

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М. В. ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

**«ИССЛЕДОВАНИЕ ПОНДЕРОМОТОРНЫХ СИЛ И  
КОЛЛЕКТИВНЫХ ПОЛЕЙ, ИНДУЦИРОВАННЫХ СРЕДАМИ С  
НЕЛИНЕЙНОЙ ВОСПРИИМЧИВОСТЬЮ»**

Выполнил студент

группы 205м

Пятаков М. А.

\_\_\_\_\_

подпись студента

Научный руководитель:

д. ф.-м. н., проф. Поляков П. А.

\_\_\_\_\_

подпись научного руководителя

Допущена к защите \_\_\_\_\_

Зав. кафедрой д. ф.-м. н., проф. Салецкий А. М. \_\_\_\_\_

подпись зав. кафедрой

Москва

2022

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	4
1. ПРИНЦИП ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОНДЕРОМОТОРНЫХ СИЛ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ИЗОБРАЖЕНИЙ	7
1.1. Сила взаимодействия магнитных решёток, в которых магниты расположены на больших расстояниях друг от друга .....	7
1.2. Сравнительный расчёт сил взаимодействия магнитных решёток в виде набора магнитов и в виде одного сплошного .....	9
2. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ИНДУЦИРОВАННЫХ ЗАРЯДОВ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЫ .....	11
2.1. Постановка задачи о вычислении компонент поля линейного заряда, поверхностных и объёмных поляризационных зарядов диэлектрика .....	11
2.2. Соотношения для полей линейного заряда и поверхностных поляризационных зарядов .....	14
2.3. Выражения для компонент поля объёмных индуцированных зарядов диэлектрика .....	16
2.4. Материальное уравнение для поляризации нелинейной среды .....	17
2.5. Расчёт компонент электростатического поля в первом приближении	18
2.6. Расчёт компонент электростатического поля для среды с выбранным характерным видом диэлектрической восприимчивости во втором приближении без учёта объёмных зарядов .....	21
2.7. Компоненты поля во втором приближении без учёта объёмных зарядов при большой восприимчивости и малом параметре $\alpha$ .....	27
2.8. Расчёт компонент электростатического поля объёмных зарядов (второе приближение).....	31

2.9. Компоненты электростатического поля объёмных зарядов при большой восприимчивости и малом параметре $\alpha$ .....	36
2.10. Анализ полученных результатов. Границы применимости метода отображений в случае электростатики .....	38
<b>3. МАГНИТОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ИНДУЦИРОВАННЫХ МАГНИТНЫХ ЗАРЯДОВ НЕЛИНЕЙНОЙ МАГНИТНОЙ СРЕДЫ .....</b>	<b>41</b>
3.1. Постановка соответствующей магнитостатической задачи о вычислении компонент поля .....	41
3.2. Соотношения для полей полюса и индуцированных зарядов магнитной системы .....	43
3.3. Расчёт границ напряжённости магнитного поля, обеспечивающих справедливость метода изображений.....	45
<b>4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НЕОДНОРОДНОГО ПОСТОЯННОГО МАГНИТА, ПРЕДСТАВЛЯЮЩЕГО СОБОЙ ДВУМЕРНУЮ РЕШЕТКУ МАГНИТОЖЕСТКИХ ПОЛОСОК, С МАССИВНОЙ ФЕРРОМАГНИТНОЙ СРЕДОЙ.....</b>	<b>47</b>
4.1. Двумерная решётка намагниченных прямоугольных параллелепипедов .....	47
4.2. Расчёт пондеромоторной силы взаимодействия намагниченных кубиков методом скалярного магнитного потенциала .....	48
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ .....</b>	<b>56</b>
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ .....</b>	<b>57</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Интерес к изучению сильных магнитных полей, к исследованию способов их получения не спадает на протяжении многих лет [1, 2]. Постоянные и переменные, в том числе импульсные, магнитные поля находят широкое применение в химических, биологических, физических и других приложениях [3–6]. Например, в работе [6] исследуются такие сложные с химической точки зрения вещества, как гидрогели: здесь рассматривается упорядоченная наносборка, индуцированная именно магнитным полем с новыми уникальными свойствами, не присущими гидрогелям.

В работе [5] уделяется внимание такому важному в технике материалу, как алюминий. Сильные магнитные поля в этой области могут применяться для получения новых полезных свойств алюминия и его сплавов: изменяется фазовый состав, кинетика кристаллизации, проявляется магнитопластический эффект.

Импульсные магнитные поля набирают популярность в качестве магнитно-импульсной сварки – эффективного и экологически чистого способа соединения элементов [7, 8]. В статье [7], например, анализируется спектр возможностей при использовании такого метода, одним из плюсов здесь является отсутствие вредных выбросов в виде тепла и дыма. Благодаря магнитно-импульсному воздействию можно выполнять разделительные, сварочные и другие операции [9].

Не менее важную роль в нашей жизни играют магнетики, обеспечивающие в окружающем их пространстве наличие постоянного магнитного поля. Наиболее новыми исследованиями являются изыскания в области применения постоянных магнитов в синхронных двигателях, которые, как считается, служат альтернативой традиционным асинхронным двигателям [10, 11]. В работе [10] отмечается такой высококоэрцитивный

постоянный магнит, как  $Nd_2Fe_{14}B$  (неодим-железо-бор) [12, 13], применяемый в синхронных двигателях, благодаря чему обеспечивается наилучший крутящий момент и повышенная эффективность (КПД). Однако цена на такие устройства с редкоземельными элементами растёт, поэтому в [10] исследуется возможность применения синхронных реактивных двигателей с ферритовым покрытием.

Но наиболее интересной прикладной задачей остаётся изучение такой характеристики постоянных магнитов, как сила сцепления. Это связано с тем, что наиболее часто от намагниченных тел требуется именно способность примагнитить другой объект с максимально возможной силой, например, ферромагнитные частицы. Это зачастую играет определяющую роль при выборе материала. Так, в работе [14] рассматривается применение омагниченной технической воды для очистки от металлической пыли крупногабаритной техники – карьерных самосвалов. Здесь необходимо принимать во внимание, что имеются пондеромоторные силы, которые превышают соответствующие силы межмолекулярного сцепления, поэтому адгезия пыли на металлических поверхностях достаточно прочна. То есть имеет смысл добавлять магнитные частицы в воду, увеличивать её способность притягивать осевшие на кузов частицы пыли. О положительном влиянии магнитной обработки технической воды говорится в указанной работе.

С точки зрения робототехники тоже зачастую разработчикам необходимо увеличивать силу сцепления. Например, в работе [15] представлен колёсный робот для лазания по стенам с механизмом магнитного удержания. Авторами разработан новый метод вращательного магнитного сцепления с двумя степенями свободы для перемещения управляемой машины вверх и вниз.

Поэтому в различных задачах, в которых задействованы постоянные магниты, так или иначе требуется подбирать магнетик с нужными

характеристиками. Исследования показывают, что выбор элементов с правильными параметрами, то есть с нужной массой, линейными размерами и расстояниями, позволяет повысить эффективность использования, добиться наилучшего результата.

Зачастую расчёт полей представляет собой сложную задачу. Для облегчения вычислений применяют так называемый метод изображений [16, 17]. Это один из некоторых наиболее простых приёмов, использующихся для решения ряда задач электростатики и магнитостатики. При этом вычисления зачастую целесообразно проводить с использованием методов электростатики, а затем по принципу аналогий переходить к соответствующим уравнениям магнитостатики [18].

В работах [19, 20] решается задача о вычислении пондеромоторных сил взаимодействия и полей с использованием метода изображений. Так, в работе [20] записана общая аналитическая формула для силы взаимодействия решётки из длинных магнитов с полубесконечным листом ферромагнетика, произведён анализ этой силы в зависимости от параметров системы. А в работе [21] вычисляется электростатическое поле, индуцированное линейным зарядом, расположенным над диэлектрической средой с выбранной зависимостью диэлектрической восприимчивости от поля.

В данной работе в главе 1 излагается основная идея проведения вычислительных расчётов пондеромоторных сил. В главе 2 рассматриваются электрические системы, производится вычисление компонент напряжённостей электрических полей, созданных линейным зарядом, объёмными и поверхностными индуцированными зарядами диэлектрика, приводится соответствующий вывод о возможности применения метода зеркальных изображений к поставленной задаче. В главе 3 осуществлён переход к соответствующей магнитостатической задаче. В главе 4 представлено вычисление пондеромоторных сил взаимодействия намагниченных кубиков.

# 1. ПРИНЦИП ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОНДЕРОМОТОРНЫХ СИЛ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ИЗОБРАЖЕНИЙ

## 1.1. Сила взаимодействия магнитных решёток, в которых магниты расположены на больших расстояниях друг от друга

Рассмотрим систему, представленную на рисунке 1. Имеется решётка магнитов в виде параллелепипедов, в основании которых лежит квадрат со стороной  $a$ , каждый из магнитов намагничён однородно (вектор намагничённости  $\vec{M}$  направлен перпендикулярно верхней и нижней граням).  $h$  – толщина,  $d$  – расстояние до решётки изображений,  $J$  – поверхностная плотность эффективных магнитных токов Ампера на поверхности квадратов.

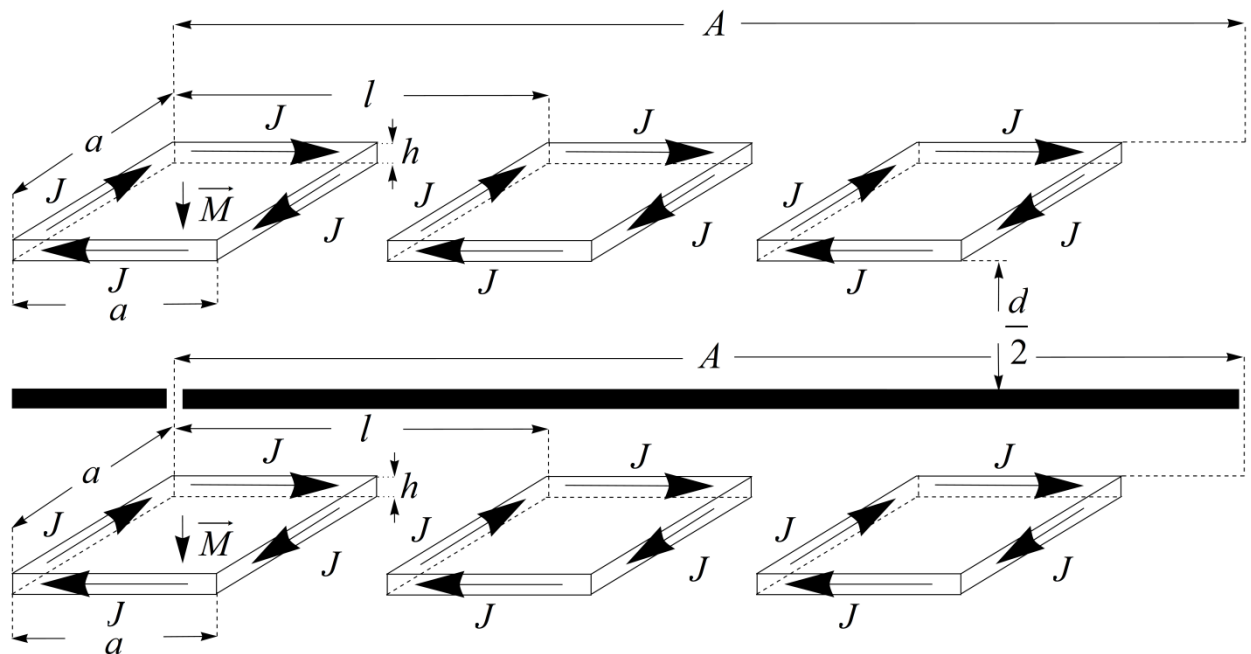


Рисунок 1 – Решётки тонких полосок и их отображений.

В данном случае предполагается, что решётки квадратные с линейным размером  $A$ , период в каждой из них равен  $l$ . Пусть пластины расположены достаточно далеко друг от друга, то есть выполняется условие

$$l - a \gg h, \quad (1)$$

тогда сила сцепления будет в основном определяться взаимодействием эффективного тока, который можно рассматривать как текущий по поверхности, непосредственно с близким к нему эффективным током. Очевидно, что сила взаимодействия будет пропорциональна суммарному периметру. Так как для отдельных пластин он больше, чем периметр магнита, составленного из этих пластин и имеющего размер  $A \times A$ , то и сила взаимодействия в первом случае будет больше. На рисунке 2 показан вид сверху на систему.

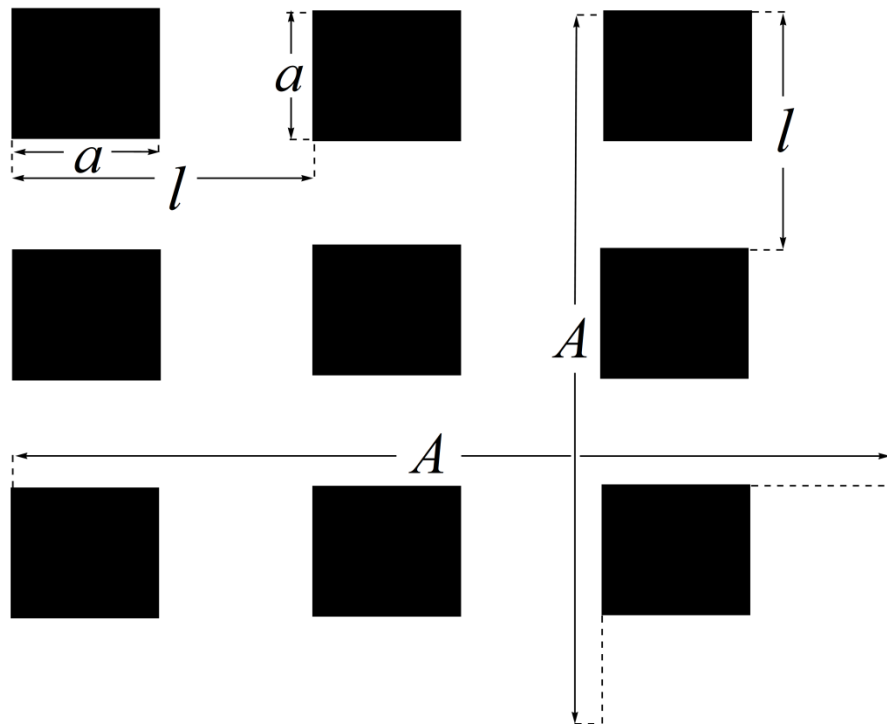


Рисунок 2 – Вид на систему магнитов сверху.

Пусть  $N$  – число квадратных пластин на стороне  $A$ , то есть в одном ряду. В этом случае связь между величинами следующая:

$$N = \frac{A}{l}. \quad (2)$$



Полное число квадратных пластин со стороной  $a$  на большом квадрате со стороной  $A$  определяется как

$$N^2 = \left(\frac{A}{l}\right)^2. \quad (3)$$

Если теперь обозначить суммарный периметр всех квадратов за  $P$ , то его можно вычислить, учитывая (3):

$$P = 4aN^2 = 4a\left(\frac{A}{l}\right)^2. \quad (4)$$

Пусть сила взаимодействия, приходящаяся на единицу длины, равна  $f$ . Тогда суммарная сила взаимодействия, если её обозначить за  $F$  и принять во внимание (4), равна

$$F = fP = f4aN^2 = 4af\left(\frac{A}{l}\right)^2. \quad (5)$$

А сила взаимодействия в случае сплошного квадрата со стороной  $A$

$$F_0 = f4A = 4Af, \quad (6)$$

где плотность силы  $f$  для обеих структур одинаковая, так как в данной модели выполняется условие (1). В общем случае это, конечно, не так.

С учётом (5) и (6), а также принимая во внимание (2), можно получить

$$\frac{F}{F_0} = \frac{4af\left(\frac{A}{l}\right)^2}{4Af} = \frac{aA}{l^2} = \frac{aNl}{l^2} = \frac{aN}{l}. \quad (7)$$

## 1.2. Сравнительный расчёт сил взаимодействия магнитных решёток в виде набора магнитов и в виде одного сплошного

Сделаем некоторые оценки по формуле (7). Если  $a = 5$  у. е. и  $l = 8$  у. е., то при  $N = 3$

$$\frac{F}{F_0} = \frac{5}{8} \cdot 3 = \frac{15}{8} = 1.875, \quad (8)$$

а при  $N = 10$  уже получаем

$$\frac{F}{F_0} = \frac{5}{8} \cdot 10 = \frac{50}{8} = \frac{25}{4} = 6.25. \quad (9)$$

Таким образом, установлено, что для данного числа постоянных магнитов, расположенных в квадрате со стороной  $A$ , сила взаимодействия будет тем больше, чем больше их суммарный периметр. При росте числа этих магнитов они будут располагаться всё ближе друг к другу. Но при увеличении размеров этих пластин сила взаимодействия, приходящаяся на единицу длины (периметра) тоже будет меняться, будут сближаться и границы с токами, которые направлены в различные стороны (см. рисунок 1), поэтому они будут компенсировать, уменьшать силу взаимодействия.

Сила притяжения, приходящаяся на единицу длины периода, в общем случае, когда не выполняется условие (1), как уже было упомянуто выше, для дискретной структуры зависит от расстояния между пластинами  $l - a$ , то есть  $f \equiv f(l - a, h, d)$ , но она отличается от силы взаимодействия на единицу длины сплошного квадрата со стороной  $A$  (плотности силы). Пусть эта сила на единицу периметра сплошного квадрата равна  $f_0$ . В этом случае с учётом соотношения (7) можем записать

$$\frac{F}{F_0} = \frac{4af \left(\frac{A}{l}\right)^2 - 4af \frac{A}{l} + 4af_0 \frac{A}{l}}{4Af_0} = \frac{f(l - a, h, d)}{f_0} \left(\frac{aA}{l^2} - \frac{a}{l}\right) + \frac{a}{l}. \quad (10)$$

Поэтому возникает вопрос, при каких параметрах  $l, a, h$  отношение сил будет максимальным. Очевидно, что в пределе при  $a \rightarrow l$

$$\frac{F}{F_0} \rightarrow 1, F \rightarrow F_0. \quad (11)$$

Поэтому основной целью является отыскание коэффициента  $\frac{f(l - a, h, d)}{f_0}$ , при котором отношение в (11) будет максимально возможным

и в этом смысле выигрышным. Этот поиск будет осуществлён в главе 4.

## 2. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ИНДУЦИРОВАННЫХ ЗАРЯДОВ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

### 2.1. Постановка задачи о вычислении компонент поля линейного заряда, поверхностных и объёмных поляризационных зарядов диэлектрика

Давно изучено классическое решение задачи электростатики, в которой рассматривается коллективное электрическое поле, индуцированное линейным зарядом, находящимся над плоской поверхностью полубесконечной однородной диэлектрической среды с линейной поляризацией, когда вектор поляризации  $\vec{P}$  пропорционален вектору напряжённости электрического поля в диэлектрике, то есть

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}, \quad (12)$$

где  $\chi$  – диэлектрическая восприимчивость вещества,  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная [17, 22]. На рисунке 3 показана эта структура.

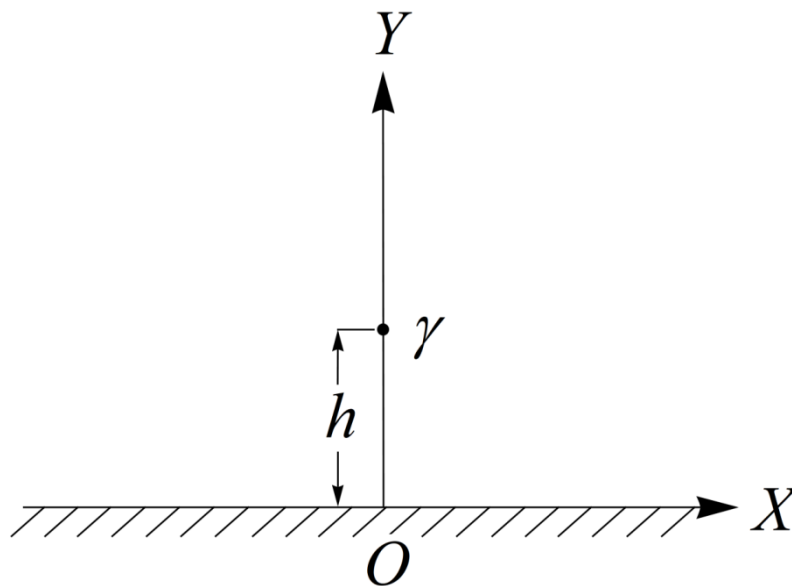


Рисунок 3 – Линейный заряд на высоте  $h$ .

Здесь  $\gamma$  – линейная плотность электрического заряда, расположенного на высоте  $h$  над плоской границей полубесконечного диэлектрика (перпендикулярно плоскости рисунка).

Это поле эквивалентно полю двух фиктивных линейных зарядов, симметрично расположенных относительно плоской поверхности диэлектрика, которые и называются электростатическими изображениями [17, 22]. Причём несложно проводить аналогию с магнитными системами (удобство зависит от конкретной задачи), в этом случае вместо вектора поляризации  $\vec{P}$  будет рассматриваться вектор намагниченности  $\vec{M}$ , а вместо электрического поля  $\vec{E}$  – магнитное  $\vec{H}$ .

К сожалению, метод зеркальных отображений с формальной точки зрения (строго) можно применять, когда магнитная или диэлектрическая восприимчивость среды во всех точках пространства постоянна, то есть когда среда является линейной. А в реальных ферромагнетиках и сегнетоэлектриках это не так, и они взаимодействуют по более сложному закону. Область, где среду можно считать линейной, очень мала (меньше эрстеда) [23]. Поэтому кажется, что данные расчёты с помощью метода изображений для реальных тел справедливы в узкой области, и тогда решение аналогичной задачи требует решения нелинейных уравнений электростатики диэлектриков.

Добавлю, что подобные задачи с диэлектриками имеют практическое применение, а не только приложение для решения соответствующей задачи магнитостатики, так как диэлектрики обладают рядом уникальных свойств по сравнению с другими веществами [24, 25]. Разрабатываются вычислительные методы для выявления новых свойств диэлектриков, изучаются новые композитные материалы и наноматериалы на основе и с применением изоляторов [26, 27].

Поэтому возможность применения метода изображений к реальным ферромагнетикам и сегнетоэлектрикам необходимо дополнительно

исследовать. В этом случае для нелинейной поляризации мы можем записать по аналогии с (12)

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi(|\vec{E}|) \vec{E}. \quad (13)$$

Далее рассчитаем поле поляризационных зарядов данной среды, индуцированных линейным точечным зарядом, расположенным на высоте  $h$  от её поверхности, с линейной плотностью заряда  $\gamma$ , как показано на рисунке 3. Решение этой задачи было изложено в [21], в которой осуществлено разложение материального уравнения определённого вида для поляризации. В данной же работе используется аналогичное материальное уравнение, рассматриваемое в точном виде.

Решение этой электростатической задачи определяется следующей системой сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{cases} E_x(x, y) = E_{\gamma x}(x, y) + E_{\sigma x}(x, y) + E_{\rho x}(x, y), \\ E_y(x, y) = E_{\gamma y}(x, y) + E_{\sigma y}(x, y) + E_{\rho y}(x, y), \end{cases} \quad (14)$$

где  $E_{\gamma x}(x, y)$  и  $E_{\gamma y}(x, y)$  – компоненты поля нашей заряженной с линейной плотностью  $\gamma$  нити,  $E_{\sigma x}(x, y)$  и  $E_{\sigma y}(x, y)$  – компоненты поля поверхностных индуцированных зарядов,  $E_{\rho x}(x, y)$  и  $E_{\rho y}(x, y)$  – компоненты поля объемных индуцированных зарядов.

Компоненты полей можно найти, зная потенциал соответствующего электрического поля. Потенциал поля нити в точке с координатами  $x$  и  $y$  (радиус-вектором  $\vec{r}$ ) выражается формулой (здесь и далее в системе СИ)

$$\varphi_\gamma(x, y) = -\frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0} \ln|\vec{r} - \vec{r}_0| + C_0, \quad (15)$$

где  $\vec{r}_0 = \{x_0, y_0\}$  – радиус-вектор, проведенный к нити;  $C_0$  – некоторая константа.

Потенциалы полей поверхностных и объемных зарядов можно выразить как

$$\begin{aligned}\varphi_\sigma(x, y) &= -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{P}(x', -0) \vec{dl} \ln|\vec{r} - \vec{r}'|, \\ \varphi_\rho(x, y) &= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\infty}^0 dy' \operatorname{div} \vec{P}(x', y') \ln|\vec{r} - \vec{r}'|,\end{aligned}\quad (16)$$

где  $\vec{P} \equiv \vec{P}(x, y)$  – вектор нелинейной поляризации диэлектрика (заданная функция);  $\vec{dl}$  – вектор, проведенный по нормали к границе диэлектрика в точке, где расположен элемент  $dl$  с координатами  $(x', 0)$ . Тогда полный потенциал в заданной точке  $(x, y)$  будет равен (по принципу суперпозиции) с учётом (15) и (16)

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= \varphi_\gamma(x, y) + \varphi_\sigma(x, y) + \varphi_\rho(x, y) = -\frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0} \ln|\vec{r} - \vec{r}_0| - \\ & - \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{P}(x', -0) \vec{dl} \ln|\vec{r} - \vec{r}'| + \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\infty}^0 dy' \operatorname{div} \vec{P}(x', y') \ln|\vec{r} - \vec{r}'| + C_0.\end{aligned}\quad (17)$$

Чтобы перейти к компонентам поля, как известно, необходимо продифференцировать потенциал по соответствующим координатам:

$$E_x(x, y) = -\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x}, \quad E_y(x, y) = -\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y}.\quad (18)$$

## 2.2. Соотношения для полей линейного заряда и поверхностных поляризационных зарядов

Для поля нити с учётом (15) и (18) таким образом можно получить соотношения

$$\begin{aligned}E_{\gamma x}(x, y) &= -\frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0} \ln|\vec{r} - \vec{r}_0| + C_0 \right) = \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \left( \ln \sqrt{(x-0)^2 + (y-h)^2} \right) = \\ &= \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-h)^2}} \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + (y-h)^2}} = \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0} \frac{x}{x^2 + (y-h)^2}, \\ E_{\gamma y}(x, y) &= -\frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0} \ln|\vec{r} - \vec{r}_0| + C_0 \right) = \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\partial}{\partial y} \left( \ln \sqrt{(x-0)^2 + (y-h)^2} \right) =\end{aligned}$$

$$= \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-h)^2}} \frac{1}{2} \frac{2(y-h)}{\sqrt{x^2 + (y-h)^2}} = \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \frac{y-h}{x^2 + (y-h)^2}. \quad (19)$$

Для поверхностных индуцированных зарядов компоненты поля можно выразить с учетом (16) и (18) так:

$$\begin{aligned} E_{\sigma_x}(x, y) &= -\frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \bar{P}(x', -0) \bar{d}l \ln |\bar{r} - \bar{r}'| \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \bar{P}(x', -0) \bar{d}l \ln |\bar{r} - \bar{r}'| \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} dx' P_n(x', -0) \ln \sqrt{(x-x')^2 + (y-0)^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' P_y(x', -0) \frac{\partial}{\partial x} \left( \ln \sqrt{(x-x')^2 + y^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' P_y(x', -0) \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}} \frac{1}{2} \frac{2(x-x')}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}} = \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' P_y(x', -0) \frac{x-x'}{(x-x')^2 + y^2}, \\ E_{\sigma_y}(x, y) &= -\frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \bar{P}(x', -0) \bar{d}l \ln |\bar{r} - \bar{r}'| \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial y} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \bar{P}(x', -0) \bar{d}l \ln |\bar{r} - \bar{r}'| \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial y} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} dx' P_n(x', -0) \ln \sqrt{(x-x')^2 + (y-0)^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' P_y(x', -0) \frac{\partial}{\partial y} \left( \ln \sqrt{(x-x')^2 + y^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' P_y(x', -0) \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}} \frac{1}{2} \frac{2y}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2}} = \\ &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' P_y(x', -0) \frac{y}{(x-x')^2 + y^2}, \end{aligned} \quad (20)$$

где учтено, что  $\vec{P}(x', -0)\vec{dl} = P_n(x', -0) = P_y(x', -0)$ . Символ «-0» в выражении (20) означает стремление к нулю снизу по оси ординат и отражает тот факт, что вектор поляризации имеет смысл только в диэлектрической среде (в области  $y \leq 0$ ).

### 2.3. Выражения для компонент поля объёмных индуцированных зарядов диэлектрика

Аналогично проведем вычисления выражений для объёмных индуцированных зарядов, используя (16) и (18). Имеем

$$\begin{aligned}
E_{\rho x}(x, y) &= -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\infty}^0 dy' \operatorname{div} \vec{P}(x', y') \ln |\vec{r} - \vec{r}'| \right) = \\
&= -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\infty}^0 dy' \operatorname{div} \vec{P}(x', y') \ln |\vec{r} - \vec{r}'| \right) = \\
&= -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\infty}^0 dy' \operatorname{div} \vec{P}(x', y') \ln \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \right) = \\
&= -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\infty}^0 dy' \operatorname{div} \vec{P}(x', y') \frac{\partial}{\partial x} \left( \ln \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \right) = \\
&= -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\infty}^0 dy' \operatorname{div} \vec{P}(x', y') \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \frac{1}{2} \frac{2(x-x')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} = \\
&= -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\infty}^0 dy' \operatorname{div} \vec{P}(x', y') \frac{x-x'}{(x-x')^2 + (y-y')^2}, \\
E_{\rho y}(x, y) &= -\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\infty}^0 dy' \operatorname{div} \vec{P}(x', y') \ln |\vec{r} - \vec{r}'| \right) = \\
&= -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial y} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\infty}^0 dy' \operatorname{div} \vec{P}(x', y') \ln |\vec{r} - \vec{r}'| \right) = \\
&= -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial y} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\infty}^0 dy' \operatorname{div} \vec{P}(x', y') \ln \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \right) = \\
&= -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\infty}^0 dy' \operatorname{div} \vec{P}(x', y') \frac{\partial}{\partial y} \left( \ln \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \right) =
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\infty}^0 dy' \operatorname{div} \vec{P}(x', y') \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \frac{1}{2} \frac{2(y-y')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} = \\
&= -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\infty}^0 dy' \operatorname{div} \vec{P}(x', y') \frac{y-y'}{(x-x')^2 + (y-y')^2}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Соотношения (13), (17)–(21) можно записать в виде одного интегрального сингулярного уравнения, то есть имеющего особенность ядра подынтегрального выражения. Его решение в общем случае представляет сложную проблему. Для того чтобы это уравнение было определено, необходимо задать нелинейность – вектор нелинейной поляризации как функцию, что осуществляется далее.

## 2.4. Материальное уравнение для поляризации нелинейной среды

Рассмотрим нелинейную среду со следующим видом нелинейного материального уравнения для  $\vec{P}(x, y)$ :

$$\vec{P}(x, y) = \epsilon_0 \chi(|\vec{E}(x, y)|) \vec{E}(x, y) = \epsilon_0 \frac{P_s}{\epsilon_0 E} (1 - e^{-E/E_k}) \vec{E}(x, y). \tag{22}$$

В (22)  $P_s$  и  $E_k$  – некоторые положительные константы, имеющие смысл модуля вектора поляризации «насыщения» (по аналогии с модулем вектора намагниченности насыщения  $M_s$ ) и постоянной, характеризующей то, как быстро растёт функция  $\chi(E)$  и стремится к горизонтальной асимптоте  $\chi = P_s / (\epsilon_0 E_k)$ , соответственно. Иначе говоря, константа  $E_k$  является характерным значением напряжённости электрического поля, определяющим принципиальный переход от одного вида зависимости к другому – от линейной асимптотики к постоянному значению при насыщении. Такой вид зависимости выбран неслучайно. Характерная экспоненциальная зависимость довольно хорошо аппроксимирует экспериментальные кривые в различных задачах, в том числе и в нашей. Например, такая аппроксимация для магнитных систем рассматривается в работах [28, 29].

## 2.5. Расчёт компонент электростатического поля в первом приближении

Рассмотрим решение системы уравнений (17)–(22) методом последовательных приближений. Диэлектрическую восприимчивость из выражения (22) перепишем в следующем виде:

$$\chi\left(|\vec{E}|\right) = \frac{P_s}{\varepsilon_0 E_k} \frac{E_k}{E} \left(1 - e^{-E/E_k}\right) = \chi_0 \frac{E_k}{E} \left(1 - e^{-E/E_k}\right), \quad (23)$$

где введено обозначение  $\chi_0 = \frac{P_s}{\varepsilon_0 E_k}$ ,  $\chi_0$  – это начальная (линейная)

диэлектрическая восприимчивость или восприимчивость при малых полях.

Положим в первом приближении  $\chi = \chi_0$  и рассмотрим вклады в суммарное поле только от нити и поверхностных поляризационных зарядов. В этом случае согласно соотношениям (14), (19), (20), (22) и (23) выражения для компонент поля  $E_x$  и  $E_y$  принимают вид

$$\begin{aligned} E_x(x, y) &= E_{\gamma x}(x, y) + E_{\sigma x}(x, y) = \\ &= \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0} \frac{x}{x^2 + (y-h)^2} + \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' P_y(x', -0) \frac{x-x'}{(x-x')^2 + y^2} = \\ &= \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0} \frac{x}{x^2 + (y-h)^2} + \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \varepsilon_0 \chi_0 E_y(x', -0) \frac{x-x'}{(x-x')^2 + y^2} = \\ &= \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0} \frac{x}{x^2 + (y-h)^2} + \frac{\chi_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' E_y(x', -0) \frac{x-x'}{(x-x')^2 + y^2}, \\ E_y(x, y) &= E_{\gamma y}(x, y) + E_{\sigma y}(x, y) = \\ &= \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0} \frac{y-h}{x^2 + (y-h)^2} + \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' P_y(x', -0) \frac{y}{(x-x')^2 + y^2} = \\ &= \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0} \frac{y-h}{x^2 + (y-h)^2} + \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \varepsilon_0 \chi_0 E_y(x', -0) \frac{y}{(x-x')^2 + y^2} = \\ &= \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0} \frac{y-h}{x^2 + (y-h)^2} + \frac{\chi_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' E_y(x', -0) \frac{y}{(x-x')^2 + y^2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Получающиеся при вычислении (24) выражения будут зависеть от рассматриваемой области ( $y > 0$  или  $y \leq 0$ ).

В подынтегральном выражении для  $E_y$  в (24) прослеживается следующая особенность. На поверхности диэлектрика (когда  $y = 0$ ) подынтегральное выражение равно нулю, если также выполняется условие  $x \neq x'$ . Но при интегрировании возникает точка  $x = x'$ , в которой имеем неопределенность (сингулярность). Тогда заметим, что подынтегральная функция при  $y \rightarrow \pm 0$  – есть  $\delta$ -функция. Действительно, выполняется следующее:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(x-x')^2 + y^2} dx' &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(x'-x)^2 + y^2} dx' = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{t^2 + y^2} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} y \frac{1}{y} \operatorname{arctg} \frac{t}{y} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \begin{cases} 1, & \text{если } y \rightarrow +0, \\ -1, & \text{если } y \rightarrow -0, \end{cases} \end{aligned} \quad (25)$$

где была выполнена замена переменных  $t = x' - x$ ,  $dt = dx'$  для приведения к

$$\text{табличному интегралу } \int \frac{dt}{a^2 + b^2 t^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \frac{bt}{a}.$$

Таким образом, выражение из (24) для  $E_y(x, y)$  при  $y \rightarrow \pm 0$  можем переписать, используя свойства  $\delta$ -функции, как

$$E_y(x, \pm 0) = -\frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \frac{h}{x^2 + h^2} \pm \frac{\chi_0}{2} E_y(x, -0). \quad (26)$$

Очевидно, что с физической точки зрения в выражении (26) необходимо брать знак « $\rightarrow$ », так как вектор поляризации  $\vec{P}$  определен в диэлектрической среде и стремление к нулю должно происходить по оси ординат снизу (в верхней полуплоскости  $y > 0$  у нас вакуум). Тогда перепишем (26):

$$E_y(x, -0) = -\frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \frac{h}{x^2 + h^2} - \frac{\chi_0}{2} E_y(x, -0). \quad (27)$$

Из соотношения (27) легко выразить  $E_y(x, -0)$ , перенеся соответствующие слагаемые в левую часть равенства и вынеся  $E_y(x, -0)$  за скобки. Получаем

$$E_y(x, -0) \cdot \left(1 + \frac{\chi_0}{2}\right) = -\frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \frac{h}{x^2 + h^2} \Rightarrow E_y(x, -0) = -\frac{1}{1 + \frac{\chi_0}{2}} \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \frac{h}{x^2 + h^2}. \quad (28)$$

Подставим (28) в выражения (24) и получим уравнения для нахождения  $E_x(x, y)$  и  $E_y(x, y)$ :

$$E_x(x, y) = \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \frac{x}{x^2 + (y-h)^2} - \frac{\chi_0}{2\pi} \frac{1}{1 + \frac{\chi_0}{2}} \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{h}{x'^2 + h^2} \frac{x-x'}{(x-x')^2 + y^2},$$

$$E_y(x, y) = \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \frac{y-h}{x^2 + (y-h)^2} - \frac{\chi_0}{2\pi} \frac{1}{1 + \frac{\chi_0}{2}} \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{h}{x'^2 + h^2} \frac{y}{(x-x')^2 + y^2}. \quad (29)$$

В (29) содержатся интегралы следующего вида:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{h}{x'^2 + h^2} \frac{x-x'}{(x-x')^2 + y^2},$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{h}{x'^2 + h^2} \frac{y}{(x-x')^2 + y^2}. \quad (30)$$

Эти интегралы в (30) вычисляются аналитически, результат зависит от знака  $y$ . Для области, где  $y > 0$ , переобозначая  $E_x \rightarrow E_{0x}$ ,  $E_y \rightarrow E_{0y}$ , получаем

$$E_{0x}(x, y) = \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \frac{x}{x^2 + (y-h)^2} - \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \frac{\chi_0}{2 + \chi_0} \frac{x}{x^2 + (y+h)^2},$$

$$E_{0y}(x, y) = \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \frac{y-h}{x^2 + (y-h)^2} - \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \frac{\chi_0}{2 + \chi_0} \frac{y+h}{x^2 + (y+h)^2}, \quad (31)$$

а для области  $y \leq 0$  имеем

$$E_{0x}(x, y) = \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \frac{2}{2 + \chi_0} \frac{x}{x^2 + (y-h)^2},$$

$$E_{0y}(x, y) = \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \frac{2}{2 + \chi_0} \frac{y-h}{x^2 + (y-h)^2}. \quad (32)$$

Решения (31) и (32) согласуются с результатами, полученными методом изображений для однородных изотропных диэлектриков, у которых постоянная диэлектрическая восприимчивость [16, 17, 22].

## 2.6. Расчёт компонент электростатического поля для среды с выбранным характерным видом диэлектрической восприимчивости во втором приближении без учёта объёмных зарядов

Теперь рассмотрим решение исходной системы уравнений (17)–(21) во втором приближении, в том числе с учетом в дальнейшем поправок от объёмных индуцированных зарядов. Пусть  $\chi \neq \chi_0$ ,  $\chi = \chi(|\vec{E}|)$ . Тогда выражение (27) можно переписать в виде

$$E_y(x, -0) = -\frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \frac{h}{x^2 + h^2} - \frac{\chi(x, -0)}{2} E_y(x, -0) \quad (33)$$

и выразить из него компоненту поля  $E_y(x, -0)$ , перенеся соответствующие слагаемые в левую часть равенства и вынеся  $E_y(x, -0)$  за скобки:

$$\begin{aligned} E_y(x, -0) \cdot \left(1 + \frac{\chi(x, -0)}{2}\right) &= -\frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \frac{h}{x^2 + h^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow E_y(x, -0) &= -\frac{1}{1 + \frac{\chi(x, -0)}{2}} \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \frac{h}{x^2 + h^2}. \end{aligned} \quad (34)$$

Подставим (34) в выражения (24) и получим уравнения для нахождения  $E_x(x, y)$  и  $E_y(x, y)$ :

$$\begin{aligned} E_x(x, y) &= \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \frac{x}{x^2 + (y-h)^2} - \\ -\frac{1}{2\pi} \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \chi(x', -0) &\frac{1}{1 + \frac{\chi(x', -0)}{2}} \frac{h}{x'^2 + h^2} \frac{x-x'}{(x-x')^2 + y^2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0} \frac{x}{x^2 + (y-h)^2} - \frac{1}{2\pi} \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{2\chi(x', -0)}{2 + \chi(x', -0)} \frac{h}{x'^2 + h^2} \frac{x-x'}{(x-x')^2 + y^2}, \\
E_y(x, y) &= \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0} \frac{y-h}{x^2 + (y-h)^2} - \\
&\quad - \frac{1}{2\pi} \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \chi(x', -0) \frac{1}{1 + \frac{\chi(x', -0)}{2}} \frac{h}{x'^2 + h^2} \frac{y}{(x-x')^2 + y^2} = \\
&= \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0} \frac{y-h}{x^2 + (y-h)^2} - \frac{1}{2\pi} \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{2\chi(x', -0)}{2 + \chi(x', -0)} \frac{h}{x'^2 + h^2} \frac{y}{(x-x')^2 + y^2}.
\end{aligned} \tag{35}$$

Рассчитаем модуль напряжённости электрического поля, используя выражения для  $E_x(x, y)$  и  $E_y(x, y)$  из (32) в области  $y \leq 0$ . Имеем

$$\begin{aligned}
E &= \sqrt{E_{0x}^2 + E_{0y}^2} = \\
&= \sqrt{\left( \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0} \frac{2}{2 + \chi_0} \frac{x}{x^2 + (y-h)^2} \right)^2 + \left( \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0} \frac{2}{2 + \chi_0} \frac{y-h}{x^2 + (y-h)^2} \right)^2} = \\
&= \sqrt{\left( \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0} \frac{2}{2 + \chi_0} \right)^2 \left( \left( \frac{x}{x^2 + (y-h)^2} \right)^2 + \left( \frac{y-h}{x^2 + (y-h)^2} \right)^2 \right)} = \\
&= \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0} \frac{2}{2 + \chi_0} \sqrt{\frac{x^2}{(x^2 + (y-h)^2)^2} + \frac{(y-h)^2}{(x^2 + (y-h)^2)^2}} = \\
&= \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0} \frac{2}{2 + \chi_0} \sqrt{\frac{x^2 + (y-h)^2}{(x^2 + (y-h)^2)^2}} = \frac{\chi_0}{(2 + \chi_0)} \frac{\gamma}{\pi\varepsilon_0 h \chi_0} \frac{h}{\sqrt{x^2 + (y-h)^2}} = \\
&= E_k \frac{\chi_0}{(2 + \chi_0)} \frac{\gamma}{\pi\varepsilon_0 h \chi_0 E_k} \frac{h}{\sqrt{x^2 + (y-h)^2}} = E_k \alpha \frac{\chi_0}{(2 + \chi_0)} \frac{h}{\sqrt{x^2 + (y-h)^2}}, \tag{36}
\end{aligned}$$

где обозначено  $\alpha = \frac{2E(h)}{\chi_0 E_k}$ ,  $E(h) = \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0 h}$ , то есть  $\alpha = \frac{\gamma}{\pi\varepsilon_0 h \chi_0 E_k}$ .

Найдем восприимчивость, определяемую в (23), используя (36):

$$\begin{aligned}
\chi &= \chi_0 \frac{E_k}{E} (1 - e^{-E/E_k}) = \chi_0 \frac{E_k}{E_k \alpha \frac{\chi_0}{(2 + \chi_0)} \frac{h}{\sqrt{x^2 + (y-h)^2}}} \times \\
&\times \left( 1 - \exp \left[ -\frac{E_k}{E_k} \alpha \frac{\chi_0}{(2 + \chi_0)} \frac{h}{\sqrt{x^2 + (y-h)^2}} \right] \right) = \\
&= \chi_0 \left( \alpha \frac{\chi_0}{(2 + \chi_0)} \frac{h}{\sqrt{x^2 + (y-h)^2}} \right)^{-1} \left( 1 - \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_0}{(2 + \chi_0)} \frac{h}{\sqrt{x^2 + (y-h)^2}} \right] \right).
\end{aligned} \tag{37}$$

Выполним обезразмеривание выражения (37) путём деления на параметр  $h$ . Имеем

$$\begin{aligned}
\chi &= \chi_0 \left( \alpha \frac{\chi_0}{(2 + \chi_0)} \frac{\frac{h}{h}}{\sqrt{\left(\frac{x}{h}\right)^2 + \left(\frac{y}{h} - 1\right)^2}} \right)^{-1} \times \\
&\times \left( 1 - \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_0}{(2 + \chi_0)} \frac{\frac{h}{h}}{\sqrt{\left(\frac{x}{h}\right)^2 + \left(\frac{y}{h} - 1\right)^2}} \right] \right) = \\
&= \chi_0 \left( \alpha \frac{\chi_0}{(2 + \chi_0)} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}^2 + (\tilde{y} - 1)^2}} \right)^{-1} \left( 1 - \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_0}{(2 + \chi_0)} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}^2 + (\tilde{y} - 1)^2}} \right] \right),
\end{aligned} \tag{38}$$

где обозначено  $\tilde{x} = \frac{x}{h}$ ,  $\tilde{y} = \frac{y}{h}$ .

Подставим соотношение для диэлектрической восприимчивости (38) в выражения (35). Получим для  $E_x(x, y)$ ,  $E_y(x, y)$ , вводя безразмерные параметры аналогично тому, как это было сделано в (38), то есть

$$\tilde{x} = \frac{x}{h}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{h}, \quad \tilde{x}' = \frac{x'}{h}:$$

$$\begin{aligned}
E_x(x, y) = E_x(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0 h} \frac{x/h}{\left(x/h\right)^2 + \left(y/h - 1\right)^2} - \frac{1}{2\pi} \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \times \\
&\times \int_{-\infty}^{+\infty} h d\tilde{x}' \left( \frac{2\chi_0 \left( \alpha \frac{\chi_0}{(2+\chi_0)} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + 1}} \right)^{-1} \left( 1 - \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_0}{(2+\chi_0)} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + 1}} \right] \right)}{2 + \chi_0 \left( \alpha \frac{\chi_0}{(2+\chi_0)} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + 1}} \right)^{-1} \left( 1 - \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_0}{(2+\chi_0)} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + 1}} \right] \right)} \right) \times \\
&\times \left. \frac{h/h}{\left(x'/h\right)^2 + 1} \frac{1}{h^2} \frac{x/h - x'/h}{\left(x/h - x'/h\right)^2 + \left(y/h\right)^2} \right) = E(h) \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y} - 1)^2} - \frac{1}{2\pi} E(h) \times \\
&\times \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x}' \left( \frac{2\chi_0 \left( \alpha \frac{\chi_0}{(2+\chi_0)} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + 1}} \right)^{-1} \left( 1 - \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_0}{(2+\chi_0)} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + 1}} \right] \right)}{2 + \chi_0 \left( \alpha \frac{\chi_0}{(2+\chi_0)} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + 1}} \right)^{-1} \left( 1 - \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_0}{(2+\chi_0)} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + 1}} \right] \right)} \right) \times \\
&\times \left. \frac{1}{\tilde{x}'^2 + 1} \frac{\tilde{x} - \tilde{x}'}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + \tilde{y}^2} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_y(x, y) = E_y(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \frac{y/h - h/h}{\left(x/h\right)^2 + \left(y/h - 1\right)^2} - \frac{1}{2\pi} \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \times \\
&\times \int_{-\infty}^{+\infty} h d\tilde{x}' \left( \frac{2\chi_0 \left( \alpha \frac{\chi_0}{(2+\chi_0)} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + 1}} \right)^{-1} \left( 1 - \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_0}{(2+\chi_0)} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + 1}} \right] \right)}{2 + \chi_0 \left( \alpha \frac{\chi_0}{(2+\chi_0)} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + 1}} \right)^{-1} \left( 1 - \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_0}{(2+\chi_0)} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + 1}} \right] \right)} \right) \times \\
&\times \left. \frac{h/h}{\left(x'/h\right)^2 + 1} \frac{1}{h^2} \frac{y/h}{\left(x/h - x'/h\right)^2 + \left(y/h\right)^2} \right) = E(h) \frac{\tilde{y} - 1}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y} - 1)^2} - \frac{1}{2\pi} E(h) \times
\end{aligned}$$



$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x}' \left( \frac{2\chi_0 \left( \alpha \frac{\chi_0}{(2+\chi_0) \sqrt{\tilde{x}'^2+1}} \right)^{-1} \left( 1 - \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_0}{(2+\chi_0) \sqrt{\tilde{x}'^2+1}} \right] \right)}{2+\chi_0 \left( \alpha \frac{\chi_0}{(2+\chi_0) \sqrt{\tilde{x}'^2+1}} \right)^{-1} \left( 1 - \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_0}{(2+\chi_0) \sqrt{\tilde{x}'^2+1}} \right] \right)} \right) \times \left( \frac{1}{\tilde{x}'^2+1} \frac{\tilde{y}}{(\tilde{x}-\tilde{x}')^2+\tilde{y}^2} \right). \quad (39)$$

Перепишем итоговые соотношения из (39), приводя их к безразмерному и нормированному на коэффициент  $\frac{2}{\chi_0}$  виду путём деления

обеих частей на  $\frac{2}{\chi_0} E(h) = \frac{2}{\chi_0} \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0 h}$ :

$$\tilde{E}_x(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{E_x(\tilde{x}, \tilde{y})}{\frac{2}{\chi_0} E(h)} = \frac{\chi_0}{2} \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}-1)^2} - \frac{\chi_0}{4\pi} \times \left( \frac{2\chi_0 \left( \alpha \frac{\chi_0}{(2+\chi_0) \sqrt{\tilde{x}'^2+1}} \right)^{-1} \left( 1 - \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_0}{(2+\chi_0) \sqrt{\tilde{x}'^2+1}} \right] \right)}{2+\chi_0 \left( \alpha \frac{\chi_0}{(2+\chi_0) \sqrt{\tilde{x}'^2+1}} \right)^{-1} \left( 1 - \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_0}{(2+\chi_0) \sqrt{\tilde{x}'^2+1}} \right] \right)} \right) \times \left( \frac{1}{\tilde{x}'^2+1} \frac{\tilde{x}-\tilde{x}'}{(\tilde{x}-\tilde{x}')^2+\tilde{y}^2} \right),$$

$$\tilde{E}_y(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{E_y(\tilde{x}, \tilde{y})}{\frac{2}{\chi_0} E(h)} = \frac{\chi_0}{2} \frac{\tilde{y}-1}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}-1)^2} - \frac{\chi_0}{4\pi} \times \left( \frac{2\chi_0 \left( \alpha \frac{\chi_0}{(2+\chi_0) \sqrt{\tilde{x}'^2+1}} \right)^{-1} \left( 1 - \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_0}{(2+\chi_0) \sqrt{\tilde{x}'^2+1}} \right] \right)}{2+\chi_0 \left( \alpha \frac{\chi_0}{(2+\chi_0) \sqrt{\tilde{x}'^2+1}} \right)^{-1} \left( 1 - \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_0}{(2+\chi_0) \sqrt{\tilde{x}'^2+1}} \right] \right)} \right) \times \left( \frac{1}{\tilde{x}'^2+1} \frac{\tilde{y}}{(\tilde{x}-\tilde{x}')^2+\tilde{y}^2} \right). \quad (40)$$

Интегралы в соотношениях (40) могут быть вычислены численно, что и было осуществлено программно в среде Wolfram Mathematica. Однако следует иметь в виду при численном вычислении интегралов (40), что в подынтегральном выражении есть особенность: при  $\tilde{x}' = \tilde{x}, \tilde{y} = 0$  осуществляется деление нуля на ноль. Чтобы исключить данную точку из области интегрирования, разобьём её следующим образом, введя некоторое малое положительное число  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_x(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \frac{E_x(\tilde{x}, \tilde{y})}{\frac{2}{\chi_0} E(h)} = \frac{\chi_0}{2} \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y} - 1)^2} - \frac{\chi_0}{4\pi} \left( \int_{-\infty}^{\tilde{x}-\varepsilon} d\tilde{x}' + \int_{\tilde{x}+\varepsilon}^{+\infty} d\tilde{x}' \right) \times \\
&\times \left( \frac{2\chi_0 \left( \alpha \frac{\chi_0}{(2+\chi_0)} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + 1}} \right)^{-1} \left( 1 - \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_0}{(2+\chi_0)} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + 1}} \right] \right)}{2 + \chi_0 \left( \alpha \frac{\chi_0}{(2+\chi_0)} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + 1}} \right)^{-1} \left( 1 - \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_0}{(2+\chi_0)} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + 1}} \right] \right)} \right) \times \\
&\times \frac{1}{\tilde{x}'^2 + 1} \frac{\tilde{x} - \tilde{x}'}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + \tilde{y}^2}, \\
\tilde{E}_y(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \frac{E_y(\tilde{x}, \tilde{y})}{\frac{2}{\chi_0} E(h)} = \frac{\chi_0}{2} \frac{\tilde{y} - 1}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y} - 1)^2} - \frac{\chi_0}{4\pi} \left( \int_{-\infty}^{\tilde{x}-\varepsilon} d\tilde{x}' + \int_{\tilde{x}+\varepsilon}^{+\infty} d\tilde{x}' \right) \times \\
&\times \left( \frac{2\chi_0 \left( \alpha \frac{\chi_0}{(2+\chi_0)} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + 1}} \right)^{-1} \left( 1 - \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_0}{(2+\chi_0)} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + 1}} \right] \right)}{2 + \chi_0 \left( \alpha \frac{\chi_0}{(2+\chi_0)} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + 1}} \right)^{-1} \left( 1 - \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_0}{(2+\chi_0)} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + 1}} \right] \right)} \right) \times \\
&\times \frac{1}{\tilde{x}'^2 + 1} \frac{\tilde{y}}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + \tilde{y}^2}.
\end{aligned} \tag{41}$$

В (41) введено удобное (сделано для краткости) обозначение разбиения области интегрирования.

Рассмотрим некоторый предельный случай.

2.7. Компоненты поля во втором приближении без учёта объёмных зарядов при большой восприимчивости и малом параметре  $\alpha$

Пусть для диэлектрической восприимчивости выполняется условие

$$\chi \gg 1, \quad (42)$$

в том числе и

$$\chi_0 \gg 1. \quad (43)$$

Предположим также, что для суммарных полей выполнено условие

$$\frac{E}{E_k} \ll 1 \Leftrightarrow \alpha \frac{\chi_0}{2 + \chi_0} \ll 1. \quad (44)$$

Последнее означает, что мы находимся в области значений напряженности электрического поля, много меньших характерного фиксированного значения  $E_k$ . С учётом этих требований можно утверждать, что

$$\frac{\chi_0}{2 + \chi_0} \approx \frac{\chi_0}{\chi_0} = 1 \Leftrightarrow \alpha \ll 1, E(h) \ll E_k \frac{\chi_0}{2}. \quad (45)$$

В этом приближении (42)–(45) выражения (40) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \tilde{E}_x(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \frac{E_x(\tilde{x}, \tilde{y})}{\frac{2}{\chi_0} E(h)} = \frac{\chi_0}{2} \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y} - 1)^2} - \frac{\chi_0}{4\pi} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x}' \frac{2\chi}{2 + \chi} \frac{1}{\tilde{x}'^2 + 1} \frac{\tilde{x} - \tilde{x}'}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + \tilde{y}^2} = \frac{\chi_0}{2} \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y} - 1)^2} - \frac{\chi_0}{4\pi} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x}' \frac{2}{1 + \frac{2}{\chi}} \frac{1}{\tilde{x}'^2 + 1} \frac{\tilde{x} - \tilde{x}'}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + \tilde{y}^2} \approx \\ &\approx \frac{\chi_0}{2} \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y} - 1)^2} - \frac{\chi_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x}' \left[ 2 \left( 1 - \frac{2}{\chi} \right) \right] \frac{1}{\tilde{x}'^2 + 1} \frac{\tilde{x} - \tilde{x}'}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + \tilde{y}^2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\chi_0}{2} \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}-1)^2} - \frac{\chi_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x}' \frac{1}{\tilde{x}'^2 + 1} \frac{\tilde{x} - \tilde{x}'}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + \tilde{y}^2} + \\
&\quad + \frac{\chi_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x}' \frac{1}{\chi} \frac{1}{\tilde{x}'^2 + 1} \frac{\tilde{x} - \tilde{x}'}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + \tilde{y}^2}, \\
\tilde{E}_y(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \frac{E_y(\tilde{x}, \tilde{y})}{\frac{2}{\chi_0} E(h)} = \frac{\chi_0}{2} \frac{\tilde{y}-1}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}-1)^2} - \frac{\chi_0}{4\pi} \times \\
&\times \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x}' \frac{2\chi}{2 + \chi} \frac{1}{\tilde{x}'^2 + 1} \frac{\tilde{y}}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + \tilde{y}^2} = \frac{\chi_0}{2} \frac{\tilde{y}-1}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}-1)^2} - \frac{\chi_0}{4\pi} \times \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x}' \frac{2}{1 + \frac{2}{\chi}} \frac{1}{\tilde{x}'^2 + 1} \frac{\tilde{y}}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + \tilde{y}^2} \approx \\
&\approx \frac{\chi_0}{2} \frac{\tilde{y}-1}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}-1)^2} - \frac{\chi_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x}' \left[ 2 \left( 1 - \frac{2}{\chi} \right) \right] \frac{1}{\tilde{x}'^2 + 1} \frac{\tilde{y}}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + \tilde{y}^2} = \\
&= \frac{\chi_0}{2} \frac{\tilde{y}-1}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}-1)^2} - \frac{\chi_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x}' \frac{1}{\tilde{x}'^2 + 1} \frac{\tilde{y}}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + \tilde{y}^2} + \\
&\quad + \frac{\chi_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x}' \frac{1}{\chi} \frac{1}{\tilde{x}'^2 + 1} \frac{\tilde{y}}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + \tilde{y}^2}. \tag{46}
\end{aligned}$$

Возьмём первые интегралы в (46), а во вторые подставим диэлектрическую восприимчивость, разложенную в ряд до трёх слагаемых:

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x}' \frac{1}{\tilde{x}'^2 + 1} \frac{\tilde{x} - \tilde{x}'}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + \tilde{y}^2} = \begin{cases} \pi \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}+1)^2}, & \tilde{y} > 0, \\ \pi \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}-1)^2}, & \tilde{y} \leq 0, \end{cases} \\
I_4 &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x}' \frac{1}{\tilde{x}'^2 + 1} \frac{\tilde{y}}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + \tilde{y}^2} = \begin{cases} \pi \frac{\tilde{y}+1}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}+1)^2}, & \tilde{y} > 0, \\ \pi \frac{\tilde{y}-1}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}-1)^2}, & \tilde{y} \leq 0, \end{cases} \\
\chi &= \chi_0 \left( \alpha \frac{\chi_0}{(2 + \chi_0) \sqrt{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}-1)^2}} \right)^{-1} \left( 1 - \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_0}{(2 + \chi_0) \sqrt{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}-1)^2}} \right] \right) \approx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \approx \chi_0 \left( \alpha \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}-1)^2}} \right)^{-1} \left( 1 - 1 + \alpha \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}-1)^2}} - \frac{\alpha^2}{2} \frac{1}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}-1)^2} \right) = \\
& = \chi_0 \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}-1)^2}} \right), \\
\tilde{E}_x(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \frac{\chi_0}{2} \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}-1)^2} - \frac{\chi_0}{2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}+1)^2}, \tilde{y} > 0 \\ \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}-1)^2}, \tilde{y} \leq 0 \end{array} \right\} + \\
& + \frac{\chi_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x}' \frac{1}{\chi_0 \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + 1}} \right)} \frac{1}{\tilde{x}'^2 + 1} \frac{\tilde{x} - \tilde{x}'}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + \tilde{y}^2}, \\
\tilde{E}_y(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \frac{\chi_0}{2} \frac{\tilde{y}-1}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}-1)^2} - \frac{\chi_0}{2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\tilde{y}+1}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}+1)^2}, \tilde{y} > 0 \\ \frac{\tilde{y}-1}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}-1)^2}, \tilde{y} \leq 0 \end{array} \right\} + \\
& + \frac{\chi_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x}' \frac{1}{\chi_0 \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + 1}} \right)} \frac{1}{\tilde{x}'^2 + 1} \frac{\tilde{x} - \tilde{x}'}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + \tilde{y}^2}.
\end{aligned} \tag{47}$$

Отмечу, что представленные выше интегралы в (47) аналогичны интегралам  $I_1, I_2$ , которые фигурируют в (30), при соответствующем обезразмеривании выражений.

Выполним преобразования и рассчитаем получающиеся интегралы:

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_x(\tilde{x}, \tilde{y}) &\approx \frac{\chi_0}{2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}-1)^2} - \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}+1)^2}, \tilde{y} > 0 \\ 0, \tilde{y} \leq 0 \end{array} \right\} + \\
& + \frac{\chi_0}{2} \frac{2}{\pi \chi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x}' \left( 1 + \frac{\alpha}{2} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + 1}} \right) \frac{1}{\tilde{x}'^2 + 1} \frac{\tilde{x} - \tilde{x}'}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + \tilde{y}^2} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\chi_0}{2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}-1)^2} - \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}+1)^2}, \tilde{y} > 0 \\ 0, \tilde{y} \leq 0 \end{array} \right\} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x}' \frac{1}{\tilde{x}'^2 + 1} \frac{\tilde{x} - \tilde{x}'}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + \tilde{y}^2} + \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x}' \frac{\alpha}{2} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + 1}} \frac{1}{\tilde{x}'^2 + 1} \frac{\tilde{x} - \tilde{x}'}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + \tilde{y}^2} = \\
&= \frac{\chi_0}{2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}-1)^2} - \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}+1)^2}, \tilde{y} > 0 \\ 0, \tilde{y} \leq 0 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}+1)^2}, \tilde{y} > 0 \\ \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}-1)^2}, \tilde{y} \leq 0 \end{array} \right\} + \tilde{E}_x^{\sigma, \text{неодн.}}, \\
&\quad \tilde{E}_y(\tilde{x}, \tilde{y}) \approx \frac{\chi_0}{2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\tilde{y}-1}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}-1)^2} - \frac{\tilde{y}+1}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}+1)^2}, \tilde{y} > 0 \\ 0, \tilde{y} \leq 0 \end{array} \right\} + \\
&\quad + \frac{\chi_0}{2} \frac{2}{\pi \chi_0} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x}' \left( 1 + \frac{\alpha}{2} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + 1}} \right) \frac{1}{\tilde{x}'^2 + 1} \frac{\tilde{y}}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + \tilde{y}^2} = \\
&= \frac{\chi_0}{2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\tilde{y}-1}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}-1)^2} - \frac{\tilde{y}+1}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}+1)^2}, \tilde{y} > 0 \\ 0, \tilde{y} \leq 0 \end{array} \right\} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x}' \frac{1}{\tilde{x}'^2 + 1} \frac{\tilde{y}}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + \tilde{y}^2} + \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x}' \frac{\alpha}{2} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + 1}} \frac{1}{\tilde{x}'^2 + 1} \frac{\tilde{y}}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + \tilde{y}^2} = \\
&= \frac{\chi_0}{2} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\tilde{y}-1}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}-1)^2} - \frac{\tilde{y}+1}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}+1)^2}, \tilde{y} > 0 \\ 0, \tilde{y} \leq 0 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \frac{\tilde{y}+1}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}+1)^2}, \tilde{y} > 0 \\ \frac{\tilde{y}-1}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}-1)^2}, \tilde{y} \leq 0 \end{array} \right\} + \tilde{E}_y^{\sigma, \text{неодн.}}, \tag{48}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_x^{\sigma, \text{неодн.}} &= \frac{\alpha}{2} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x}' \frac{1}{(\tilde{x}'^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \frac{\tilde{x} - \tilde{x}'}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + \tilde{y}^2}, \\
\tilde{E}_y^{\sigma, \text{неодн.}} &= \frac{\alpha}{2} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x}' \frac{1}{(\tilde{x}'^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \frac{\tilde{y}}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + \tilde{y}^2}. \tag{49}
\end{aligned}$$

$\tilde{E}_x^{\sigma, \text{неодн.}}$  и  $\tilde{E}_y^{\sigma, \text{неодн.}}$  – это часть компонент напряжённости электрического поля, создаваемого поверхностными индуцированными зарядами диэлектрической среды, соответствующая неоднородной части диэлектрической восприимчивости – части восприимчивости, линейно зависящей от поля. Соотношения (49) согласуются с результатами из [21]. Однако не следует забывать при численном вычислении интегралов (49), что в подынтегральном выражении есть особенность (см. (41)). Поэтому, вспоминая (41), можно (49) переписать как

$$\begin{aligned}\tilde{E}_x^{\sigma, \text{неодн.}} &= \frac{\alpha}{2} \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\infty}^{\tilde{x}-\varepsilon} d\tilde{x}' + \int_{\tilde{x}+\varepsilon}^{+\infty} d\tilde{x}' \right) \frac{1}{(\tilde{x}'^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \frac{\tilde{x} - \tilde{x}'}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + \tilde{y}^2}, \\ \tilde{E}_y^{\sigma, \text{неодн.}} &= \frac{\alpha}{2} \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\infty}^{\tilde{x}-\varepsilon} d\tilde{x}' + \int_{\tilde{x}+\varepsilon}^{+\infty} d\tilde{x}' \right) \frac{1}{(\tilde{x}'^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \frac{\tilde{y}}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + \tilde{y}^2}.\end{aligned}\quad (50)$$

Соотношения, которые представлены в (48) можно записать иначе:

$$\begin{aligned}\tilde{E}_x(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{\chi_0}{2} \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}-1)^2} + \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}+1)^2} \frac{2-\chi_0}{2}, \tilde{y} > 0 \\ \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}-1)^2}, \tilde{y} \leq 0 \end{array} \right\} + \tilde{E}_x^{\sigma, \text{неодн.}}, \\ \tilde{E}_y(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{\chi_0}{2} \frac{\tilde{y}-1}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}-1)^2} + \frac{\tilde{y}+1}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}+1)^2} \frac{2-\chi_0}{2}, \tilde{y} > 0 \\ \frac{\tilde{y}-1}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y}-1)^2}, \tilde{y} \leq 0 \end{array} \right\} + \tilde{E}_y^{\sigma, \text{неодн.}}.\end{aligned}\quad (51)$$

## 2.8. Расчёт компонент электростатического поля объёмных зарядов (второе приближение)

Теперь осуществим вычисление компонент поля с учётом вклада от объёмных поляризационных зарядов диэлектрической среды. Введём безразмерные параметры в выражениях (21) для объёмных вкладов

аналогично тому, как это было выполнено в (38) и в (39), то есть

$$\tilde{x} = \frac{x}{h}, \tilde{y} = \frac{y}{h}, \tilde{x}' = \frac{x'}{h}, \tilde{y}' = \frac{y'}{h}:$$

$$\begin{aligned} E_{\rho x}(x, y) &= -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\infty}^0 dy' \operatorname{div} \vec{P}(x', y') \frac{x-x'}{(x-x')^2 + (y-y')^2} = \\ &= -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x}' \int_{-\infty}^0 d\tilde{y}' \operatorname{div} \vec{P}(\tilde{x}', \tilde{y}') \frac{\tilde{x}-\tilde{x}'}{(\tilde{x}-\tilde{x}')^2 + (\tilde{y}-\tilde{y}')^2}, \\ E_{\rho y}(x, y) &= -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\infty}^0 dy' \operatorname{div} \vec{P}(x', y') \frac{y-y'}{(x-x')^2 + (y-y')^2} = \\ &= -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x}' \int_{-\infty}^0 d\tilde{y}' \operatorname{div} \vec{P}(\tilde{x}', \tilde{y}') \frac{\tilde{y}-\tilde{y}'}{(\tilde{x}-\tilde{x}')^2 + (\tilde{y}-\tilde{y}')^2}. \end{aligned} \quad (52)$$

Подставим соотношения для  $E_{0x}(\tilde{x}, \tilde{y})$  и  $E_{0y}(\tilde{x}, \tilde{y})$  из (32) с аналогично введёнными безразмерными параметрами (см. (38), (39) и (52)) и выражение для диэлектрической восприимчивости из (38) в выражение для  $E_{\rho x}(x, y) = E_{\rho x}(\tilde{x}, \tilde{y})$  из (52), расписывая при этом дивергенцию в декартовой системе координат. Получим для  $E_{\rho x}(\tilde{x}, \tilde{y})$  во всём пространстве с учетом (22) и (23)

$$\begin{aligned} E_{\rho x}(x, y) = E_{\rho x}(\tilde{x}, \tilde{y}) &= -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x}' \int_{-\infty}^0 d\tilde{y}' \operatorname{div} \vec{P}(\tilde{x}', \tilde{y}') \frac{\tilde{x}-\tilde{x}'}{(\tilde{x}-\tilde{x}')^2 + (\tilde{y}-\tilde{y}')^2} = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x}' \int_{-\infty}^0 d\tilde{y}' \left\{ \epsilon_0 \operatorname{div} \left( \chi(\tilde{x}', \tilde{y}') \cdot \vec{E}(\tilde{x}', \tilde{y}') \right) \right\} \frac{\tilde{x}-\tilde{x}'}{(\tilde{x}-\tilde{x}')^2 + (\tilde{y}-\tilde{y}')^2} = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x}' \int_{-\infty}^0 d\tilde{y}' \left\{ \epsilon_0 \frac{\partial \chi(\tilde{x}', \tilde{y}')}{\partial \tilde{x}'} E_{0x}(\tilde{x}', \tilde{y}') + \epsilon_0 \frac{\partial \chi(\tilde{x}', \tilde{y}')}{\partial \tilde{y}'} E_{0y}(\tilde{x}', \tilde{y}') + \epsilon_0 \chi(\tilde{x}', \tilde{y}') \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\partial E_{0x}(\tilde{x}', \tilde{y}')}{\partial \tilde{x}'} + \epsilon_0 \chi(\tilde{x}', \tilde{y}') \frac{\partial E_{0y}(\tilde{x}', \tilde{y}')}{\partial \tilde{y}'} \right\} \frac{\tilde{x}-\tilde{x}'}{(\tilde{x}-\tilde{x}')^2 + (\tilde{y}-\tilde{y}')^2} = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x}' \int_{-\infty}^0 d\tilde{y}' \left\{ \frac{\partial (\chi(\tilde{x}', \tilde{y}') E_{0x}(\tilde{x}', \tilde{y}'))}{\partial \tilde{x}'} + \frac{\partial (\chi(\tilde{x}', \tilde{y}') E_{0y}(\tilde{x}', \tilde{y}'))}{\partial \tilde{y}'} \right\} \times \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \times \frac{\tilde{x} - \tilde{x}'}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + (\tilde{y} - \tilde{y}')^2} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x}' \int_{-\infty}^0 d\tilde{y}' \left\{ \frac{2 + \chi_0}{\alpha \chi_0} \chi_0 \frac{2}{2 + \chi_0} \times \right. \\
& \times \frac{\partial}{\partial \tilde{x}'} \left[ \sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2} \left( 1 - \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_0}{2 + \chi_0} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2}} \right] \right) E(h) \frac{\tilde{x}'}{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2} \right] + \\
& \quad \left. + \frac{2 + \chi_0}{\alpha \chi_0} \chi_0 \frac{2}{2 + \chi_0} \times \right. \\
& \times \frac{\partial}{\partial \tilde{y}'} \left[ \sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2} \left( 1 - \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_0}{2 + \chi_0} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2}} \right] \right) E(h) \frac{\tilde{y}' - 1}{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2} \right] \left. \right\} \times \\
& \quad \times \frac{\tilde{x} - \tilde{x}'}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + (\tilde{y} - \tilde{y}')^2} = -\frac{1}{2\pi} \times \\
& \times \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x}' \int_{-\infty}^0 d\tilde{y}' \left\{ \frac{2E(h)}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}'} \left[ \frac{\tilde{x}'}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2}} \left( 1 - \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_0}{2 + \chi_0} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2}} \right] \right) \right] \right\} + \\
& \quad + \frac{2E(h)}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}'} \left[ \frac{\tilde{y}' - 1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2}} \left( 1 - \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_0}{2 + \chi_0} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2}} \right] \right) \right] \left. \right\} = \\
& = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x}' \int_{-\infty}^0 d\tilde{y}' \left\{ \frac{2E(h)}{\alpha} \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2}} - \frac{\tilde{x}'^2}{(\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \times \right. \right. \\
& \quad \times \left. \left. \left( 1 - \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_0}{2 + \chi_0} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2}} \right] \right) \right] \right\} + \\
& \quad + \frac{2E(h)}{\alpha} \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2}} - \frac{(\tilde{y}' - 1)^2}{(\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \left( 1 - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_0}{2 + \chi_0} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2}} \right] \right) \right] - \frac{2E(h)}{\alpha} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[ \frac{\tilde{x}'}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2}} \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_0}{2 + \chi_0} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2}} \right] \alpha \frac{\chi_0}{2 + \chi_0} \frac{\tilde{x}'}{(\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2)^{\frac{3}{2}}} \right] - \\
& - \frac{2E(h)}{\alpha} \left[ \frac{\tilde{y}' - 1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2}} \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_0}{2 + \chi_0} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2}} \right] \alpha \frac{\chi_0}{2 + \chi_0} \times \right. \\
& \left. \times \frac{\tilde{y}' - 1}{(\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \left\{ \frac{\tilde{x} - \tilde{x}'}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + (\tilde{y} - \tilde{y}')^2} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x}' \int_{-\infty}^0 d\tilde{y}' \left\{ \frac{2E(h)}{\alpha} \times \right. \right. \\
& \times \left[ \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2}} \left( 1 - \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_0}{2 + \chi_0} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2}} \right] \right) \right] - \\
& \left. \left. - \alpha \frac{\chi_0}{2 + \chi_0} \frac{1}{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2} \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_0}{2 + \chi_0} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2}} \right] \right] \right\} \frac{\tilde{x} - \tilde{x}'}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + (\tilde{y} - \tilde{y}')^2}. \quad (53)
\end{aligned}$$

Выражение (53) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
E_{\rho x}(\tilde{x}, \tilde{y}) = & -\frac{1}{2\pi} \frac{2}{\alpha} E(h) \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x}' \int_{-\infty}^0 d\tilde{y}' \left\{ \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2}} \times \right. \\
& \times \left( 1 - \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_0}{2 + \chi_0} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2}} \right] \right) - \alpha \frac{\chi_0}{2 + \chi_0} \frac{1}{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2} \times \\
& \left. \times \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_0}{2 + \chi_0} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2}} \right] \right\} \frac{\tilde{x} - \tilde{x}'}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + (\tilde{y} - \tilde{y}')^2}. \quad (54)
\end{aligned}$$

Перепишем соотношение из (54), приводя его к безразмерному и нормированному на коэффициент  $\frac{2}{\chi_0}$  виду путём деления обеих частей на

$$\frac{2}{\chi_0} E(h) = \frac{2}{\chi_0} \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0 h};$$

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_{\rho x}(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \frac{E_{\rho x}(\tilde{x}, \tilde{y})}{\frac{2}{\chi_0} E(h)} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\chi_0}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x}' \int_{-\infty}^0 d\tilde{y}' \left\{ \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2}} \times \right. \\
&\times \left( 1 - \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_0}{2 + \chi_0} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2}} \right] \right) - \alpha \frac{\chi_0}{2 + \chi_0} \frac{1}{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2} \times \\
&\times \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_0}{2 + \chi_0} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2}} \right] \left. \right\} \frac{\tilde{x} - \tilde{x}'}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + (\tilde{y} - \tilde{y}')^2}. \quad (55)
\end{aligned}$$

Однако в подынтегральном выражении в (55) прослеживается всё та же особенность: при  $\tilde{x}' = \tilde{x}$ ,  $\tilde{y}' = \tilde{y}$  осуществляется деление нуля на ноль. Поступаем по аналогии с (41):

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_{\rho x}(\tilde{x}, \tilde{y}) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\chi_0}{\alpha} \left( \int_{-\infty}^{\tilde{x}-\varepsilon} d\tilde{x}' + \int_{\tilde{x}+\varepsilon}^{+\infty} d\tilde{x}' \right) \int_{-\infty}^0 d\tilde{y}' \left\{ \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2}} \times \right. \\
&\times \left( 1 - \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_0}{2 + \chi_0} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2}} \right] \right) - \alpha \frac{\chi_0}{2 + \chi_0} \frac{1}{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2} \times \\
&\times \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_0}{2 + \chi_0} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2}} \right] \left. \right\} \frac{\tilde{x} - \tilde{x}'}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + (\tilde{y} - \tilde{y}')^2}. \quad (56)
\end{aligned}$$

Точно так же можно найти соотношение для  $y$ -проекции поправки к напряженности электрического поля от объемных индуцированных зарядов (см. (52)–(56) с учётом (22), (23), (32), (38) и (39)). Имеем

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_{\rho y}(\tilde{x}, \tilde{y}) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\chi_0}{\alpha} \left( \int_{-\infty}^{\tilde{x}-\varepsilon} d\tilde{x}' + \int_{\tilde{x}+\varepsilon}^{+\infty} d\tilde{x}' \right) \int_{-\infty}^0 d\tilde{y}' \left\{ \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2}} \times \right. \\
&\times \left( 1 - \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_0}{2 + \chi_0} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2}} \right] \right) - \alpha \frac{\chi_0}{2 + \chi_0} \frac{1}{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2} \times
\end{aligned}$$

$$\times \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_0}{2 + \chi_0} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2}} \right] \left\} \frac{\tilde{y} - \tilde{y}'}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + (\tilde{y} - \tilde{y}')^2}. \quad (57)$$

Обратимся к рассмотрению предельного случая.

## 2.9. Компоненты электростатического поля объёмных зарядов при большой восприимчивости и малом параметре $\alpha$

В приближении (42)–(45) выражения (56) и (57) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{\rho x}(\tilde{x}, \tilde{y}) = & -\frac{1}{2\pi} \frac{\chi_0}{\alpha} \left( \int_{-\infty}^{\tilde{x}-\varepsilon} d\tilde{x}' + \int_{\tilde{x}+\varepsilon}^{+\infty} d\tilde{x}' \right) \int_{-\infty}^0 d\tilde{y}' \left\{ \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2}} \times \right. \\ & \times \left( 1 - \exp \left[ -\alpha \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2}} \right] \right) - \alpha \frac{1}{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2} \times \\ & \left. \times \exp \left[ -\alpha \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2}} \right] \right\} \frac{\tilde{x} - \tilde{x}'}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + (\tilde{y} - \tilde{y}')^2}. \quad (58) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{\rho y}(\tilde{x}, \tilde{y}) = & -\frac{1}{2\pi} \frac{\chi_0}{\alpha} \left( \int_{-\infty}^{\tilde{x}-\varepsilon} d\tilde{x}' + \int_{\tilde{x}+\varepsilon}^{+\infty} d\tilde{x}' \right) \int_{-\infty}^0 d\tilde{y}' \left\{ \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2}} \times \right. \\ & \times \left( 1 - \exp \left[ -\alpha \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2}} \right] \right) - \alpha \frac{1}{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2} \times \\ & \left. \times \exp \left[ -\alpha \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2}} \right] \right\} \frac{\tilde{y} - \tilde{y}'}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + (\tilde{y} - \tilde{y}')^2}. \quad (59) \end{aligned}$$

Разложим экспоненту в (58) и (59) в ряд Тейлора с точностью до двух либо трёх слагаемых (удерживаем линейные члены по  $\alpha$ ) и упростим, получая соотношения, также с согласующиеся с результатами из [21]:

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_{\rho x}(\tilde{x}, \tilde{y}) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\chi_0}{\alpha} \left( \int_{-\infty}^{\tilde{x}-\varepsilon} d\tilde{x}' + \int_{\tilde{x}+\varepsilon}^{+\infty} d\tilde{x}' \right) \int_{-\infty}^0 d\tilde{y}' \left\{ \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}'-1)^2}} \times \right. \\
&\times \left( 1 - 1 + \alpha \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}'-1)^2}} - \frac{\alpha^2}{2} \frac{1}{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}'-1)^2} \right) - \alpha \frac{1}{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}'-1)^2} \times \\
&\times \left( 1 - \alpha \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}'-1)^2}} \right) \left. \right\} \frac{\tilde{x} - \tilde{x}'}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + (\tilde{y} - \tilde{y}')^2} = \\
&= -\frac{\chi_0}{4\pi} \left( \int_{-\infty}^{\tilde{x}-\varepsilon} d\tilde{x}' + \int_{\tilde{x}+\varepsilon}^{+\infty} d\tilde{x}' \right) \int_{-\infty}^0 d\tilde{y}' \left\{ \frac{2}{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}'-1)^2} - \frac{\alpha}{(\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}'-1)^2)^{\frac{3}{2}}} - \right. \\
&\left. - \frac{2}{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}'-1)^2} + \frac{2\alpha}{(\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}'-1)^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} \frac{\tilde{x} - \tilde{x}'}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + (\tilde{y} - \tilde{y}')^2} = \\
&= -\frac{\chi_0}{4\pi} \left( \int_{-\infty}^{\tilde{x}-\varepsilon} d\tilde{x}' + \int_{\tilde{x}+\varepsilon}^{+\infty} d\tilde{x}' \right) \int_{-\infty}^0 d\tilde{y}' \frac{\alpha}{(\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}'-1)^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\tilde{x} - \tilde{x}'}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + (\tilde{y} - \tilde{y}')^2}. \\
\tilde{E}_{\rho y}(\tilde{x}, \tilde{y}) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\chi_0}{\alpha} \left( \int_{-\infty}^{\tilde{x}-\varepsilon} d\tilde{x}' + \int_{\tilde{x}+\varepsilon}^{+\infty} d\tilde{x}' \right) \int_{-\infty}^0 d\tilde{y}' \left\{ \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}'-1)^2}} \times \right. \\
&\times \left( 1 - 1 + \alpha \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}'-1)^2}} - \frac{\alpha^2}{2} \frac{1}{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}'-1)^2} \right) - \alpha \frac{1}{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}'-1)^2} \times \\
&\times \left( 1 - \alpha \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}'-1)^2}} \right) \left. \right\} \frac{\tilde{y} - \tilde{y}'}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + (\tilde{y} - \tilde{y}')^2} = \\
&= -\frac{\chi_0}{4\pi} \left( \int_{-\infty}^{\tilde{x}-\varepsilon} d\tilde{x}' + \int_{\tilde{x}+\varepsilon}^{+\infty} d\tilde{x}' \right) \int_{-\infty}^0 d\tilde{y}' \left\{ \frac{2}{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}'-1)^2} - \frac{\alpha}{(\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}'-1)^2)^{\frac{3}{2}}} - \right. \\
&\left. - \frac{2}{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}'-1)^2} + \frac{2\alpha}{(\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}'-1)^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} \frac{\tilde{y} - \tilde{y}'}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + (\tilde{y} - \tilde{y}')^2} = \\
&= -\frac{\chi_0}{4\pi} \left( \int_{-\infty}^{\tilde{x}-\varepsilon} d\tilde{x}' + \int_{\tilde{x}+\varepsilon}^{+\infty} d\tilde{x}' \right) \int_{-\infty}^0 d\tilde{y}' \frac{\alpha}{(\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}'-1)^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\tilde{y} - \tilde{y}'}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + (\tilde{y} - \tilde{y}')^2}.
\end{aligned} \tag{60}$$

$$\begin{aligned}
& \left. -\frac{2}{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2} + \frac{2\alpha}{\left(\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right\} \frac{\tilde{y} - \tilde{y}'}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + (\tilde{y} - \tilde{y}')^2} = \\
& = -\frac{\chi_0}{4\pi} \left( \int_{-\infty}^{\tilde{x}-\varepsilon} d\tilde{x}' + \int_{\tilde{x}+\varepsilon}^{+\infty} d\tilde{x}' \right) \int_{-\infty}^0 d\tilde{y}' \frac{\alpha}{\left(\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{\tilde{y} - \tilde{y}'}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + (\tilde{y} - \tilde{y}')^2}.
\end{aligned} \tag{61}$$

## 2.10. Анализ полученных результатов. Границы применимости метода отображений в случае электростатики

По соотношениям (31) и (32), приведённым аналогично к безразмерному и нормированному на коэффициент  $\frac{2}{\chi_0}$  виду путём деления

обеих частей на  $\frac{2}{\chi_0} E(h) = \frac{2}{\chi_0} \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0 h}$ , то есть представленным для  $y > 0$  в виде

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_{0x}(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \frac{\chi_0}{2} \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y} - 1)^2} - \frac{\chi_0^2}{2(2 + \chi_0)} \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y} + 1)^2}, \\
\tilde{E}_{0y}(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \frac{\chi_0}{2} \frac{\tilde{y} - 1}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y} - 1)^2} - \frac{\chi_0^2}{2(2 + \chi_0)} \frac{\tilde{y} + 1}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y} + 1)^2}
\end{aligned} \tag{62}$$

и для области  $y \leq 0$  в виде

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_{0x}(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \frac{\chi_0}{2 + \chi_0} \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y} - 1)^2}, \\
\tilde{E}_{0y}(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \frac{\chi_0}{2 + \chi_0} \frac{\tilde{y} - 1}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y} - 1)^2},
\end{aligned} \tag{63}$$

а также по соотношениям (41), (56) и (57) построены соответствующие зависимости, показанные на рисунке 4 ниже при параметрах (график слева)

$$\begin{aligned}
\chi_0 = 200 \gg 1, \alpha = 0.01, \frac{E(h)}{E_k} &= \frac{\alpha\chi_0}{2} = \frac{0.01 \cdot 200}{2} = 1, \tilde{x} = 0, \\
-10 \leq \tilde{y} &\leq -0.01
\end{aligned} \tag{64}$$

и при параметрах (график справа)

$$\chi_0 = 200 \gg 1, \alpha = 0.01, \frac{E(h)}{E_k} = \frac{\alpha \chi_0}{2} = \frac{0.01 \cdot 200}{2} = 1, \tilde{x} = 0, \quad (65)$$

$$0.01 \leq \tilde{y} \leq 0.99.$$

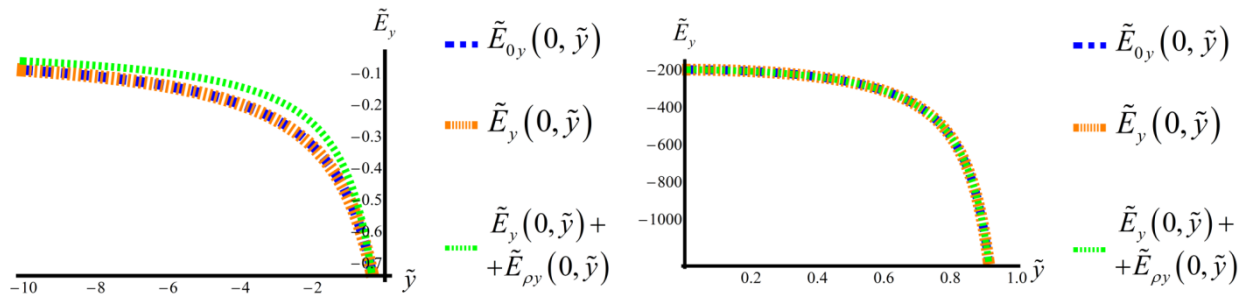


Рисунок 4 – Графики вертикальных компонент поля, полученных методом последовательных приближений, при наборах параметров (64) (слева) и (65) (справа).

Здесь  $\tilde{E}_{0y}$  – графики для безразмерной вертикальной компоненты поля из первого приближения (поле нити с учётом поправки от поверхностных поляризационных зарядов), что соответствует соотношениям (62) и (63);  $\tilde{E}_y$  и  $\tilde{E}_y + \tilde{E}_{\rho y}$  – это соответственно компоненты поля поверхностных индуцированных зарядов вместе с полем линейного заряда и компоненты поля объёмных индуцированных зарядов вместе с суммарным полем поверхностных индуцированных зарядов и линейного заряда (во втором приближении), что соответствует формулам (56), (57) и (41).

Из полученных зависимостей видно, что при данных значениях параметров поверхностные и объёмные поляризационные заряды диэлектрической среды, обусловленные зависящей от величины напряжённости поля восприимчивостью (она не является константной), вносят незначительный вклад в коллективное электростатическое поле. Таким образом, метод изображений, который использовался в работах [19, 20], справедлив в хорошем приближении не только в линейном

случае (в линейной среде). Он верен при значениях поля заряженной нити вплоть до характерного значения  $E_k$  (см. наборы параметров (64) и (65)). То есть он годится по отношению к сегнетоэлектрикам и ферромагнетикам. Остаётся вопрос о диапазоне возможных полей. Максимальное значение поля, то есть правый предел допустимого диапазона, будет оценено в следующей главе непосредственно для магнетиков. Однако следует иметь в виду, что использовать метод последовательных приближений мы можем только в случае, если поправки к результатам первого приближения малы, то есть тогда, когда решение метода зеркальных отображений является преобладающим. Так, если взять параметр альфа, равным 0.1, увеличив его в 10 раз, то, как показывают численные расчёты, необходимо уже решать сингулярное интегральное уравнение, которое для потенциала в случае любого вида восприимчивости задаётся соотношениями (13), (17) и (18), а это представляет собой непростую задачу.



### 3. МАГНИТОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ИНДУЦИРОВАННЫХ МАГНИТНЫХ ЗАРЯДОВ НЕЛИНЕЙНОЙ МАГНИТНОЙ СРЕДЫ

#### 3.1. Постановка соответствующей магнитостатической задачи о вычислении компонент поля

Рассмотрим модельную задачу, эквивалентную задаче из параграфа 2.1, где имеется нелинейный по восприимчивости магнетик (ферромагнетик, например), располагающийся в нижнем полупространстве (рисунок 5).

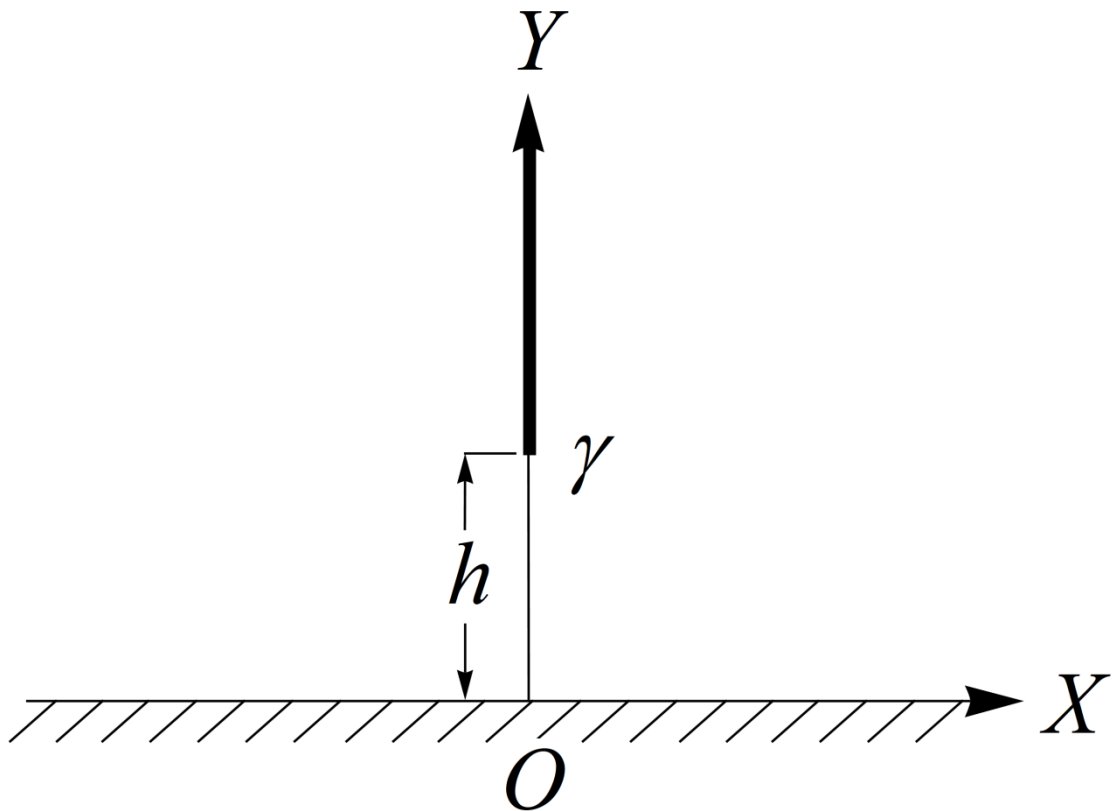


Рисунок 5 – Линейный магнитный полюс с линейной плотностью магнитных зарядов  $\gamma$  на высоте  $h$

Над ним на некоторой высоте  $h$  расположен линейный магнитный полюс с линейной плотностью эффективных магнитных зарядов  $\gamma$  таким образом,

что второй полюс находится достаточно далеко и не оказывает влияния на коллективное поле (тонкий магнит в виде плоскости расположен на оси ординат на рисунке 5).

В этом случае, проводя аналогию с (13), мы можем для нелинейной намагниченности записать следующее:

$$\vec{M}(x, y) = \chi_m \left( |\vec{H}| \right) \vec{H}, \quad (66)$$

$\vec{M} \equiv \vec{M}(x, y)$  – вектор нелинейной намагниченности магнетика,  $\chi_m$  – магнитная восприимчивость нашего ферромагнетика,  $\vec{H}$  – вектор напряжённости магнитного поля. Эта аналогия позволяет переписать уравнения (14) в виде

$$\begin{cases} H_x(x, y) = H_{\gamma x}(x, y) + H_{\sigma x}(x, y) + H_{\rho x}(x, y), \\ H_y(x, y) = H_{\gamma y}(x, y) + H_{\sigma y}(x, y) + H_{\rho y}(x, y), \end{cases} \quad (67)$$

где  $H_{\gamma x}(x, y)$  и  $H_{\gamma y}(x, y)$  – компоненты поля, создаваемого нашим полюсом,  $H_{\sigma x}(x, y)$  и  $H_{\sigma y}(x, y)$  – компоненты поля поверхностных магнитных индуцированных «зарядов»,  $H_{\rho x}(x, y)$  и  $H_{\rho y}(x, y)$  – компоненты поля объемных магнитных индуцированных «зарядов». Здесь под зарядами подразумеваются фиктивные заряды, введение которых позволяет облегчить сравнительный анализ и интерпретацию.

Тогда полный скалярный магнитный потенциал в заданной точке  $(x, y)$  будет равен (по принципу суперпозиции) по аналогии с (17)

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = \varphi_\gamma(x, y) + \varphi_\sigma(x, y) + \varphi_\rho(x, y) = & -\frac{\gamma}{2\pi} \ln|\vec{r} - \vec{r}_0| - \\ & -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{M}(x', -0) \vec{dl} \ln|\vec{r} - \vec{r}'| + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\infty}^0 dy' \operatorname{div} \vec{M}(x', y') \ln|\vec{r} - \vec{r}'| + C_0. \end{aligned} \quad (68)$$

Для перехода к компонентам напряжённости магнитного поля, как и в (18), необходимо продифференцировать потенциал по соответствующим координатам:

$$H_x(x, y) = -\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x}, H_y(x, y) = -\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y}. \quad (69)$$

Выражение же для магнитной восприимчивости (см. (23)) приобретает вид

$$\chi_m(|\vec{H}|) = \chi_{m0} \frac{H_k}{H} (1 - e^{-H/H_k}), \quad (70)$$

где  $\chi_{m0} = \frac{M_s}{H_k}$  имеет тот же смысл, что и в (23),  $M_s$  – модуль намагниченности насыщения.

### 3.2. Соотношения для полей полюса и индуцированных зарядов магнитной системы

С учётом параграфа 3.1 мы можем переписать соотношения (41), (56), (57), (62) и (63) в виде

$$\begin{aligned} \tilde{H}_x(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \frac{H_x(\tilde{x}, \tilde{y})}{\chi_{m0}} = \frac{\chi_{m0}}{2} \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y} - 1)^2} - \frac{\chi_{m0}}{4\pi} \left( \int_{-\infty}^{\tilde{x}-\varepsilon} d\tilde{x}' + \int_{\tilde{x}+\varepsilon}^{+\infty} d\tilde{x}' \right) \times \\ &\times \left( \frac{2\chi_{m0} \left( \alpha \frac{\chi_{m0}}{(2 + \chi_{m0}) \sqrt{\tilde{x}'^2 + 1}} \right)^{-1} \left( 1 - \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_{m0}}{(2 + \chi_{m0}) \sqrt{\tilde{x}'^2 + 1}} \right] \right)}{2 + \chi_{m0} \left( \alpha \frac{\chi_{m0}}{(2 + \chi_{m0}) \sqrt{\tilde{x}'^2 + 1}} \right)^{-1} \left( 1 - \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_{m0}}{(2 + \chi_{m0}) \sqrt{\tilde{x}'^2 + 1}} \right] \right)} \right) \times \\ &\times \frac{1}{\tilde{x}'^2 + 1} \frac{\tilde{x} - \tilde{x}'}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + \tilde{y}^2}, \\ \tilde{H}_y(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \frac{H_y(\tilde{x}, \tilde{y})}{\chi_{m0}} = \frac{\chi_{m0}}{2} \frac{\tilde{y} - 1}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y} - 1)^2} - \frac{\chi_{m0}}{4\pi} \left( \int_{-\infty}^{\tilde{x}-\varepsilon} d\tilde{x}' + \int_{\tilde{x}+\varepsilon}^{+\infty} d\tilde{x}' \right) \times \\ &\times \left( \frac{2\chi_{m0} \left( \alpha \frac{\chi_{m0}}{(2 + \chi_{m0}) \sqrt{\tilde{x}'^2 + 1}} \right)^{-1} \left( 1 - \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_{m0}}{(2 + \chi_{m0}) \sqrt{\tilde{x}'^2 + 1}} \right] \right)}{2 + \chi_{m0} \left( \alpha \frac{\chi_{m0}}{(2 + \chi_{m0}) \sqrt{\tilde{x}'^2 + 1}} \right)^{-1} \left( 1 - \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_{m0}}{(2 + \chi_{m0}) \sqrt{\tilde{x}'^2 + 1}} \right] \right)} \right) \times \end{aligned}$$

$$\times \frac{1}{\tilde{x}'^2 + 1} \frac{\tilde{y}}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + \tilde{y}^2} \Bigg), \quad (71)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\rho x}(\tilde{x}, \tilde{y}) = & -\frac{1}{2\pi} \frac{\chi_{m0}}{\alpha} \left( \int_{-\infty}^{\tilde{x}-\varepsilon} d\tilde{x}' + \int_{\tilde{x}+\varepsilon}^{+\infty} d\tilde{x}' \right) \int_{-\infty}^0 d\tilde{y}' \left\{ \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2}} \times \right. \\ & \times \left( 1 - \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_{m0}}{2 + \chi_{m0}} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2}} \right] \right) - \alpha \frac{\chi_{m0}}{2 + \chi_{m0}} \frac{1}{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2} \times \\ & \left. \times \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_{m0}}{2 + \chi_{m0}} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2}} \right] \right\} \frac{\tilde{x} - \tilde{x}'}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + (\tilde{y} - \tilde{y}')^2}, \quad (72) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\rho y}(\tilde{x}, \tilde{y}) = & -\frac{1}{2\pi} \frac{\chi_{m0}}{\alpha} \left( \int_{-\infty}^{\tilde{x}-\varepsilon} d\tilde{x}' + \int_{\tilde{x}+\varepsilon}^{+\infty} d\tilde{x}' \right) \int_{-\infty}^0 d\tilde{y}' \left\{ \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2}} \times \right. \\ & \times \left( 1 - \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_{m0}}{2 + \chi_{m0}} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2}} \right] \right) - \alpha \frac{\chi_{m0}}{2 + \chi_{m0}} \frac{1}{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2} \times \\ & \left. \times \exp \left[ -\alpha \frac{\chi_{m0}}{2 + \chi_{m0}} \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}'^2 + (\tilde{y}' - 1)^2}} \right] \right\} \frac{\tilde{y} - \tilde{y}'}{(\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + (\tilde{y} - \tilde{y}')^2}, \quad (73) \end{aligned}$$

$$\tilde{H}_x(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\chi_{m0}}{2} \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y} - 1)^2} - \frac{\chi_{m0}^2}{2(2 + \chi_{m0})} \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y} + 1)^2}, \quad (74)$$

$$\tilde{H}_y(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\chi_{m0}}{2} \frac{\tilde{y} - 1}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y} - 1)^2} - \frac{\chi_{m0}^2}{2(2 + \chi_{m0})} \frac{\tilde{y} + 1}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y} + 1)^2},$$

$$\tilde{H}_{0x}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\chi_{m0}}{2 + \chi_{m0}} \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y} - 1)^2}, \quad (75)$$

$$\tilde{H}_{0y}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\chi_{m0}}{2 + \chi_{m0}} \frac{\tilde{y} - 1}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y} - 1)^2}.$$

Построенные по соотношениям (71)–(75) характерные зависимости показаны на рисунке 6, они аналогичны тем, что отражены на рисунке 4, если

взять такие же диапазоны изменения координаты, как в (64) и (65), но сделать замену  $\chi_0 \rightarrow \chi_{m0}, E_k \rightarrow H_k, E \rightarrow H$  и взять значения  $\chi_{m0} = 2573.25 \approx 2500, \alpha = 0.0007772272 \approx 0.0008$ .

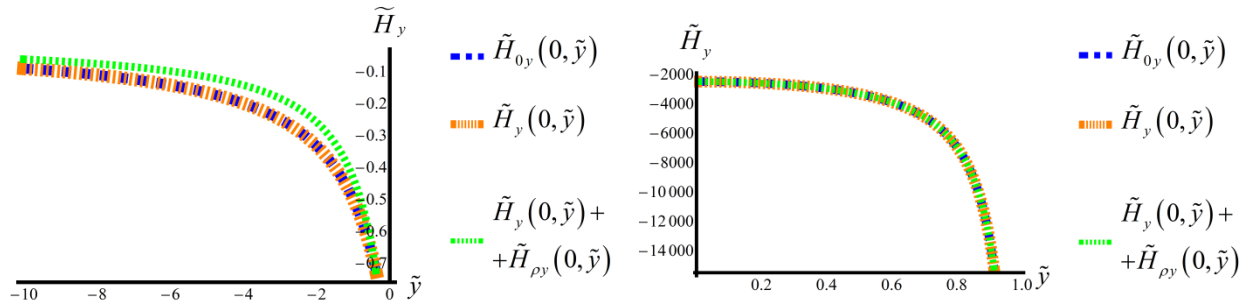


Рисунок 6 – Графики вертикальных компонент поля, полученных методом последовательных приближений, при наборах параметров (64) (слева) и (65) (справа) с учётом пересчитанных значений  $\alpha$  и  $\chi_0 \rightarrow \chi_{m0}$ .

### 3.3. Расчёт границ напряжённости магнитного поля, обеспечивающих справедливость метода изображений

Оценим диапазон возможных полей, а именно максимальное значение модуля напряжённости магнитного поля. Необходимо вычислить характерное значение  $H_k$ . Для этого возьмём экспериментальную кривую из [30] для стали и осуществим аппроксимацию намагниченности с учётом (70) и связи  $M = \chi H$  зависимостью вида

$$M\left(\left|\vec{H}\right|\right) = M_s \left(1 - e^{-H/H_k}\right). \quad (76)$$

Результат представлен на рисунке 8, где показаны кривая, построенная по исходным экспериментальным точкам (эксперимент), и кривая, которая задаётся функцией (76) и максимально приближена к первой (приближение).

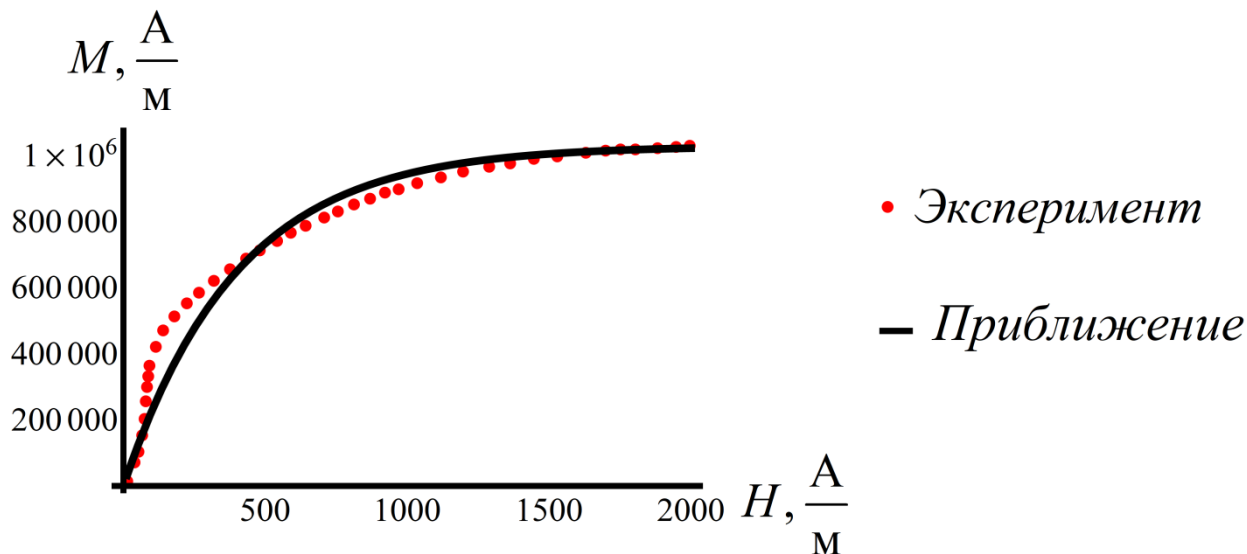


Рисунок 7 – Определение параметра  $H_k$  с использованием экспериментальной кривой.

Значение параметра  $H_k$  оказывается равным

$$H_k = 400 \frac{\text{А}}{\text{М}} \approx 5 \text{ Э}. \quad (77)$$

Таким образом, можно утверждать, что метод зеркальных отображений справедлив в том числе и в диапазоне сильно нелинейном, вплоть до точки перегиба, задающейся в (77), то есть в диапазоне полей со значением в правой границе, в десять раз большим (на порядок) по сравнению с правой границей диапазона, где магнитную восприимчивость ещё можно считать постоянной, а саму среду линейной.

#### 4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НЕОДНОРОДНОГО ПОСТОЯННОГО МАГНИТА, ПРЕДСТАВЛЯЮЩЕГО СОБОЙ ДВУМЕРНУЮ РЕШЕТКУ МАГНИТОЖЕСТКИХ ПОЛОСОК, С МАССИВНОЙ ФЕРРОМАГНИТНОЙ СРЕДОЙ

##### 4.1. Двумерная решётка намагниченных прямоугольных параллелепипедов

Рассмотрим систему прямоугольных параллелепипедов конечных размеров, количество которых задается двумя независимыми параметрами (двумерная структура). Эта структура изображена на рисунке 8.

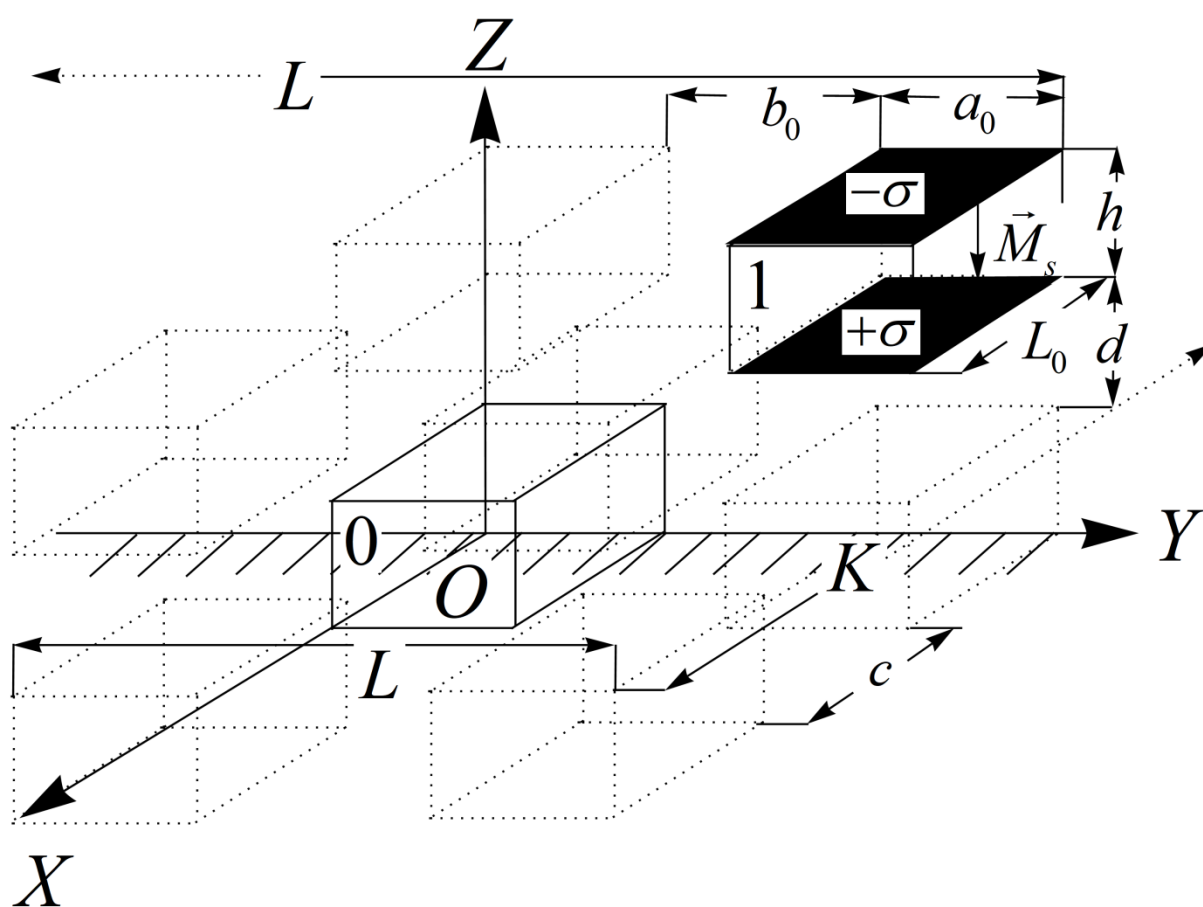


Рисунок 8 – Часть системы однородно намагниченных прямоугольных параллелепипедов в первом октанте.

Каждая полоска (параллелепипед) однородно намагничена перпендикулярно верхней плоскости (вдоль оси  $z$ ). Тогда метод скалярного магнитного потенциала требует подсчета напряженности поля  $\vec{H}$ , которое создается парой разноименно заряженных с плотностью  $\sigma = |\vec{M}_s|$  плоскостей, где  $\vec{M}_s$  – это по-прежнему вектор намагниченности насыщения.

Расчет поля от такого намагниченного вдоль оси  $z$  параллелепипеда не является сложной задачей, рассчитывается как суперпозиция полей от двух разноименно заряженных пластин [31, 32]. Для  $z$ -компоненты поля получено следующее соотношение:

$$H_z(x, y, z, \sigma) = \sigma \frac{v}{|v|} \frac{w}{|w|} \operatorname{arctg} \frac{u|v|}{|w|\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} \left| \begin{array}{l} u = L_0 - x \\ v = a_0 - y \\ w = h - z \end{array} \right| - \left| \begin{array}{l} u = -x \\ v = -y \\ w = -z \end{array} \right|, \quad (78)$$

где параметры  $L_0$ ,  $a_0$  и  $h$  показаны на рисунке 8,  $x$ ,  $y$  и  $z$  – координаты точки наблюдения, в которой рассчитывается напряженность магнитного поля. Выражения рассчитаны в системе СГС, в дальнейшем для удобства осуществлён переход в систему СИ.

#### 4.2. Расчёт пондеромоторной силы взаимодействия намагниченных кубиков методом скалярного магнитного потенциала

Рассмотрим для начала взаимодействие двух прямоугольных параллелепипедов – исходного и параллелепипеда, который является изображением соседнего параллелепипеда, смещенного относительно исходного вдоль оси  $Oy$  (на рисунке 8 они пронумерованы цифрами).

Энергия изображения во внешнем поле  $\vec{H}$  может быть вычислена как



$$\begin{aligned}
W &= -\int_V (\vec{M}_s \cdot \vec{H}) dV = -\iiint_V (M_x H_x + M_y H_y + M_z H_z) dx dy dz = \\
&= -\int_0^{L_0} dx \int_{a_0+b_0}^{2a_0+b_0} dy \int_{h+d}^{2h+d} dz M_z H_z,
\end{aligned} \tag{79}$$

где учтено, что интегрирование ведётся по объёму изображения, а намагниченность насыщения имеет только одну компоненту, то есть  $\vec{M}_s = \{0; 0; M_z\}$ . Если принять во внимание, что  $M_z < 0$ , то с учетом (78) и того, что  $\sigma = |\vec{M}_s|$ , получим окончательно для энергии:

$$\begin{aligned}
W &= \int_0^{L_0} dx \int_{a_0+b_0}^{2a_0+b_0} dy \int_{h+d}^{2h+d} dz M_s H_z = M_s^2 \times \\
&\times \int_0^{L_0} dx \int_{a_0+b_0}^{2a_0+b_0} dy \int_{h+d}^{2h+d} dz \frac{v}{|v|} \frac{w}{|w|} \operatorname{arctg} \frac{u|v|}{|w|\sqrt{u^2+v^2+w^2}} \Bigg|_{\substack{u=L_0-x \\ u=-x}}^{\substack{v=a_0-y \\ v=-y}} \Bigg|_{\substack{w=h-z \\ w=-z}}.
\end{aligned} \tag{80}$$

Для расчета  $z$ -проекции поперечной силы взаимодействия вспомним, что

$$F_z = -\frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{\partial W}{\partial d}. \tag{81}$$

Тогда с учетом (80) и (81) получим

$$\begin{aligned}
F_{z0,1} &= -M_s^2 \frac{\partial}{\partial d} \int_0^{L_0} dx \int_{a_0+b_0}^{2a_0+b_0} dy \int_{h+d}^{2h+d} dz \frac{v}{|v|} \frac{w}{|w|} \times \\
&\times \operatorname{arctg} \frac{u|v|}{|w|\sqrt{u^2+v^2+w^2}} \Bigg|_{\substack{u=L_0-x \\ u=-x}}^{\substack{v=a_0-y \\ v=-y}} \Bigg|_{\substack{w=h-z \\ w=-z}},
\end{aligned} \tag{82}$$

где в индексе цифры 0 и 1 отражают факт взаимодействия рассматриваемого прямоугольного параллелепипеда с изображением, имеющим по оси  $Ox$  номер 0, а по оси  $Oy$  – номер 1 (нумерация начинается с нуля).

Переведём полученное соотношение (82) в единицы измерения системы СИ:

$$\begin{aligned}
F_{z0,1} = & -\frac{\mu_0 M_s^2}{4\pi} \frac{\partial}{\partial d} \int_0^{L_0} dx \int_{a_0+b_0}^{2a_0+b_0} dy \int_{h+d}^{2h+d} dz \frac{v}{|v|} \frac{w}{|w|} \times \\
& \times \operatorname{arctg} \frac{u|v|}{|w|\sqrt{u^2+v^2+w^2}} \left| \begin{array}{l} u = L_0 - x \\ u = -x \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} v = a_0 - y \\ v = -y \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} w = h - z \\ w = -z \end{array} \right|.
\end{aligned} \tag{83}$$

Как уже было сказано, изображение необходимо задать в общем случае двумя индексами. Обозначим эти индексы через  $n_1$  и  $n_2$ . Пусть количество изображений в первом октанте без того, который соответствует нулевому параллелепипеду, и размер всей системы по оси абсцисс равны соответственно  $N_1$  и  $K$ , по оси ординат –  $N_2$  и  $L$ , а также расстояние между параллелепипедами по оси абсцисс обозначено как  $c$ , по оси ординат – как  $b_0$ , их толщина – как  $h$ , решётка изображений расположена сверху на расстоянии  $d$  от исходной (см. рисунок 8).

Чтобы найти  $z$ -проекцию силы взаимодействия нулевого намагниченного параллелепипеда, или имеющего нулевые индексы по обеим осям, со всеми изображениями, просуммируем с учетом формулы (83) по  $n_1$  и  $n_2$ , выразив пределы интегрирования через  $n_1$  и  $n_2$ :

$$\begin{aligned}
F_{z0,\Sigma} = & -4 \sum_{n_1=1}^{N_1} \sum_{n_2=1}^{N_2} \left\{ \frac{\mu_0 M_s^2}{4\pi} \frac{\partial}{\partial d} \int_{n_1 L_0 + n_1 c}^{(n_1+1)L_0 + n_1 c} dx \int_{n_2 a_0 + n_2 b_0}^{(n_2+1)a_0 + n_2 b_0} dy \int_{h+d}^{2h+d} dz \frac{v}{|v|} \frac{w}{|w|} \times \right. \\
& \times \operatorname{arctg} \frac{u|v|}{|w|\sqrt{u^2+v^2+w^2}} \left| \begin{array}{l} u = L_0 - x \\ u = -x \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} v = a_0 - y \\ v = -y \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} w = h - z \\ w = -z \end{array} \right\} - \\
& -2 \sum_{n_1=1}^{N_1} \sum_{n_2=0}^{N_2} \left\{ \frac{\mu_0 M_s^2}{4\pi} \frac{\partial}{\partial d} \int_{n_1 L_0 + n_1 c}^{(n_1+1)L_0 + n_1 c} dx \int_0^{a_0} dy \int_{h+d}^{2h+d} dz \frac{v}{|v|} \frac{w}{|w|} \times \right. \\
& \times \operatorname{arctg} \frac{u|v|}{|w|\sqrt{u^2+v^2+w^2}} \left| \begin{array}{l} u = L_0 - x \\ u = -x \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} v = a_0 - y \\ v = -y \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} w = h - z \\ w = -z \end{array} \right\} - \\
& -2 \sum_{n_2=1}^{N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1} \left\{ \frac{\mu_0 M_s^2}{4\pi} \frac{\partial}{\partial d} \int_0^{L_0} dx \int_{n_2 a_0 + n_2 b_0}^{(n_2+1)a_0 + n_2 b_0} dy \int_{h+d}^{2h+d} dz \frac{v}{|v|} \frac{w}{|w|} \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \operatorname{arctg} \frac{u|v|}{|w|\sqrt{u^2+v^2+w^2}} \left| \begin{array}{l} u = L_0 - x \\ u = -x \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} v = a_0 - y \\ v = -y \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} w = h - z \\ w = -z \end{array} \right\} - \\
& - \frac{\mu_0 M_s^2}{4\pi} \frac{\partial}{\partial d} \operatorname{arctg} \frac{u|v|}{|w|\sqrt{u^2+v^2+w^2}} \left| \begin{array}{l} u = L_0 - x \\ u = -x \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} v = a_0 - y \\ v = -y \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} w = h - z \\ w = -z \end{array} \right|.
\end{aligned} \tag{84}$$

Здесь первое слагаемое в общем выражении отвечает за взаимодействие нулевого параллелепипеда с изображениями, не касающимися осей абсцисс и ординат (оба индекса суммирования отличны от нуля). Второе слагаемое отвечает за взаимодействие нулевого параллелепипеда с изображениями, одно ребро каждого из которых касается оси абсцисс (один индекс суммирования  $n_2$  становится равным нулю). Третье слагаемое отвечает за взаимодействие нулевого параллелепипеда с изображениями, одно ребро каждого из которых касается оси ординат (один индекс суммирования  $n_1$  становится равным нулю). Наконец, последнее слагаемое отвечает за вклад в силу взаимодействия нулевого параллелепипеда с собственным изображением ( $n_1 = 0$  и  $n_2 = 0$ ). Коэффициенты 2 и 4 возникают перед суммами в силу симметрии (при рассмотрении всей области  $z \geq 0$ ).

Упрощая подынтегральные выражения в (84), выполняя подстановку пределов, раскрывая модули со знаком «+», деля выражение на коэффициент  $(a_0 + b_0)(L_0 + c)$ , а также сводя путём простых замен переменных (без учета пределов интегрирования) наши однотипные интегралы к вычисляющемуся безразмерному путём введения параметров  $\tau_4 = \frac{L_0}{h}$ ,  $\tau_5 = \frac{a_0}{h}$  неопределённому интегралу типа

$$\begin{aligned}
I(r_1, r_2, r_3) &= \int dr_1 \int dr_2 \int dr_3 \operatorname{arctg} \left[ \frac{\tau_5 r_1 r_2}{r_3 \sqrt{r_1^2 + \left(\frac{\tau_5}{\tau_4}\right)^2 r_2^2 + \left(\frac{1}{\tau_4}\right)^2 r_3^2}} \right] = \\
&= \frac{\tau_4 r_1^2 r_2}{2} \ln \left[ \frac{\sqrt{\left(\frac{\tau_4}{\tau_5}\right)^2 r_1^2 + r_2^2 + \left(\frac{1}{\tau_5}\right)^2 r_3^2 - r_2}}{\sqrt{\left(\frac{\tau_4}{\tau_5}\right)^2 r_1^2 + r_2^2 + \left(\frac{1}{\tau_5}\right)^2 r_3^2 + r_2}} \right] + \frac{1}{4} r_1 r_3^2 \frac{1}{\tau_5} \times \\
&\quad \times \ln \left[ \frac{\sqrt{r_1^2 + \left(\frac{\tau_5}{\tau_4}\right)^2 r_2^2 + \left(\frac{1}{\tau_4}\right)^2 r_3^2 + r_1}}{\sqrt{r_1^2 + \left(\frac{\tau_5}{\tau_4}\right)^2 r_2^2 + \left(\frac{1}{\tau_4}\right)^2 r_3^2 - r_1}} \right] + \\
&\quad + r_1 r_2 r_3 \operatorname{arctg} \left[ \frac{\tau_5 r_1 r_2}{r_3 \sqrt{r_1^2 + \left(\frac{\tau_5}{\tau_4}\right)^2 r_2^2 + \left(\frac{1}{\tau_4}\right)^2 r_3^2}} \right] + \frac{\left(\frac{\tau_4}{\tau_5}\right) r_1^2 \sqrt{\tau_4^2 r_1^2 + \tau_5^2 r_2^2 + r_3^2}}{2} + \\
&\quad + \frac{1}{4} \frac{1}{\tau_4} r_2 r_3^2 \ln \left[ \frac{\sqrt{\left(\frac{\tau_4}{\tau_5}\right)^2 r_1^2 + r_2^2 + \left(\frac{1}{\tau_5}\right)^2 r_3^2 + r_2}}{\sqrt{\left(\frac{\tau_4}{\tau_5}\right)^2 r_1^2 + r_2^2 + \left(\frac{1}{\tau_5}\right)^2 r_3^2 - r_2}} \right] - \\
&\quad - \frac{1}{4} r_1 r_2^2 \tau_5 \ln \left[ \frac{\sqrt{r_1^2 + \left(\frac{\tau_5}{\tau_4}\right)^2 r_2^2 + \left(\frac{1}{\tau_4}\right)^2 r_3^2 + r_1}}{\sqrt{r_1^2 + \left(\frac{\tau_5}{\tau_4}\right)^2 r_2^2 + \left(\frac{1}{\tau_4}\right)^2 r_3^2 - r_1}} \right] + \frac{1}{4} \tau_4 r_1^2 r_2 \times \\
&\quad \times \ln \left[ \frac{\sqrt{\left(\frac{\tau_4}{\tau_5}\right)^2 r_1^2 + r_2^2 + \left(\frac{1}{\tau_5}\right)^2 r_3^2 + r_2}}{\sqrt{\left(\frac{\tau_4}{\tau_5}\right)^2 r_1^2 + r_2^2 + \left(\frac{1}{\tau_5}\right)^2 r_3^2 - r_2}} \right] - \frac{1}{3} \frac{\tau_4^2}{\tau_5} \left( r_1^2 + \left(\frac{\tau_5}{\tau_4}\right)^2 r_2^2 + \left(\frac{1}{\tau_4}\right)^2 r_3^2 \right)^{\frac{3}{2}} + \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\tau_5}{\tau_4} r_2^2 \sqrt{\tau_4^2 r_1^2 + \tau_5^2 r_2^2 + r_3^2} + C, \tag{85}
\end{aligned}$$

получим поверхностную плотность  $z$ -компоненты пондеромоторной силы взаимодействия нулевого параллелепипеда со всеми изображениями:

$$\begin{aligned}
F_{z0,\Sigma}^{\text{на ед. площади}} = & -\frac{1}{(1+\tau_2)(1+\tau_3)} \frac{\mu_0 M_s^2}{4\pi} \sum_{n_1=1}^{N_1} \sum_{n_2=1}^{N_2} \frac{\partial}{\partial \tau_1} F - \\
& -\frac{1}{(1+\tau_2)(1+\tau_3)} \frac{\mu_0 M_s^2}{4\pi} \sum_{n_1=1}^{N_1} \frac{\partial}{\partial \tau_1} \left( \frac{F}{2} \Big|_{n_2=0} \right) - \\
& -\frac{1}{(1+\tau_2)(1+\tau_3)} \frac{\mu_0 M_s^2}{4\pi} \sum_{n_2=1}^{N_2} \frac{\partial}{\partial \tau_1} \left( \frac{F}{2} \Big|_{n_1=0} \right) - \\
& -\frac{1}{(1+\tau_2)(1+\tau_3)} \frac{\mu_0 M_s^2}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \tau_1} \left( \frac{F}{4} \Big|_{\substack{n_1=0 \\ n_2=0}} \right).
\end{aligned} \tag{86}$$

В (86) введены безразмерные параметры  $\tau_1 = \frac{d}{h}$ ,  $\tau_2 = \frac{b_0}{a_0}$ ,  $\tau_3 = \frac{c}{L_0}$ , а также для краткости введена функция  $F(\tau_1, n_1, n_2)$ , содержащая сумму функций  $I(r_1, r_2, r_3)$  с различными комбинациями пределов:

$$\begin{aligned}
F(\tau_1, n_1, n_2) = & -4I(-n_1(1+\tau_3), -n_2(1+\tau_2), -\tau_1-1) + 4I(-n_1(1+\tau_3)+1, -n_2(1+\tau_2)+1, -\tau_1) + \\
& + 4I(-n_1(1+\tau_3), -n_2(1+\tau_2), -\tau_1) - 4I(-n_1(1+\tau_3)+1, -n_2(1+\tau_2)+1, -\tau_1-1) + \\
& + 4I(-n_1(1+\tau_3), -n_2(1+\tau_2)+1, -\tau_1-1) - 4I(-n_1(1+\tau_3)+1, -n_2(1+\tau_2), -\tau_1) - \\
& - 4I(-n_1(1+\tau_3), -n_2(1+\tau_2)+1, -\tau_1) + 4I(-n_1(1+\tau_3)+1, -n_2(1+\tau_2), -\tau_1-1) + \\
& + 4I(n_1(1+\tau_3)+1, -n_2(1+\tau_2), -\tau_1-1) - 4I(n_1(1+\tau_3), -n_2(1+\tau_2)+1, -\tau_1) - \\
& - 4I(n_1(1+\tau_3)+, -n_2(1+\tau_2), -\tau_1) + 4I(n_1(1+\tau_3), -n_2(1+\tau_2)+1, -\tau_1-1) - \\
& - 4I(n_1(1+\tau_3)+1, -n_2(1+\tau_2)+1, -\tau_1-1) + 4I(n_1(1+\tau_3), n_2(1+\tau_2), -\tau_1) + \\
& + 4I(n_1(1+\tau_3)+1, -n_2(1+\tau_2)+1, -\tau_1) - 4I(n_1(1+\tau_3), -n_2(1+\tau_2), -\tau_1-1) + \\
& + 4I(-n_1(1+\tau_3), n_2(1+\tau_2)+1, -\tau_1-1) - 4I(-n_1(1+\tau_3)+1, n_2(1+\tau_2), -\tau_1) - \\
& - 4I(-n_1(1+\tau_3), n_2(1+\tau_2)+1, -\tau_1) + 4I(-n_1(1+\tau_3)+1, n_2(1+\tau_2), -\tau_1-1) - \\
& - 4I(-n_1(1+\tau_3), n_2(1+\tau_2), -\tau_1-1) + 4I(-n_1(1+\tau_3)+1, n_2(1+\tau_2)+1, -\tau_1) + \\
& + 4I(-n_1(1+\tau_3), n_2(1+\tau_2), -\tau_1) - 4I(-n_1(1+\tau_3)+1, n_2(1+\tau_2)+1, -\tau_1-1) - \\
& - 4I(n_1(1+\tau_3)+1, n_2(1+\tau_2)+1, -\tau_1-1) + 4I(n_1(1+\tau_3), n_2(1+\tau_2), -\tau_1) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +4I(n_1(1+\tau_3)+1, n_2(1+\tau_2)+1, -\tau_1) - 4I(n_1(1+\tau_3), n_2(1+\tau_2), -\tau_1-1) + \\
& +4I(n_1(1+\tau_3)+1, n_2(1+\tau_2), -\tau_1-1) - 4I(n_1(1+\tau_3), n_2(1+\tau_2)+1, -\tau_1) - \\
& -4I(n_1(1+\tau_3)+1, n_2(1+\tau_2), -\tau_1) + 4I(n_1(1+\tau_3), n_2(1+\tau_2)+1, -\tau_1-1) + \\
& +4I(-n_1(1+\tau_3), -n_2(1+\tau_2), \tau_1+2) - 4I(-n_1(1+\tau_3)+1, -n_2(1+\tau_2)+1, \tau_1+1) - \\
& -4I(-n_1(1+\tau_3), -n_2(1+\tau_2), \tau_1+1) + 4I(-n_1(1+\tau_3)+1, -n_2(1+\tau_2)+1, \tau_1+2) - \\
& -4I(-n_1(1+\tau_3), -n_2(1+\tau_2)+1, \tau_1+2) + 4I(-n_1(1+\tau_3)+1, -n_2(1+\tau_2), \tau_1+1) + \\
& +4I(-n_1(1+\tau_3), -n_2(1+\tau_2)+1, \tau_1+1) - 4I(-n_1(1+\tau_3)+1, -n_2(1+\tau_2), \tau_1+2) - \\
& -4I(n_1(1+\tau_3)+1, -n_2(1+\tau_2), \tau_1+2) + 4I(n_1(1+\tau_3), -n_2(1+\tau_2)+1, \tau_1+1) + \\
& +4I(n_1(1+\tau_3)+1, -n_2(1+\tau_2)+1, \tau_1+2) - 4I(n_1(1+\tau_3), -n_2(1+\tau_2), \tau_1+1) + \\
& +4I(n_1(1+\tau_3)+1, -n_2(1+\tau_2), \tau_1+1) - 4I(n_1(1+\tau_3), -n_2(1+\tau_2)+1, \tau_1+2) - \\
& -4I(n_1(1+\tau_3)+1, -n_2(1+\tau_2)+1, \tau_1+1) + 4I(n_1(1+\tau_3), -n_2(1+\tau_2), \tau_1+2) - \\
& -4I(-n_1(1+\tau_3), n_2(1+\tau_2)+1, \tau_1+2) + 4I(-n_1(1+\tau_3)+1, n_2(1+\tau_2), \tau_1+1) + \\
& +4I(-n_1(1+\tau_3), n_2(1+\tau_2), \tau_1+2) - 4I(-n_1(1+\tau_3)+1, n_2(1+\tau_2)+1, \tau_1+1) + \\
& +4I(-n_1(1+\tau_3), n_2(1+\tau_2)+1, \tau_1+1) - 4I(-n_1(1+\tau_3)+1, n_2(1+\tau_2), \tau_1+2) - \\
& -4I(-n_1(1+\tau_3), n_2(1+\tau_2), \tau_1+1) + 4I(-n_1(1+\tau_3)+1, n_2(1+\tau_2)+1, \tau_1+2) + \\
& +4I(n_1(1+\tau_3)+1, n_2(1+\tau_2)+1, \tau_1+2) - 4I(n_1(1+\tau_3), n_2(1+\tau_2), \tau_1+1) - \\
& -4I(n_1(1+\tau_3)+1, n_2(1+\tau_2), \tau_1+2) + 4I(n_1(1+\tau_3), n_2(1+\tau_2)+1, \tau_1+1) + \\
& +4I(n_1(1+\tau_3)+1, n_2(1+\tau_2), \tau_1+1) - 4I(n_1(1+\tau_3), n_2(1+\tau_2)+1, \tau_1+2) - \\
& -4I(n_1(1+\tau_3)+1, n_2(1+\tau_2)+1, \tau_1+1) + 4I(n_1(1+\tau_3), n_2(1+\tau_2), \tau_1+2).
\end{aligned}$$

$F(\tau_1, n_1, n_2)$  является безразмерной величиной. Введём также безразмерную силу, поделив силу, определяемую по формуле (86), на соответствующий размерный коэффициент:

$$\begin{aligned}
F_{z0, \Sigma}^{\text{безразмерная, на ед. площади}} &= \frac{F_{z0, \Sigma}^{\text{на ед. площади}}}{\frac{\mu_0 M_s^2}{4\pi}} = -\frac{1}{(1+\tau_2)(1+\tau_3)} \sum_{n_1=1}^{N_1} \sum_{n_2=1}^{N_2} \frac{\partial}{\partial \tau_1} F - \\
& -\frac{1}{(1+\tau_2)(1+\tau_3)} \sum_{n_1=1}^{N_1} \frac{\partial}{\partial \tau_1} \left( \frac{F}{2} \Big|_{n_2=0} \right) - \frac{1}{(1+\tau_2)(1+\tau_3)} \sum_{n_2=1}^{N_2} \frac{\partial}{\partial \tau_1} \left( \frac{F}{2} \Big|_{n_1=0} \right) - \\
& - \frac{1}{(1+\tau_2)(1+\tau_3)} \frac{\partial}{\partial \tau_1} \left( \frac{F}{4} \Big|_{n_1=0} \right). \tag{87}
\end{aligned}$$

Таким образом, методом скалярного магнитного потенциала получили аналитически безразмерную поверхностную плотность  $z$ -компоненты силы взаимодействия нулевой полоски (с нулевыми индексами по обеим осям) с изображениями всех полосок  $F_{z0,\Sigma}^{\text{безразмерная, на ед. площади}}$ , задающуюся соотношением (87) и выражением для  $F(\tau_1, n_1, n_2)$  (см. чуть выше).

Рассчитаем силу, используя полученное соотношение. Пусть параметры заданы как (смотрим зависимость от одного из двух расстояний между параллелепипедами при фиксированном втором)

$$\begin{aligned} N_1 = N_2 = 5; \tau_1 = 10; 10^{-3} \leq \tau_2 \leq 1; \tau_3 = 1; \tau_4 = \tau_5 = 10^3; \\ c = L_0 = a_0 = 10^{-3} \text{ м}; h = 10^{-6} \text{ м}; d = 10^{-5} \text{ м}; 10^{-6} \text{ м} \leq b_0 \leq 10^{-3} \text{ м}. \end{aligned} \quad (88)$$

Тогда оптимальное расстояние между полосками и максимальная (в смысле модуля) плотность  $z$ -компоненты силы здесь будут равны (оценка произведена по неодим-железо-бору)

$$\begin{aligned} \tau_2 \approx 0.0484 \approx 0.05 \Leftrightarrow b_0 \approx 0.0000484 \text{ м} \approx 0.00005 \text{ м}; \\ F_{z0,\Sigma}^{\text{безразмерная, на ед. площади, max}} \approx -0.00033560 \approx -0.0003 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow F_{z0,\Sigma}^{\text{на ед. площади, max}} \approx -35.9161 \frac{\text{Н}}{\text{М}^2} \approx -36 \frac{\text{Н}}{\text{М}^2}, \end{aligned} \quad (89)$$

Соответствующая зависимость плотности компоненты силы от расстояния между параллелепипедами по оси ординат показана на рисунке 9.

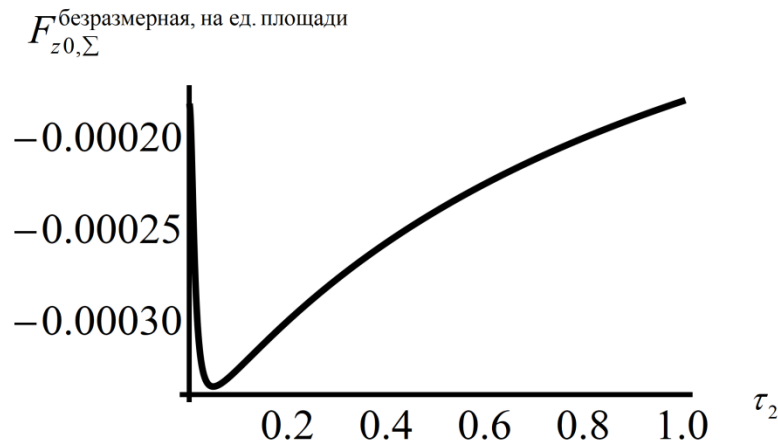


Рисунок 9 – График безразмерной плотности  $z$ -компоненты силы взаимодействия нулевой полоски со всеми изображениями.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

На основании проделанной работы можно сделать следующие выводы. Во-первых, полученные в ходе теоретических исследований результаты показывают, что метод изображений, применяющийся во многих задачах электростатики и магнитостатики, с хорошей степенью точности может быть применён к реальным нелинейным средам – нелинейным магнетикам и диэлектрикам, вплоть до значений полей, по крайней мере, в десять раз (на порядок) превышающих значения, соответствующих области, где среду можно считать приближённо линейной. Во-вторых, теоретически показано, что можно построить оптимальную решётку из магнитов, взаимодействующих с ферромагнетиком с большей силой по сравнению с взаимодействием того же ферромагнетика со сплошным магнитом.

Таким образом, в ходе выполнения работы получены следующие результаты.

- 1) Найдено приближённое решение двумерной электростатической задачи о поле индуцированных нелинейных поляризационных зарядов слоя нелинейной диэлектрической среды (сегнетоэлектрика), поляризованной точечным линейным зарядом.
- 2) Найдено приближённое решение двумерной магнитостатической задачи о магнитном поле нелинейных магнитных зарядов слоя ферромагнетика, намагниченного точечным линейным магнитным зарядом.
- 3) Найден критерий справедливости метода зеркальных электростатических (магнитостатических) отображений для сред с нелинейной восприимчивостью.
- 4) При условии справедливости метода зеркальных магнитостатических отображений найден период двумерной решётки постоянных магнитов, при котором сила сцепления с толстым слоем ферромагнетика будет иметь максимальное значение.



## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

По результатам работы была оформлена статья, которая будет опубликована в 2022 г: Акимов М. Л., Пятаков М. А., Поляков О. П., Поляков П. А. Электростатические поля поляризационных зарядов в диэлектрике с нелинейной восприимчивостью // *Известия РАН. Серия физическая*. 2022. Т. 86. № 10. Также была опубликована следующая статья: Пятаков М. А., Акимов М. Л., Поляков П. А. Взаимодействие неоднородного постоянного магнита, состоящего из решетки магнито жестких полосок, с массивной ферромагнитной средой // *Известия РАН. Серия физическая*. 2021. Т. 85. № 11. С. 1569–1573.

За всяческую помощь в проведении исследований к этой работе выражаю благодарность своему научному руководителю д. ф.-м. н., проф. Полякову П. А. и к.ф.-м.н., ст. преп. Акимову М. Л.

1. Шнеерсон Г. А. Основы техники получения сильных и сверхсильных импульсных магнитных полей. СПб.: изд-во Политехн. ун-та, 2011, 310 с.
2. Захаров А. А., Матюшкин В. В. Применение магнитно-оптических эффектов для измерения сверхсильных магнитных полей // *Вопросы электротехнологии*. 2021. № 2 (31). С. 82–90.
3. Ермаков А. М., Шлектарев В. А., Ермакова О. Н. Установка локальной генерации слабых переменных магнитных полей для биологических исследований // *Известия Института инженерной физики*. 2018. № 4 (50). С. 9–14.
4. Богатина Н. И., Шейкина Н. В., Мартынюк В. С. и др. Метод получения крайне слабых постоянного магнитного и электрического полей и хорошо воспроизводимого комбинированного магнитного поля для биологических исследований // *Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. Серия: «Биология, химия»*. 2010. Т. 23 (62). № 2. С. 54–65.

5. Скворцов А. А., Моргунов Р. Б., Пшонкин Д. Е. «Магнитная память» в пластичности алюминиевого сплава с включениями железа // *Физика твердого тела*. 2019. Т. 61. Вып. 6. С. 1100–1106.
6. Wei S., Jin H., Ruochen F., Mingjie L. Imparting Functionality to the Hydrogel by Magnetic-Field-Induced Nano-assembly and Macro-response // *ACS Appl. Mater. Interfaces*. 2020. V. 12. № 5. P. 5177–5194.
7. Kapil A., Sharma A. Magnetic pulse welding: an efficient and environmentally friendly multi-material joining technique // *Journal of Cleaner Production*. 2015. V. 100. P. 35–58.
8. Yao Y., Jing L., Wang S. et al. Mechanical properties joining mechanisms of Al-Fe magnetic pulse welding by spot form for automotive application // *Journal of Manufacturing Processes*. 2022. V. 76. P. 504–517.
9. Батыгин Ю. В., Сериков Г. С., Чаплыгин Е. А. Реализация магнитно-импульсных методов в развитии передовых технологий современности // *Автомобильный транспорт (Харьков)*. 2006. № 18. С. 83–87.
10. Knebl L., Kurfurst J., Ondrusek C. Ferrite Assisted Synchronous Reluctance Motor Design, Manufacturing and Material Influence on Motor Characteristics // *Conference: 2018 18th International Conference on Mechatronics – Mechatronica (ME)*. 2018.
11. Ngo D.-K., Hsieh M.-F. Performance Analysis of Synchronous Reluctance Motor with Limited Amount of Permanent Magnet // *Energies*. 2019. V. 12. Art. No. 3504.
12. Chalmers B. J., Akmes R. Synchronous machines with inset surface Nd–Fe–B magnets // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 1999. V. 196–197. P. 277–279.
13. Михайлова Е. Г., Гончаров В. И. Применение неодимовых магнитов (неодим-железо-бор) // *Сборник статей: Материалы VII Международной научно-практической конференции «Современные инновации: достижения и перспективы III тысячелетия»*. 2017. С. 17–19.

14. Федотов В. Н., Исмаилов Р. Э. Повышение эффективности мойки карьерных самосвалов // *Сборник тезисов VIII Международной научно-практической конференции «Инновации и перспективы развития горного машиностроения и электромеханики: IPDME-2021»*. 2021. С. 452–456.
15. Asada H., Eto H. Development of a wheeled wall-climbing robot with a shape-adaptive magnetic adhesion mechanism // *2020 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. 2020. P. 9329–9335.
16. Матвеев А. Н. Электричество и магнетизм. М.: Высшая школа, 1983, 463 с.
17. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Физматлит, 2016, 656 с.
18. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Том 3. Электричество и магнетизм. М.: АСТ, 2020, 304 с.
19. Пятаков М. А., Поляков П. А., Русакова Н. Е. Изучение взаимодействия ферромагнетиков и расчет меры этого взаимодействия // *Известия РАН. Серия физическая*. 2020. Т. 84. № 5. С. 719–722.
20. Пятаков М.А., Акимов М.Л., Поляков П.А. Взаимодействие неоднородного постоянного магнита, состоящего из решетки магнито жестких полосок, с массивной ферромагнитной средой // *Известия РАН. Серия физическая*. 2021. Т. 85. № 11. С. 1568–1572.
21. Акимов М. Л., Пятаков М. А., Поляков О. П., Поляков П. А. Электрическое поле индуцированных зарядов нелинейной диэлектрической среды // *Сборник статей: Материалы XXIX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы (фундаментальные физические исследования)»*. Москва, 2021. С. 92–95.
22. Смайт В. Электростатика и электродинамика. М.: ИЛ, 1954, 604 с.
23. Кикоин И. К. Таблицы физических величин. Справочник. М.: Атомиздат, 1976, 1008 с.

24. Wei T., Liu K., Fan P. et al. Novel  $\text{NaNbO}_3\text{-Sr}_{0.7}\text{Bi}_{0.2}\text{TiO}_3$  lead-free dielectric ceramics with excellent energy storage properties // *Ceramics International*. 2021. V. 47. № 3. P. 3713–3719.
25. Shi J., Akbarzadeh A. H. Hierarchical cellular ferroelectric metamaterials: A design motif to enhance multifunctional figures of merit // *Composite Structures*. 2020. V. 250. Art. No. 112395.
26. Wang C. C., Ramprasad R., Boggs S. A. et al. Computational strategies for polymer dielectrics design // *Polymer*. 2014. V. 55. № 4. P. 979–988.
27. Chen L., Yan L., Guo Y. et al. Chemically functionalized multi-walled CNTs induced phase behaviors of poly (Vinylidene Fluoride) nanocomposites and its dielectric properties // *Synthetic Metals*. 2020. V. 269. Art. № 116555.
28. Jastrzebski R., Chwastek K. Analytical expressions for magnetization curve // *Conference: 2017 Progress in Applied Electrical Engineering (PAEE)*. 2017.
29. Зарицкая Е. И., Никитин О. П., Олейников А. М. Статические характеристики намагничивания ферромагнитных материалов и их аппроксимация // *Праці Інституту електродинаміки Національної академії наук України*. 2012. № 31. С. 134–138.
30. Электронный ресурс:  
<https://zen.yandex.ru/media/id/5f0aaf962decb4174eebb57b/0002-dopusk-k-rabote-v-elektrostanovkah-5f9c04f01f9f7379927c90c3>
31. Кулезнев Н. Е., Поляков П. А., Шевцов В. С. Теоретическое и экспериментальное исследование особенностей магнитного поля сильно намагниченного постоянного магнита // *Известия РАН. Серия физическая*. 2018. Т. 82. № 8. С. 1076–1079.
32. Вагин Д. В., Герасименко Т. Н., Поляков П. А. Точное аналитическое выражение для индукции магнитного поля образца прямоугольной формы // *Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия*. 2008. № 6. С. 53–55.