

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени  
М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

Выпускная квалификационная работа бакалавра

**«Численное решение задачи о распределении электрического  
потенциала в элементе полосового проводника, имеющего  
форму параллелограмма»**

Выполнил студент

405 группы:

Ворожейкин Даниил Николаевич

---

подпись студента

Научный руководитель:

д. ф.-м. н., проф. Поляков П. А.

---

подпись научного руководителя

Допущена к защите

Зав. кафедрой, д. ф.-м. н., проф. Салецкий А. М.

---

подпись зав. кафедрой

Москва

2021

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	3
Глава 1. АНИЗОТРОПНЫЕ МАГНИТОРЕЗИСТИВНЫЕ ДАТЧИКИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ .....	5
1.1 Магниторезистивный эффект .....	5
1.2 AMR полоска, схема Barber Pole .....	7
1.3 Важность подсчета сопротивления полоски .....	8
Глава 2. ЗАДАЧА О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПОТЕНЦИАЛА В ЭЛЕМЕНТЕ ПОЛОСОВОГО ПРОВОДНИКА, ИМЕЮЩЕГО ФОРМУ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА .....	10
2.1 Постановка задачи .....	10
2.2 Основные проблемы .....	12
2.2.1 Выбор сетки .....	12
2.2.2 Обработка точек сингулярности .....	13
2.2.3 Расчет распределения потенциала с помощью стандартных пакетов .....	15
2.3 Алгоритм численного решения поставленной задачи. Результаты работы алгоритма .....	16
Глава 3. РАСЧЕТ ЧИСЛЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТА ПО РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ПОТЕНЦИАЛА .....	20
3.1 Вывод формулы для расчета сопротивления .....	20
3.2 Оценка полученного значения сопротивления .....	21
ВЫВОДЫ .....	23
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	24
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ .....	25

## ВВЕДЕНИЕ

Существует множество применений концепции электромагнитного поля: электромагниты, электродвигатели, электрогенераторы и т.д. В связи с этим его необходимо измерять, при этом некоторые задачи требуют очень точных измерений.

В настоящее время активно исследуются датчики магнитного поля (МП), основанные на анизотропном магниторезистивном эффекте (AMR-датчики) [1]-[3], получившие значительный исследовательский интерес из-за их высокой чувствительности и широкого применения для решения различных задач – хранение данных [4], медицинская диагностика [5]-[7], а также для определения курса объекта по магнитному полю Земли в магнитометрии [8] и др.

По сравнению с традиционными магнитными датчиками на основе эффекта Холла, AMR-датчики продемонстрировали большой потенциал для применения в энергоэффективных, высокоинтегрированных и легких магнитных устройствах. Поэтому магнитные датчики AMR широко используются для распознавания магнитных образов, таких как валидатор банкнот (устройство для проверки подлинности денег), считыватель документов с магнитными чернилами, считыватель магнитных карт и детектор магнитных шестерен [9] – [13].

Один из наиболее перспективных типов AMR-датчиков – датчик «barber-pole», который продолжает активно исследоваться с целью улучшения его характеристик. Конструкция датчика представляет собой систему тонких магниторезистивных (MR) нанополосок с высоким коэффициентом MR-эффекта (1-2%), соединенных в мостовую схему (мост Уитстона). На каждую MR-полоску нанесены низкорезистивные полоски-шунты (напыления из хорошо проводящих материалов, как правило – алюминий, золото и др.), располагающиеся на MR-элементе под углом  $45^\circ$  относительно оси легкого намагничивания (ОЛН), которая направлена вдоль длинной стороны MR-

элемента. Внешнее магнитное поле, направленное перпендикулярно ОЛН MR-элемента, приводит к изменению его сопротивления. Точность расчета параметров датчиков «barber-pole» напрямую зависит от точности расчета изменений этого сопротивления. Для нахождения полного сопротивления MR-полоски предлагается разбить её на ячейки (звенья) и рассчитать сопротивление каждого звена по отдельности. Распределение тока в таком звене неоднородно, из-за этого для нахождения сопротивления элемента необходимо численно решить трудоемкую электростатическую задачу. В конфигурации схемы «barber-pole» форма ферромагнитной ячейки представляет собой параллелограмм с углом  $45^\circ$  в основании.

Целью данной работы является наиболее точный расчет сопротивления ячейки в форме параллелограмма, которая является основным звеном в конфигурации схемы датчика «barber-pole». Как было сказано выше, это нетривиальная задача, т.к. в ячейке подобной формы сложное распределение потенциала, а для расчета сопротивления ячейки (как и его изменения) необходимо знать это распределение. Поставленная задача не решается аналитически, поэтому в рамках данной работы было решено прибегнуть к численным методам. В схеме предложены некоторые упрощения и поставлена задача нахождения распределения потенциала методом конечно-разностной аппроксимации.

# Глава 1. АНИЗОТРОПНЫЕ МАГНИТОРЕЗИСТИВНЫЕ ДАТЧИКИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

## 1.1 Магниторезистивный эффект

Магниторезистивный эффект (магнетосопротивление) заключается в изменении сопротивления образца под воздействием внешнего магнитного поля. Все проводники демонстрируют слабый MR-эффект, известный как обычное магнетосопротивление (OMR), который обычно слишком мал для использования в датчиках. Однако многие магнитные материалы обладают большим магниторезистивным эффектом (изменения составляют 1-2% от общего сопротивления), известным как анизотропное магнетосопротивление (AMR), которое достаточно велико для использования в датчиках. Ниже представлена формула расчета MR-эффекта элемента:

$$MR(\%) = \frac{R_{max} - R_{min}}{R_{min}}; \quad (1.1)$$

Где  $R_{max}$ ,  $R_{min}$  – максимальное и минимальное сопротивление образца в магнитном поле.

Последние достижения в технологии напыления тонких пленок позволили исследователям создавать nano-структурированные многослойные устройства с последовательно увеличивающимися эффектами «гигантского» магнетосопротивления (GMR) и туннельного магнетосопротивления (TMR). В настоящее время используются все три технологии [14].

Анизотропное магнетосопротивление, открытое в 1857 году Уильямом Томсоном (лордом Кельвином) [15], встречается в ферромагнитных материалах. Его называют анизотропным, потому что, в отличие от ранее известного обычного магнетосопротивления, оно зависит от угла между электрическим током и направлением намагниченности. Физически эффект AMR описывается как изменение поперечного сечения рассеяния атомных орбиталей, искаженных магнитным полем, как показано на рис. 1.1.

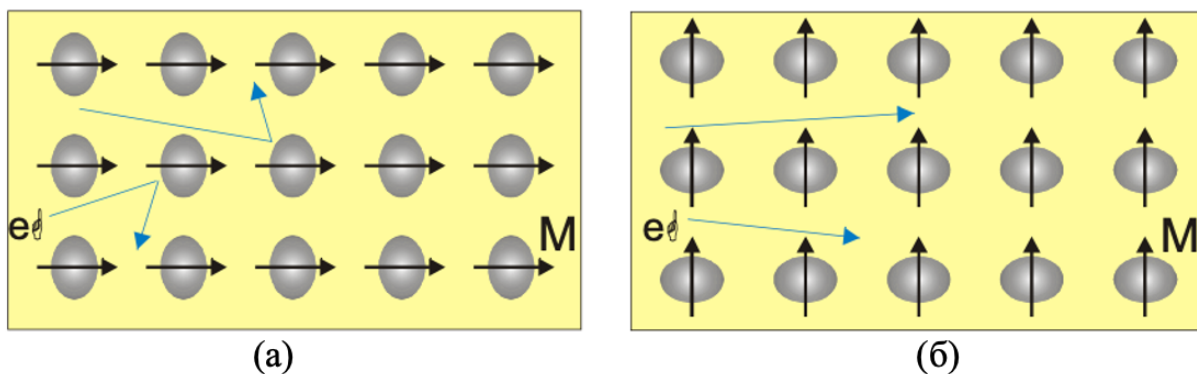


Рис. 1.1. Иллюстрация эффекта AMR, демонстрирующая искажение электронных орбиталей и результирующую разницу в рассеянии, когда намагненность (а) параллельна току и (б) перпендикулярна току [14].

Сопротивление, создаваемое рассеянием, является максимальным, когда направление намагничивания параллельно (то есть  $0^\circ$  или  $180^\circ$ ) к направлению тока, и минимальным, когда намагненность перпендикулярна току. Обычно сопротивление задается как функция угла  $\alpha$  между намагненностью и током (рис. 1.2):

$$R = R_0 + \Delta R * \cos^2 \alpha, \quad (1.2)$$

$$\alpha = 0^\circ \Rightarrow R = R_{max},$$

$$\alpha = 90^\circ \Rightarrow R = R_{min}.$$

Обратим внимание, что в формуле (1.2) относительное изменение сопротивления  $\Delta R < 0$ ;

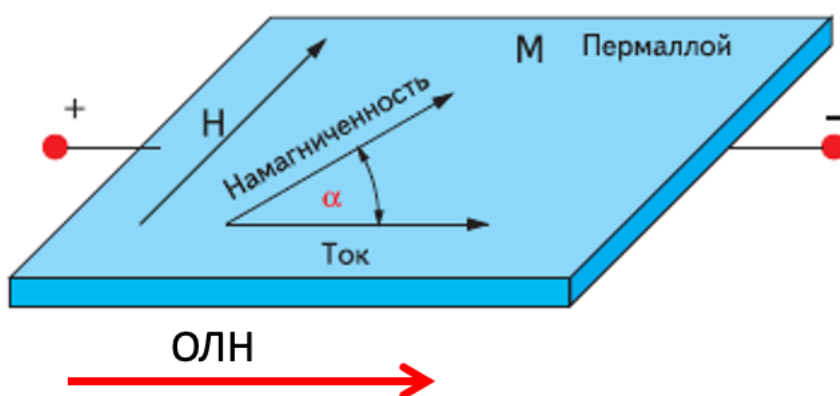


Рис. 1.2. Иллюстрация AMR-эффекта. Н – внешнее магнитное поле, М – результирующая намагненность образца [16].

Ниже представлен график зависимости (рис. 1.3) величины относительного изменения сопротивления ( $\Delta R(\alpha)$ , в %) от угла  $\alpha$ , обозначенного на рисунке. Из графика можно видеть, что максимальное (по

модулю) относительное изменение сопротивления образца (в данном случае пластинки пермаллоя) достигает всего 2.5% от общего сопротивления. На начальном участке (отмечен оранжевым) сопротивление меняется очень медленно, что существенно усложняет регистрацию АМР-эффекта в области малых углов отклонения (возникают трудности регистрации малых магнитных полей). Зеленым отмечен участок графика в окрестности угла в 45 градусов. В этой окрестности сопротивление меняется куда лучше, что наталкивает на мысль изначально задавать угол между током и вектором намагниченности в 45°.

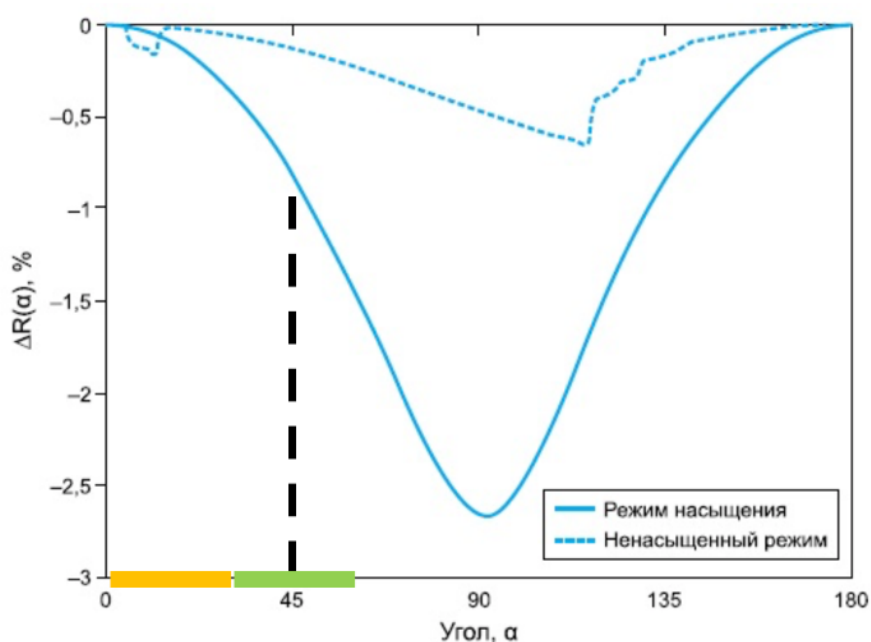


Рис. 1.3. График зависимости величины относительного изменения сопротивления (в %) от угла  $\alpha$  между током и вектором намагниченности [16].

## 1.2 AMR полоска, схема Barber Pole

Идею, упомянутую выше, реализует схема «barber-pole» (рис. 1.4). Если наложить на пластинку ферромагнетика типа пермаллоя низкорезистивные полоски-шунты под углом 45° к оси легкого намагничивания (ОЛН), то в каждой отдельной ячейке формы параллелограмма ток потечет перпендикулярно эквипотенциальной поверхности (т.е. наклонной границе проводящего шунта), под углом 45° к ОЛН пластинки. Поместим схему во

внешнее магнитное поле  $\vec{H}_0$ , направленное перпендикулярно ОЛН. Теперь угол  $\theta$  между вектором  $\vec{M}$  намагниченности элемента и током, протекающим через него, равен:  $\theta = \alpha + 45^\circ$ , т.е. лежит в окрестности угла  $45^\circ$ .

Основным звеном схемы в данной реализации является ячейка пермаллоя, имеющая форму параллелограмма (обозначена пунктиром). Расчет сопротивления такой ячейки является важной задачей, т.к. при помощи него рассчитывается общее сопротивление элемента, а значит и изменение этого сопротивления. Как было упомянуто выше, точность расчета изменения сопротивления элемента в данной реализации является важнейшим фактором точности определения параметров MR-датчиков.

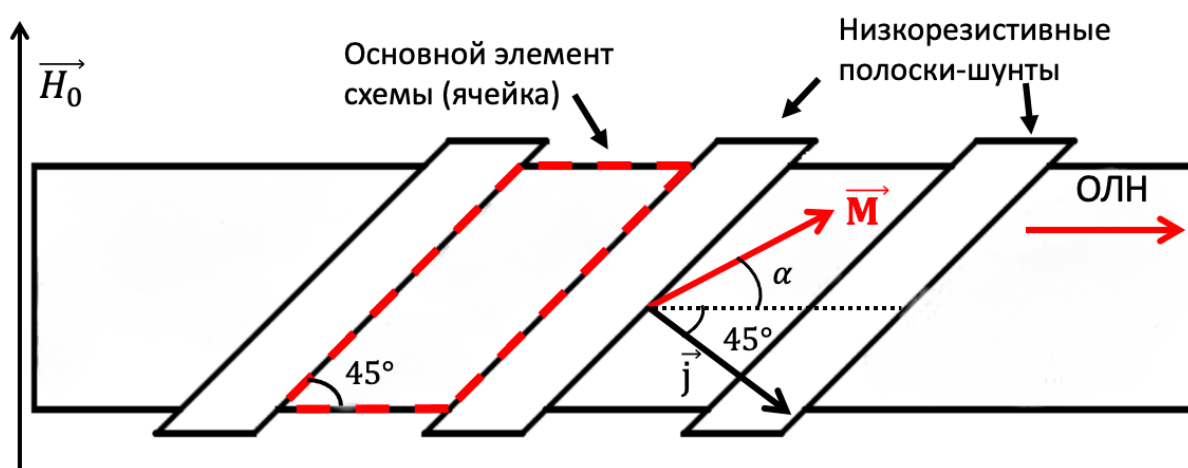


Рис. 1.4. Схематичное изображение полосы «barber-pole».

### 1.3 Важность подсчета сопротивления полоски

Соединим четыре полоски, упомянутые выше, в мостовую схему (рис. 1.5). Из физики задачи нетрудно получить, что разность потенциалов  $\Delta\varphi_{12}$  точек схемы пропорциональна величине изменения сопротивления полосок (1.3.2). Полный ток  $I_{\text{общ}}$  в схеме входит в коэффициент пропорциональности между разностью потенциалов и изменением сопротивления, а его величина рассчитывается через полное сопротивление схемы  $R_{\text{общ}}$ , для расчета которого необходимо знать сопротивление полоски. Стоит отметить, что значение



полного сопротивления схемы в данной конфигурации не изменяется.

Разность потенциалов:

$$\Delta\varphi_{12} = I(R_2 - R_1); \quad (1.3.1)$$

Т.к. общее сопротивление правой и левой ветви схемы одинаковы:

$$I_{\text{общ}} = 2I$$

Из формулы (1.2), для  $\Delta R > 0$ , сопротивления полосок в упрощенной модели:

$$R_1 = R_0 - \Delta R * \cos^2 \alpha_1,$$

$$R_2 = R_0 - \Delta R * \cos^2 \alpha_2,$$

где  $R_0$  – сопротивление полоски в отсутствии магнитного поля.

Тогда, подставляя  $R_1, R_2$  и  $I_{\text{общ}}$  в (1.3.1), получаем:

$$\Delta\varphi_{12} = I_{\text{общ}} * \Delta R * (\cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_1), \quad (1.3.2)$$

$$\text{где } I_{\text{общ}} = \frac{U_{\text{вх}}}{R_{\text{общ}}};$$

Видно, что при помощи мостовой схемы можно получить  $\Delta\varphi_{12} \sim \Delta R$ ; для нахождения  $I_{\text{общ}}$  необходим расчет полного сопротивления схемы. Как было замечено выше, полное сопротивление схемы такой конфигурации не меняется, поэтому для общего сопротивления схемы имеем:  $R_{\text{общ}} = R_0$ .

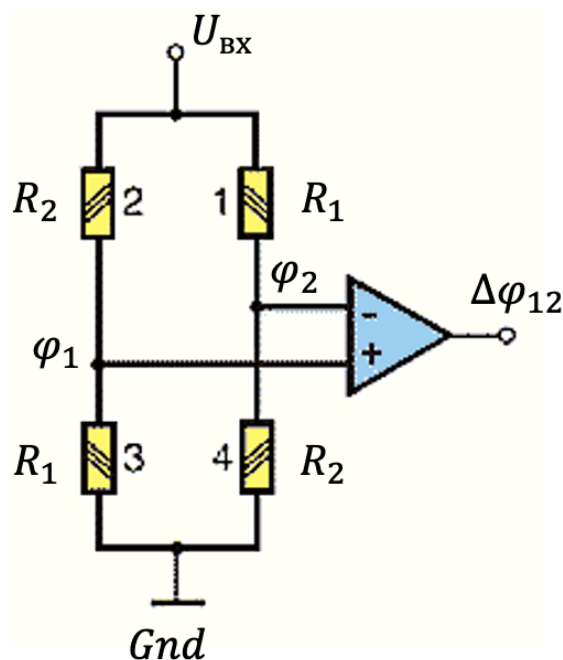


Рис. 1.5. Система полосок «barber-pole», соединенные в мостовую схему. Схематическими линиями на резисторах указана ориентация проводящих шунтов, наложенных на полоски.

## Глава 2. ЗАДАЧА О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПОТЕНЦИАЛА В ЭЛЕМЕНТЕ ПОЛОСОВОГО ПРОВОДНИКА, ИМЕЮЩЕГО ФОРМУ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

### 2.1 Постановка задачи

В главе 1 обсуждался вопрос важности расчета сопротивления полоски магниторезистивного датчика «barber-pole». В силу трудоемкости непосредственного расчета этого сопротивления, полоску предлагается разбить на ячейки. Ячейка такого датчика представляет собой плоский ферромагнитный параллелограмм с углом в основании  $45^\circ$  (рис. 2.1).

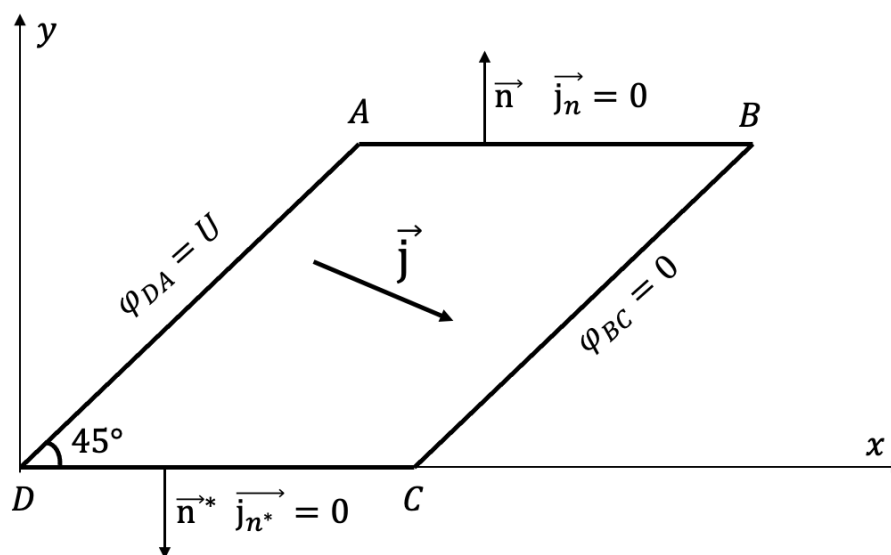


Рис. 2.1. Схема магниторезистивного элемента (ячейки).

Т.к. внутри элемента нет свободных зарядов, уравнение Пуассона для данной задачи переходит в уравнение Лапласа:

$$\Delta\varphi(x,y) = 0; \tag{2.1}$$

Так же из физики задачи можно записать граничные условия:

на границе DA:

$$\varphi(x,y) = U, \tag{2.2}$$

на границе BC:

$$\varphi(x,y) = 0; \tag{2.3}$$

Это граничные условия 1-ого типа (или Дирихле). Они следуют из того, что вдоль границ DA и BC мы имеем наложенные низкорезистивные полоски-шунты (т.е. проводящие элементы, которые выравнивают потенциалы на границах ячейки).

Далее имеем граничные условия 2-ого типа:  
на границах AB и CD:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0; \quad (2.4)$$

Следуют они из того, что через поверхности AB и DC не течет ток (т.е. ток не вытекает из схемы, его нормальная компонента равна нулю):

$$\begin{aligned} \vec{j} &= \lambda \vec{E}, \\ j_n &= \lambda E_n; \quad j_n = 0 \Rightarrow E_n = 0, \\ \vec{E} &= \text{grad}(\varphi) \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0; \end{aligned}$$

В результате из системы уравнений (2.1 – 2.4) имеем задачу (\*): решить эллиптическое уравнение с граничными условиями Дирихле-Неймана в элементе, имеющем форму параллелограмма (математическая формулировка задачи). Поставленная задача не решается аналитически, поэтому ее решение было реализовано численными методами (методом конечных разностей).

Задача (\*):

$$\begin{aligned} \Delta \varphi(x, y) &= 0; \\ \varphi(x, y)|_{(x, y) \in DA} &= U; \\ \varphi(x, y)|_{(x, y) \in BC} &= 0; \\ \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} \Big|_{\substack{(x, y) \in AB \\ (x, y) \in CD}} &= 0; \end{aligned}$$

## 2.2 Основные проблемы

### 2.2.1 Выбор сетки

Численное решение дифференциальных уравнений математической физики методом конечных разностей строится в два этапа:

1) разностная аппроксимация дифференциального уравнения на сетке – написание разностной схемы;

2) решение на ЭВМ разностных уравнений, представляющих собой системы линейных алгебраических уравнений высокого порядка специального вида.

За второй этап отвечают специализированные программы для решения систем уравнений (хотя, как выяснится позднее, для нашего случая необходимо реализовывать свой собственный алгоритм решения разностных уравнений). Первый этап определяет то, как мы собираемся аппроксимировать систему дифференциальных уравнений (\*), т.е. какую сетку выбрать для того, чтобы решение существовало, было устойчивым и не противоречило физическому смыслу. Отсюда основные требования к сетке были сформулированы следующим образом:

1. Совместность системы уравнений при надлежащей обработке точек сингулярности (п. 2.2.2).

2. Устойчивость решения, и, как следствие, возможность изменения шага разбиения для контроля точности.

3. Удовлетворение физическому смыслу (проверялось из графического изображения полученного решения).

Для данной задачи была выбрана стандартная квадратная сетка (рис. 2.2). Угол в  $45^\circ$  в основании параллелограмма позволил задать одинаковые шаги вдоль осей  $x$  и  $y$ . (угол в  $45^\circ$ , конечно, был выбран не случайно; дело в том, что у реального элемента угол в основании  $45^\circ$ ).

Тогда уравнения конечно-разностной аппроксимации для системы уравнений (\*):

для точек, не попадающих под граничные условия:

$$\varphi_{ij} = \frac{1}{4}(\varphi_{i+1j} + \varphi_{ij+1} + \varphi_{i-1j} + \varphi_{ij-1});$$

для точек, попадающих под граничные условия Дирихле:

$$\varphi_{ij} = U, \quad (x, y) \in DA;$$

$$\varphi_{ij} = 0, \quad (x, y) \in BC;$$

для точек, попадающих под граничные условия Неймана:

$$\frac{\varphi_{ij} - \varphi_{i-1j}}{h} = 0, \quad (x, y) \in AB;$$

$$\frac{\varphi_{ij} - \varphi_{i+1j}}{h} = 0, \quad (x, y) \in DC;$$

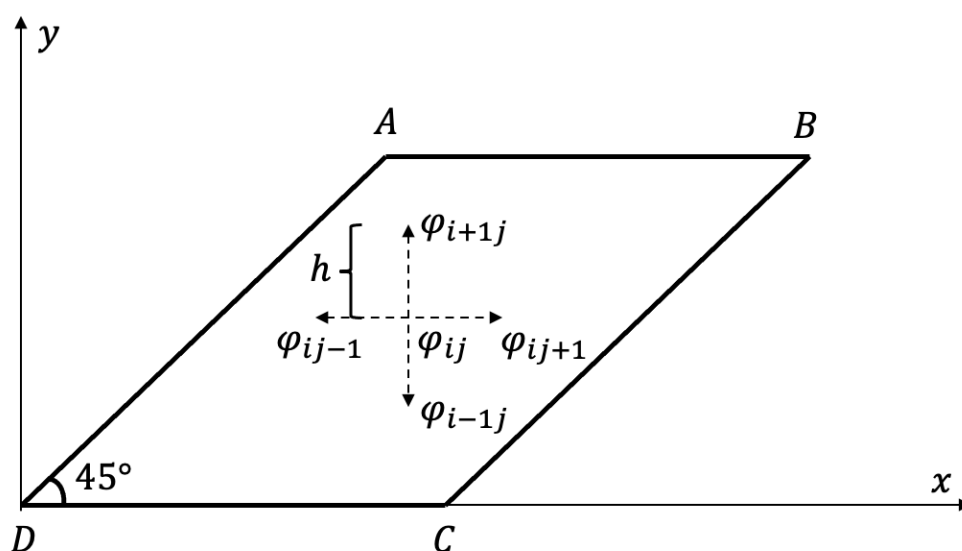


Рис. 2.2 Сетка, выбранная для численного решения задачи.  $h$  – шаг по оси абсцисс и ординат.

### 2.2.2 Обработка точек сингулярности

Из предыдущего пункта имеем численную задачу (\*\*):

$$\varphi_{ij}|_{(i,j) \notin ABCD} = \frac{1}{4}(\varphi_{i+1j} + \varphi_{ij+1} + \varphi_{i-1j} + \varphi_{ij-1}),$$

$$\varphi_{ij}|_{(i,j) \in DA} = U,$$

$$\varphi_{ij}|_{(i,j) \in BC} = 0,$$

$$\frac{\varphi_{ij} - \varphi_{i-1j}}{h}|_{(i,j) \in AB} = 0, \quad (x, y) \in AB,$$

$$\left. \frac{\varphi_{ij} - \varphi_{i+1j}}{h} \right|_{(i,j) \in DC} = 0, (x, y) \in DC;$$

В точках с красным потенциалом (рис. 2.3) происходит наложение условий Дирихле и Неймана. В дальнейшем будем считать:

$$\varphi_{ij} = U;$$

$$\varphi_{ij}^* = 0;$$

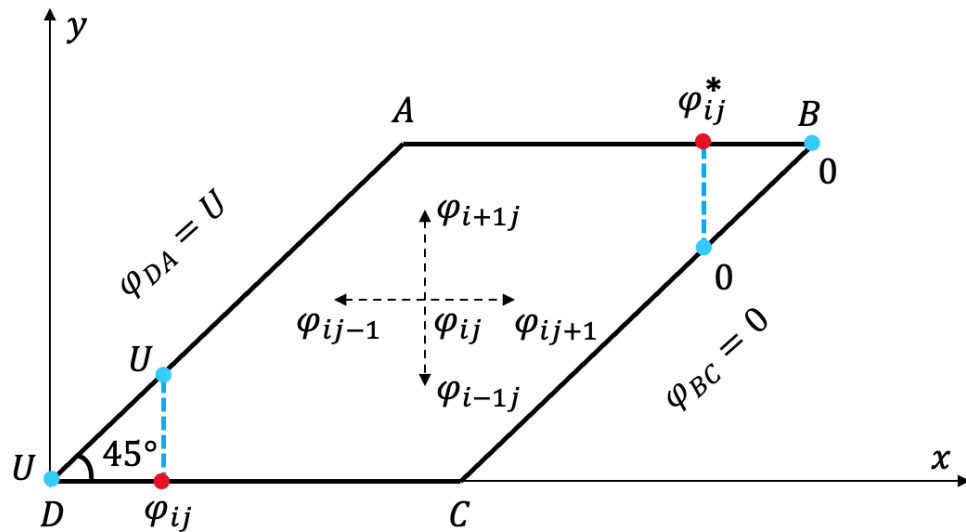


Рис. 2.3. Обработка точек сингулярности.

Первопричиной вышеописанного решения стало то, что при таком выборе обработки точек сингулярности, система уравнений (\*\*\*) является полной, что позволяет рассчитать потенциалы во всех остальных точках. Здесь есть смысл подчеркнуть, что существуют и более аккуратные способы обработки данных точек. Например, можно окружить ячейку дополнительными узлами и решать задачу для внутренней ячейки получившейся схемы и др.

Далее будем рассматривать решение полученной системы уравнений при помощи стандартных пакетов.

### 2.2.3 Расчет распределения потенциала с помощью стандартных пакетов

Система уравнений (\*\*), полученная для выбранной сетки с граничными условиями и обработанными точками сингулярности является полной. На рисунке (рис. 2.4) изображено решение данной системы уравнений (распределение потенциала в элементе полосового проводника, имеющего форму параллелограмма) через пакет Mathematica для разбиения 14 (по оси  $x$ ) на 20 (по оси  $y$ ). Светлым участком показан больший потенциал, темным участком – меньший. Внутри элемента изображен градиент потенциала (от большего к меньшему), линиями показано множество точек с равными потенциалами.

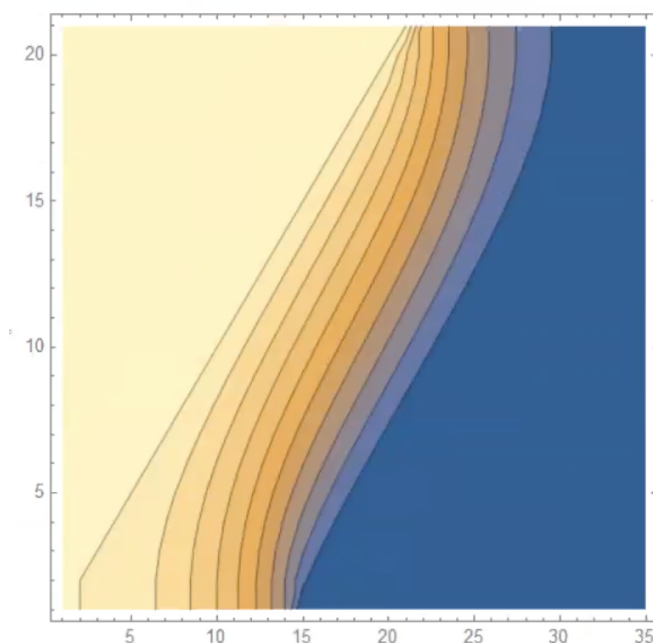


Рис. 2.4. Решение пакета Mathematica. Разбиение 14 на 20.

Как и ожидалось, получилась симметричная картина достаточно гладких эквипотенциальных линий. В узлах с точками сингулярности можно видеть нарушение гладкости этих линий, как следствие ошибки, полученной в результате обработки (п. 2.2.2).

Далее представлено решение системы уравнений через пакет Mathematica для разбиения 28 на 40 (рис. 2.5). Как видно из распределения потенциала для данного разбиения – возникает картина, не удовлетворяющая физическому смыслу. Таким образом мы получаем предел точности, с которой

данная задача решается стандартным пакетом. Автоматизация расчетов пакетом не дает понять, где именно возникает ошибка. По этой причине, а также для повышения точности разбиения было предпринято разработать собственный алгоритм решения системы уравнений (\*\*).

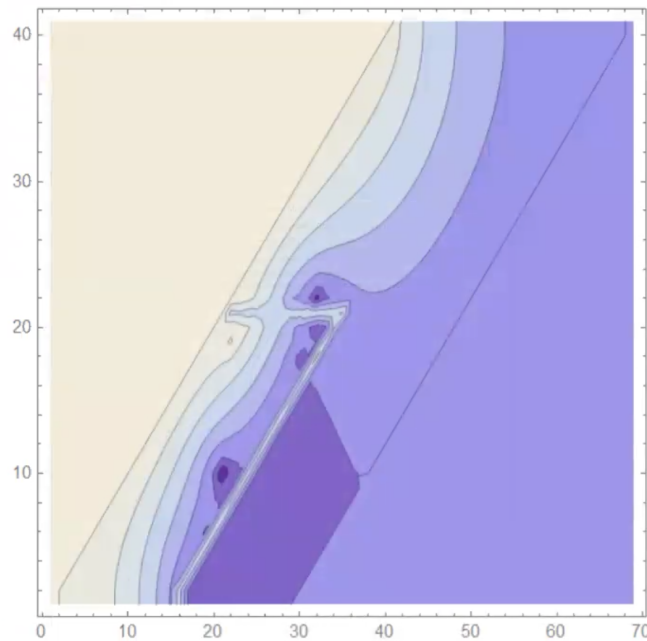


Рис. 2.5. Решение пакета Mathematica. Разбиение 28 на 40.

## 2.3 Алгоритм численного решения поставленной задачи.

### Результаты работы алгоритма

На основании поставленной задачи, а именно системы уравнений (\*\*) с обработанными точками сингулярности, был запрограммирован собственный алгоритм её решения (язык C++).

Основные части работы алгоритма:

1. Конструктор стандартных матриц  $A$  и  $B$  системы уравнений (\*\*) для произвольного разбиения ( $Ax = B$ ).

Алгоритм строит систему уравнений для произвольно заданного разбиения, далее извлекает коэффициенты и помещает их в матрицы  $A$  и  $B$ . На рисунке (рис. 2.6) можно увидеть результат работы алгоритма для разбиения 3 на 4 (3 шага по оси  $x$ , 4 по оси  $y$ ).



```

x0 = 1/4(U + U + x1 + x0)      ===>>> 3*x0 - x1 = 2U
x1 = 1/4(x0 + x2 + 0 + 0)      ===>>> 4*x1 - x0 - x2 = 0
=====
x2 = 1/4(U + U + x3 + x1)      ===>>> 4*x2 - x3 - x1 = 2U
x3 = 1/4(x2 + x4 + 0 + 0)      ===>>> 4*x3 - x2 - x4 = 0
=====
x4 = 1/4(U + U + x5 + x3)      ===>>> 4*x4 - x5 - x3 = 2U
x5 = 1/4(x4 + x5 + 0 + 0)      ===>>> 3*x5 - x4 = 0
=====
Nx = 3
Ny = 4

```

Рис. 2.6. Результат работы алгоритма для разбиения 3 на 4.

## 2. Алгоритм решения системы уравнений методом Гаусса с возможностью отслеживания ошибки.

В коде программы реализован алгоритм Гаусса решения системы уравнений. Есть возможность вывести на экран приведенную матрицу Гаусса (рис. 2.7). Как можно видеть, в нижней диагонали матрицы возникают ненулевые коэффициенты. Это неизбежная машинная ошибка вычислений, т.к. в памяти компьютера хранится конечное количество знаков после запятой.

```

The matrix after gauss-elimination is as follows:
3 ||      -1 ||      0 ||      0 ||      0 ||      0 ||      2 ||
0 ||      3.67 ||     -1 ||      0 ||      0 ||      0 ||     0.667 ||
0 ||      0 ||      3.73 ||     -1 ||      0 ||      0 ||     2.18 ||
0 ||      0 ||      0 ||      3.73 ||     -1 ||      0 ||     0.585 ||
0 ||      0 ||      0 ||     -1.11e-16 ||     3.73 ||     -1 ||     2.16 ||
0 ||      0 ||      0 ||     -2.97e-17 ||      0 ||      2.73 ||     0.578 ||

```

Рис. 2.7. Приведенная матрица Гаусса, объединенная со столбцом свободных членов.

Далее представлены результаты работы программы (решение в виде распределения потенциала) для разных разбиений.

1. Для разбиения 3 на 4 (рис 2.7). Как можно видеть, это достаточно грубое разбиение – эквипотенциальные линии не являются гладкими. Резкие переходы возле точек сингулярности указывают на ошибку, связанную с выбором граничных условий в этих точках.

2. Для разбиения 7 на 10 (рис. 2.8) влияние выбора в точках сингулярности практически не заметно. Линии становятся более гладкими.
3. Для разбиения 28 на 40 (рис 2.9) изломы линий не заметны невооруженным глазом. Достигается высокая степень точности. В сравнении с решением пакета Mathematica (рис. 2.5) можем наблюдать адекватную картину.

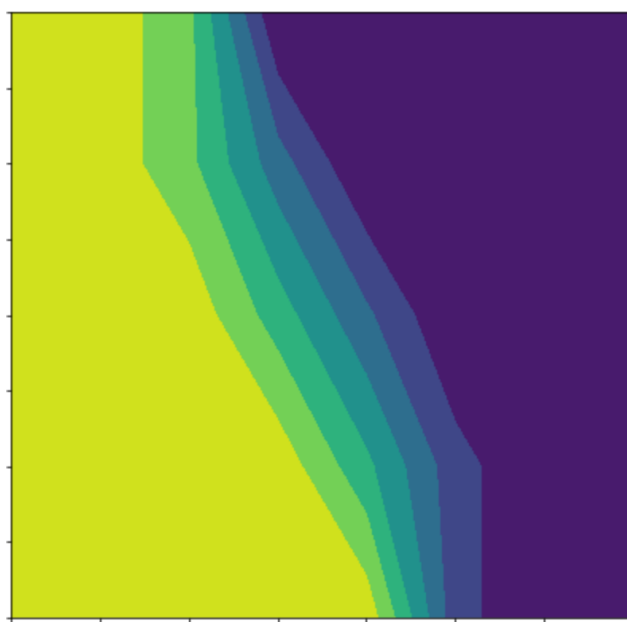


Рис. 2.8. Распределение потенциала для разбиения 3 на 4.

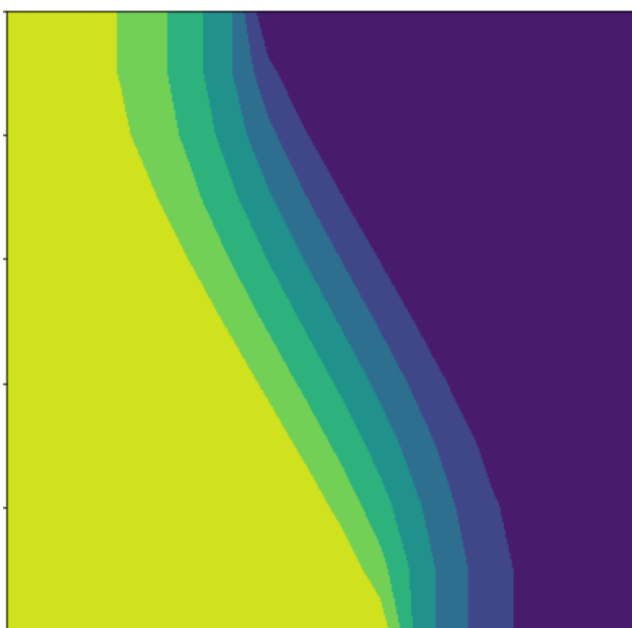


Рис. 2.9. Распределение потенциала для разбиения 7 на 10.

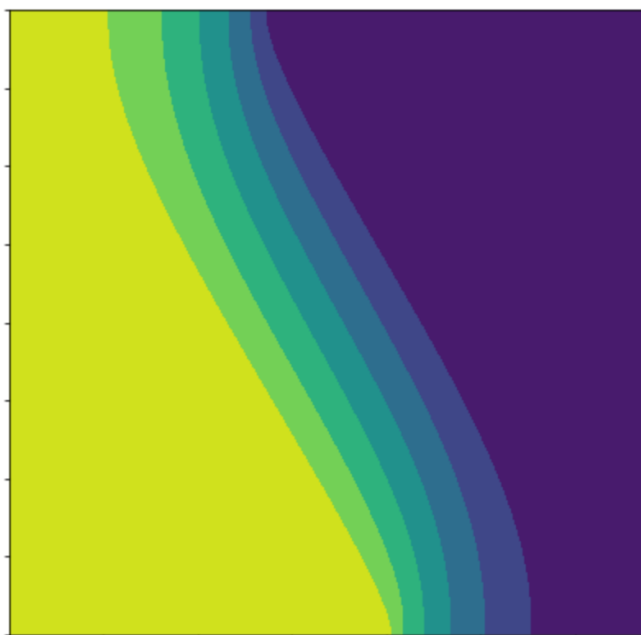


Рис. 2.10. Распределение потенциала для разбиения 14 на 20.

Стоит отметить, что 28 на 40 – не предельная точность работы собственного алгоритма, для которого получается адекватная картина. В рамках данной работы было получено решение для разбиения 70 на 100. Есть смысл полагать, что и это не предельная точность, но в силу временных затрат на получение решения системы уравнений (а для разбиения 70 на 100 получается система порядка 7000 уравнений) было решено остановиться на данной точности. Для более точных расчетов рекомендуется использовать более мощные ЭВМ.

Глава 3. РАСЧЕТ ЧИСЛЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ  
СОПРОТИВЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТА ПО РАСПРЕДЕЛЕНИЮ  
ПОТЕНЦИАЛА

3.1 Вывод формулы для расчета сопротивления

Рассмотрим произвольно выбранное сечение  $\alpha$  элемента плоскостью, параллельной эквипотенциальным поверхностям (рис. 3.1). Разобьем это сечение на  $N$  малых площадок  $dS_i = l * h$ , где  $l$  – размер площадки в плоскости рисунка,  $h$  – толщина пластинки. Тогда ток  $I_{ij}$ , протекающий через произвольную площадку  $dS_i$ :

$$I_{ij} = j_{ij} \times dS_i, \quad (3.1)$$

где  $j_{ij}$  – объемный ток через сечение  $dS_i$ .

$$j_{ij} = \frac{E_{ij}}{\rho} = \frac{\Delta\varphi_{ij}}{\rho * l}, \quad (3.2)$$

$$\Delta\varphi_{ij} = \varphi_{ij} + \varphi_{i+1j-1}, \quad (3.3)$$

где  $E_{ij}$  – напряженность электрического поля в сечении  $dS_i$ ;  $\Delta\varphi_{ij}$  – разность потенциалов в пределах сечения (попарно между точками, обозначенными одинаковым цветом на рисунке);  $\rho$  – удельное сопротивление материала ферромагнетика.

Полный ток  $I$ , протекающий через сечение  $\alpha$ :

$$I = \sum_{ij} I_{ij} = \sum_{ij} j_{ij} \times dS_i, \quad (3.4)$$

Для сопротивления элемента:

$$R = \frac{U}{I}, \quad (3.5)$$

где  $U$  – напряжение между эквипотенциальными поверхностями (без ограничения общности примем за единицу).

Подставляя (3.1)– (3.4) в (3.5), получим:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{(\sum_{ij} \Delta\varphi_{ij})_{\text{ср}}} \frac{\rho}{h}; \quad (3.6)$$

$(\sum_{ij} \Delta\varphi_{ij})_{\text{cp}}$  находится из полученного распределения потенциалов. Среднее берется, т.к.  $\sum_{ij} \Delta\varphi_{ij}$  рассчитывается для разных сечений и усредняется.

Рассчитанное сопротивление:

$$R \cong \frac{1}{2,34} \frac{\rho}{h}$$

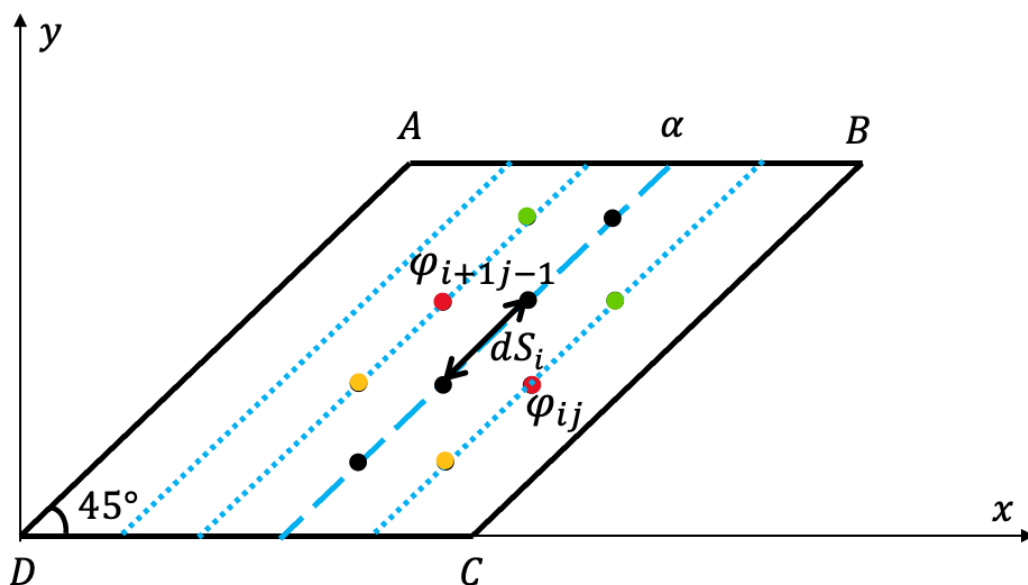


Рис. 3.1

### 3.2 Оценка полученного значения сопротивления

Для оценки адекватности полученного результата, был рассчитан диапазон, в который должно попадать сопротивление. Расчет верхней  $R_{max}$  и нижней  $R_{min}$  границ этого диапазона был произведен следующим образом: ячейка была преобразована к формам, сопротивления которых строго больше или меньше сопротивления ячейки (рис. 3.2). Так же формы были подобраны таким образом, чтобы их сопротивления можно было легко подсчитать. Граничные значения сопротивлений рассчитываются из формулы:

$$R = \rho \frac{l}{S};$$

Полученные значения:

$$R_{max} = \frac{1}{1,82} \frac{\rho}{h}, \quad R_{min} = \frac{1}{2,82} \frac{\rho}{h}$$

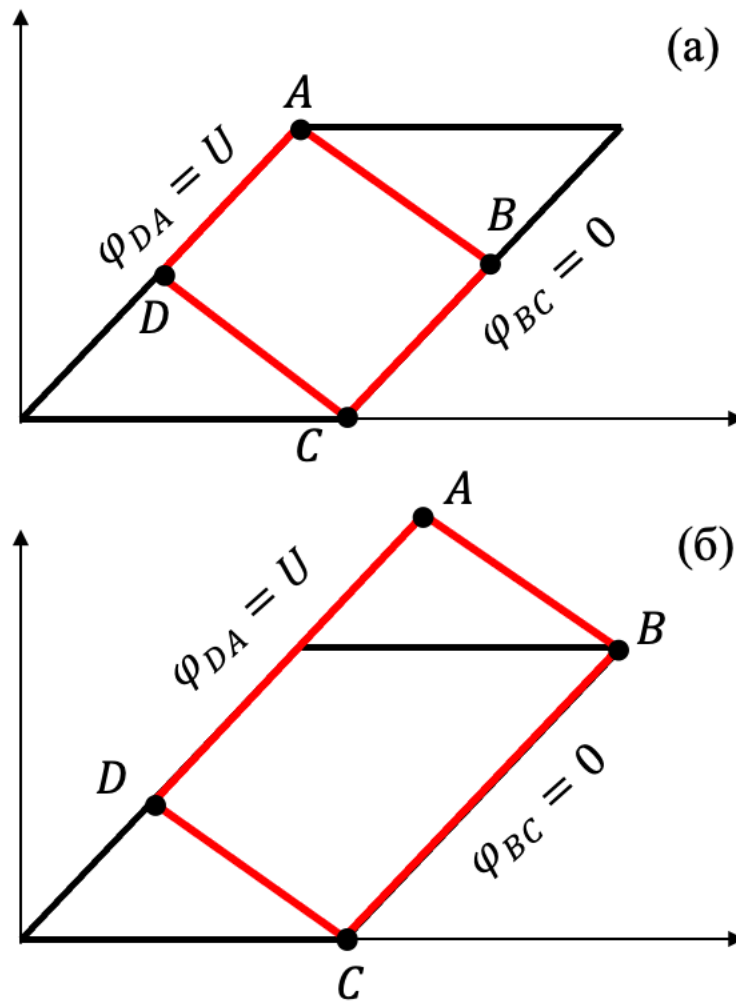


Рис. 3.2. Выбранные формы ячейки  $R_{max}$  (а) и  $R_{min}$  (б) для расчета граничных значений сопротивления.

Рассчитанное сопротивление:

$$R \cong \frac{1}{2,34} \frac{\rho}{h};$$

можем убедиться, что:  $R \in (R_{min}; R_{max})$ .

## ВЫВОДЫ

По материалу, изложенному в данной работе, можно сделать следующие выводы:

1. Существует масса приложений концепции магнитного поля (МП): электромагниты, электродвигатели, электрогенераторы и т.д. Важной задачей является его измерение, при этом часто приходится сталкиваться с проблемами, когда требуется очень точное измерение МП.
2. Датчики МП в настоящее время активно исследуются с целью улучшения их характеристик. Анизотропные магниторезистивные датчики МП получили значительный исследовательский интерес из-за их высокой чувствительности и широкой области применимости для решения различных задач: хранение данных, медицинская диагностика, валидатор банкнот, считыватель документов с магнитными чернилами, считыватель магнитных карт и детектор магнитных шестерен и др.
3. Одним из перспективных типов AMR-датчиков является датчик «barber-pole», состоящий из полоски ферромагнетика с напыленными на нее низкорезистивными полосками шунтами. Расположение шунтов под углом  $45^\circ$  к оси легкого намагничивания позволяет эффективно измерять малейшие изменения МП. Для еще более эффективных измерений систему датчиков «barber-pole» собирают в мост Уинстона.
4. Важной задачей является расчет сопротивления полоски датчика «barber-pole». Точно рассчитанное сопротивление позволяет прогнозировать характеристики датчиков для работы в определенном диапазоне измерений МП, что существенно упрощает процедуру их изготовления.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках данной работы была поставлена задача расчета сопротивления полосового проводника, имеющего форму параллелограмма. Для выполнения поставленной задачи была сформулирована математическая задача (система дифференциальных уравнений с граничными условиями смешанного типа) о распределении потенциала в проводнике такой формы. Для решения полученной системы был применен метод конечно-разностной аппроксимации, была произведена попытка обработки точек сингулярности и получено численное решение системы через стандартный пакет Mathematica. Были выявлены недостатки решения с помощью стандартного пакета и предпринята попытка разработки собственного алгоритма численного решения поставленной задачи с возможностью отслеживания машинной ошибки вычислений.

В результате был разработан алгоритм, рассчитывающий распределение потенциала в проводнике формы параллелограмма для произвольного разбиения. Внутри алгоритма был реализован метод Гаусса решения систем уравнений, что позволило отслеживать машинную ошибку вычислений. Полученный алгоритм был успешно протестирован для разбиений (получено решение, удовлетворяющее физическому смыслу), на которых проявлялись недостатки стандартного пакета.

Была получена формула для расчета сопротивления элемента формы параллелограмма по распределению потенциала и рассчитано численное значение этого сопротивления. Результат проверен на соответствие здравому смыслу.



## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] S. Andreev and P. Dimitrova, “Anisotropic-magneto-resistance integrated sensors,” *J. Optoelectron. Adv. Mater.*, vol. 7, no. 1, pp. 199–206, 2005.
- [2] N. A. Stutzke, S. E. Russek, D. P. Pappas, and M. Tondra, “Low-frequency noise measurements on commercial magnetoresistive magnetic field sensors,” *J. Appl. Phys.*, vol. 97, no. 10, p. 10Q107, 2005.
- [3] Z. Wang et al., “Highly sensitive flexible magnetic sensor based on anisotropic magnetoresistance effect,” *Adv. Mater.*, vol. 28, no. 42, pp. 9370–9377, 2016.
- [4] J. Akerman, “Toward a universal memory,” *Science*, vol. 308, pp. 508–510, Apr. 2005.
- [5] R. C. Decharms, “Applications of real-time fMRI,” *Nature Rev. Neurosci.*, vol. 9, pp. 720–729, Sep. 2008.
- [6] D. H. Kim et al., “Materials for multifunctional balloon catheters with capabilities in cardiac electrophysiological mapping and ablation therapy,” *Nature Mater.*, vol. 10, pp. 316–323, Mar. 2011.
- [7] D. Karnaushenko et al., “Light weight and flexible high-performance diagnostic platform,” *Adv. Healthcare Mater.*, vol. 4, pp. 1517–1525, Jul. 2015.
- [8] T. M. Liakopoulos and C. H. Ahn, “A micro-fluxgate magnetic sensor using micromachined planar solenoid coils,” *Sens. Actuators A, Phys.*, vol. 77, pp. 66–72, Sep. 1999.
- [9] G. Herzer, “Magnetoelastic sensors for electronic article surveillance,” *Sensor Lett.*, vol. 5, pp. 259–262, Mar. 2007.
- [10] M. H. Kang, B. W. Choi, K. C. Koh, J. H. Lee, and G. T. Park, “Experimental study of a vehicle detector with an AMR sensor,” *Sens. Actuators A, Phys.*, vol. 118, pp. 278–284, Feb. 2005.
- [11] T. Nara, S. Suzuki, and S. Ando, “A closed-form formula for magnetic dipole localization by measurement of its magnetic field and spatial gradients,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 42, no. 10, pp. 3291–3293, Oct. 2006.

[12] P. Novacek, J. Rohac, J. Simanek, and P. Ripka, "Metal detector signal imprints of detected objects," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 49, no. 1, pp. 69–72, Jan. 2013.

[13] A. Sheinker, B. Lerner, N. Salomonski, B. Ginzburg, L. Frumkis, and B.-Z. Kaplan, "Localization and magnetic moment estimation of a ferromagnetic target by simulated annealing," *Meas. Sci. Technol.*, vol. 18, p. 3451, Sep. 2007.

[14] Magneto-resistive Sensors for Nondestructive Evaluation Albrecht Jander, Carl Smith, Robert Schneider Oregon State University, 220 Owen Hall, Corvallis, OR, USA 97331 <sup>b</sup>NVE Corp, 11409 Valley View Rd., Eden Prairie, MN, USA 55344, 2005.

[15] W. Thomson, "On the electrodynamic qualities of metals: effects of magnetization on the electric conductivity of nickel and iron," *Proc. Roy. Soc. London*, vol. 8, pp. 546-550, 1857.

[16] Сергей Шемякин, Компонентные ARM-датчики положения и угла поворота от Honeywell, «Компоненты и технологии» № 11, 2012.