

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»  
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА  
«ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ ИМПУЛЬСНЫХ  
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОМЕХ НА УСТОЙЧИВОСТЬ РАБОТЫ  
ЭЛЕКТРОННЫХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ»

Выполнила студентка  
405 группы  
Воробьева Елизавета Андреевна

---

подпись студентки

Научный руководитель:  
Глазунов Павел Сергеевич

---

подпись научного руководителя

Допущена к защите «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2021 г.

Зав. кафедрой общей физики  
проф. Салецкий Александр Михайлович

---

подпись зав. кафедрой

Москва

2021

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ГЛАВА 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ....	5
1.1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДЛЯ ГЕНЕРАТОРА ВАН-ДЕР-ПОЛЯ. ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ВАН-ДЕР- ПОЛЯ. ....	7
1.2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДЛЯ КОЛЬЦЕВОГО ГЕНЕРАТОРА. ....	11
1.3. ЭНЕРГИЯ КОЛЬЦЕВОГО ГЕНЕРАТОРА И ГЕНЕРАТОРА ВАН- ДЕР-ПОЛЯ. ....	18
ГЛАВА 2. ФАЗОВЫЙ СДВИГ МЕАНДРА КОЛЕБАНИЙ КОЛЬЦЕВОГО ГЕНЕРАТОРА. АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД. ....	23
ГЛАВА 3. ФАЗОВЫЙ СДВИГ МЕАНДРА КОЛЕБАНИЙ ГЕНЕРАТОРА ВАН-ДЕР-ПОЛЯ. АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД. ....	28
ГЛАВА 4. РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ.....	30
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	36
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ .....	37

## ВВЕДЕНИЕ

Данная выпускная квалификационная работа посвящена теоретическому исследованию влияния внешних электромагнитных полей на работу типовых цифровых приборов.

Процесс глобальной электрификации привел к тому, что почти каждое современное цифровое устройство окружено внешними электромагнитными полями. Функционирование электронных приборов в неблагоприятной электромагнитной обстановке способно приводить к нарушению их работы, что представляет собой важную современную проблему. В таких отраслях как электроэнергетика, космическая промышленность, информационная безопасность, сбои в работе компьютеров и систем автоматизации способны приводить к катастрофическим последствиям. Поэтому проблемам электромагнитной совместимости посвящено значительное количество современных трудов.

Например, в статье [1] проведено исследование восприимчивости комплементарных металл оксидных полупроводниковых усилителей к электромагнитным импульсам. В труде [2] изучается влияние электромагнитных помех, вызванных работой автоматического выключателя трансформатора, на оборудование трансформаторной подстанции. В статье [3] представлены методы ослабления электромагнитных помех, основанные на электромагнитном экранировании. В работе [4] приведены принципы и результаты диагностирования трансформаторов электростанций радиочастотным методом. Предмет диагностики - возникновение разрядной активности в трансформаторах. В статье [5] рассмотрены характеристики экранирования электромагнитных помех углеродными материалами в диапазоне 8.2–12.4 ГГц и проведено обсуждение механизмов экранирования. В статье [6] проведено исследование деградации и катастрофических отказов микросхем в полях мощного радиоизлучения.

Однако механизмы воздействия электромагнитных импульсов на цифровые системы, приводящие к нарушению их работы, остаются плохо изученными. Например, в приведенных выше работах не даётся детального описания процессов, приводящих к нарушению функционирования электронного устройства: они рассматриваются только на качественном уровне. В этой связи представляются актуальными теоретические работы, позволяющие проводить анализ причин нарушений функционирования цифровой техники, основанный на количественных расчетах. По этой причине объектом исследования данной работы являются механизмы воздействия электромагнитных импульсных помех на радиоэлектронную аппаратуру.

Согласно [7], механизмы воздействия условно можно разделить на три группы. К первой группе относятся тепловые воздействия. Ко второй – процессы, обусловленные электрическими разрядами и пробоями. К третьей – сбои и помехи, наведенные электромагнитными импульсами, не приводящие к необратимым повреждениям. В данной работе исследуются механизмы, принадлежащие к третьей группе, поскольку они встречаются наиболее часто.

Таким образом, предметом исследования данной работы является изучение обратимых сбоев электронных устройств, возникающих вследствие импульсных помех, наведенных внешними электромагнитными полями.

В качестве модели типового цифрового устройства рассматривается генератор тактовой частоты. Подобные генераторы предназначены для синхронизации различных вычислительных процессов и являются неотъемлемой частью всех современных цифровых приборов. Целью бакалаврской работы является исследование влияния электромагнитных импульсных помех на устойчивость меандра генератора тактовой частоты в зависимости от технических характеристик генератора и параметров помехи.

## ГЛАВА 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Мы предлагаем следующую постановку задачи. Рассматривается генератор тактовой частоты в момент генерации. На некотором расстоянии от него происходит статический разряд электричества, который приводит к возбуждению электромагнитного импульса. В автоколебательном контуре импульс наводит помеху, из-за чего форма меандра искажается на некоторое время. Данное искажение способно вызвать нарушение работы цифрового устройства. Схематическое представление постановки задачи показано на рис. 1.

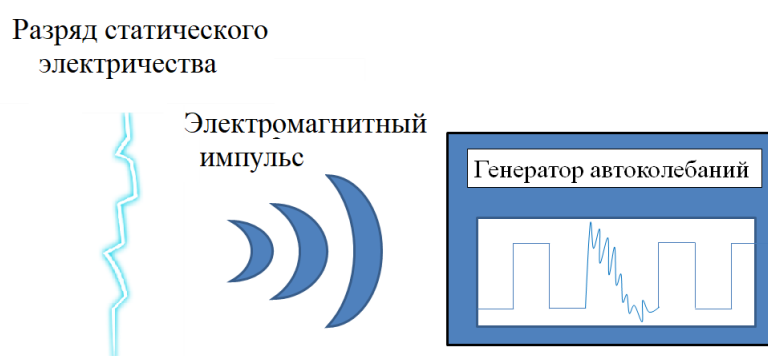


Рис. 1. К постановке задачи.

Электромагнитная импульсная помеха моделируется при помощи включения импульсных источников напряжения в контур тактового генератора. ЭДС этих источников считается заданной. Рассматриваются две модели автогенераторов: модель осциллятора Ван-дер-Поля и модель кольцевого генератора. Цель задачи – по заданному профилю импульсной помехи и по заданным параметрам модели генератора определить изменение формы меандра колебаний.

В качестве основной характеристики, показывающей величину воздействия помехи на генератор, мы решили использовать вероятность сбоя одного бита информации, которая также называется вероятностью единичного сбоя. Действительно, как известно, сбой лишь в одном бите переданной информации может приводить к зависанию операционной системы персональных компьютеров. Вероятность ошибки бита обычно рассчитывается при помощи следующей формулы [8, с. 121-122, 209-213]:

$$P(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-z} \exp(-\lambda^2 / 2) \cdot d\lambda = 0.5 \cdot \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \sqrt{\frac{z}{2}} \right) \right), \quad (1)$$

где  $z = W_{\text{сигн}} / W_{\text{пом}}$  – отношение энергии, содержащейся в информационном

сигнале, к энергии, содержащейся в помехе,  $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi$  – функция

ошибок. При этом,  $W_{\text{сигн}} \sim \int_t^{t+T} U_{\text{сигн}}^2(t') dt'$ , где  $U_{\text{сигн}}(t)$  – напряжение

импульсного сигнала (информационного бита),  $T$  – период колебаний

генератора,  $W_{\text{пом}} \sim \int_t^{t+T} U_{\text{пом}}^2(t') dt'$ ,  $U_{\text{пом}}(t)$  – напряжение импульсной помехи.

Вследствие воздействия помехи форма меандра  $U_{\text{сигн}}(t)$  искажается.

Обозначим искаженную форму меандра как  $\tilde{U}_{\text{пом}}(t)$ . Тогда по определению:

$$U_{\text{пом}}(t) = \tilde{U}_{\text{сигн}}(t) - U_{\text{сигн}}(t).$$

В следующих разделах мы из всего вида импульсных помех выделим класс помех, воздействие которых сводится к скачкообразному сдвигу фазы колебаний меандра. Для помех, принадлежащих данному классу, в качестве характеристики, оценивающей влияние помехи на генераторы тактовой частоты, мы будем использовать сдвиг фазы меандра колебаний. В том случае, когда сдвиг фаз был найден, вероятность ошибки распознавания бита легко может быть рассчитана по формуле (1).

В конце раздела отметим, что в данной работе не рассматривается сам процесс наведения электромагнитной помехи в контуре электронного устройства. Данный вопрос считается хорошо изученным. Кроме того задача о наведении помехи электромагнитным импульсом представляет собой самостоятельную задачу, которая может быть рассмотрена отдельно. Мы планируем рассмотреть данный вопрос в наших следующих работах.

# 1.1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДЛЯ ГЕНЕРАТОРА ВАН-ДЕР-ПОЛЯ. ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ВАН-ДЕР-ПОЛЯ.

Колебания генератора Ван-дер-Поля описываются при помощи уравнения (2), вывод которого подробно приведен в работе [9]. В канонической форме уравнение выглядит следующим образом:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} - \mu(1-x^2)\frac{dx}{d\tau} + x = f(\tau) \quad (2)$$

Здесь  $\tau$  является безразмерным временем,  $x=x(\tau)$  – безразмерным напряжением,  $f(\tau)$  – функция, моделирующая внешнее воздействие (наведенную помеху),  $\mu$  – параметр нелинейности, величина которого определяет величину обратной связи в системе. Переход к размерным величинам может быть осуществлен при помощи преобразований растяжения/сжатия:

$$t = \tau(T_{\text{физ.}} / T_{\text{б.р.}}), \quad U = x(U_{\text{max}} / x_{\text{max}}), \quad (3)$$

где  $t$  – переменная, обладающая размерностью времени (в секундах),  $T_{\text{физ.}}$  – период колебаний генератора в секундах,  $T_{\text{б.р.}}$  – период колебаний решения уравнения (2) в безразмерных единицах.  $U(t)$  и  $U_{\text{max}}$  – напряжение на конденсаторе (рис.2) и амплитуда колебаний данного напряжения в вольтах,  $x_{\text{max}}$  – безразмерная амплитуда колебаний решения уравнения (2).

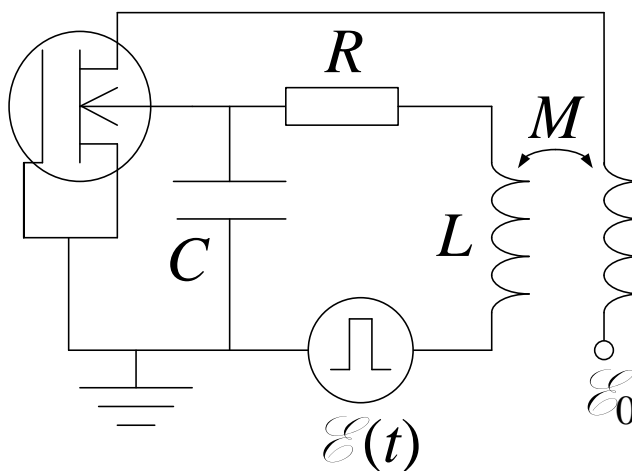


Рис. 2. Схема генератора Ван-дер-Поля.

На рис.2 приведена схема осциллятора Ван-дер-Поля. Основу автоколебательной системы составляет  $RLC$  контур, выполняющий роль «резервуара» энергии колебаний. Обратная связь осуществляется через нелинейный элемент (в данной схеме КПОМ транзистор с каналом N-типа), подключенный к питанию  $\mathcal{E}_0$ , а также взаимную индуктивность  $M$ . ЭДС  $\mathcal{E}(\tau)$ , включенная в колебательный контур, моделирует помеху (внешнее воздействие, которому соответствует функция  $f(\tau)$ ).

Для численного решения уравнения (2) использовался скоростной метод Верле. Основная идея этого метода состоит в записи разложения  $x(\tau + \Delta\tau)$  в ряд Тейлора:

$$x(\tau + \Delta\tau) = x(\tau) + \dot{x}\Delta\tau + \frac{1}{2} \ddot{x}(\tau) \Delta\tau^2 + O(\Delta\tau^3), \quad (4)$$

где  $\ddot{x} = \frac{d^2x}{d\tau^2}$ ,  $\dot{x} = \frac{dx}{d\tau}$ . Далее напишем разложение для  $\dot{x}(\tau + \Delta\tau)$ :

$$\dot{x}(\tau + \Delta\tau) = \dot{x}(\tau) + \frac{1}{2} \frac{\ddot{x}(\tau + \Delta\tau) + \ddot{x}(\tau)}{\Delta\tau}. \quad (5)$$

Запишем уравнение Ван-дер-Поля для моментов времени  $\tau$  и  $\tau + \Delta\tau$  при воздействии на систему вынуждающей силы  $f$ :

$$\ddot{x}(\tau) - \mu(1 - x^2(\tau))\dot{x}(\tau) + x(\tau) = f(\tau) \quad (6)$$

$$\ddot{x}(\tau + \Delta\tau) - \mu(1 - x^2(\tau + \Delta\tau))\dot{x}(\tau + \Delta\tau) + x(\tau + \Delta\tau) = f(\tau + \Delta\tau) \quad (7)$$

Выразим из уравнений (6)-(7)  $\ddot{x}(\tau)$  и  $\ddot{x}(\tau + \Delta\tau)$ :

$$\ddot{x}(\tau) = \mu(1 - x^2(\tau))\dot{x}(\tau) - x(\tau) + f(\tau) \quad (8)$$

$$\ddot{x}(\tau + \Delta\tau) = \mu(1 - x^2(\tau + \Delta\tau))\dot{x}(\tau + \Delta\tau) - x(\tau + \Delta\tau) + f(\tau + \Delta\tau). \quad (9)$$

Подставляя в уравнение (7)  $\ddot{x}(\tau)$  и  $\ddot{x}(\tau + \Delta\tau)$  из соотношений (8)-(9), получим:

$$\begin{aligned} \dot{x}(\tau + \Delta\tau) = \dot{x}(\tau) + \frac{\Delta\tau}{2} & \left( \mu(1 - x^2(\tau))\dot{x}(\tau) - x(\tau) + f(\tau) \right) + \\ & + \frac{\Delta\tau}{2} \left( \mu(1 - x^2(\tau + \Delta\tau))\dot{x}(\tau + \Delta\tau) - x(\tau + \Delta\tau) + f(\tau + \Delta\tau) \right) \end{aligned} \quad (10)$$



Далее выразим из формулы (9)  $\dot{x}(\tau + \Delta\tau)$ :

$$\ddot{x}(\tau + \Delta\tau) \left( 1 - \mu \frac{\Delta\tau}{2} (1 - x^2(\tau + \Delta\tau)) \right) = \dot{x}(\tau) \left( 1 - \mu \frac{\Delta\tau}{2} \tau (1 - x^2(\tau)) \right) + \frac{\Delta\tau}{2} (f(\tau + \Delta\tau) + f(\tau)) - \frac{\Delta\tau}{2} (x(\tau + \Delta\tau) + x(\tau)) \quad (11)$$

$$\dot{x}(\tau + \Delta\tau) = \frac{\dot{x}(\tau + \Delta\tau) \left( 1 - \mu \frac{\Delta\tau}{2} (1 - x^2(\tau)) \right) + \frac{\Delta\tau}{2} (f(\tau + \Delta\tau) + f(\tau)) - \frac{\Delta\tau}{2} (x(\tau + \Delta\tau) + x(\tau))}{\left( 1 - \mu \frac{\Delta\tau}{2} (1 - x^2(\tau + \Delta\tau)) \right)} \quad (12)$$

Формула (12) является окончательной формулой, необходимой для нахождения  $\dot{x}(\tau)$  по алгоритму Верле. Выведем такую же формулу для  $x(\tau)$ . Подставляя в (2)  $\ddot{x}(\tau)$  (из соотношения (8)) и пренебрегая слагаемыми порядка  $O(\Delta\tau^3)$ , получим выражение для  $x(\tau + \Delta\tau)$ :

$$\begin{aligned} x(\tau + \Delta\tau) &= x(\tau) + \dot{x}(\tau) \Delta\tau + \frac{1}{2} \left( \mu (1 - x^2(\tau)) \dot{x}(\tau) + f(\tau) - x(\tau) \right) \Delta\tau^2 = \\ &= x(\tau) + \dot{x}(\tau) \Delta\tau + \frac{\mu \Delta\tau^2}{2} (1 - x^2(\tau)) \dot{x}(\tau) + \frac{f(\tau) \Delta\tau^2}{2} - \frac{x(\tau) \Delta\tau^2}{2} \end{aligned} \quad (13)$$

и окончательно

$$x(\tau + \Delta\tau) = x(\tau) + \dot{x}(\tau) \left( \Delta\tau + \frac{\mu \Delta\tau^2}{2} (1 - x^2(\tau)) \right) + f(\tau) \frac{\Delta\tau^2}{2} - \frac{x(\tau) \Delta\tau^2}{2}. \quad (14)$$

При  $f(\tau) \equiv 0$  и  $\mu > 0$  решения уравнения (2) вне зависимости от начальных условий стремятся к устойчивым колебаниям [9]. Фазовые траектории уравнения (2) при этом стремятся к предельному циклу, форма которого целиком определяется параметром нелинейности  $\mu$ . Поэтому вид устойчивых колебаний, являющихся решением уравнения (2), также целиком определяется параметром  $\mu$ . При малых значениях  $\mu$  форма устойчивых колебаний близка к синусоидальной (рис.3). При увеличении  $\mu$  форма устойчивых колебаний осциллятора всё меньше напоминает гармонический сигнал и становится все более похожей на так называемые колебания релаксационного типа [9] (рис.4-5).

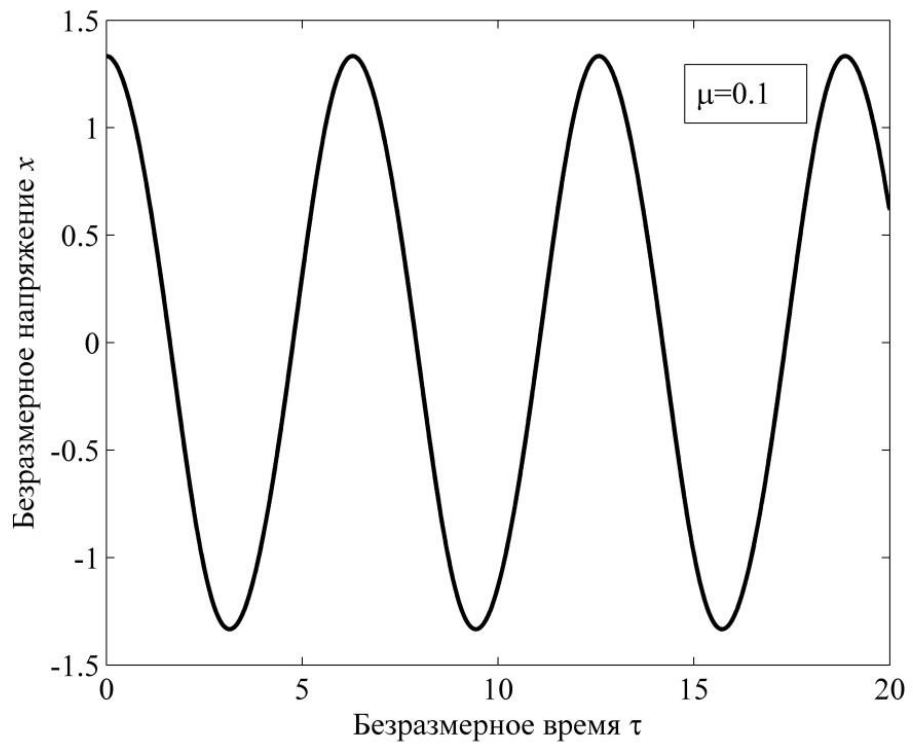


Рисунок 3. Колебания осциллятора Ван-дер-Поля при коэффициенте нелинейности  $\mu = 0.1$ .

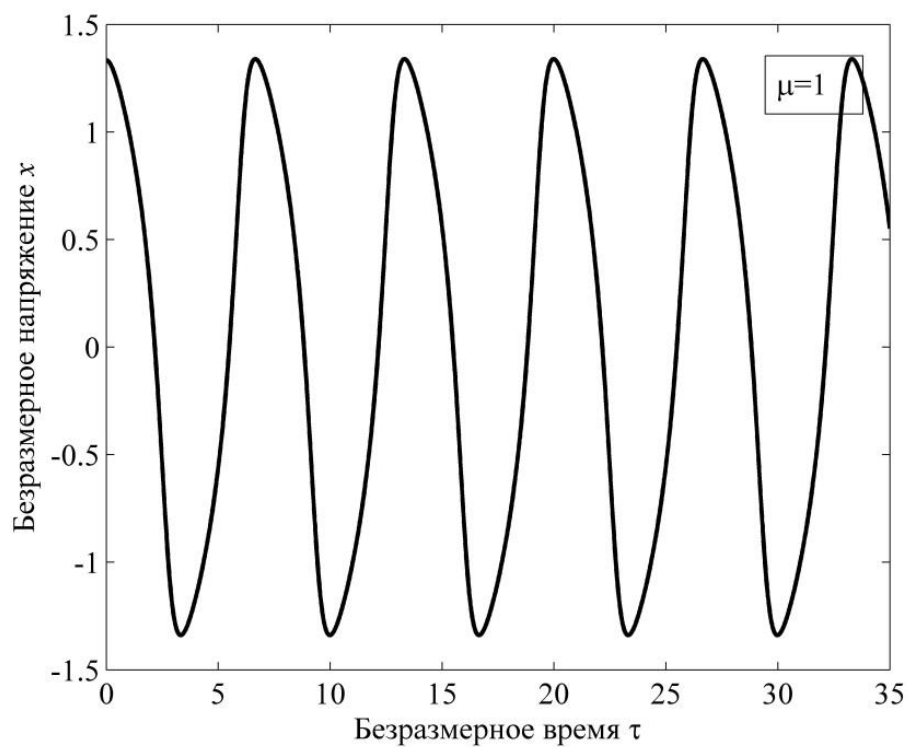


Рисунок 4. Колебания осциллятора Ван-дер-Поля при коэффициенте нелинейности  $\mu = 1$ .

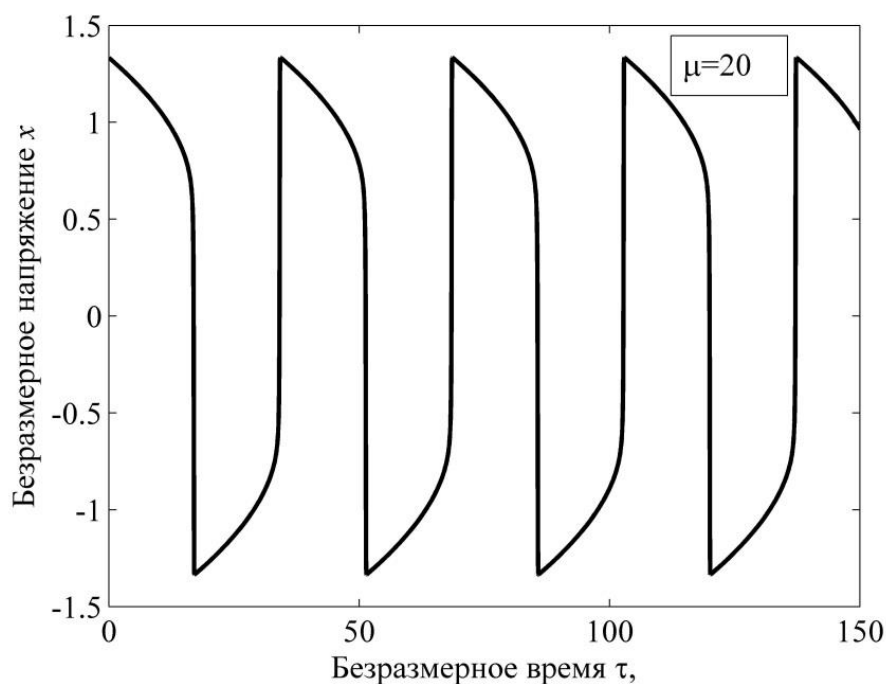


Рисунок 5. Колебания осциллятора Ван-дер-Поля при коэффициенте нелинейности  $\mu = 20$ .

## 1.2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДЛЯ КОЛЬЦЕВОГО ГЕНЕРАТОРА.

В настоящей работе была рассмотрена модель кольцевого генератора, состоящего из нечетного числа последовательно включенных логических инверторов, выполненных на основе MOSFET транзистора, схема которого изображена на рис.7. На рис. 6 изображена схема кольцевого генератора, состоящего из трех инверторов. Пусть  $N$  – число инверторов, образующих кольцевой генератор. Воздействие электромагнитных полей на генератор моделируется при помощи импульсных источников ЭДС  $\mathcal{E}_{1,2,3,\dots,N}(t)$ , включенных между инверторами (рис.6). Функции  $\mathcal{E}_{1,2,3,\dots,N}(t)$  считаются заданными. Каждый из инверторов подключен к источнику питания, обладающему потенциалом  $\mathcal{E}_0$  относительно земли. Значение  $\mathcal{E}_0$  также считается заданным.

Моделирование статической вольт-амперной характеристики транзисторов осуществлялось на основе модели Шихмана-Ходжеса [10]. В

данной модели для N-канального транзистора при неотрицательных значениях напряжения между стоком и истоком  $U_{ds}$  выражение для тока

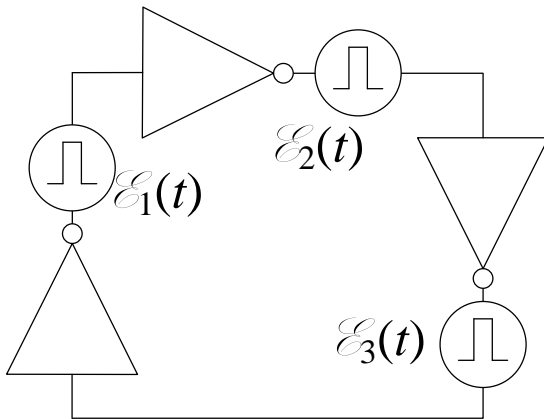


Рис. 6. Схема кольцевого генератора, состоящего из трех логических инверторов.

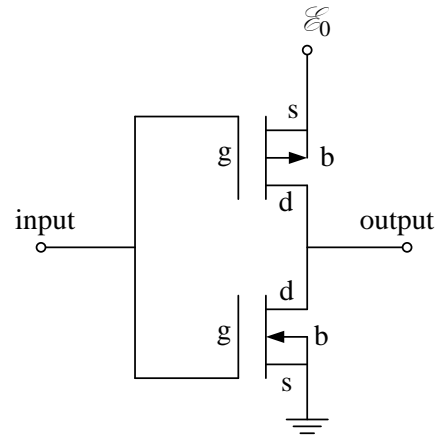


Рис. 7. Схема логического инвертора на базе MOSFET транзисторов.  $E_0$  – напряжение питания.

между стоком и истоком  $I_{ds}$  имеет вид:

$$I_{ds}^N(U_{gs}, U_{ds}) = \begin{cases} 0, U_{gs} - U_{gs \text{ от.}} \leq 0, \\ \beta(U_{gs} - U_{gs \text{ от.}})^2(1 + \lambda U_{ds}), 0 < U_{gs} - U_{gs \text{ от.}} \leq U_{ds}, \\ \beta U_{ds} [2(U_{gs} - U_{gs \text{ от.}}) - U_{ds}](1 + \lambda U_{ds}), 0 < U_{ds} \leq U_{gs} - U_{gs \text{ от.}} \end{cases} \quad (15)$$

Здесь  $U_{gs}$  – напряжение между затвором и истоком (см. рис. 7),  $U_{gs \text{ от.}}$  – напряжение отсечки между затвором и истоком,  $\beta$  – коэффициент прямой проводимости полевого транзистора,  $\lambda$  – параметр модуляции его длины канала. Для случая  $U_{ds} \leq 0$ :

$$I_{ds}^N(U_{gs}, U_{ds}) = \begin{cases} 0, U_{gs} - U_{gs \text{ от.}} \leq 0, \\ -\beta(U_{gs} - U_{gs \text{ от.}})^2(1 - \lambda U_{ds}), 0 < U_{gs} - U_{gs \text{ от.}} \leq -U_{ds}, \\ \beta U_{ds} [2(U_{gs} - U_{gs \text{ от.}}) + U_{ds}](1 - \lambda U_{ds}), 0 < -U_{ds} \leq U_{gs} - U_{gs \text{ от.}} \end{cases} \quad (16)$$

Мы использовали значения параметров модели Шихмана-Ходжеса, приведенные в работе [10]:  $U_{gs \text{ от.}} = -2$  В,  $\beta = 10^{-4}$ ,  $\lambda = 0$ .

Вольт-амперные характеристики (ВАХ) N-канального транзистора, параметры которых приведены выше, показаны на рис.8. Далее для

простоты мы считали, что ВАХ N-канального и P-канального транзисторов связаны соотношением:  $I_{ds}(U_{gs}, U_{ds}) = I_{ds}^n(-U_{gs}, U_{ds})$ . С учетом данного соотношения, для входного и выходного напряжений инвертора ( $U_{in}$  и  $U_{out}$ ) справедливы следующие равенства (см. рис. 7). Для N-канального транзистора:  $U_{in} = U_{gb}^n = U_{gs}^n$  и  $U_{out} = U_{db}^n = U_{ds}^n$ . Для P-канального транзистора:  $U_{in} = \mathcal{E}_0 - U_{gb}^p = \mathcal{E}_0 - U_{gs}^p$  и  $U_{out} = U_{in} + U_{dg}^p = \mathcal{E}_0 - U_{gs}^p + U_{dg}^p = U_{db}^p + \mathcal{E}_0 = U_{ds}^p + \mathcal{E}_0$ . Напряжение питания  $\mathcal{E}_0$  мы всюду брали равным 2.2 В, что соответствует значениям рабочего напряжения современных интегральных микросхем [11, с.8; 12, с.123-131]. Кроме того, 2.2 В является минимальным напряжением питания для целого семейства микроконтроллеров с архитектурой PIC, (например, см. модель PIC32MZ0512EFE064-I/PT [13]).

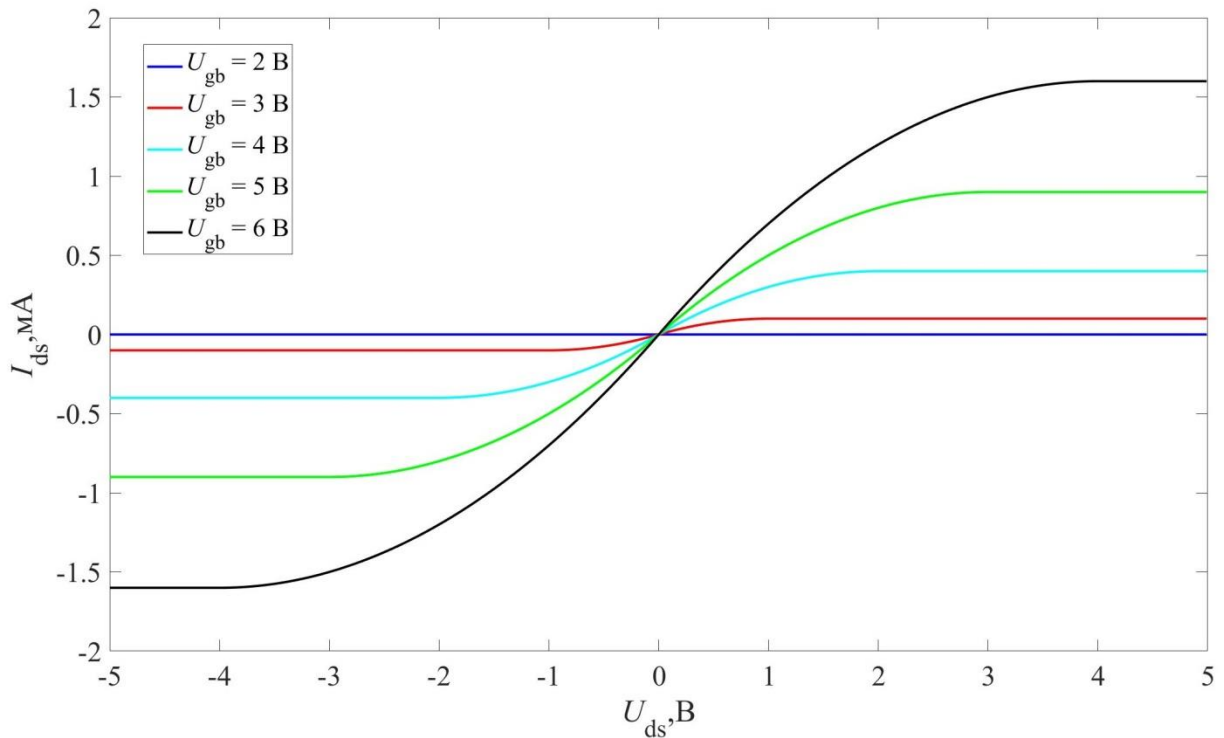


Рисунок 8. Вольт-амперная характеристика N-канального транзистора.

Два транзистора (N- и P-канальный), соединенные согласно схеме, изображенной на рис.8, образуют инвертор. При указанных выше значениях напряжения питания и характеристиках ВАХ зависимость входного напряжения  $U_{in}$  от выходного напряжения  $U_{out}$  данного инвертора представлена на рис. 9.

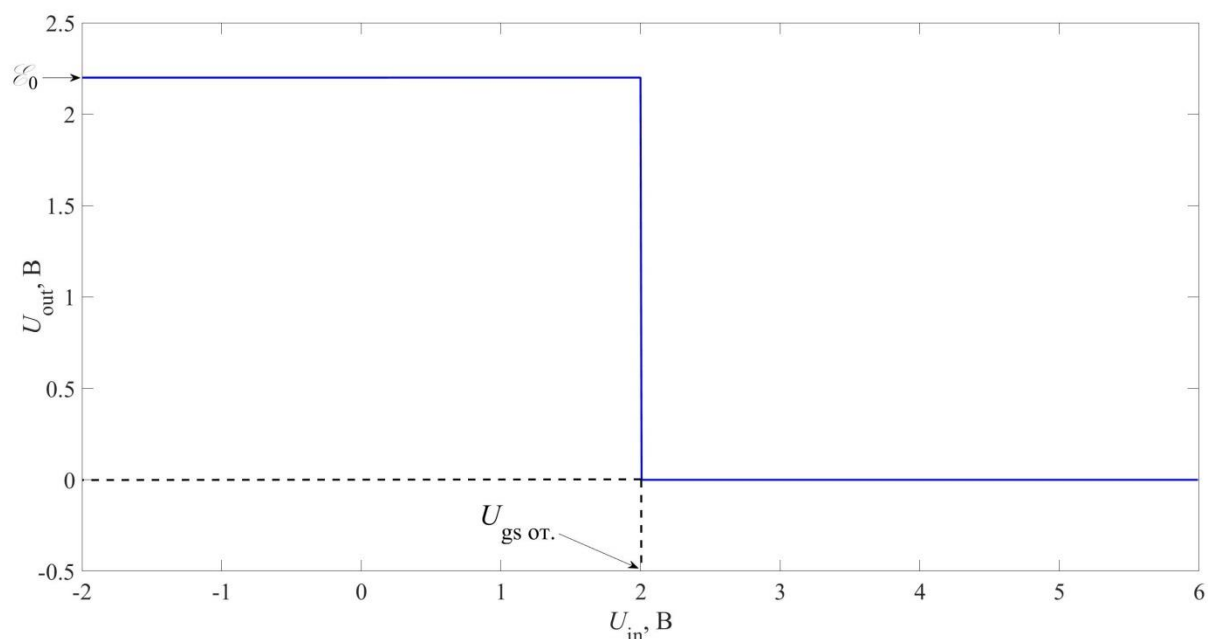


Рисунок 9. Зависимость выходного напряжения инвертора  $U_{in}$  от входного  $U_{out}$ .

В силу предположения  $I_{ds}^p(U_{gs}, U_{ds}) = I_{ds}^n(-U_{gs}, U_{ds})$ , данная зависимость представляет собой идеальную ступеньку высотой  $\mathcal{E}_0$ . Учет особенностей, связанных с асимметрией ВАХ N- и P- канального транзистора (асимметрия возникает вследствие различного типа проводимости), приводит к тому, что данное равенство строго не выполняется. При этом «идеальная ступенька» приобретает вид сигмоиды. В наших дальнейших работах мы планируем учесть данный эффект при помощи более точных моделей ВАХ, основанных на понятии поверхностного потенциала.

Моделирование динамических характеристик транзисторов осуществлялось при помощи учета подзатворной ёмкости. Эквивалентная схема замещения транзистора представлена на рис.10. Транзистор представляется в виде конденсатора и резистора, сопротивление которого зависит от разности потенциалов между обкладками конденсатора. Здесь  $k$  – порядковый номер инвертора в схеме кольцевого генератора. Данная физическая система, очевидно, обладает свойствами циклической симметрии. Например, пусть известно уравнение, описывающее выходное

напряжение  $k$ -ого инвертора. Из соображений принципа причинности можно заключить, что данное уравнение должно включать в себя характеристики  $k$ -ого инвертора, а также предыдущего инвертора с номером  $k-1$ . Тогда заменами  $(k-1) \rightarrow k$ ,  $k \rightarrow (k+1)$  можно получить уравнение для  $k+1$ -го инвертора. При этом следует учитывать, что если необходимо найти связь последнего ( $k=N$ ) и первого ( $k=1$ ) инверторов, следует выполнять замены:  $(N-1) \rightarrow N$ ,  $N \rightarrow 1$ . Например, в случае трех инверторов:  $k=1,2,3$ . При этом если в формулах возникает равенство  $k=0$ , то принимается  $k=3$ . Если же возникает равенство  $k=4$ , то принимается  $k=1$ .

Ниже приведен вывод системы уравнений, описывающей колебания в кольцевом генераторе. Воспользуемся определением силы тока, а также выражением, которое связывает заряд и напряжение конденсатора:

$$U_k^{n,p} = \frac{q_k^{n,p}}{C_k^{n,p}}, \quad (17)$$

$$I_{C_k}^{n,p} = \dot{q}_k^{n,p} = C_k^{n,p} \dot{U}_k^{n,p}. \quad (18)$$

Дифференцируя равенство

$$\mathcal{E}_0 = U_k^n + U_k^p, \quad (19)$$

получаем:

$$\dot{U}_k^p = -\dot{U}_k^n \quad (20)$$

Рассмотрим ток  $I_k$ . С одной стороны  $I_k = I_{C_{k+1}}^p - I_{C_{k+1}}^n$ , с другой  $I_k = I_{dsk}^p + I_{dsk}^n$ . Далее рассмотрим ток, текущий от точки с потенциалом  $\mathcal{E}_0$  к точке заземления. Используя формулы (17)-(20), получаем следующие выражения:

$$I_k = I_{C_{k+1}}^p - I_{C_{k+1}}^n = C_{k+1}^p \dot{U}_{k+1}^p - C_{k+1}^n \dot{U}_{k+1}^n = -\dot{U}_{k+1}^n (C_{k+1}^p + C_{k+1}^n) = I_{dsk}^p + I_{dsk}^n. \quad (21)$$

Примем новые обозначения:

$$U_k = U_k^n = U_{in_k}. \quad (22)$$

С учетом ЭДС, моделирующих воздействие помехи (рис.6):

$$U_{out_k} = U_{k+1} - \mathcal{E}_k(t). \quad (23)$$

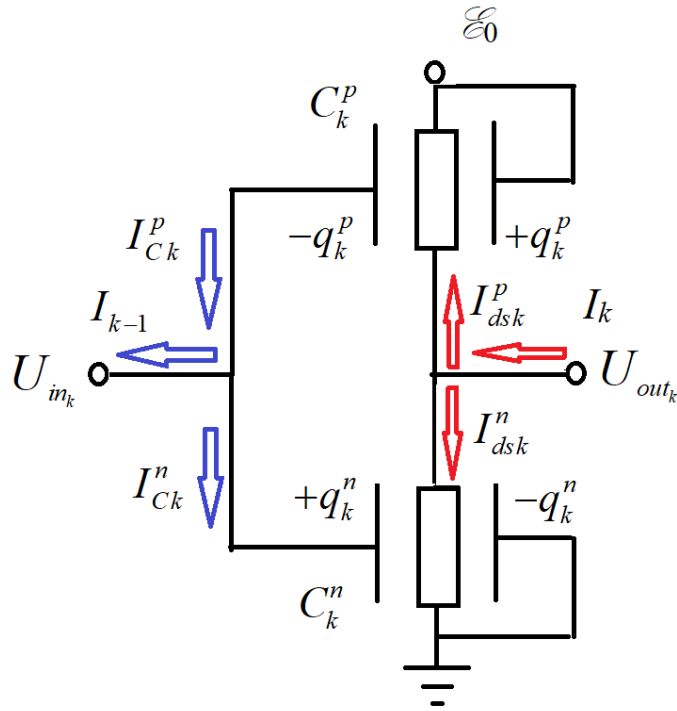


Рисунок 10. Эквивалентная схема  $k$ -го инвертора. Стрелками обозначены выбранные направления токов.

Для простоты предположим, что подзатворные ёмкости всех транзисторов равны между собой. Значение данных ёмкостей, как правило, составляет порядка 1 пФ [14], таким образом:

$$C_k^n + C_k^p = C_k = 2 \text{ пФ}. \quad (24)$$

Подставляя (22)-(24) в (21), получим систему дифференциальных уравнений, которые описывают колебания кольцевого генератора:

$$\dot{U}_k = -C_k^{-1} \{ I_{ds\ k-1}^p (U_{k-1} - \xi_0; U_k - \xi_0 - \xi_{k-1}) + I_{ds\ k-1}^n (U_{k-1}; U_k - \xi_{k-1}) \}. \quad (25)$$

Для численного решения системы (25) использовался метод Рунге-Кутты 4-го порядка (схема данного алгоритма широко известна, поэтому мы решили здесь не приводить её). Меандры колебаний кольцевого генератора, состоящего из 3-х и 5-ти инверторов, при указанных выше параметрах модели представлены на рис. 11-12. В первом случае период колебаний генератора  $T = 6.6$  мкс, а во втором случае  $T = 11$  мкс.



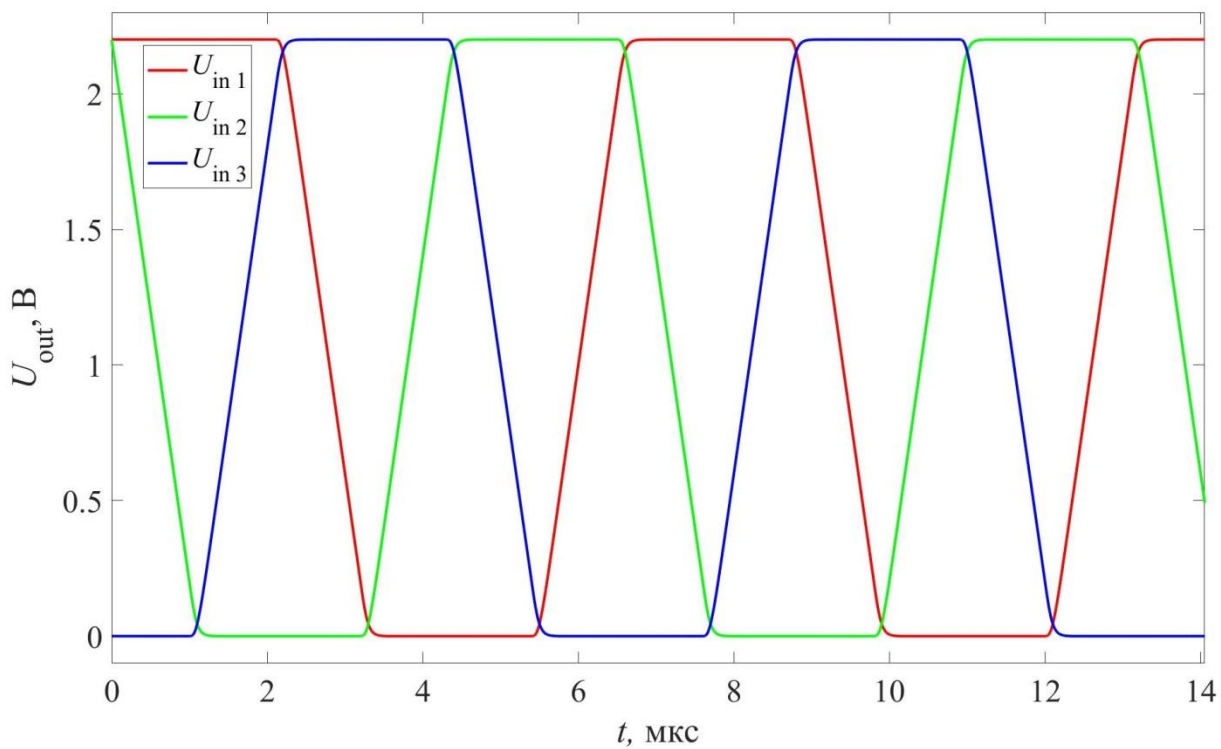


Рисунок 11. Меандр колебаний кольцевого генератора, состоящего из 3-х инверторов.

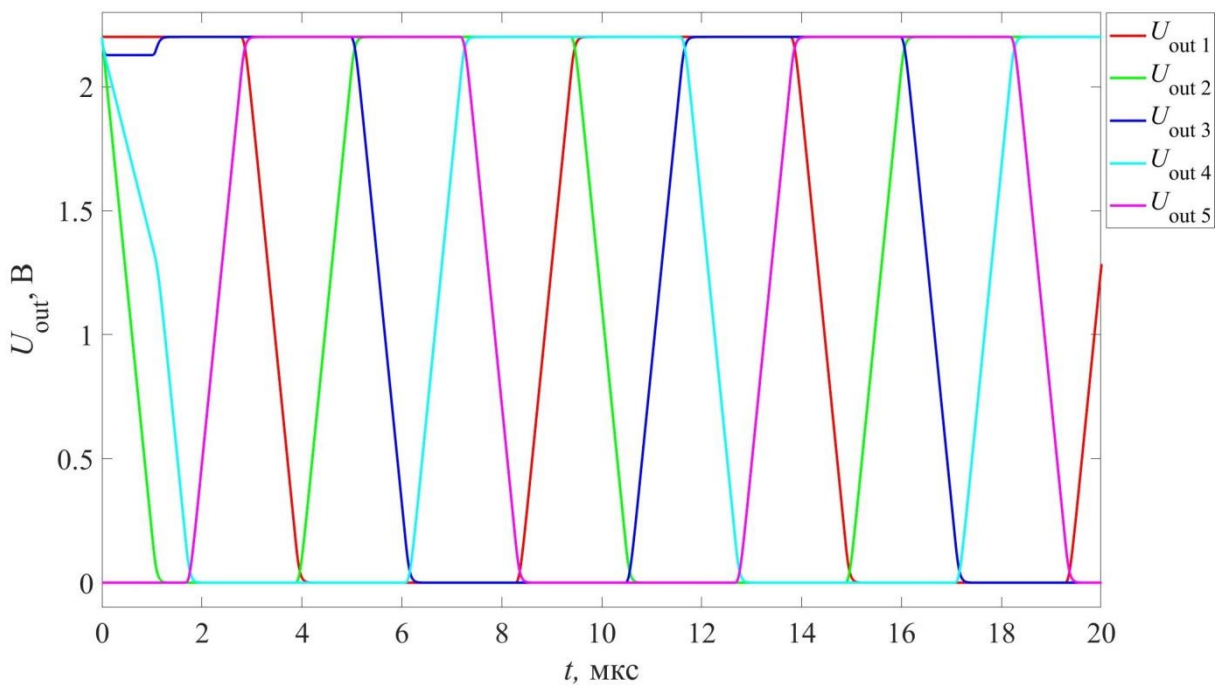


Рисунок 12. Меандр колебаний кольцевого генератора, состоящего из 5-ти инверторов.

### 1.3. ЭНЕРГИЯ КОЛЬЦЕВОГО ГЕНЕРАТОРА И ГЕНЕРАТОРА ВАН-ДЕР-ПОЛЯ.

Найдем зависимость энергий осцилляторов от времени и рассмотрим характерные особенности каждой модели.

Из схемы, изображенной на рис.10, можно заключить, что энергия кольцевого генератора равна сумме энергий, запасенных в подзатворных ёмкостях N-канальных и P-канальных транзисторов:

$$W_{К.Г.} = \sum_{i=1}^N \frac{C_i^n (U_i^n)^2}{2} + \sum_{j=1}^N \frac{C_j^p (U_j^p)^2}{2}. \quad (26)$$

Здесь  $N$ , как и ранее, число инверторов в кольцевом генераторе. Из формулы (19) выразим напряжение на P-канальных транзисторах и подставим в (26). Учитывая (22) и (24) и объединив две суммы в одну, получим формулу, выражающую энергию кольцевого генератора через напряжения на входе инверторов  $U_i$ :

$$W_{К.Г.}(t) = \sum_{i=1}^N \frac{C_i}{4} \left( (U_i(t))^2 + (\xi_0 - U_i(t))^2 \right). \quad (27)$$

Зависимость энергии кольцевого генератора от времени представлена на рис.13 для случая  $N=3$  инверторов, и на рис. 14 для случая  $N=5$  инверторов.

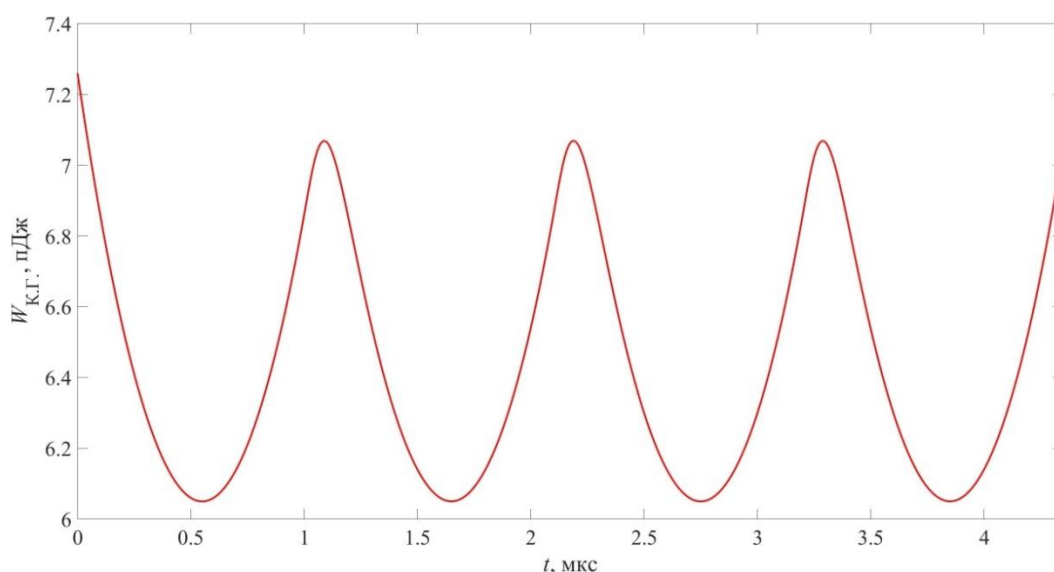


Рисунок 13. Зависимость энергии кольцевого генератора, состоящего из  $N = 3$  инверторов, от времени.

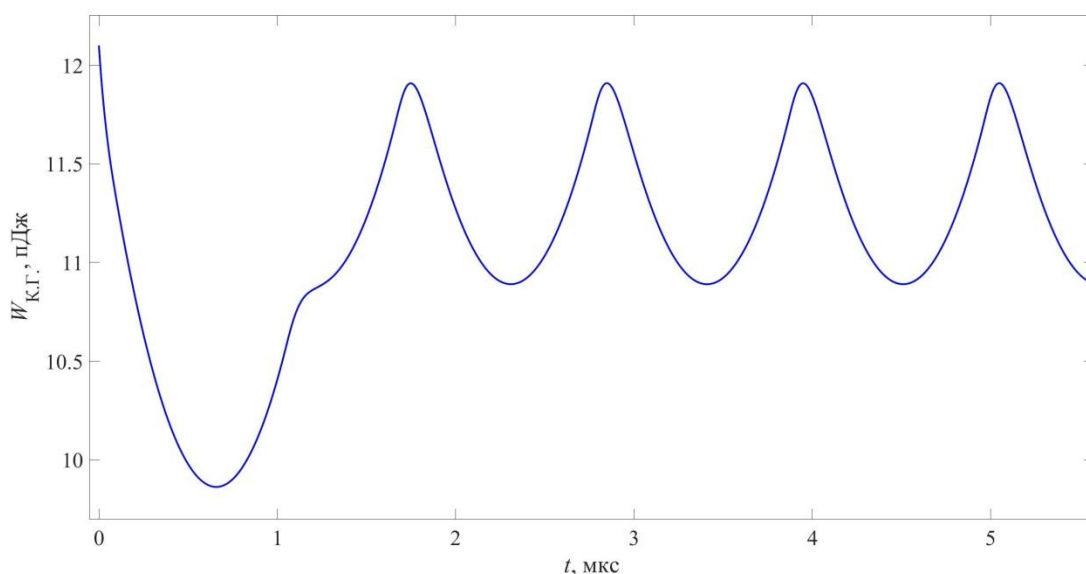


Рисунок 14. Зависимость энергии кольцевого генератора, состоящего из  $N = 5$  инверторов, от времени.

Зависимость энергии от времени также периодическая. Однако, как следует из графиков, период колебания энергии  $T_w$  оказывается связан с периодом колебаний напряжения  $T$  на подзатворных емкостях соотношением:

$$T_w = T/N \quad (28)$$

Стоит отметить, что кольцевому генератору требуется некоторый интервал времени (примерно 1 – 2 мкс), чтобы в нем установились устойчивые колебания, что также можно наблюдать на графиках зависимости энергии от времени.

Как видно из графиков, изображенных на рис. 13-14, интервалы времени, на которых энергия кольцевого генератора возрастает, равны интервалам времени, на которых энергия убывает. Таким образом, интервал времени действия положительной отрицательной связи (соответствующий увеличению энергии системы) оказывается равен интервалу действия отрицательной обратной связи (соответствующий убыванию энергии системы). Кроме того, следует отметить, что амплитуда колебаний энергии много меньше, чем ее среднее значение.

Найдем энергию генератора Ван-дер-Поля. Из рис. 2 следует, что энергия системы состоит из энергии, запасенной в емкости и в катушке.

$$W = \frac{CU_c^2}{2} + \frac{LI_L^2}{2}, \quad (29)$$

где  $U_c^2$  – напряжение на конденсаторе,  $I_L^2$  – сила тока, проходящего через катушку. Так как  $I_L = I_C$ , то учитывая определение силы тока и связь между ёмкостью, зарядом на обкладках конденсатора и напряжением, получим

$$I_L = I_C = \frac{dq_c}{dt} = \frac{d}{dt}(CU_c) = C \frac{dU_c}{dt}. \quad (30)$$

Обозначим  $U_c = U$ . Подставим (30) в (29)

$$W = \frac{CU^2}{2} + \frac{LC^2}{2} \left( \frac{dU}{dt} \right)^2. \quad (31)$$

Согласно [9], безразмерное время и безразмерное напряжение связаны с соответствующими размерными величинами следующими соотношениями:

$$\tau = \omega_0 t, x = \alpha U, \quad (32)$$

где  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ ,  $\alpha$  – некоторый коэффициент, обладающий размерностью обратной размерности напряжения, который определяется из ВАХ транзистора (рис.2), тогда:

$$\frac{d}{dt} = \omega_0 \frac{d}{d\tau}, \quad (33)$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\omega_0}{\alpha} \frac{dx}{d\tau}. \quad (34)$$

Подставим (32) и (34) в формулу (31), получим:

$$\begin{aligned} W &= \frac{C}{2} \left( \frac{1}{\alpha} x \right)^2 + \frac{LC^2}{2} \left( \frac{1}{\alpha \omega_0} \frac{dx}{d\tau} \right)^2 = \frac{C}{2} \frac{1}{\alpha^2} x^2 + \frac{LC^2}{2} \frac{1}{\alpha^2 LC} \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 = \\ &= \frac{C}{2} \frac{1}{\alpha^2} \left( x^2 + \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 \right), \end{aligned} \quad (35)$$

где  $x$  – решение уравнения Ван-дер-Поля в канонической форме (2). При этом в формуле (35) лишь коэффициент  $\frac{C}{2} \frac{1}{\alpha^2}$  обладает размерностью

энергии. Так как нас интересует безразмерный эквивалент энергии генератора Ван-дер-Поля, то формула (35) приобретает следующий вид:

$$W_{ВДП} = x^2 + \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2. \quad (36)$$

Зависимость безразмерной энергии (36) от безразмерного времени  $\tau$  для коэффициентов нелинейности  $\mu = 3.87$ ,  $\mu = 6.85$  изображена на рис.15-16 соответственно (выбор указанных значений  $\mu$  мы поясним ниже).

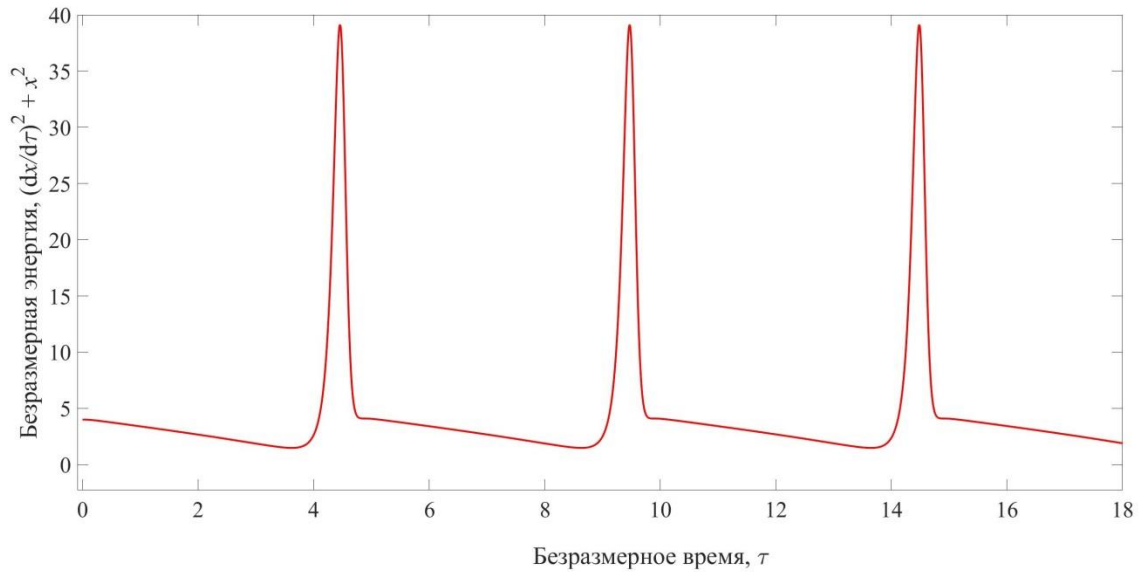


Рисунок 15. Зависимость безразмерной энергии осциллятора Ван-дер-Поля, коэффициент нелинейности  $\mu = 3.87$ .

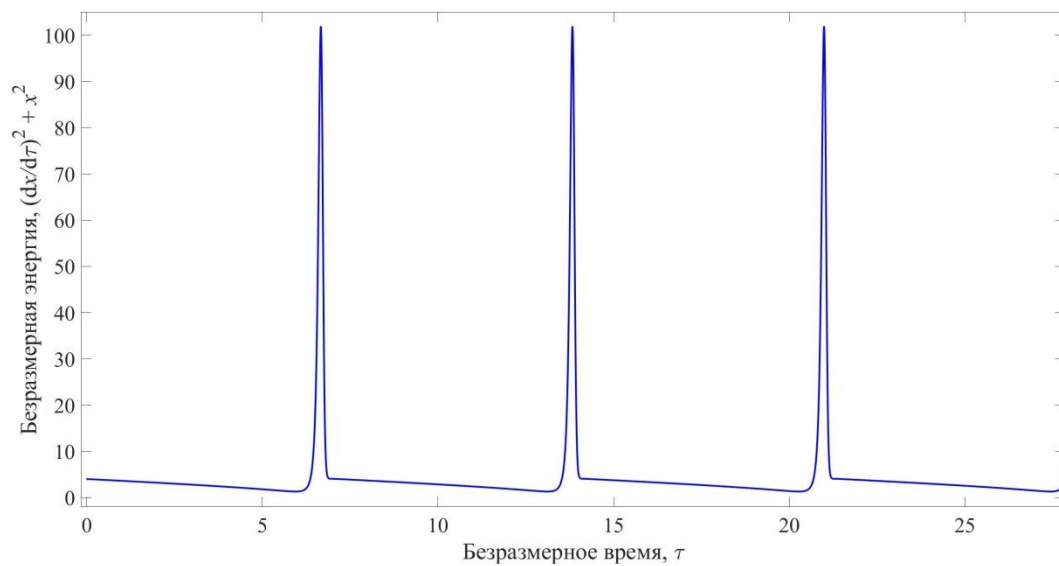


Рисунок 16. Зависимость безразмерной энергии осциллятора Ван-дер-Поля, коэффициент нелинейности  $\mu = 6.85$ .

Видно характерное отличие колебаний осциллятора Ван-дер-Поля: временные интервалы действия положительной обратной  $T^+$  связи гораздо короче интервалов действия отрицательной обратной связи  $T$ . Энергия системы за короткий промежуток времени действия положительной обратной связи скачкообразно увеличивается в несколько десятков раз. При этом с возрастанием  $\mu$  отношение  $T^+/T$  уменьшается, а амплитуда колебаний энергии увеличивается. Подобные особенности являются характерными отличительными признаками нелинейных автоколебательных систем релаксационного типа [9].

Подводя итоги данной главы, можно заключить, что рассматриваемые модели генераторов достаточно сильно отличаются друг от друга. Поэтому, для того чтобы сравнение величины воздействия помех на осциллятор Ван-дер-Поля и на кольцевой генератор было корректным, мы использовали следующую методику. Мы ввели параметр  $p$ , определяемый соотношением:

$$p = t_D/T \quad (37)$$

здесь  $t_D$  – так называемое время задержки,  $T$ , как и ранее, период колебаний осциллятора. Далее мы будем проводить сравнение автоколебательных систем, для которых параметр  $p$  принимает одинаковое значение. Время задержки определяется как среднее время, за которое происходит «перескок» меандра колебаний с уровня логического нуля до уровня логической единицы. Применительно к кольцевому генератору, существует стандартная методика оценки времени задержки, согласно которой  $t_D = T/2N$  (стоит отметить и другие подходы, см. обзор [15]). Таким образом, для  $N = 3$ ,  $p = 1/6$ , а для  $N = 5$ ,  $p = 1/10$  (из графиков, изображенных на рис. 11-12, можно заключить, что данные соотношения действительно выполняются).

В случае осциллятора Ван-дер-Поля под временем задержки обычно понимается время действия положительной обратной связи [7]. Методом подбора мы нашли, что значению  $p = 1/6$  соответствует  $\mu = 3.87$ , а  $p = 1/10$  соответствует  $\mu = 6.85$ . Далее сравнительный анализ будет проводиться именно для двух данных случаев.

## ГЛАВА 2. ФАЗОВЫЙ СДВИГ МЕАНДРА КОЛЕБАНИЙ КОЛЬЦЕВОГО ГЕНЕРАТОРА. АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (25), которая описывает меандр колебаний кольцевого генератора. Так как напряжение на инверторах  $\mathcal{E}_0$  постоянно и  $U_{k-1} = V_{gb}, U_k - \mathcal{E}_{k-1} = V_{ds}$ , то, обозначив сумму токов сток-исток N-канального и P-канального транзисторов как  $I_{ds}$ , получим:

$$\dot{U}_k = -C_k^{-1} I_{ds, k-1} (V_{gbk-1}; V_{dsk}). \quad (38)$$

Сформулируем постановку задачи о расчете фазового сдвига меандра колебаний. Пусть функции  $U_{0k}(t)$  – решения системы (25) для случая, когда воздействия помехи не происходит (невозмущенный помехой меандр колебаний). Далее функции  $U_{0k}(t)$  мы будем считать известными. Также пусть известны параметры прямоугольной импульсной помехи: ЭДС  $\mathcal{E}_{1,2,3,\dots,N}$ , а также  $t_0$  и  $t_1$  – моменты времени начала и завершения действия помехи. Далее, пусть  $t_2$  – время, соответствующее возврату возмущенного помехой решения уравнения (25) (уравнения (2)) к предельному циклу. Требуется найти сдвиг фаз  $\vartheta$ .

Рассмотрим интервал времени воздействия помехи ( $t_0, t_1$ ). Используя метод Эйлера, найдем возмущенное решение системы (25) (то есть функции  $U_k(t)$ ) в момент завершения внешнего воздействия  $t_1$ :

$$U_k(t_1) = U_k(t_0) + \dot{U}_k(t_0)(t_1 - t_0) + \ddot{U}_k(t_0) \frac{(t_1 - t_0)^2}{2} \quad (39)$$

В момент времени  $t_0$  возмущенное и невозмущенное решения (25) равны:

$$U_k(t_0) = U_{0k}(t_0), \dot{U}_k(t_0) = \dot{U}_{0k}(t_0). \quad (40)$$

Найдем  $\ddot{U}_k(t_0)$ , продифференцировав (38) по времени:

$$\ddot{U}_k(t_0) = -C_k^{-1} \left( \frac{\partial I_{dsk-1}}{\partial V_{gbk-1}} \dot{U}_{0k-1} + \frac{\partial I_{dsk-1}}{\partial V_{dsk-1}} \dot{U}_{0k} \right). \quad (41)$$

Подставим (40)-(41) в (39) и, таким образом, выразим возмущенное решение системы  $U_k$  в момент времени завершения действия помехи  $t_1$

через известные (известные, согласно вышеописанной постановке задачи) величины:

$$U_k(t_1) = U_{0k}(t_0) + \dot{U}_{0k}(t_0)(t_1 - t_0) - C_k^{-1} \left( \frac{\partial I_{dsk-1}(t_0)}{\partial V_{gbk-1}} \dot{U}_{0k-1}(t_0) + \frac{\partial I_{dsk-1}(t_0)}{\partial V_{dsk-1}} \dot{U}_{0k}(t_0) \right) \frac{(t_1 - t_0)^2}{2}. \quad (42)$$

Рассмотрим интервал времени  $(t_1, t_2)$ . Поскольку действие помехи заканчивается в момент времени  $t_1$ , возмущенное помехой решение  $U_k$  и невозмущенное помехой решение  $U_{0k}$  на интервале  $(t_1, t_2)$  удовлетворяют одной и той же системе дифференциальных уравнений (отличие заключается лишь в начальных условиях, ставящихся при  $t = t_1$ ):

$$\dot{U}_k = -C_k^{-1} I_{dsk-1}(U_{k-1}; U_k), \quad (43)$$

$$\dot{U}_{0k} = -C_k^{-1} I_{dsk-1}(U_{0k-1}; U_{0k}). \quad (44)$$

Введем функцию, которая равна разности решений уравнений (43) и (44):

$$V_k = U_k - U_{0k}, U_k = U_{0k} + V_k, \quad (45)$$

$$\dot{V}_k = \dot{U}_k - \dot{U}_{0k}. \quad (46)$$

Предположим, что  $U_{0k} \gg V_k$ . Подставим в (46) уравнения (43) и (44):

$$\begin{aligned} \dot{V}_k &= -C_k^{-1} I_{dsk-1}(U_{k-1}; U_k) - (-C_k^{-1} I_{dsk-1}(U_{0k-1}; U_{0k})) = \\ &= -C_k^{-1} \{ I_{dsk-1}(U_{k-1}; U_k) + I_{dsk-1}(U_{0k-1}; U_{0k}) \}. \end{aligned} \quad (47)$$

Подставляя (45) в (47), проводя разложение в ряд Тейлора по  $V_k$  до первого порядка малости, получаем:

$$\begin{aligned} \dot{V}_k &= -C_k^{-1} \left\{ I_{dsk-1}(U_{0k-1}; U_{0k}) + \frac{\partial I_{dsk-1}(U_{0k-1}; U_{0k})}{\partial V_{gbk-1}} V_{k-1} + \right. \\ &\left. + \frac{\partial I_{dsk-1}(U_{0k-1}; U_{0k})}{\partial V_{dsk-1}} V_k - I_{dsk-1}(U_{0k-1}; U_{0k}) \right\}, \end{aligned} \quad (48)$$

окончательно:

$$\dot{V}_k = -C_k^{-1} \left\{ \frac{\partial I_{dsk-1}(U_{0k-1}; U_{0k})}{\partial V_{gbk-1}} V_{k-1} + \frac{\partial I_{dsk-1}(U_{0k-1}; U_{0k})}{\partial V_{dsk-1}} V_k \right\}. \quad (49)$$

Из (45) найдем начальные условия для системы (49):



$$V_k(t_1) = U_k(t_1) - U_{0k}(t_1). \quad (50)$$

Далее оказывается удобным ввести функцию, определяемую равенством

$$W_k(t) = V_k(t) + A\dot{U}_{0k}(t), \quad (51)$$

где  $A$  – произвольная константа не равная нулю. Докажем, что функции  $A\dot{U}_{0k}(t)$  являются частными решениями системы (49). Положим:

$$V_k(t) = A\dot{U}_{0k}(t). \quad (52)$$

Подставим (52) в (49):

$$\dot{V}_k(t) = C\ddot{U}_{0k}(t) = -C^{-1} \left\{ \frac{\partial I_{dsk-1}}{\partial V_{gbk-1}}(U_{0k-1}; U_{0k}) A\dot{U}_{0k-1} + \frac{\partial I_{dsk-1}}{\partial V_{dsk-1}}(U_{0k-1}; U_{0k}) A\dot{U}_{0k} \right\}. \quad (53)$$

Сократим левую и правую часть уравнения на коэффициент  $A$ :

$$\ddot{U}_{0k}(t) = -C^{-1} \left\{ \frac{\partial I_{dsk-1}}{\partial V_{gbk-1}}(U_{0k-1}; U_{0k}) \dot{U}_{0k-1} + \frac{\partial I_{dsk-1}}{\partial V_{dsk-1}}(U_{0k-1}; U_{0k}) \dot{U}_{0k} \right\}. \quad (54)$$

С другой стороны, продифференцировав выражение (44) по времени, можно получить такое же равенство:

$$\frac{d}{dt} \dot{U}_{0k}(t) = \ddot{U}_{0k}(t) = -C^{-1} \left\{ \frac{\partial I_{dsk-1}}{\partial V_{gbk-1}}(U_{0k-1}; U_{0k}) \dot{U}_{0k-1} + \frac{\partial I_{dsk-1}}{\partial V_{dsk-1}}(U_{0k-1}; U_{0k}) \dot{U}_{0k} \right\}. \quad (55)$$

Формулы (54) и (55) совершенно идентичны, отсюда следует, что (52) действительно является частным решением системы (49).

Выберем  $A = -\vartheta$ , тогда подставляя  $A$  и (45) в (51), получаем

$$W_k(t) = U_k(t) - U_{0k}(t) - \vartheta \dot{U}_{0k}(t). \quad (56)$$

Устремим  $t \rightarrow \infty$ . Меандр колебаний после воздействия помехи будет принимать форму невозмущенного решения системы (38), но сдвинутого по времени на величину  $\vartheta$  относительно невозмущенного решения:

$$U_k(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} U_{0k}(t + \vartheta). \quad (57)$$

Тогда (56) при  $t \rightarrow \infty$

$$W_k(t) = U_{0k}(t + \vartheta) - U_{0k}(t) - \vartheta \dot{U}_{0k}(t). \quad (58)$$

Так как

$$U_{0k}(t+\vartheta) - U_{0k}(t) = \dot{U}_{0k}(t)\vartheta + O(\vartheta^2), \quad (59)$$

то подставляя (59) в (58), получим

$$W_k(t) = \dot{U}_{0k}(t)\vartheta + O(\vartheta^2) - \vartheta\dot{U}_{0k}(t) = O(\vartheta^2). \quad (60)$$

Поскольку система (49) линейна,  $V_k$  – решение этой системы, а  $\tau\dot{U}_{0k}$  – частное решение, то и функции  $W_k$  также будет являться решениями данной системы, но при других начальных условиях. Подставим  $W_k$  в (49):

$$\dot{W}_k = -C^{-1} \left\{ \frac{\partial I_{dsk-1}}{\partial V_{gbk-1}}(U_{0k-1}; U_{0k}) W_{k-1} + \frac{\partial I_{dsk-1}}{\partial V_{dsk-1}}(U_{0k-1}; U_{0k}) W_k \right\}. \quad (61)$$

Начальные условия для  $W_k$  найдем из определения функции (56):

$$W_k(t_1) = U_k(t_1) - U_{0k}(t_1) - \vartheta\dot{U}_{0k}(t_1). \quad (62)$$

Проинтегрируем (61) от  $t_1$  до  $\infty$

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{\infty} \dot{W}_k dt = W_k(\infty) - W_k(t_1) = -C^{-1} \int_{t_1}^{\infty} \frac{\partial I_{dsk-1}}{\partial V_{gbk-1}}(U_{0k-1}; U_{0k}) W_{k-1} dt - \\ -C^{-1} \int_{t_1}^{\infty} \frac{\partial I_{dsk-1}}{\partial V_{dsk-1}}(U_{0k-1}; U_{0k}) W_k dt. \end{aligned} \quad (63)$$

Подставим (60) и (62) в (63), получим:

$$\begin{aligned} 0 - (U_k(t_1) - U_{0k}(t_1) - \vartheta\dot{U}_{0k}(t_1)) = -C^{-1} \int_{t_1}^{\infty} \frac{\partial I_{dsk-1}}{\partial V_{gbk-1}}(U_{0k-1}; U_{0k}) W_{k-1} dt - \\ -C^{-1} \int_{t_1}^{\infty} \frac{\partial I_{dsk-1}}{\partial V_{dsk-1}}(U_{0k-1}; U_{0k}) W_k dt, \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \vartheta\dot{U}_{0k}(t_1) = U_k(t_1) - U_{0k}(t_1) - \\ -C^{-1} \int_{t_1}^{\infty} \frac{\partial I_{dsk-1}}{\partial V_{gbk-1}}(U_{0k-1}; U_{0k}) W_{k-1} dt - C^{-1} \int_{t_1}^{\infty} \frac{\partial I_{dsk-1}}{\partial V_{dsk-1}}(U_{0k-1}; U_{0k}) W_k dt. \end{aligned} \quad (65)$$

Чтобы найти  $\vartheta$  из (65), требуется приближенный метод нахождения функций  $W_k(t)$ . Мы предлагаем следующий метод. Пусть:

$$a_{kk}(t) = -C^{-1} \frac{\partial I_{dsk-1}}{\partial V_{gbk-1}}(U_{0k-1}(t); U_{0k}(t)), \quad (66)$$

$$a_{kk-1}(t) = -C^{-1} \frac{\partial I_{dsk-1}}{\partial V_{dsk-1}}(U_{0k-1}(t); U_{0k}(t)), \quad (67)$$

тогда (61) принимает вид:

$$\dot{W}_k = a_{kk}(t)W_k + a_{kk-1}(t)W_{k-1}. \quad (68)$$

Определим нулевое приближение как:

$$\dot{W}_k^{[0]} = a_{kk}(t)W_k^{[0]}, \quad (69)$$

а первое приближение как:

$$\dot{W}_k^{[1]} = a_{kk}(t)W_k^{[1]} + a_{kk-1}(t)W_{k-1}^{[0]}, \quad (70)$$

Решения уравнений (69) имеют вид:

$$W_k^{[0]}(t) = W_k(t_1)G_k(t), \quad G_k(t) = \exp\left(\int_{t_1}^t a_{kk-1}(t')dt'\right). \quad (71)$$

Далее для краткости введем следующие обозначения:

$$I_k(t) = \frac{\partial I_{dsk-1}}{\partial V_{gbk-1}}(U_{0k-1}(t); U_{0k}(t)), \quad (72)$$

$$M_k(t) = \frac{\partial I_{dsk-1}}{\partial V_{dsk-1}}(U_{0k-1}(t); U_{0k}(t)), \quad (73)$$

$$J_k(t) = C^{-1} \int_{t_1}^t I_k(t') \frac{G_{k-1}(t')}{G_k(t')} dt'. \quad (74)$$

Тогда учитывая (71) и (74), получаем решение для системы (70):

$$W_k^{[1]}(t) = G_k(t)W_k(t_1) - G_k(t)W_{k-1}(t_1)J_k(t), \quad (75)$$

где  $W_k(t_1)$  – начальные условия. Введем коэффициенты:

$$A_1 = \int_{t_1}^{\infty} \{I_1(t')G_3(t') - M_1(t')G_1(t')J_1(t')\} dt', \quad (76)$$

$$A_2 = \int_{t_1}^{\infty} I_1(t')G_3(t')J_3(t') dt', \quad (77)$$

$$A_3 = \int_{t_1}^{\infty} M_1(t')G_1(t') dt'. \quad (78)$$

Подставляя (75)-(78) в (65) и выражая из (65)  $\vartheta$ , получаем выражение для фазового сдвига меандра колебаний кольцевого генератора:

$$\vartheta = \frac{C^{-1} \{A_1 V_3(t_1) - A_2 V_2(t_1) + A_3 V_1(t_1)\} - V_1(t_1)}{C^{-1} \{A_1 \dot{U}_{03}(t_1) - A_2 \dot{U}_{02}(t_1) + A_3 \dot{U}_{01}(t_1)\} - \dot{U}_{01}(t_1)}, \quad (79)$$

где  $V_k(t_1) = U_k(t_1) - U_{0k}(t_1)$ . Функции  $U_k(t_1)$  выражаются через известные величины, согласно формуле (42).

### ГЛАВА 3. ФАЗОВЫЙ СДВИГ МЕАНДРА КОЛЕБАНИЙ ГЕНЕРАТОРА ВАН-ДЕР-ПОЛЯ. АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД.

Аналитический подход, предлагаемый для осциллятора Ван-дер-Поля, основан на законе сохранения импульса, который приближенно справедлив для уравнения (2). Пусть  $x_u(t)$  и  $x_p(t)$  – невозмущенное и возмущенное помехой решения уравнения (2) соответственно (далее под переменной  $t$  понимается безразмерное время). Проинтегрируем (2) для  $x_p(t)$  от  $t_0$  до  $t_2$ :

$$\{\dot{x}_p(t_2) - \dot{x}_p(t_0)\} - \mu\{x_p(t_2) - x_p(t_0)\} + \mu\{x_p^3(t_2) - x_p^3(t_0)\} / 3 + \int_{t_0}^{t_2} x_p(t) dt = \int_{t_0}^{t_2} f(t) dt \quad (80)$$

Интеграл в правой части (80) обозначим буквой  $S$ .  $S$  – площадь области под графом функции  $f(t)$ . Также как и в случае кольцевого генератора, используем предположение о том, что возмущенное решение  $x_p(t)$  после возвращения к предельному циклу является невозмущенным решением, сдвинутым на величину фазового сдвига  $x_u(t+\vartheta)$ . Итак,  $x_p(t) = x_u(t+\vartheta)$ ,  $\dot{x}_p(t) = \dot{x}_u(t+\vartheta)$  для всех  $t \geq t_2$ . Заметим, что при  $\vartheta < 0$  возмущенное решение запаздывает (график смещается вправо), а при  $\vartheta > 0$  возмущенное решение опережает невозмущенное (график смещается влево).

Ограничим класс рассматриваемых помех условием  $t_2 - t_0 \ll |\vartheta|$ . Используя это условие, мы можем записать  $t_2 + \vartheta = t_2 - t_0 + \vartheta + t_0 \approx \vartheta + t_0$ , поэтому при  $t = t_2$ ,  $x_p(t_2) \approx x_u(\vartheta + t_0)$ ,  $\dot{x}_p(t_2) \approx \dot{x}_u(\vartheta + t_0)$ .

Распишем  $\dot{x}_p(t_2)$  и  $x_p(t_2)$  в левой части (80), используя разложения в ряд Тейлора решений  $\dot{x}_u(t)$  и  $x_u(t)$  в окрестности точки  $t_0$  до порядка  $O(\tau^3)$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t_2) &= \dot{x}_u(\vartheta + t_0) = \dot{x}_u(t_0) + \tau \ddot{x}_u(t_0) + 0.5\vartheta^2 \dddot{x}_u(t_0) + O(\vartheta^3) \\ x_p(t_2) &= x_u(\vartheta + t_0) = x_u(t_0) + \vartheta \dot{x}_u(t_0) + 0.5\vartheta^2 \ddot{x}_u(t_0) + O(\vartheta^3) \end{aligned} \quad (81)$$

Из численного эксперимента можно сделать вывод, что в общем случае  $t_2 - t_0 \neq \vartheta$ . Производная  $\ddot{x}_u(t_0)$  может быть непосредственно выражена через  $\dot{x}_u(t_0)$  и  $x_u(t_0)$  из уравнения (2), записанного для  $x_u(t)$ :

$$\ddot{x}_u(t_0) = \mu(1 - x_u^2(t_0))\dot{x}_u(t_0) - x_u(t_0) \quad (82)$$

Дифференцируя (82), получаем:

$$\ddot{x}_u(t_0) = -2\mu x_u(t_0)\dot{x}_u^2(t_0) + \mu(1 - x_u^2(t_0))\ddot{x}_u(t_0) - \dot{x}_u(t_0) \quad (83)$$

Подставляя в (83)  $\ddot{x}_u(t_0)$  из (82), получаем:

$$\ddot{x}_u(t_0) = -2\mu x_u(t_0)\dot{x}_u^2(t_0) + \mu^2(1-x_u^2(t_0))^2\dot{x}_u(t_0) - \mu(1-x_u^2(t_0))x_u(t_0) - \dot{x}_u(t_0) \quad (84)$$

Подставляя выражения (82), (84) в (81), мы, таким образом, выражаем  $\dot{x}_p(t_2)$  и  $x_p(t_2)$  через  $\dot{x}_u(t_0)$ ,  $x_u(t_0)$  и  $\vartheta$  с точностью до  $O(\vartheta^3)$ . Далее для краткости введём обозначения  $x_u(t_0) \equiv x_0$  и  $x_u(t_2) \equiv x_2$ :

$$\dot{x}_2 = x_0 + \vartheta[\mu(1-x_0^2)\dot{x}_0 - x_0] + 0.5\vartheta^2[-2\mu x_0\dot{x}_0^2 + \mu^2(1-x_0^2)^2\dot{x}_0 - \mu(1-x_0^2)x_0 - \dot{x}_0] \quad (85)$$

$$x_2 = x_0 + \vartheta\dot{x}_0 + 0.5\vartheta^2[\mu(1-x_0^2)\dot{x}_0 - x_0] \quad (86)$$

Подставим выражения (85), (86) в (80), учитывая, что  $\dot{x}_p(t_0) \equiv \dot{x}_u(t_0)$ ,  $x_p(t) \equiv x_u(t)$ , после сокращения одинаковых слагаемых получаем:

$$-0.5\dot{x}_0^2\vartheta^2 - x_0\vartheta + \int_{t_0}^{t_2} x_p(t)dt = S \quad (87)$$

Интеграл в (87) может быть оценен как  $x_0(t_2 - t_0)$ , поэтому при  $t_2 - t_0 \ll |\vartheta|$  им можно пренебречь. Тогда из (87) можно найти  $\vartheta$ :

$$\vartheta = \left(-x_0 \pm \sqrt{x_0^2 - 2\dot{x}_0 S}\right) / \dot{x}_0 \quad (88)$$

Знак в выражении (88) выбирается из условия  $\vartheta \rightarrow -S/x_0$  при  $S \rightarrow 0$ , что соответствует пренебрежению членами порядка  $O(\vartheta^2)$  в выражении (87) при  $S \rightarrow 0$ . Можно показать, что если  $x_0 > 0$ , то следует выбрать знак плюс, а в противном случае – знак минус. Очевидно, что приведенный выше подход хорошо работает только при  $S \ll x_0^2/2\dot{x}_0$ , так как подкоренное выражение в (88) отрицательно при  $S > x_0^2/2\dot{x}_0$ . Приведенные в данной главе выкладки были изложены в наших работах [15-16].

## ГЛАВА 4. РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ.

Будем рассматривать воздействие помех прямоугольной формы. В таком случае оказывается, что фазовый свинг  $\vartheta$  зависит от продолжительности помехи  $T_{\text{int}} = t_1 - t_0$ , её амплитуды  $A_{\text{int}}$ , а также от момента начала воздействия помехи  $t_0$ . На рис. 17-19 изображены зависимости  $\vartheta$  от  $t_0$  для осциллятора Ван-дер-Поля при  $T_{\text{int}} = 0.1$  отн. ед., и  $A_{\text{int}} = 2$  отн. ед. для различных коэффициентов нелинейности  $\mu$ . Красные графики соответствуют сдвигу фаз, рассчитанному согласно формуле (88), синие графики соответствуют сдвигу фаз, найденному из численного эксперимента. Пунктирные зеленые графики соответствуют форме меандра колебаний для заданного значения коэффициента нелинейности. Из данных графиков можно заключить, что точность приближенной аналитической формулы (88) увеличивается с ростом  $\mu$ . Это происходит потому, что с увеличением коэффициента нелинейности предельный цикл уравнения (2) становится все более устойчивым, таким образом возмущенное помехой решение за более короткий промежуток времени возвращается к предельному циклу.

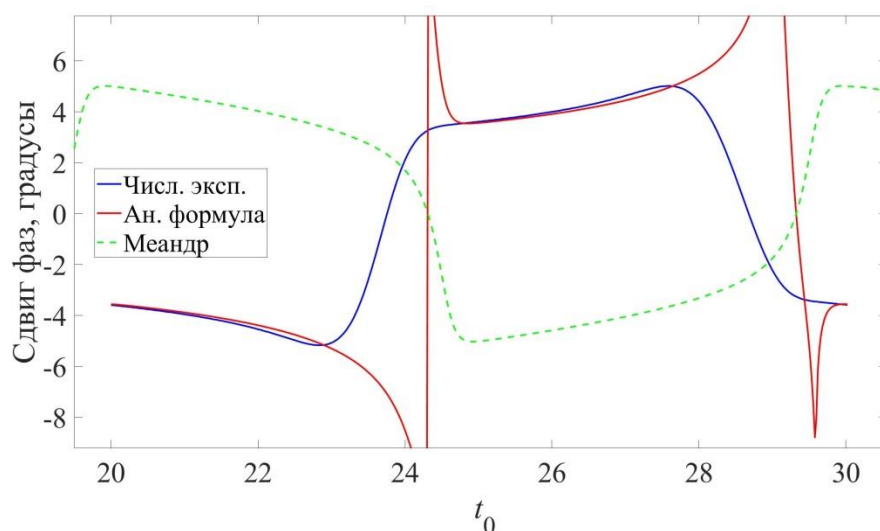


Рисунок 16. Зависимость фазового сдвига от момента начала воздействия импульсной прямоугольной помехи, при  $\mu = 3.87$  ( $T=10.02$ ).

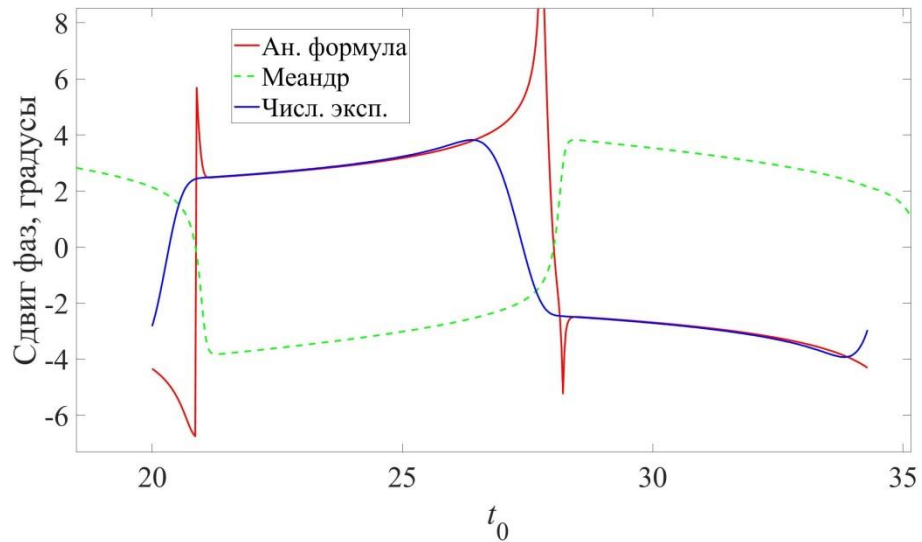


Рисунок 17. Зависимость фазового сдвига от момента начала воздействия импульсной прямоугольной помехи для осциллятора Ван-дер-Поля при  $\mu = 6.85$  ( $T=14.32$ ).

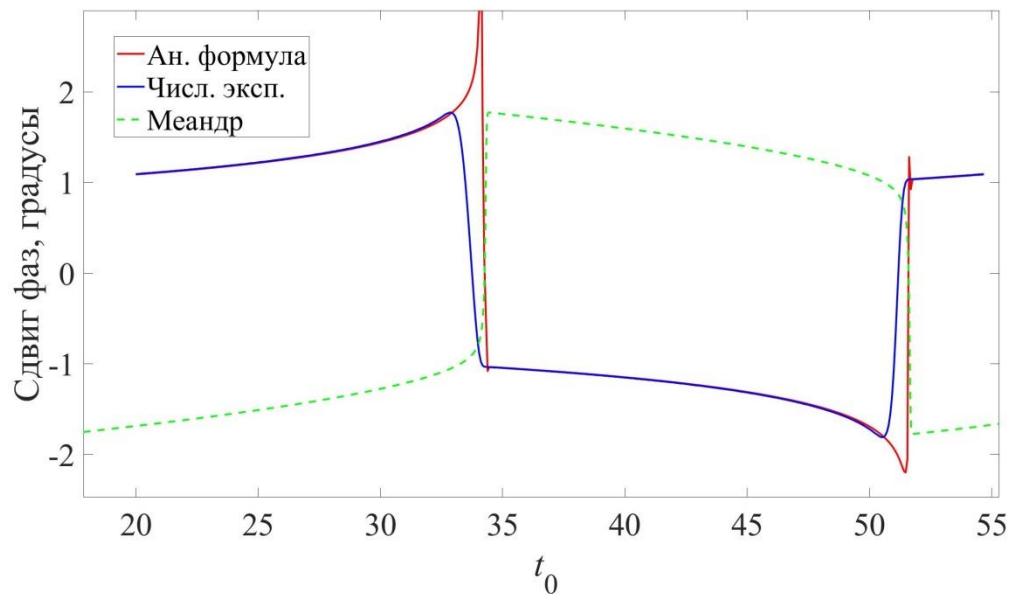


Рисунок 18. Зависимость фазового сдвига от момента начала воздействия импульсной прямоугольной помехи для осциллятора Ван-дер-Поля при  $\mu = 20$  ( $T=34.68$ ).

Стоит отметить, что даже при большом коэффициенте нелинейности (рис.18) существует некоторое расхождение между аналитической формулой (88) и результатами численного эксперимента (например, в

интервалах  $t_0 \in [33, 35]$ ,  $t_0 \in [50, 52]$ ). Это расхождение, по-видимому, связано с тем, что производная  $\dot{x}_0$  достаточно велика в этих интервалах (довольно большой наклон зелёного пунктирного графика меандра) и условие применимости аналитической формулы  $S \ll x_0^2/2\dot{x}_0$  выполняется плохо.

На рис. 19-20 приведены аналогичные графики для кольцевого генератора. При этом продолжительность помехи  $T_{\text{int}} = 0.01T$  (напомним, что для  $N = 3$ ,  $T = 6.6$  мкс, а для  $N = 5$ ,  $T = 11$  мкс) и  $A_{\text{int}} = 0.1$  В. Пунктирными линиями на данных графиках также изображены меандры колебаний. Красные графики соответствуют аналитической формуле (79), синие – численно рассчитанному фазовому сдвигу. Графики сдвига фаз на рис. 19 и рис. 20 периодические с периодами  $T/3$  и  $T/5$  соответственно, что является следствием циклической симметрии кольцевых генераторов.

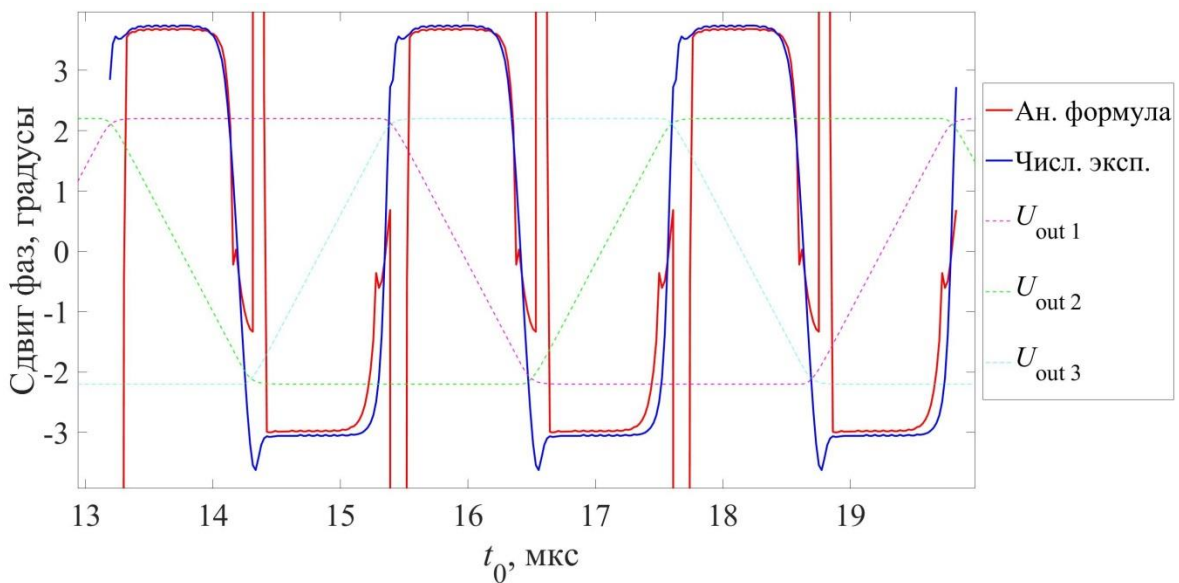


Рисунок 19. Зависимость фазового сдвига от момента начала воздействия импульсной прямоугольной помехи для кольцевого генератора с  $N = 3$  инверторами.

Сравнивая сдвиги фаз рассчитанные численно с результатами формулы (79), можно заключить, что данная формула дает хорошее



приближение в тех областях, где происходит нарастание или спад фронта выходного напряжения каком-либо из инверторов. В областях же, где происходит у одного из инверторов переход напряжения к уровню логического нуля или единицы аналитическая формула не дает корректных результатов. Скорее всего, в данных областях не выполняется условие малости  $U_{ok} \gg V_k$ .

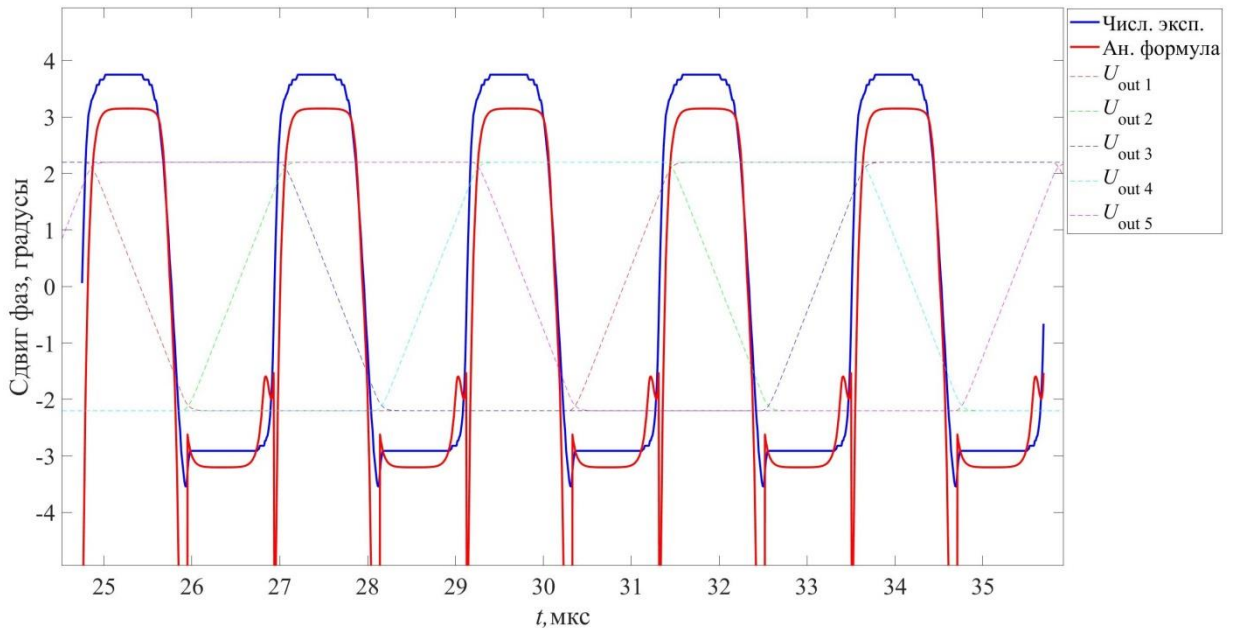


Рисунок 20. Зависимость фазового сдвига от момента начала воздействия импульсной прямоугольной помехи для кольцевого генератора с  $N = 5$  инверторами.

Наконец, проведем сравнительный анализ фазовых сдвигов, возникающих в разных системах: в осцилляторе Ван-дер-Поля и в кольцевом генераторе. Воспользуемся результатами численного моделирования. Как уже было сказано выше, мы будем сравнивать системы с одинаковым значением параметра  $p$ . Кроме того, продолжительность помехи  $T_{int}$  будем измерять в долях периода колебаний каждого из осцилляторов  $T$ , а амплитуду помехи  $A_{int}$  будем измерять в долях амплитуды колебаний каждого из осцилляторов  $A_{gen}$ . Далее для определенности был рассмотрен случай:  $A_{int} / A_{gen} = 0.18$ ,  $T_{int} / T = 0.01$ .

Случай, соответствующий  $p=1/6$  ( $N=3$ ,  $\mu=3.87$ ), изображен на рис. 21, а случай соответствующий  $p=1/10$  ( $N=5$ ,  $\mu=6.85$ ), изображен на рис. 22.

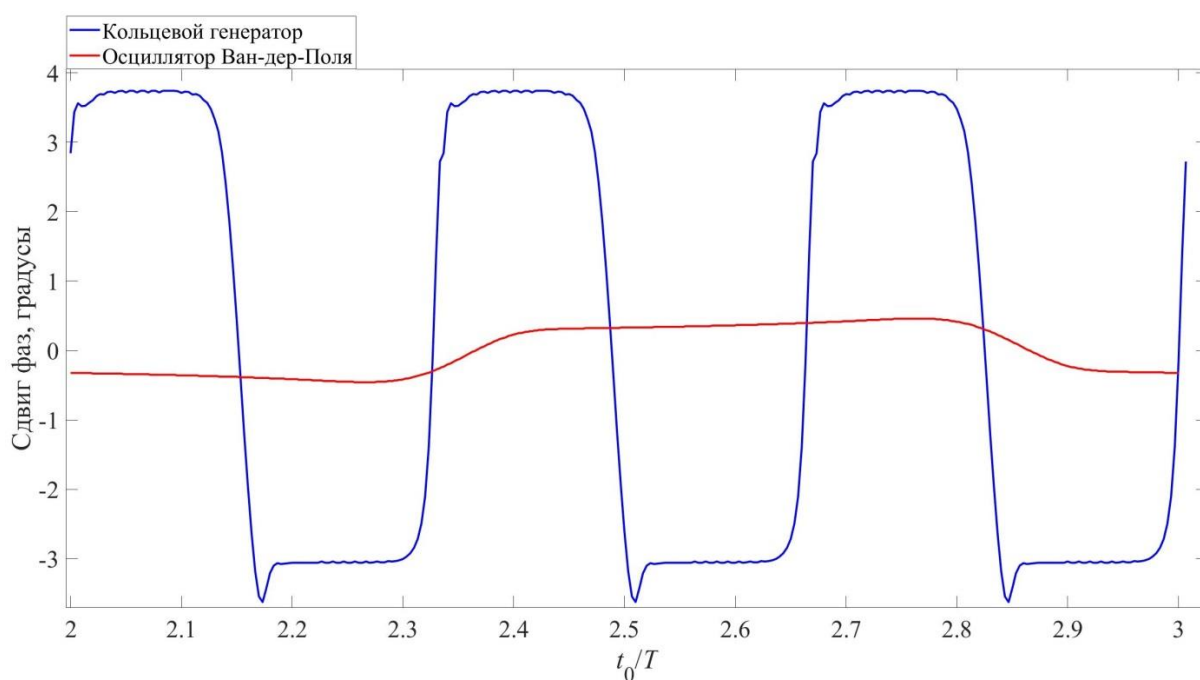


Рисунок 21. Зависимость фазового сдвига от отношения  $t_0/T$  для кольцевого генератора с  $N = 3$  и для осциллятора Ван-дер-Поля с  $\mu = 3.87$ .

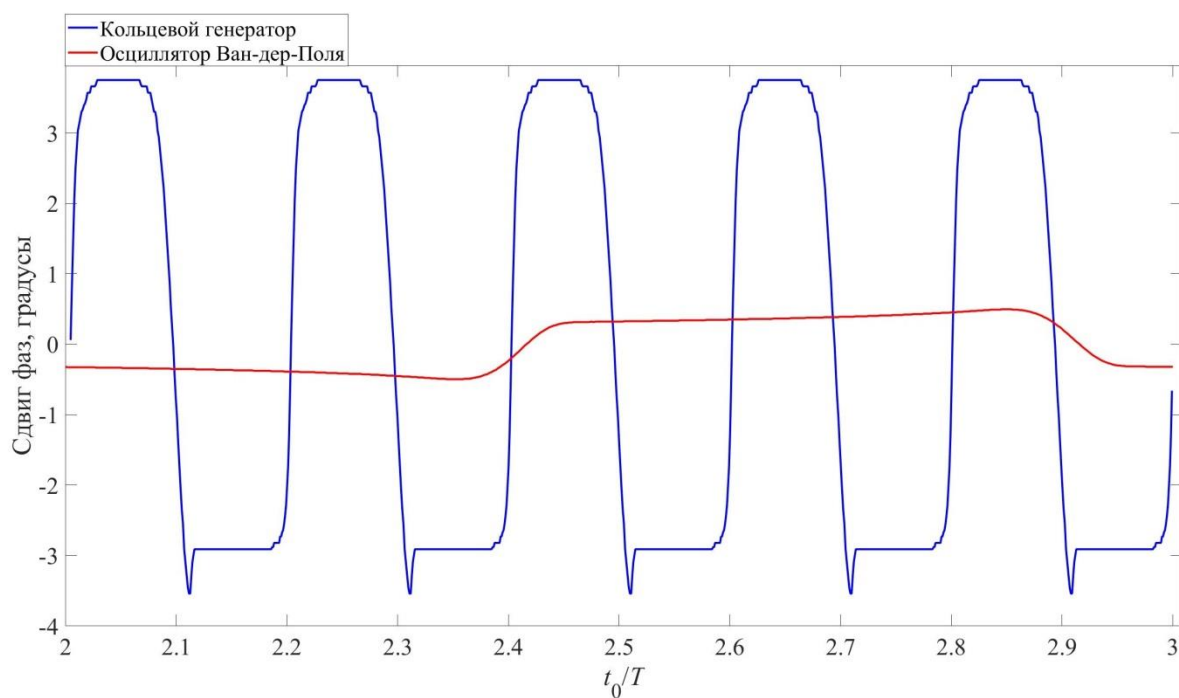


Рисунок 22. Зависимость фазового сдвига от отношения  $t_0/T$  для кольцевого генератора с  $N = 5$  и для осциллятора Ван-дер-Поля с  $\mu = 6.85$ .

Из графиков, изображенных на рис. 21-22, можно заключить, что воздействие помех на осциллятор Ван-дер-Поля приводит к значительно меньшему сдвигу фазы меандра колебаний. Таким образом, схема осциллятора Ван-дер-Поля является более устойчивой к внешним воздействиям. Возможно, это является следствием того, что в кольцевом генераторе воздействие помехи моделируется при помощи  $N$  штук ЭДС (рис. 6), в то время как в осцилляторе Ван-дер-Поля в контуре присутствует лишь одна ЭДС (рис.2). Однако, вполне вероятно, что это является следствием общей закономерности – более простые с технологической точки зрения системы, как правило, оказываются более надежными. Для детального анализа необходимо провести более подробное исследование предельных циклов данных систем. Мы планируем рассмотреть данную задачу в наших следующих работах.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе была предложена постановка задачи о нахождении фазового сдвига меандра автоколебательной системы, происходящего под воздействием внешних электромагнитных помех. Были рассмотрены две модели осцилляторов, для каждой из которых мы предложили приближенный метод решения данной задачи.

Для осциллятора Ван-дер-Поля мы разработали методику, при помощи которой можно выделить класс помех, приводящих только к фазовому сдвигу меандра колебаний. Предлагаемая теория применима к помехам с произвольной формой профиля. Однако такая помеха в случае генератора Ван-дер-Поля должна удовлетворять условиям:  $t_1 - t_0 \ll T$ ,  $t_2 - t_0 \ll |\vartheta|$  и  $S \ll x_0^2/2\dot{x}_0$ . Показано, что для данного класса помех фазовый сдвиг меандра  $\vartheta$  полностью определяется "площадью" помехи  $S$  и моментом ее воздействия  $t_0$ . Показано соответствие между аналитическим подходом и численным экспериментом в области его применимости.

Задача о нахождении фазового сдвига кольцевого генератора в общем случае является нелинейной. Однако мы показали, что данную задачу, при ряде предположений, можно линеаризовать, что является существенным упрощением. Предлагаемый нами аналитический метод приближенного нахождения фазового сдвига в случае кольцевого генератора включает в себя множество малых параметров, поэтому достаточно сложно оценить границы его применимости. Однако было показано, что в общем случае аналитический подход дает неплохие результаты в областях, где происходит нарастание фронта информационного сигнала. В данных областях продемонстрировано соответствие численных расчётов и предлагаемых аналитических формул.

Наконец, путем сравнительного анализа мы показали, что схема осциллятора Ван-дер-Поля является более устойчивой к внешним воздействиям по сравнению со схемой кольцевого генератора.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Becchetti S. et al. A Comprehensive Comparison of EMI Immunity in CMOS Amplifier Topologies // Electronics. – 2019. – Т. 8. – №. 10. – С. 1181.
2. Liu G. et al. Electromagnetic Immunity Performance of Intelligent Electronic Equipment in Smart Substation's Electromagnetic Environment // Energies. – 2020. – Т. 13. – №. 5. – С. 1130.
3. Mathur P., Raman S. Electromagnetic interference (EMI): measurement and reduction techniques //Journal of Electronic Materials. – 2020. – С. 1-24.
4. Drexler P. et al. A sensor system for detecting and localizing partial discharges in power transformers with improved immunity to interferences //Sensors. – 2019. – Т. 19. – №. 4. – С. 923.
5. Gupta S., Tai N. H. Carbon materials and their composites for electromagnetic interference shielding effectiveness in X-band //Carbon. – 2019. – Т. 152. – С. 159-187.
6. Пирогов Ю. А., Солодов А. В. Повреждения интегральных микросхем в полях радиоизлучения //Журнал радиоэлектроники. – 2013. – №. 6. – С. 3-3.
7. В.А. Вдовин, В.В. Кулагин, В.А. Черепенин Помехи и сбои при нетепловом воздействии короткого электромагнитного импульса на радиоэлектронные устройства // Физические основы приборостроения. – 2003. – Т.8. – № 1. – С. 64.
8. Sklar B. Digital communications: Fundamentals and Applications, Second Edition. University of California, Los Angeles, Prentice Hall, 2001.
9. Кузнецов А. П. и др. Феномен уравнения ван дер Поля //Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. – 2014. – Т. 22. – №. 4.
10. Дворников О., Шульгевич Ю. Методы идентификации параметров моделей интегральных транзисторов. Часть 2. Идентификация параметров модели, описывающих вольтамперные характеристики биполярных транзисторов. – 2009.

11. Микушин А. В. Цифровые устройства и микропроцессоры. – БХВ-Петербург, 2010.
12. Бройдо В. Л. Вычислительные системы, сети и телекоммуникации. 3-е изд. – Издательский дом «Питер», 2003.
13. Datasheet: PIC32MZ Embedded Connectivity with Floating Point Unit (EF) Family.
14. Денисенко В. Компактные модели МОП-транзисторов для SPICE в микро-и наноэлектронике. – Litres, 2018.
15. Чулков В. А. Кольцевые генераторы импульсов в цифровых преобразователях информации //Известия высших учебных заведений. Приборостроение. – 2019. – Т. 62. – №. 1.
16. Глазунов П. С. и др. Численное моделирование влияния электромагнитных импульсов на работу типовых электронных автоколебательных систем //Журнал радиоэлектроники. – 2019. – №. 11.
17. Glazunov P. et al. Modeling the Influence of Electromagnetic Interference on Failures in the Operation of Clock Generators //2020 7th All-Russian Microwave Conference (RMC). – IEEE, 2020. – С. 273-275.