные колебания, которые не зависят от начальных условий. Процесс затухания собственных колебаний – это в то же время процесс установления только вынужденных колебаний (вынужденные колебания появляются одновременно с началом действия внешней вынуждающей силы). Характерное время установления вынужденных колебаний равно времени затухания собственных колебаний (времени релаксации):  $\tau = 1/\beta = 2L/R$ .

**Уравнение колебаний в контуре под действием гармонической вынуждающей силы  $X(t) = X_0 \cos(\omega t)$ .**

$$\ddot{\xi}(t) + 2\delta \dot{\xi} + \omega_0^2 \xi = X_0 \cos(\omega t). \quad (26.15)$$

Решением этого уравнения (закон установившихся вынужденных колебаний) будет:

$$\xi(t) = \xi_0(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)). \quad (26.16)$$

Здесь:

$$\xi_0(\omega) = \frac{X_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}}, \quad (26.17)$$

$$\cos \varphi(\omega) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}},$$

$$\sin \varphi(\omega) = \frac{-2\omega\delta}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}},$$

$$\operatorname{tg} \varphi(\omega) = -\frac{2\omega\beta}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (26.18)$$

где  $\xi_0(\omega)$  – амплитуда установившихся вынужденных колебаний,  $\varphi(\omega)$  – сдвиг по фазе обобщенной переменной  $\xi(t)$  относительно обобщенной силы  $X(t)$ .

Физическая величина  $\xi \in q, I, U_R, U_C, U_L$  так же, как и вынуждающая сила  $X(t)$ , меняется со временем по гармоническому закону с частотой вынуждающей силы  $\omega$ .

**Резонанс в контуре, резонансная частота, резонансная кривая.**

*Резонанс* – это явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний физической величины при изменении частоты вынуждающей силы.

Частота  $\omega_p$ , при которой наблюдается максимальное значение амплитуды  $\xi_0(\omega)$ , называется *резонансной частотой*.

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы называется *резонансной кривой* (рис. 26.5).

На рисунке приведены примеры резонансных кривых для амплитуды заряда  $q_0(\omega)$  и силы тока  $I_0(\omega)$  в контуре при различных коэффициентах затухания.

Ширина резонансной кривой  $\Delta\omega$  – величина, равная разности частот, при которых энергия колебаний в контуре уменьшается вдвое, а значит, амплитуда колебаний уменьшается в  $\sqrt{2}$  раз.

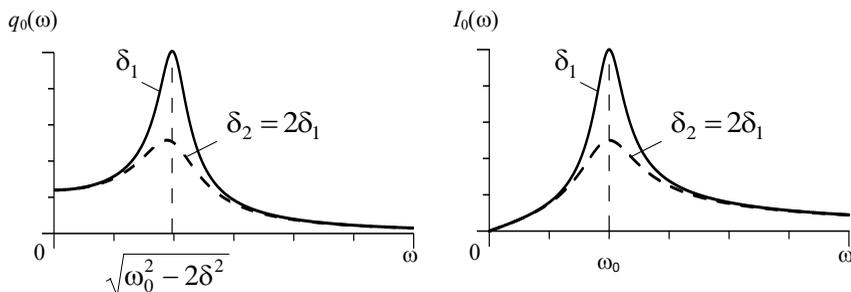


Рис. 26.5. Зависимость амплитуды вынужденных колебаний заряда конденсатора и силы тока в контуре от частоты вынуждающей силы.

### Колебания в связанных контурах, нормальные колебания и частоты.

*Нормальные колебания (моды)* – собственные гармонические колебания системы. Число мод равно числу степеней свободы. Для электрических контуров число степеней свободы равно числу связанных контуров. Специальным выбором начальных условий можно возбудить в системе только одно (любое) из всех собственных системы нормальных колебаний. При нормальном колебании системы все ее элементы колеблются с одной и той же частотой – *нормальной частотой*.

В общем случае колебания системы являются суперпозицией ее нормальных колебаний, которая определяется начальными условиями.

*Нормальные частоты* – частоты нормальных колебаний. Нормальные частоты колебательной системы определяются ее параметрами (для распределенной колебательной системы – свойствами среды и граничными условиями).

## 26.2. Основные типы задач (классификация)

26.1. Свободные и вынужденные колебания в неразветвленной цепи; резонанс напряжений.

26.2. Свободные и вынужденные колебания в разветвленных цепях; резонанс токов.

26.3. Мощность, выделяющаяся в колебательных контурах.

### 26.3. Методы решения и примеры решения задач

#### Задачи типа 26.1

*Свободные и вынужденные колебания в неразветвленной цепи; резонанс напряжений.*

**Метод решения.** Для расчета тока в контуре и напряжений на элементах цепи используются те же методы (векторных диаграмм и комплексных амплитуд), что описаны в предыдущей главе для задач типа 25.1 и соотношения (26.1)–(26.18) теоретической части настоящей главы.

**Задача 26.3.1.** В контуре с конденсатором емкости  $C$  и катушкой индуктивности  $L$  с активным сопротивлением  $r$  (рис. 26.6) происходят свободные затухающие колебания, при которых сила тока меняется во времени по закону  $I(t) = I_0 e^{-\beta t} \sin \omega t$ . Найти закон изменения во времени напряжения  $U_C(t)$  на конденсаторе.

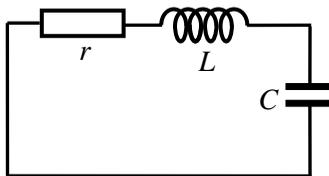


Рис. 26.6. Колебательный контур с последовательно соединенными  $r$ ,  $L$  и  $C$ .

#### Решение

Найдем сначала взаимосвязь заданных в задаче параметров  $\beta$  и  $\omega$  с характеристиками элементов контура  $C$ ,  $L$  и  $r$ . Для этого запишем II-е правило Кирхгофа для заданного контура с учетом свойств элементов этого контура:

$$I(t)r + L \frac{dI(t)}{dt} + U_C(t) = I(t)r + L \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int I(t) dt = 0. \quad (26.19)$$

После дифференцирования по времени и деления на  $L$  получим уравнение для силы тока в контуре:

$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + 2\beta \frac{dI(t)}{dt} + \omega_0^2 I(t) = 0, \quad (26.20)$$

где введены общепринятые обозначения:

$$\beta = \frac{r}{2L} \text{ и } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}. \quad (26.21)$$

Один из способов решения этого уравнения состоит в следующем. Введем новую переменную  $\xi(t)$ , полагая:

$$I(t) = \xi(t)e^{-\beta t}. \quad (26.22)$$

После подстановки (26.22) в уравнение (26.20) получим уравнение для новой переменной  $\xi(t)$ :

$$\frac{d^2 \xi(t)}{dt^2} + (\omega_0^2 - \beta^2)\xi(t) = 0,$$

которое формально совпадает с уравнением незатухающих колебаний при условии  $\omega_0^2 > \beta^2$  (при  $\omega_0^2 \leq \beta^2$  уравнение описывает аperiодическое изменение во времени силы тока в контуре и не отвечает условиям задачи).

Введем обозначение:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2, \quad (26.23)$$

тогда уравнение для  $\xi(t)$  можно переписать в виде:

$$\frac{d^2 \xi(t)}{dt^2} + \omega^2 \xi(t) = 0.$$

Решением этого уравнения является гармоническая функция

$$\xi(t) = a \cos(\omega t + \delta).$$

Тогда решением уравнения (26.20) будет функция

$$I(t) = ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \delta), \quad (26.24)$$

где  $a$  и  $\delta$  – константы, определяемые из условий задачи.

Таким образом, заданный в условии закон изменения силы тока во времени

$$I(t) = I_0 e^{-\beta t} \sin \omega t$$

является частным случаем общего решения (26.24), в котором  $a = I_0$ , а  $\delta = \pi/2$ . При этом заданные в задаче параметры  $\beta$  и  $\omega$  связаны с характеристиками элементов контура соотношениями:

$$\beta = \frac{r}{2L} \quad (\text{см. (26.3)}) \quad \text{и} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{4L^2}}. \quad (26.25)$$

Для нахождения искомого напряжения на конденсаторе в произвольный момент времени  $U_C(t)$  снова воспользуемся соотношением (26.19):

$$\begin{aligned} U_C(t) &= -I(t)r - L \frac{dI(t)}{dt} = \\ &= -I_0 r e^{-\beta t} \sin(\omega t) - L I_0 e^{-\beta t} (-\beta \sin \omega t + \omega \cos \omega t) = \\ &= I_0 L e^{-\beta t} \left( \left( \beta - \frac{r}{L} \right) \sin(\omega t) - \omega \cos \omega t \right). \end{aligned}$$

Если теперь воспользоваться связью задаваемых параметров с характеристиками элементов контура, то в результате получим:

$$\begin{aligned}
 U_C(t) &= I_0 L e^{-\beta t} (-\beta \sin(\omega t) - \omega \cos \omega t) = \\
 &= -I_0 L e^{-\beta t} \sqrt{\omega^2 + \beta^2} \left( \frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \sin(\omega t) + \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \cos \omega t \right) = \\
 &= I_0 e^{-\beta t} \sqrt{\frac{L}{C}} \left( \frac{-\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \sin(\omega t) + \frac{-\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \cos \omega t \right) = \\
 &= I_0 e^{-\beta t} \sqrt{\frac{L}{C}} (\cos \alpha \sin(\omega t) + \sin \alpha \cos \omega t) = I_0 e^{-\beta t} \sqrt{\frac{L}{C}} \sin(\omega t + \alpha),
 \end{aligned}$$

где:

$$\cos \alpha = \frac{-\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} \quad \text{и} \quad \sin \alpha = \frac{-\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}}.$$

**Ответ:**  $U_C(t) = I_0 e^{-\beta t} \sqrt{\frac{L}{C}} \sin(\omega t + \alpha)$ , где  $\cos \alpha = \frac{-\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}}$  и

$$\sin \alpha = \frac{-\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}}.$$

**Задача 26.3.2.** Резистор сопротивлением  $R$ , конденсатор емкости  $C$  и катушка индуктивности  $L$  соединены в последовательную цепь (рис. 26.7а) и подключены к генератору переменного напряжения  $\xi(t) = \xi_0 \cos(\omega t)$ .

Определить:

а) амплитудное значение силы тока  $I_0$  в цепи и сдвиг фазы тока  $\varphi_I$  относительно ЭДС (исследовать случаи  $\omega \rightarrow 0$  и  $\omega \rightarrow \infty$ ; при каких частотах  $\omega$  эта амплитуда будет иметь максимальное значение; чему равно это максимальное значение; рассмотреть случай, когда добротность цепи  $Q \gg 1$ );

б) амплитуду напряжения  $U_{C0}$  на конденсаторе (те же дополнительные

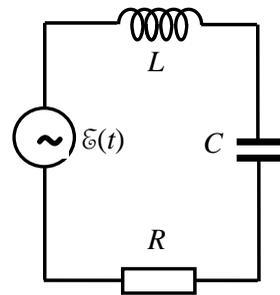


Рис. 26.7а. Колебательный контур с последовательно соединенными  $R$ ,  $L$  и  $C$ , в котором происходит резонанс напряжений.

вопросы, что и для  $I_0$ );

в) амплитуду напряжения  $U_{L0}$  на катушке индуктивности (те же дополнительные вопросы, что и для  $U_{C0}$ ).

### Решение

Способ 1. Метод комплексных амплитуд.

а) Ток в цепи.

Комплексное сопротивление (импеданс) цепи равно сумме комплексных сопротивлений последовательно соединенных резистора  $\hat{Z}_R = R$ , катушки  $\hat{Z}_L = i\omega L$  и конденсатора  $\hat{Z}_C = \frac{1}{i\omega C}$ :

$$\hat{Z} = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = Z_0 e^{i\varphi}.$$

Здесь  $\varphi$  – сдвиг фаз между напряжением генератора и силой тока в цепи, причем

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R};$$

$Z_0 = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$  – полное сопротивление цепи (модуль импеданса).

Комплексная амплитуда  $\hat{I}_0$  тока в цепи равна

$$\hat{I}_0 = \frac{\xi_0}{\hat{Z}} = \frac{\xi_0}{Z_0} e^{-i\varphi} = \frac{\xi_0}{Z_0} e^{i\varphi_I}, \quad (26.26)$$

где сдвиг фаз  $\varphi_I$  силы тока относительно напряжения генератора определяется соотношением:

$$\operatorname{tg} \varphi_I = \operatorname{tg}(-\varphi) = \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R}.$$

Из формулы (26.26) получаем, что амплитуда тока в цепи равна:

$$I_0 = \frac{\xi_0}{Z_0} = \frac{\xi_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

При  $\omega \rightarrow 0$  амплитуда тока стремится к нулю, а сдвиг фаз  $\varphi_I \rightarrow +\pi/2$  (ток опережает напряжение). Если  $\omega \rightarrow \infty$ , то амплитуда

тока тоже стремится к нулю, а сдвиг фаз  $\varphi_I \rightarrow -\pi/2$  (ток отстает от напряжения).

Максимальное значение амплитуды тока, а значит, и напряжения на сопротивлении  $R$ , достигается на резонансной частоте

$$\omega_{\text{р}} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

равно

$$I_{0\text{р}} = \frac{\mathcal{E}_0}{R}$$

и не зависит от добротности  $Q$ .

б) Напряжение на конденсаторе.

Поскольку комплексное сопротивление конденсатора равно  $\hat{Z}_C = \frac{1}{i\omega C}$ , то комплексная амплитуда  $\hat{U}_{C0}$  напряжения на конденсаторе равна:

$$\hat{U}_{C0} = \hat{I}_0 \hat{Z}_C = \frac{\hat{I}_0}{i\omega C} = \frac{1}{i\omega C} \cdot \frac{\mathcal{E}_0}{\hat{Z}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega CZ_0} e^{i(\varphi_I - \pi/2)}.$$

Как видим, фаза напряжения на конденсаторе  $\varphi_C = \varphi_I - \pi/2$  отстаёт от фазы тока на  $\pi/2$ .

Для удобства дальнейшего анализа преобразуем величину  $i\omega C \hat{Z}$ , подставив в нее  $\hat{Z} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ :

$$i\omega C \hat{Z} = (1 - \omega^2 LC) + i\omega RC = \frac{1}{\omega_0^2} [(\omega_0^2 - \omega^2) + i2\beta\omega].$$

Здесь

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \beta = \frac{R}{2L}.$$

Через  $\omega_0$  и  $\beta$  можно записать добротность контура (подобно тому, как в предыдущей задаче):

$$Q = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{2\pi\beta} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4L}{CR^2} - 1}.$$

Зависимость амплитуды напряжения на конденсаторе от частоты  $\omega$  может быть представлена в следующем виде:

$$U_{C0} = \frac{\omega_0^2 \xi_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}.$$

В области низких частот напряжение на конденсаторе равно напряжению генератора  $U_C = \xi_0$  и совпадает с ним по фазе ( $\varphi_C = 0$ ).

В области высоких частот ( $\omega \rightarrow \infty$ )  $U_C \rightarrow 0$ , а сдвиг фаз  $\varphi_C \rightarrow (-\pi)$ .

Максимальное значение  $U_C$  достигается при резонансной частоте

$$\omega_{Cp}^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2 = \omega_0^2 \left( 1 - \frac{1}{2Q^2} \right),$$

где  $Q \approx \frac{\omega_0}{2\beta}$  – добротность контура при малом затухании  $\beta$ .

При  $\omega = \omega_{Cp}$  резонансная амплитуда напряжения на конденсаторе равна

$$U_{Cp} = \frac{\omega_0^2 \xi_0}{\sqrt{4\beta^2 (\omega_0^2 - \beta^2)}}.$$

Если добротность цепи  $Q \gg 1$ , т.е.  $\omega_0 \gg \beta$ , то:

$$U_{Cp} \approx \frac{\omega_0 \xi_0}{2\beta} = Q \xi_0.$$

в) *Напряжение на катушке индуктивности.*

Комплексная амплитуда  $\hat{U}_{L0}$  напряжения на индуктивности равна

$$\hat{U}_{L0} = i \omega L \hat{I}_0 = \xi_0 \frac{\omega L}{Z_0} e^{i(\varphi_I + \pi/2)}.$$

Как видим, фаза напряжения на катушке  $\varphi_L = \varphi_I + \pi/2$  опережает фазу тока на  $\pi/2$ .

Проводя расчёты, подобные расчётам в пункте б) настоящей задачи, и опуская промежуточные выкладки, получим:

$$U_{L0} = \frac{\omega^2 \xi_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}.$$

В области высоких частот ( $\omega \gg \omega_0$ ) индуктивное сопротивление велико по сравнению с сопротивлением конденсатора и активным сопротивлением, поэтому напряжение на индуктивности фактически равно напряжению генератора, т.е.  $U_{L0} = \xi_0$ , и совпадает с ним по

фазе. В области низких частот напряжение на катушке индуктивности близко к нулю.

Максимальное значение  $U_{L0}$  достигается при резонансной частоте

$$\omega_{Lp} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}$$

и равно

$$U_{L0p} = U_{L0}(\omega_{Lp}) = \frac{\epsilon_0 \omega_0}{2\beta \left(1 - \frac{\beta^2}{\omega_0^2}\right)} = \frac{Q\epsilon_0}{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

Если  $Q \gg 1$ , то  $U_{Lp} \approx Q\epsilon_0$ .

При  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  напряжения на емкости и индуктивности взаимно компенсируются, поскольку будут равны по амплитуде (по фазе они всегда противоположны), и контур имеет чисто активное сопротивление. Это явление называют резонансом напряжений ( $\omega_p = \omega_0$ ).

*Замечание.* Если  $Q \gg 1$ , т.е. активное сопротивление цепи мало, то  $\omega_{Lp} \approx \omega_{Cp} \approx \omega_0$ , и при резонансе напряжений оказываются максимальными также напряжения на емкости и индуктивности, что в практических случаях может привести к пробоям конденсатора или межвитковым пробоям в катушке.

### Способ 2. Решение методом векторных диаграмм.

Векторная диаграмма для последовательной  $RLC$ -цепи представлена на рис. 26.7б. Здесь  $\epsilon_0$  – вектор комплексной амплитуды ЭДС,  $I_0$  – вектор комплексной амплитуды силы тока в цепи,  $U_{R0} = RI_0$ ,  $U_{L0} = \omega LI_0$  и  $U_{C0} = I_0/\omega C$  – векторы комплексных амплитуд напряжений на резисторе, катушке и конденсаторе соответственно.

Векторы  $\epsilon_0$ ,  $U_{R0}$  и  $(U_{L0} + U_{C0})$

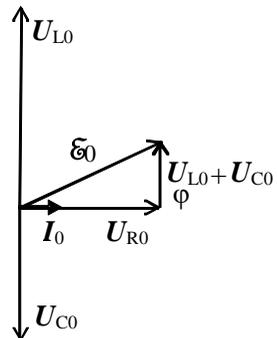


Рис. 26.7б. Векторная диаграмма напряжений в схеме на рис. 26.7а.

составляют прямоугольный треугольник. Поэтому можно записать:

$$\begin{aligned}\xi_0^2 &= U_{R0}^2 + (U_{L0} - U_{C0})^2, \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{U_{L0} - U_{C0}}{U_{R0}}.\end{aligned}$$

Учитывая взаимосвязь между амплитудой тока в цепи и амплитудами напряжений на резисторе, конденсаторе и катушке индуктивности, получим:

$$I_0 = \frac{\xi_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

$$U_{L0} = \omega L I_0,$$

$$U_{C0} = \frac{I_0}{\omega C}.$$

Сдвиг фазы напряжения генератора  $\xi(t)$  относительно тока в цепи определяется из соотношения:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Дальнейший расчёт в соответствии с вопросами б) и в) условий задачи можно провести так же, как это сделано выше.

Резонанс напряжений особенно наглядно представляется на векторной диаграмме (см. рис. 26.7б при  $\varphi \rightarrow 0$ ) – векторы  $U_{L0}$  и  $U_{C0}$  становятся одинаковыми по длине и взаимно компенсируются при сложении, а векторы  $I_0$ ,  $\xi_0$  и  $U_{R0}$  совпадают по направлению.

$$\text{Ответ: а) } I_0 = \frac{\xi_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \operatorname{tg} \varphi_I = \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R},$$

$$\omega_p \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; I_{0p} = \frac{\xi_0}{R};$$

$$\text{б) } U_{C0} = \frac{\omega_0^2 \xi_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}};$$

$$в) U_{L0} = \frac{\omega^2 \xi_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}};$$

при  $\omega \rightarrow 0$ :

$$I_0 \rightarrow 0, \varphi_I \rightarrow +\pi/2, U_{C0} \approx \xi_0, U_{R0} \approx U_{L0} \approx 0;$$

при  $\omega \rightarrow \omega_p$ :

$$I_{0p} = \frac{\xi_0}{R}, \varphi_I \rightarrow 0, U_{R0} \approx \xi_0, U_{C0p} \approx U_{L0p} \approx Q\xi_0;$$

при  $\omega \rightarrow \infty$ :

$$I \rightarrow 0, \varphi_I \rightarrow -\pi/2, U_{L0} \approx \xi_0, U_{R0} \approx U_{C0} \approx 0.$$

**Задача 26.3.3.** Найти добротность  $Q$  колебательного контура (рис. 26.8), в который последовательно включен источник переменной ЭДС  $\xi(t) = \xi_0 \cos(\omega t)$ , если при резонансе напряжение на конденсаторе в  $n$  раз превышает напряжение на источнике.

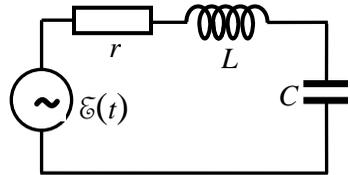


Рис. 26.8. Колебательный контур с последовательно соединенными  $r$ ,  $L$  и  $C$ .

### Решение

Воспользуемся результатом решения предыдущей задачи и запишем отношение напряжения на конденсаторе при резонансе напряжений ( $\omega = \omega_0$ ) и напряжения на источнике  $\xi_0$ :

$$n = \frac{U_C}{\xi_0} = \frac{\omega_0^2 \xi_0}{\xi_0 \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} = \frac{\sqrt{L}}{R\sqrt{C}}.$$

Добротность можно записать в виде (см. задачу 26.3.2):

$$Q = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{2\beta} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4L}{CR^2} - 1}$$

или

$$Q = \frac{1}{2} \sqrt{4n^2 - 1} = \sqrt{n^2 - \frac{1}{4}}.$$

$$\text{Ответ: } Q = \sqrt{n^2 - \frac{1}{4}}.$$

**Задача 26.3.4.** Цепь, содержащая последовательно соединенные конденсатор емкости  $C$  и катушку индуктивности  $L$  с активным сопротивлением  $r$ , подключена к источнику гармонического напряжения  $\xi(t) = \xi_0 \cos(\omega t)$ , частоту которого можно менять, не изменяя его амплитуды (рис. 26.9). При частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$  амплитуды тока оказались в  $n$  раз меньше его резонансной амплитуды. Найти резонансную частоту контура и его добротность.

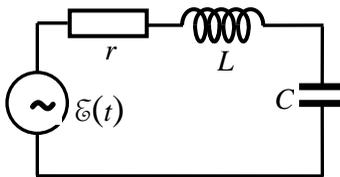


Рис. 26.9. Колебательный контур с последовательно соединенными  $r$ ,  $L$  и  $C$ .

### Решение

Используем результаты решения задачи 26.3.2 и запишем амплитуду тока в контуре при произвольном значении частоты  $\omega$  вынуждающей ЭДС:

$$I_0 = \frac{\xi_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Примем для определенности, что  $\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$  и запишем равенство амплитуд токов при частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$ :

$$\frac{\xi_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right)^2}} = \frac{\xi_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}\right)^2}},$$

откуда после очевидных преобразований получаем равенство:

$$\omega_1 L - 1/\omega_1 C = \omega_2 L - 1/\omega_2 C,$$

или

$$\omega_2 - \omega_1 = (\omega_2 - \omega_1) \frac{1}{\omega_1 \omega_2 LC} = \frac{\omega_0^2}{\omega_1 \omega_2} (\omega_2 - \omega_1),$$

откуда

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}.$$

Для определения добротности контура  $Q$  воспользуемся полученным в предыдущей задаче выражением

$$Q = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{2\beta} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4L}{CR^2} - 1},$$

которое можно также записать в виде:

$$Q = \sqrt{\frac{1}{(\omega_0 RC)^2} - \frac{1}{4}}. \quad (26.27)$$

При резонансе напряжений, т.е. когда  $\omega = \omega_0$ , амплитуда силы тока равна:

$$I_{0\max} = \frac{\xi_0}{R}$$

и по условию задачи она в  $n$  раз превышает амплитуды при частотах  $\omega_1$  или  $\omega_2$ :

$$\frac{\xi_0}{R} = n \cdot \frac{\xi_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right)^2}},$$

откуда получаем, что

$$R^2 = \frac{R^2 + \left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right)^2}{n^2},$$

или

$$R^2(n^2 - 1) = \frac{1}{\omega_1^2 C^2} (LC\omega_1^2 - 1)^2 = \frac{1}{\omega_1^2 C^2} \left(\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} - 1\right)^2,$$

откуда после перегруппировки с учетом ранее полученного соотношения  $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$  и формулы Томсона  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$  находим:

$$\frac{1}{(\omega_0 RC)^2} = \frac{\omega_1 \omega_2 (n^2 - 1)}{(\omega_1 - \omega_2)^2}.$$

Подставив полученное выражение в формулу (26.27), окончательно для искомой добротности получим:

$$Q = \sqrt{\frac{\omega_1 \omega_2 (n^2 - 1)}{(\omega_1 - \omega_2)^2} - \frac{1}{4}}.$$

**Ответ:**  $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$  ;

$$Q = \sqrt{\frac{\omega_1 \omega_2 (n^2 - 1)}{(\omega_1 - \omega_2)^2} - \frac{1}{4}}.$$

### Задачи типа 26.2

*Свободные и вынужденные колебания в разветвленных цепях; резонанс токов.*

**Метод решения.** Для расчета токов в участках разветвлений и напряжений на элементах цепи используются те же методы (векторных диаграмм и комплексных амплитуд) и правила Кирхгофа, что описаны в предыдущей главе для задач типа 25.2 и соотношений (26.1)–(26.18) теоретической части настоящей главы.

**Задача 26.3.5.** Колебательный контур (рис. 26.10) содержит конденсатор с утечкой. Емкость конденсатора  $C$ , его активное сопротивление  $R$ , индуктивность катушки  $L$ . Сопротивление катушки и подводящих проводов пренебрежимо мало. Найти частоту затухающих колебаний  $\omega$  в контуре и его добротность  $Q$ .

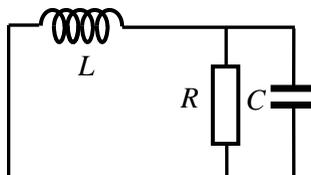


Рис. 26.10. Колебательный контур с катушкой индуктивности и конденсатором с утечкой.

### Решение

В соответствии с законом сохранения заряда и квазистационарностью процесса в цепи сила тока, текущего через катушку,  $I_L$  равна силе тока, текущего через конденсатор,  $I_C$ :

$$I_L = I_C. \quad (26.28)$$

В то же время сила тока через конденсатор  $I_C$  равна сумме силы тока, обусловленного изменением заряда на обкладках конденсатора  $I_q$ , и силы тока утечки  $I_R$ :

$$I_C = I_q + I_R. \quad (26.29)$$

При этом:

$$I_q = \frac{dq}{dt}, \quad (26.30)$$

$$I_R = \frac{U_C}{R}, \quad (26.31)$$

где  $U_C$  – напряжение на обкладках конденсатора, которое в соответствии с определением емкости конденсатора равно:

$$U_C = \frac{q}{C}. \quad (26.32)$$

Воспользовавшись уравнениями (26.28) – (26.32), получим соотношение, связывающее силу тока в катушке  $I_L$  и заряд на обкладках конденсатора  $q$ :

$$I_L = \frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC}. \quad (26.33)$$

Запишем теперь второе правило Кирхгофа для заданного контура:

$$U_L + U_C = 0, \quad (26.34)$$

где падение напряжения на катушке  $U_L$  равно:

$$U_L = L \frac{dI_L}{dt}. \quad (26.35)$$

Объединяя уравнения (26.33), (26.34) и (26.35), получим еще одно соотношение, связывающее силу тока в катушке  $I_L$  и заряд на обкладках конденсатора  $q$ :

$$L \frac{dI_L}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \quad (26.36)$$

Исключим из уравнений (26.33) и (26.36) заряд конденсатора и получим дифференциальное уравнение для нахождения силы тока, текущего через катушку (и через конденсатор):

$$\frac{d^2 I_L}{dt^2} + \frac{1}{RC} \cdot \frac{dI_L}{dt} + \frac{1}{LC} I_L = 0,$$

или

$$\frac{d^2 I_L}{dt^2} + 2\beta \frac{dI_L}{dt} + \omega_0^2 I_L = 0.$$

Здесь  $\beta = \frac{1}{2RC}$  – коэффициент затухания, а  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$  – частота колебаний.

Решением полученного уравнения является функция

$$I(t) = I_{L0} e^{-\beta t} \sin \omega t,$$

в которой искомая частота затухающих колебаний равна:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4(RC)^2}}.$$

Используем определение добротности  $Q$  и логарифмического декремента затухания  $\vartheta$  контура:

$$Q = \frac{\pi}{\vartheta}, \quad \vartheta = \beta T,$$

и с учетом того, что  $T = 2\pi/\omega$ , получим:

$$Q = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{2\pi\beta} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4R^2C}{L} - 1}.$$

$$\text{Ответ: } \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4(RC)^2}}; \quad Q = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4R^2C}{L} - 1}.$$

**Задача 26.3.6.** На рис. 26.11а представлена схема цепи. Ток генератора  $I(t) = I_0 \cos \omega t$ , где  $I_0$  – амплитуда тока.

1). Рассчитать комплексное  $\hat{Z}$  и полное  $Z_0$  сопротивление цепи (между точками А и В).

2). Найти резонансную частоту  $\omega_p$ , т.е. то значение частоты, при котором полное сопротивление  $Z_0$  имеет экстремальное значение, и рассчитать  $Z_0$  при этой частоте.

3). Определить амплитуду напряжения на конденсаторе и амплитуду силы тока  $I_L$  в цепи при резонансе.

4). Найти сдвиг фаз между токами, протекающими через конденсатор и катушку индуктивности при резонансе.

При расчётах в пунктах 2–4 считать, что добротность колебательного контура  $Q = \frac{1}{r}\sqrt{L/C} \gg 1$ .

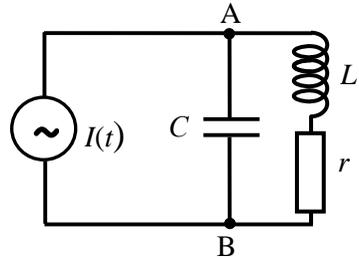


Рис. 26.11а. Схема для расчета резонанса токов.

### Решение

1. Так как элементы цепи соединены параллельно, удобно вначале найти комплексную проводимость цепи:

$$\hat{Y} = i\omega C + \frac{1}{r + i\omega L},$$

а затем ее комплексное сопротивление:

$$\hat{Z} = \frac{1}{\hat{Y}} = \frac{r + i\omega L}{(1 - \omega^2 LC) + i\omega rC}$$

и модуль сопротивления:

$$Z_0 = |\hat{Z}| = \sqrt{\frac{r^2 + \omega^2 L^2}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega rC)^2}}.$$

2. Если  $Q \gg 1$ , модуль сопротивления цепи  $Z_0$  имеет максимальное значение при  $\omega_p \approx \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ , а реактивное сопротивление катушки на частоте  $\omega_0$  оказывается много большим активного сопротивления  $r$ , поэтому  $r + i\omega L \approx i\omega L$ . Таким образом, в цепи имеет место резонанс, а полное сопротивление при таких упрощениях может быть представлено в следующем виде:

$$Z_{0p} = \frac{L}{rC} = rQ^2.$$

3. При резонансной частоте  $\omega_p \approx \omega_0$  импеданс и амплитуда напряжения между точками А и В достигает максимума. Амплитуды токов, текущих через конденсатор и катушку, могут быть очень велики по сравнению с  $I_0$ , однако, поскольку эти токи почти противофазны, их векторная сумма равна  $I_0$ . Поэтому такой резонанс называется *резонансом токов*. Рассмотрим более подробно соотношения между величинами токов при этом резонансе.

Комплексная амплитуда силы тока в  $rL$ -цепи равна

$$\hat{I}_L = \frac{I_0 Z}{r + i\omega L}.$$

Отсюда, учитывая результаты пункта 2) данной задачи, получаем, что при резонансе токов эту величину можно записать в виде:

$$\hat{I}_L = \frac{I_0}{i\omega_p rC},$$

а амплитуда тока равна:

$$I_{Lp} = \frac{I_0}{\omega_0 rC} = QI_0.$$

Амплитуду напряжения на конденсаторе при резонансе можно записать в виде:

$$U_{Cp} = I_0 Z_{0p} = rQ^2 I_0,$$

а амплитуда тока через конденсатор равна:

$$I_{Cp} = \omega_0 C U_{Cp} = Q I_0.$$

4. Поскольку напряжение на конденсаторе равно напряжению на  $rL$ -участке цепи, то:

$$\hat{I}_C \frac{1}{i\omega C} = \hat{I}_L (r + i\omega L).$$

Отсюда находим, что

$$\hat{I}_C = \hat{I}_L (i\omega Cr - \omega^2 LC).$$

Тангенс разности фаз  $\varphi$  между токами  $I_C$  и  $I_L$  равен аргументу комплексного множителя в скобках выражения (26.37) и при резонансе составляет

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{r}{\omega L} = -r \sqrt{\frac{C}{L}} = -\frac{1}{Q}.$$

Таким образом, при большой добротности сдвиг фаз  $\varphi \approx \pi$ , т.е. токи через  $C$  и  $rL$ -участки цепи находятся почти в противофазе.

*Замечание.* Резонанс токов можно наглядно проиллюстрировать векторной диаграммой, изображенной на рис. 26.116.

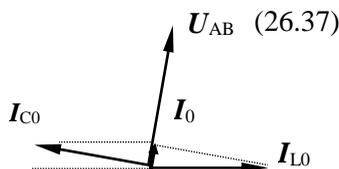


Рис. 26.116. Векторная диаграмма для схемы на рис. 26.13а.

**Ответ:** 1)  $\hat{Z} = \frac{1}{\hat{Y}} = \frac{r + i\omega L}{(1 - \omega^2 LC) + i\omega r C},$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{r^2 + \omega^2 L^2}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega r C)^2}};$$

$$2) \omega_p \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad Z_{0p} = \frac{L}{rC} = rQ^2;$$

$$3) I_{Lp} = Q I_0, \quad U_{Cp} = rQ^2 I_0;$$

$$4) \operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{Q}.$$

**Задача 26.3.7.** Схема цепи изображена на рис. 26.12. Параметры цепи, показанные на рисунке, известны. ЭДС генератора меняется по закону  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$ . Определить:

1) при какой частоте генератора  $\omega$  сила тока  $I$  в цепи минимальна;

2) чему равна амплитуда силы тока при этой частоте;

3) при какой частоте сила тока  $I$  максимальна;

4) чему при этом равна амплитуда силы тока.

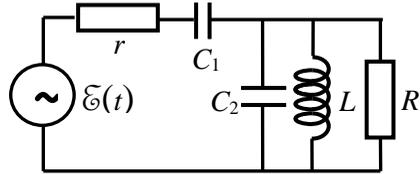


Рис. 26.12. Схема разветвленной цепи переменного тока.

Из решения исключить случаи  $\omega \rightarrow 0$  и  $\omega \rightarrow \infty$ . При расчёте положить  $C_1 = C_2 = C$ ,  $R \gg \frac{L}{C}$ ,  $R \gg r$ .

### Решение

1) Сила тока в цепи  $C_2 L$  минимальна при  $\omega_{1p} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  (резонанс токов, см. задачу 26.3.6). Модуль импеданса конденсатора  $C_1$  на этой частоте равен  $1/(\omega_0 C) = \sqrt{\frac{L}{C}}$  и существенно меньше  $R$  (см. условие задачи).

2) Амплитуда силы тока через источник ЭДС будет равна  $I_0 = \mathcal{E}_0/R$ , т.к.  $r \ll R$ , а сопротивление цепи  $LC_2$  (параллельное соединение) на частоте  $\omega_0$  равно бесконечности. Очевидно, что при этом ток совпадает с  $\mathcal{E}(t)$  по фазе.

3) Для определения второй резонансной частоты вычислим комплексное сопротивление всей цепи. Для упрощения расчетов пренебрежем влиянием резистора  $R$ , т.е. положим  $R = \infty$ . Влияние этого резистора необходимо учитывать только при частотах  $\omega$ , близких к  $\omega_0$ , когда сопротивление параллельного контура  $C_2 L$  становится большим. В таком приближении комплексное сопротивление всей цепи равно:

$$\hat{Z} = r + \frac{i(\omega^2 L(C_1 + C_2) - 1)}{\omega C_2(1 - \omega^2 LC_2)}.$$

Из этого соотношения видно, что  $|\hat{Z}|$  имеет минимум  $|\hat{Z}|_{\min} = r$ , который получается на второй резонансной частоте:

$$\omega_{2p} = \frac{1}{\sqrt{L(C_1 + C_2)}} = \frac{1}{\sqrt{2LC}}.$$

4) Амплитуда силы тока при этой частоте равна:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{r},$$

и ток совпадает с  $\mathcal{E}(t)$  по фазе. Этот случай соответствует *резонансу напряжений*, т.к. амплитуды напряжений на всех участках цепи  $r$ ,  $C_1$ ,  $R$ ,  $C_2$  и  $L$  будут максимальны.

Убедимся теперь в обоснованности использованного приближения  $R \rightarrow \infty$ . Действительно, импеданс цепочки  $LC_2$  на частоте  $\omega_{2p}$  будет равен  $\sqrt{2L/C}$ , что существенно меньше  $R$  по условию задачи.

**Ответ:** 1) сила тока минимальна при  $\omega_{1p} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ,

2)  $I_{0\min} = \mathcal{E}_0/R$ ;

3) сила тока максимальна при  $\omega_{2p} = \frac{1}{\sqrt{2LC}}$ ,

4)  $I_{0\max} = \mathcal{E}_0/r$ .

### Задачи типа 26.3

*Мощность, выделяющаяся в колебательных контурах.*

**Метод решения:** В дополнение к методам, предложенным для решения задач типа 26.1, 26.2 и правилам Кирхгофа (25.13)–(25.14) используются формулы (24.4), и (26.7)–(26.12) для энергии (мощности) в цепях переменного тока.

**Задача 26.3.8.** На рис. 26.13 показана схема двух индуктивно связанных контуров А и В. Известны ЭДС  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$  источника, сопротивление  $R$  резистора, емкость  $C$  конденсатора, индуктивности  $L$  и  $L'$  катушек и коэффициент  $M$  их взаимной индуктивности. Определить:

а) при какой частоте не будет тока в контуре В;

б) при какой частоте не будет тока в контуре А;

в) амплитуды токов в контурах А и В и выделяющуюся мощность в условиях, соответствующих случаям а) и б).

### Решение

Используем метод комплексных амплитуд. Обозначим ток в цепи А через  $\hat{I}_1$ , ток в цепи В через  $\hat{I}_2$ , ток через конденсатор через  $\hat{I}_3$  и запишем закон Кирхгофа при обходе нижнего контура (направление обхода выбрано против часовой стрелки):

$$\begin{aligned} \xi(t) &= R\hat{I}_1 + (L \frac{d\hat{I}_1}{dt} + M \frac{d\hat{I}_2}{dt}) + \frac{\hat{I}_3}{i\omega C} = \\ &= R\hat{I}_1 + i\omega(L\hat{I}_1 + M\hat{I}_2) - i \frac{\hat{I}_3}{\omega C}. \end{aligned} \quad (26.38)$$

Аналогично при обходе верхнего контура:

$$L' \frac{d\hat{I}_2}{dt} + M \frac{d\hat{I}_1}{dt} + \frac{\hat{I}_3}{i\omega C} = 0,$$

или

$$i\omega L'\hat{I}_2 + i\omega M\hat{I}_1 - i \frac{\hat{I}_3}{\omega C} = 0. \quad (26.39)$$

а) Если тока нет в цепи В, т.е.  $\hat{I}_2 = 0$  и  $\hat{I}_1 = \hat{I}_3$ , то из уравнения (26.39), обозначив частоту для этого случая как  $\omega_1$ , получим:

$$\omega_1 M = \frac{1}{\omega_1 C} \quad \text{или} \quad \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{MC}}.$$

б) Если тока нет в цепи А, т.е.  $\hat{I}_1 = 0$  и  $\hat{I}_2 = \hat{I}_3$ , то из уравнения (26.39), обозначив частоту для этого случая как  $\omega_2$ , получим:

$$\omega_2 L' = \frac{1}{\omega_2 C} \quad \text{или} \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L'C}}.$$

в) Запишем уравнение (26.38) для случая а):

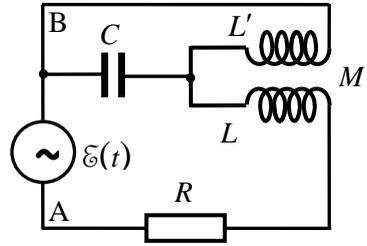


Рис. 26.13. Схема индуктивно связанных контуров.

$$\hat{\xi}(t) = R\hat{I}_1 + i\left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right)\hat{I}_1,$$

откуда, используя амплитудное значение ЭДС  $\xi_0$ , получаем амплитуду силы тока  $I_{10}$ :

$$I_{10} = \frac{\xi_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right)^2}} = \frac{\xi_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{MC}(L - M)^2}}.$$

Запишем уравнение (26.38) для случая б):

$$\hat{\xi}(t) = i\omega_2 M\hat{I}_2 - i\frac{\hat{I}_2}{\omega_2 C} = i\hat{I}_2\left(\omega_2 M - \frac{1}{\omega_2 C}\right),$$

откуда, используя амплитудное значение ЭДС  $\xi_0$ , получаем амплитуду тока  $I_{20}$ :

$$I_{20} = \frac{\xi_0}{\omega_2 M - \frac{1}{\omega_2 C}} = \frac{\xi_0 \sqrt{L'C}}{M - L'}.$$

Мощность выделяется только в случае а), когда через резистор течет ток, и ее величина равна:

$$W = \frac{1}{2} I_{10}^2 R = \frac{\xi_0^2 R}{2\left(R^2 + \frac{1}{MC}(L - M)^2\right)}.$$

**Ответ:** а)  $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{MC}}$ ;

б)  $\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L'C}}$ ;

в)  $I_{10} = \frac{\xi_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{MC}(L - M)^2}}$  в случае а);

$I_{20} = \frac{\xi_0 \sqrt{L'C}}{M - L'}$  в случае б);

$W = \frac{\xi_0^2 R}{2\left(R^2 + \frac{1}{MC}(L - M)^2\right)}$ , только в случае а).

**Задача 26.3.9.** В колебательный контур с добротностью  $Q = 100$  включен последовательно источник синусоидальной ЭДС с постоянной амплитудой напряжения (рис. 26.14). При некоторой частоте внешнего напряжения тепловая мощность, выделяемая в контуре, оказывается максимальной. На сколько процентов следует изменить частоту, чтобы выделяемая мощность уменьшилась в  $n = 2,0$  раза?

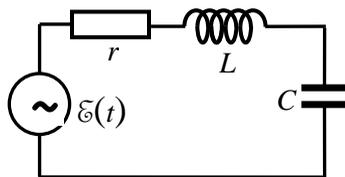


Рис. 26.14. Колебательный контур с последовательно соединенными  $r$ ,  $L$  и  $C$ .

### Решение

Используем результаты решения задачи 26.3.2 и запишем амплитуду силы тока в контуре при произвольном значении частоты  $\omega$  вынуждающей ЭДС:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Мощность, выделяющуюся в контуре, можно записать в виде:

$$W = 0,5 I_0^2 R = 0,5 \frac{\mathcal{E}_0^2 R}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Мощность максимальна при равенстве нулю выражения в скобках, т.е. при  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  (резонансе напряжений) и равна:

$$W_{\max} = 0,5 \frac{\mathcal{E}_0^2}{R}.$$

Пусть условие уменьшения мощности в  $n = 2,0$  раз выполняется при некоторой частоте  $\omega_1$  (может быть как большей, так и меньшей  $\omega_0$ ; для определенности примем, что  $\omega_1 > \omega_0$ ), тогда:

$$n = \frac{\mathcal{E}_0^2 / R}{\mathcal{E}_0^2 R / \left(R^2 + (\omega_1 L - 1/\omega_1 C)^2\right)},$$

откуда

$$\frac{1}{R^2} \left( \omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 L} \right)^2 = n - 1,$$

или

$$R\sqrt{n-1} = \omega_1 L \left( 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} \right);$$

$$\frac{(\omega_1 - \omega_0)(\omega_1 + \omega_0)}{\omega_1} = \frac{R\sqrt{n-1}}{L}.$$

Поскольку  $Q = 100 \gg 1$ , можно использовать упрощенную формулу  $Q \approx \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$  для добротности и считать, что  $\omega_1 + \omega_0 \approx 2\omega_0$ .

Тогда, обозначив  $\omega_1 - \omega_0 = \Delta\omega$  и опуская индексы при  $\omega$ , запишем для искомого относительного отклонения частоты:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\sqrt{n-1}}{2Q} = \frac{1}{200} = 0,005 \text{ (0,5\%)}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\sqrt{n-1}}{2Q} = 0,005 \text{ (0,5\%)}.$$

**Задача 26.3.10.** В контуре, добротность которого  $Q = 50$  и собственная частота колебаний  $\nu_0 = 5,5$  кГц, возбуждаются затухающие колебания. Через сколько времени энергия, запасенная в контуре, уменьшится в  $\eta = 2$  раза?

### Решение

Поскольку энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды, затухание энергии происходит с временем релаксации вдвое большим, чем для амплитуд:  $\tau_E = 2\tau$ . Тогда:

$$\eta = \frac{W_1}{W_2} = \exp\{(t_2 - t_1)/2\tau\},$$

откуда время, за которое амплитуда убывает в  $\eta$  раз, будет:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 2\tau \ln\eta.$$

Время релаксации  $\tau$  определим через заданные частоту и добротность. Поскольку добротность  $Q \gg 1$ , пренебрежем различием в частотах собственных затухающих и незатухающих колебаний; тогда по определению добротности запишем:

$$Q = \frac{\pi}{\theta} = \frac{\pi}{\beta T} = \pi\nu\tau,$$

откуда

$$\tau = \frac{Q}{\pi\nu},$$

что дает в результате:

$$\Delta t = \frac{Q}{2\pi\nu} \ln\eta = 1,0 \text{ с.}$$

$$\text{Ответ: } \Delta t = \frac{Q}{2\pi\nu} \ln\eta = 1,0 \text{ с.}$$

## 26.4 Задачи для самостоятельного решения

**Задача 26.4.1** ([2], 4.109). Колебательный контур состоит из конденсатора емкости  $C$ , катушки с индуктивностью  $L$  и пренебрежимо малым сопротивлением и ключа. При разомкнутом ключе конденсатор зарядили до напряжения  $U_m$  и затем в момент  $t = 0$  замкнули ключ. Найти:

- ток в контуре как функцию времени;
- ЭДС самоиндукции в катушке в моменты, когда электрическая энергия конденсатора равна энергии тока в катушке.

$$\text{Ответ: а) } I = I_m \sin \omega_0 t, \text{ где } I_m = U_m \sqrt{C/L}, \omega_0 = 1/\sqrt{LC};$$

$$\text{б) } \varepsilon_m = U_m/\sqrt{2}.$$

**Задача 26.4.2** ([2], 4.111). В контуре, состоящем из плоского конденсатора и катушки индуктивности с пренебрежимо малым активным сопротивлением, происходят колебания с энергией  $W$ . Пластины конденсатора медленно раздвинули так, что частота колебаний увеличилась в  $\eta$  раз. Какую работу совершили при этом против электрических сил?

$$\text{Ответ: } A = (\eta^2 - 1)W.$$

**Задача 26.4.3** ([2], 4.116). Колебательный контур состоит из катушки индуктивности  $L$  и конденсатора емкости  $C$ . Сопротивление катушки и соединительных проводов пренебрежимо мало. Катушка находится в постоянном магнитном

поле, так что суммарный поток, пронизывающий все витки катушки, равен  $\Phi$ . В момент  $t = 0$  магнитное поле выключили. Считая время выключения очень малым по сравнению с периодом собственных колебаний контура, найти ток в контуре как функцию времени  $t$ .

$$\text{Ответ: } I = (\Phi / L) \cos(t / \sqrt{LC}).$$

**Задача 26.4.4** ([2], 4.117). В контуре совершаются свободные затухающие колебания, при которых напряжение на конденсаторе меняется во времени по закону  $U = U_m e^{-\beta t} \cos \omega t$ . Найти моменты времени, когда модуль напряжения на конденсаторе достигает: а) амплитудных значений; б) максимальных (экстремальных) значений.

$$\text{Ответ: а). } t_n = \pi n / \omega;$$

$$\text{б). } t_n = [\arctg(-\beta/\omega) + \pi n] / \omega, \text{ где } n = 0, 1, 2, \dots$$

**Задача 26.4.5** ([2], 4.118). Некоторый колебательный контур содержит конденсатор емкости  $C$ , катушку с индуктивностью  $L$  и активным сопротивлением  $R$ , а также ключ. При разомкнутом ключе конденсатор зарядили, после чего ключ замкнули, и начались колебания. Найти отношение напряжения на конденсаторе к его амплитудному значению в момент непосредственно после замыкания ключа.

$$\text{Ответ: } U_0 / U_m = \sqrt{1 - R^2 C / 4L}.$$

**Задача 26.4.6** ([2], 4.120). Колебательный контур состоит из конденсатора емкости  $C = 4,0$  мкФ и катушки с индуктивностью  $L = 2,0$  мГн и активным сопротивлением  $R = 10$  Ом. Найти отношение энергии магнитного поля катушки к энергии электрического поля конденсатора в момент максимума тока.

$$\text{Ответ: } W_L / W_C = L / CR^2 = 5.$$

**Задача 26.4.7** ([2], 4.121). Некоторый колебательный контур содержит две последовательно соединенные катушки с активными сопротивлениями  $R_1$  и  $R_2$  и индуктивностями  $L_1$  и  $L_2$ , причем взаимная индуктивность их пренебрежимо мала. Эти катушки надо заменить одной так, чтобы частота и добротность контура не изменились. Найти индуктивность и активное сопротивление такой катушки.

Ответ:  $L = L_1 + L_2$ ;  $R = R_1 + R_2$ .

**Задача 26.4.8.** В последовательный контур включён генератор переменного напряжения с амплитудой 1,5 В. Амплитуда напряжения на конденсаторе при резонансе равна 30 В. Определить добротность контура.

Ответ:  $Q = 20$ .

**Задача 26.4.9.** Определить добротность  $Q$  последовательного  $rLC$ -контура ( $r = 10$  Ом,  $C = 1000$  пФ), если его резонансная частота  $\nu_p = 159,2$  кГц.

Ответ:  $Q = \frac{1}{2\pi\nu_p RC} = 100$ .

**Задача 26.4.10.** Определить ёмкость  $C$ , которую надо включить последовательно с катушкой (активное сопротивление  $r = 10$  Ом, индуктивность  $L = 3,185$  мГн), для того, чтобы цепь была настроена в резонанс при частоте  $\nu_0 = 50$  кГц. Найти добротность контура  $Q$  и напряжение на конденсаторе  $U_C$  при резонансе, если к контуру приложено напряжение с амплитудой  $\mathcal{E}_0 = 1$  В.

Ответ:  $C = 3185$  пФ,  $Q = 100$ ,  $U_C = 100$  В.

**Задача 26.4.11.** В последовательном  $rLC$  контуре при частотах генератора  $\omega_1$  и  $\omega_2$  ( $\omega_2 > \omega_1$ ) амплитуды силы тока оказались равными и в  $n$  раз меньше амплитуды тока при резонансе. Найти добротность  $Q$  этого контура.

Ответ:  $Q = \frac{\sqrt{\omega_1 \omega_2}}{\omega_2 - \omega_1} \sqrt{n^2 - 1}$ .

**Задача 26.4.12.** Схема цепи, в которой может наблюдаться резонанс токов, представлена на рис. 26.15. Здесь  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ ,  $\mathcal{E}_0 = 100$  В. Параметры этого параллельного контура равны:  $r = 5$  Ом,  $L = 100$  мкГн,  $C = 100$  пФ. Найти

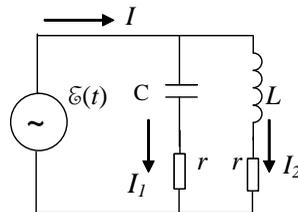


Рис. 26. 15. Схема цепи к задаче 26.4.12.

резонансную частоту  $\Omega_p$ , добротность  $Q$  и полное сопротивление  $Z_0$  при резонансе.

$$\text{Ответ: } \Omega_p \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^7 \frac{\text{рад}}{\text{с}};$$

$$Q = \frac{1}{2r} \sqrt{\frac{L}{C}} = 100; Z_0 = 2rQ^2 = 10^5 \text{ Ом}.$$

**Задача 26.4.13** ([2], 4.126). Найти добротность контура с емкостью  $C = 2,0$  мкФ и индуктивностью  $L = 5,0$  мГн, если на поддержание затухающих колебаний с амплитудой напряжения на конденсаторе  $U_m = 1,0$  В необходимо подводить мощность  $\langle P \rangle = 0,10$  мВт. Затухание колебаний в контуре достаточно мало.

$$\text{Ответ: } Q = (U_m^2 / 2 \langle P \rangle) \sqrt{C / L} = 1,0 \cdot 10^2.$$

**Задача 26.4.14** ([2], 4.130). Какую среднюю мощность должен потреблять колебательный контур с активным сопротивлением  $R = 0,45$  Ом, чтобы в нем поддерживались незатухающие гармонические колебания с амплитудой тока  $I_m = 30$  мА?

$$\text{Ответ: } \langle P \rangle = R \langle I^2 \rangle = RI_m^2 / 2 = 20 \text{ мВт}.$$

**Задача 26.4.15** ([2], 4.131). Колебательный контур содержит конденсатор емкостью  $C = 1,2$  нФ и катушку с индуктивностью  $L = 6,0$  мкГн и активным сопротивлением  $R = 0,50$  Ом. Какую среднюю мощность нужно подводить к контуру, чтобы поддерживать в нем незатухающие гармонические колебания с амплитудой напряжения на конденсаторе  $U_m = 10$  В?

$$\text{Ответ: } \langle P \rangle = RC U_m^2 / 2L = 5 \text{ мВт}.$$

### Литература

1. Жукарев А.С., Иванов С.А., Киров С.А., Киселёв Д.Ф., Лукашёва Е.В. Электричество и магнетизм. Методика решения задач. М.: Физический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова, 2010. – 436 с.
2. Иродов И.Е. Сборник задач по общей физике. М.: Наука, 1988. – 416 с.
3. Сборник задач по общему курсу физики. В пяти книгах. Кн. III. Электричество и магнетизм. Под ред. И.А. Яковлева. – М.: Физматлит, Лань, 2006. – 232 с.
4. Алешкевич В.А. Электромагнетизм. М.: Физматлит, 2014. – 405 с.
5. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм. М.: Оникс-21 век, 2005. – 464 с.
6. Калашников С.Г. Электричество. М.: Физматлит, 2003. – 624 с.
7. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Физматлит, 2003. – 616 с.

Учебное издание

*БУХАНОВ Владимир Михайлович*  
*ВАСИЛЬЕВА Ольга Николаевна*  
*ЛУКАШЕВА Екатерина Викентьевна*  
*РУСАКОВ Вячеслав Серафимович*

**ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ**  
**МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ**

Подписано в печать 20.11.2017.  
Формат 60х90/16. Объем 38 п. л. Тираж 200  
Заказ №

Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова  
119991 Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

