ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В. ЛОМОНОСОВА"

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

«ЭФФЕКТ ХИКСА И ТЕОРИЯ ИНТЕРФЕРОМЕТРИЧЕСКИХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ В ОБЛАСТИ ОПТИКИ ДВИЖУЩИХСЯ ТЕЛ»

Выполнил студент
405 группы
Имеев А.А.

____
подпись студента

Научный руководитель:
к.ф.н.
Грязнов А.Ю.

____
подпись научного руководителя

Допущен к защите
Зав. кафедрой ____________________
подпись зав. кафедрой

Москва - 2021

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

До начала 20 века физики предполагали, что свет представляет собой распространяющиеся колебания некоторой среды. Если считать среду неувлекаемой, то на движущейся относительно нее Земле должен существовать эфирный ветер. В 1881 году Майкельсон сконструировал интерферометр и представил теорию, согласно которой оценивались результаты опытов по поиску эфирного ветра с помощью таких интерферометров. Эта теория без принципиальных изменений содержится сегодня в учебниках.

Анализируя результаты соответствующих экспериментов с помощью данной теории ученые пришли к выводу об отсутствии эфирного ветра и среды как таковой.

В данной работе показано, что теория опыта не соответствует конфигурации устройства - она предполагает распространения сферических волн от источника, вместо плоских. Более того, при проведении эксперимента не учитывалось взаимное расположения зеркал, что оказывает принципиальное влияние на результаты.

Так же в ней, в качестве теории, претендующей на более полное и правильное описание опыта, представлена теория Хикса.

Глава 1. О классической теории опыта Майкельсона.

В статье [1] Майкельсон представил идею опыта: свет от источника делится на два пучка, проходящих одинаковое расстояние в перпендикулярных направлениях, которые затем сводятся вместе для наблюдения интерференции между ними. При наличии движения Земли относительно светоносной среды пучки будут двигаться с различной скоростью, а потому при сведении будут, вообще говоря, иметь различные фазы. Разность фаз между интерферирующими волнами должна зависеть от угла между направлением движения Земли и осью интерферометра (линия от источника вдоль второго плеча), а её изменение приводит к смещению интерференционных полос. Тогда, если удастся определить эту зависимость, то можно из нее сделать предположения о том, как должна смещаться интерференционная картина при повороте интерферометра, которые могут быть проверены экспериментально.

Технически это было реализовано таким образом (рис. 1.а):

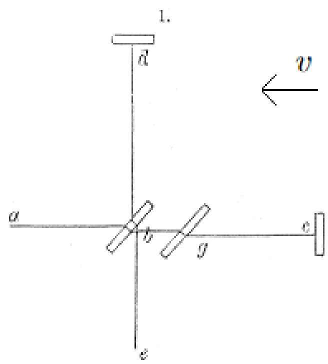

рис. 1.а

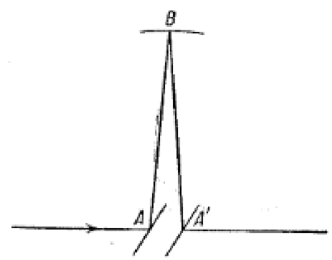

рис. 1.б

Плоская волна от источника падает на светоделительную пластину, которая часть света пропускает, а часть отражает. Отраженный свет идет вдоль первого, перпендикулярного, плеча, отражается от зеркала, расположенного в его конце, а затем частично отражается (эта часть нас не интересует), а частично проходит сквозь светоделительную пластину и попадает в наблюдательную трубу в точке e. Второй пучок, пропущенный пластиной, идет вдоль второго плеча, отражается обратно от зеркала, затем частично проходит (эта часть нас не интересует), а частично отражается от пластины и попадает в наблюдательную трубу. Таким образом в наблюдательную трубу попадает два пучка света с, вообще говоря, различными фазами, что позволяет видеть интерференционную картину.

Майкельсон, считая плечи интерферометра равной длины и источник света монохроматическим, рассмотрел частный случай движения интерферометра относительно среды, в котором скорость эфирного ветра направлена вдоль одного из плеч и перпендикулярно второму. Пусть L - длина плеч, c - скорость света относительно среды, а $\vec{v}$ - скорость среды относительно интерферометра. Тогда время, необходимое лучу чтобы пройти по первому плечу и обратно у него получилось равным

$$t_1 = \frac{2L}{c}$$

а для второго плеча:

$$t_2 = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{2Lc}{c^2 - v^2}$$

Тогда разность времен прохождения, с точность до второго порядка отношения скоростей, равна

$$t_2 - t_1 \approx \frac{2L}{c}(1 + \frac{v^2}{c^2}) - \frac{2L}{c} = \frac{2Lv^2}{c^3}$$

И разность фаз будет соответствующей. Далее Майкельсон предположил, что поворот интерферометра на 90° аналогичен просто изменению плеч местами - т.е. теперь уже:

$$t_1 = \frac{2Lc}{c^2 - v^2}$$

$$t_2 = \frac{2L}{c}$$

И потому разность времен равна:

$$t_2 - t_1 \approx -\frac{2Lv^2}{c^3}$$

Из чего был сделан вывод, что при повороте интерфемеротра максимальная амплитуда смещения полос пропорциона величина $\frac{4Lv^2}{c^3}$, а период смещения, в силу симметрии прибора, равен 180°.

В работе 1892 года Лоренц указал, что за время прохождения света от пластины до первого зеркала пластина сместится относительно эфира (рис. 1.б) и потому время прохождения луча вдоль первого плеча равно, с точностью до второй степени отношения скоростей:

$$t_1 \approx 2\frac{L}{c}(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2})$$

Что приводит к уменьшению максимальной амплитуды смещения интерфенеционных полос в два раза.

Точную аналитическую формулу большинство авторов, описывающих теорию опыты Майкельсона, указывают как([3], [4], [5]):

$$t_1 = 2\frac{L}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Но, встречается и такая формула([6], [7]):

$$t_1 = 2\frac{L}{c}\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}$$

Которая в указанном приближении дает точно такой же результат. Однако, судя по всему, данная формула получена из-за ошибки по невнимательности.

Заметим, что в отличии от формулы Майкельсона $t_1 = \frac{2L}{c}$, в формуле Лоренца $t_1 = 2\frac{L}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ мы получили зависимость $t_1 = t_1(v)$. Давайте подробнее остановимся на том, как получается это выражение.

Сначала покажем, что данную формулу можно получить из предположения, что от пластины отражается сферическая волны. Действительно, пусть из A распространяется сферическая волна. Тогда поверхность фронта в некоторые моменты времени будет иметь вид на рис 2.а для покоящейся среды (система отсчета эфира) и на рис 2.б для среды движущейся влево (ЛСО) от точки A с некоторой скоростью v.

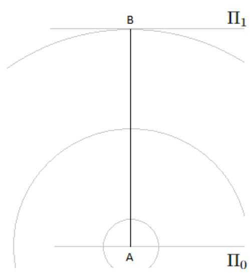

рис. 2.а

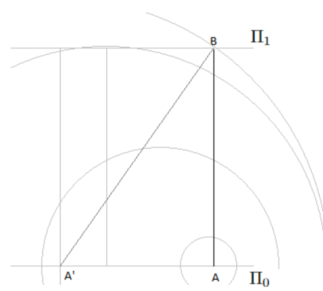

рис. 2.б

Как видно из рис 2.б, в направлении AB (перпендикуляр из точки A на плоскость Π_1) скорость волны в ЛСО будет равна $c_1 = \sqrt{c^2 - v^2}$. Соответственно, время на прохождение света вдоль AB туда и обратно будет равно

$$t_1 = 2\frac{L}{c_1} = 2\frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}} \approx 2\frac{L}{c}(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2})$$

Где L обозначает длину отрезка AB.

В системе отсчета эфира картина будет следующей (рис. 3):

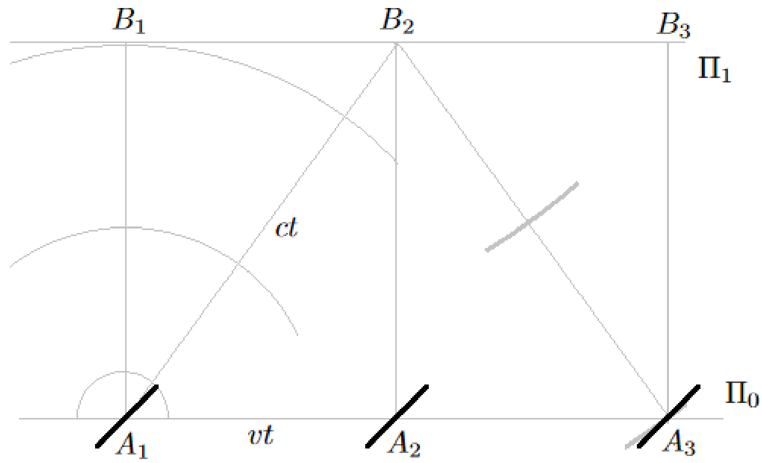

рис. 3

Поясним: пусть в начальный момент времени точки A и B находятся в положении A_1 и B_1 соответственно, и из точки A_1 начинает распространяться сферическая волна. Точку B плоскости Π_1 она достигнет в положении B_2, отразится оттуда и попадет в точку A в положении A_3. Таким образом время прохождения $A_1B_2A_3$ естественным образом зависит от скорости интерферометра, поскольку положение точек B_2 и A_3 от нее зависит.

Мы показали, что формулу Лоренца можно получить для сферической волны, но в опыте Майкельсона использовались плоские волны, для чего между источником и светоделительной пластиной специально устанавливалась линза. Между тем, для плоской волны указанное соотношение в общем случае выполняться уже не будет. Покажем это.

Пусть в системе отсчета эфира плоская волна от источника падает на пластину под углом $\phi = \frac{\pi}{4}$, а отражается от нее под некоторым углом ϕ'. Поскольку в данной системе отсчета происходит отражения света от движущегося зеркала, то ϕ' вообще говоря не равно ϕ. Точная формула будет получена позднее, но сейчас достаточно того, что углы не равны и $\phi' = \phi(v)$, поскольку иначе $\phi' = \frac{\pi}{4}$ и мы никогда не смогли бы наблюдать в ЛСО луч вдоль первого плеча. Пусть теперь угол ϕ' такой, что в ЛСО волна распространяется вдоль первого плеча. Т.е. имеют место такие картины в ЛСО (рис. 4.а) и системе эфира (рис. 4.б):

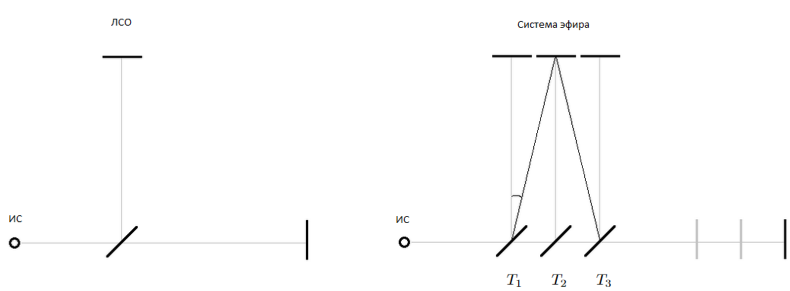

рис. 4.а

рис. 4.б

Где T_i обозначают моменты времени когда, соответственно, испущенная источником волна упала на пластину и отразилась от нее, достигла зеркала, и отразившись от зеркала опять упала на пластину. Пусть $t_0 = T_2 - T_1$.

Из рис 5.б видно, что должно быть верно соотношение:

$$\sin \phi' = \frac{v}{c}$$

т.е. ϕ' зависит от скорости движущегося зеркала строго определенным образом. В общем случае это неверно, из-за чего в ЛСО луч от пластины до первого зеркала не будет идти вдоль первого плеча при $\phi = \frac{\pi}{4}$. Заметим, что изменяя наклон пластины всегда можно добиться перпендикулярности отраженного луча первому зеркалу, но тогда схема опыта уже не будет соответствовать действительной конфигурации. На этом моменте уже можно было бы не рассматривать далее классическую теорию опыта, но давайте рассмотрим, что же будет если в ЛСО луч от пластины до первого зеркала идет вдоль первого плеча.

Тогда будет верно и такое соотношение:

$$\cos\phi' = \frac{L}{ct_0}$$

Откуда получается зависимость между длиной плеч L и временем t_0. Это означает, что указанная картина для плоской волны будет иметь место только в том случае, когда длина плеча и скорость эфирного ветра жестко связаны между собой условием для некоторого фиксированного t_0:

$$L = \sqrt{(ct_0)^2 - (vt_0)^2}$$

Т.е. за то время пока отраженный свет пройдет расстояние до первого зеркала, пластина сместится на расстояние, в точности равное проекции пройденного светом расстояния на плоскость первого зеркала. Поскольку в действительности длина плеч и скорость эфирного ветра никак друг от друга не зависят, то и указанная картина вообще говоря неверна. В общем случае мы будем иметь какую-то такую ситуацию:

$$L = \sqrt{(ct_{01})^2 - (vt_{02})^2}$$

где t_{01} это время прохождения светом расстояние от пластины до зеркало, и оно не равно времени t_{02}, которое нужно пластине чтобы пройти проекцию этого расстояние со скоростью v, что показано на рис 5.б:

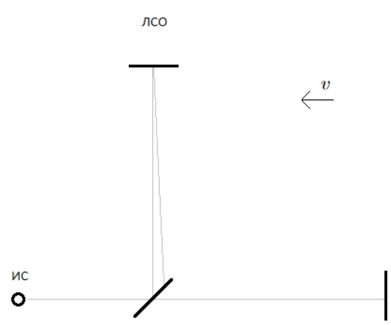

рис. 5.а

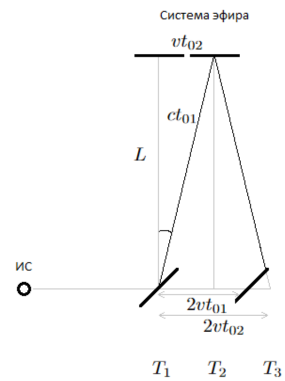

рис. 5.б

Ясно, что тогда в ЛСО (рис 5.а) траектория луча от пластины к зеркалу не равно траектории луча на обратном пути, поскольку луч попадает уже в некоторую другую точку пластины. Следовательно, и формула для t_1 должна быть какой-то иной.
Далее, если мы повернем интерферометр на 90°, то картина достаточно сильно изменится (рис 6.а и 6.б):

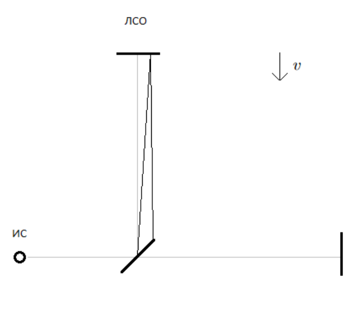

рис. 6.а

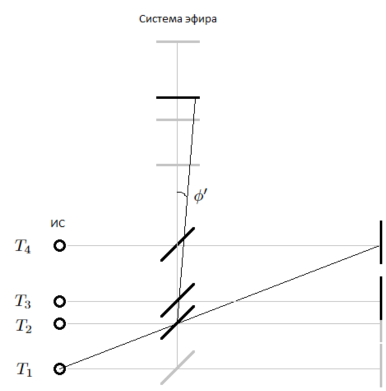

рис. 6.б

Поскольку плоская отраженная волна, вообще говоря, не будет идти вдоль первого плеча в системе эфира, а значит и в ЛСО (поскольку движение среды направлено вдоль этого плеча). Поясним рис 6.б:

В момент времени T_1 источник испустил плоскую волну.

В момент времени T_2 волна достигла светоделительной пластины и поделилась на две.

В момент времени T_3 отраженная волна достигла первого зеркала.

В момент времени T_4 прошедшая волна достигла второго зеркала.

Траектории отраженных от зеркал волн на рисунке не отображены, чтобы не усложнять картину.

Т.е. в таком случае уже недостаточно просто поменять местами плечи интерферометра. Если мы будем поворачивать интерферометр дальше, на 180° или 270°, то и там картины будет отличаться от тех, что мы получили ранее, поскольку будет меняться точка на пластине, в которую будет попадать луч после отражения от первого зеркала. А значит уже не очевидно, что период смещения интерференционных полос именно 180°, а не 360°.

До сих пор мы обсуждали только время прохождения вдоль первого плеча, теперь же давайте рассмотрим время прохождения вдоль второго плеча. В опыта Майкельсона 1881 года и потом в опыте Майкельсона-Морли 1887 года экспериментаторы наблюдали интерференционные картины в виде полос. Но, если зеркала перпендикулярны друг другу, а пластина наклонена к ним под углом в 45°, то либо интерференционная картина будет в виде колец, если плечи имеют различные длины, либо, в случае плеч одинаковой длины, вместо нее будет поле равномерной засветки. Для наблюдения интерференции в виде полос необходимо чтобы одно из зеркал было наклонено относительно перпендикуляра к соответствующему плечу. Удобно наклонить второе зеркало, но сделав это можно увидеть, что схема интерферометра стала не симметричной и более того, после отражения от второго зеркала луч будет идти уже не вдоль соответствующего плеча, и под некоторым углом к нему (рис. 7):

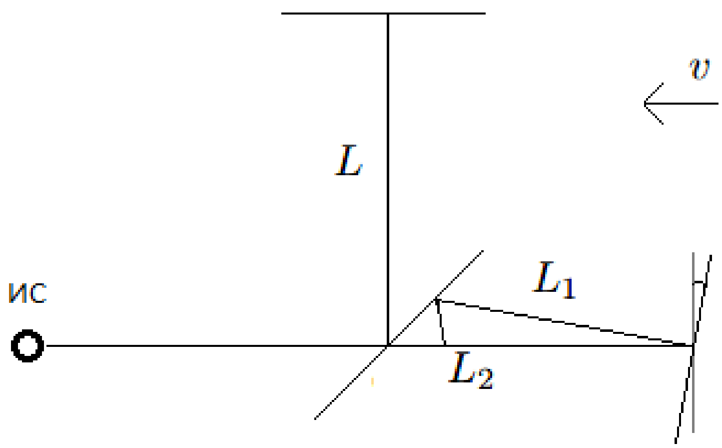

рис. 7

Из-за чего время прохождения луча к зеркалу и обратно уже не будет равно

$$t_2 = \frac{L}{c+v} + \frac{L}{c-v} = 2\frac{L}{c(1-\frac{v^2}{c^2})}$$

а будет иметь более сложный вид:

$$t_2 = \frac{L}{c+v} + \frac{L_1}{c_2} + \frac{L_2}{c_3}$$

где c_2 и c_3 это скорости волны после отражения от второго зеркала и пластины соответственно. Это если мы считаем угол $\phi = \frac{\pi}{4}$ и то, как надо было бы посчитать исходя из классической теории. Однако, как уже было показано выше, в общем случае $\phi \neq \frac{\pi}{4}$ и тогда второе зеркало наклонять уже не обязательно.

Таким образом можно заключить, что для плоской волны классическая теория опыта неверна.

1. Об изменении плоской волны из-за движения среды

В 1902 году Хикс представил свою теорию [2] опыта Майкельсона, в которой находит зависимость смещения интерференционных полос от направления и скорости эфирного ветра. К сожалению, она не получила должного внимания в свое время, в том числе и из-за достаточно сложного объяснения автором своих идей. Видится разумным привести её здесь, с некоторыми пояснениями.

Сначала рассмотрим вопрос о том, как в ЛСО связана волна, падающая на светоделительную пластину, с волной, испущенной источником. Пусть у нас есть источник сферических волн, экран с щелью, в которой установлена двояковыпуклая линза с фокусом на источнике и экран, на которуй падают плоские волны после прохождения линзы. Все эти объекты считаем покоящимися в ЛСО. Тогда, при отсутствии движения среды фронтовая поверхность в различные моменты времени будет такой, как показано на рис. 8.а, где луч, выходя из источника проходит через центр линзы и попадает в точку A на плоскости Π_0.

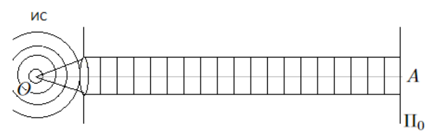

рис. 8.а

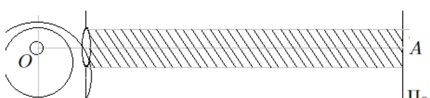

рис. 8.б

При движении среды вниз с постоянной скоростью v относительно нашей системы, картина будет такой, как на рис 8.б: Т.е. луч не поменял свою траекторию - он по-прежнему идет от источника через центр линзы в точку A на плоскости Π_0, но изменилась длина волны и её фронт наклонился.

Пусть теперь среда движется в направлении от источника со скоростью v под некоторым углом α к линии OA. Обозначим за θ наклон фронта, Λ - длину волны испущенной источником, а λ - длину волны падающей на пластину. Тогда, учитывая что частота испущенного света равна частоте падающего, верны следующие соотношения:

$$c \sin\theta = v \sin\alpha$$

$$\Lambda = \frac{c}{\nu}$$

$$\frac{\lambda}{\cos\theta} = \frac{c\cos\theta - v\cos\alpha}{\nu}$$

откуда

$$\lambda = \Lambda\cos\theta\frac{c\cos\theta - v\cos\alpha}{c}$$

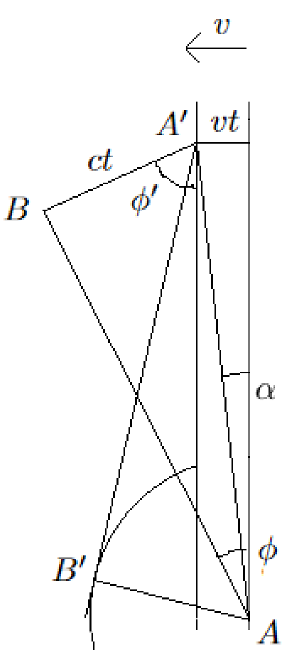

рис. 9

Далее рассмотрим, как связан угол падения с углом отражения при отражении от движущегося зеркала в системе отсчета эфира. Заметим, что если зеркало движется вдоль своей плоскости, то это движение никак не влияет на соотношение между падающим и отраженным лучами, т.ч. рассмотрим движение зеркала перпендикулярно её же плоскости. Такой анализ уже был проделан Хиксом в его работе, но не лишне будет его повторить его:

Пусть зеркало движется со скорость $\vec{v}$ перпендикулярно своей плоскости, и на нее падает плоская волна под углом ϕ. На рис. 9 изображены соответствующие построения Гюйгенса для плоской волны. Точка A фронта AB падает на плоскость зеркала в точку A, а точка B - в точку A', поскольку зеркало сместится на некоторое расстояние vt. Пусть ϕ' - угол отражения, а α - угол между AA' и плоскостью зеркала. Тогда, $\Delta ABA'$ и $\Delta A'B'A$ равны, поскольку являются прямоугольными треугольниками с одинаковой гипотенузой, а из этого следует:

$$\phi - \alpha = \phi' + \alpha$$

$$\alpha = \frac{\phi - \phi'}{2}$$

$$BAA' = \phi - \alpha = \frac{\phi + \phi'}{2}$$

откуда:

$$\frac{\sin BAA'}{\sin\alpha} = \frac{ct}{vt}$$

или

$$\frac{\sin\frac{\phi+\phi'}{2}}{\sin\frac{\phi-\phi'}{2}}=\frac{c}{v}$$

Преобразуем эту формулу к тому результату, который получил Хикс:

$$v\sin\frac{\phi+\phi'}{2}=c\sin\frac{\phi-\phi'}{2}$$

$$v(\sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi'}{2}+\sin\frac{\phi'}{2}\cos\frac{\phi}{2})=c(\sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi'}{2}-\sin\frac{\phi'}{2}\cos\frac{\phi}{2})$$

$$v\,\mathrm{tg}\,\frac{\phi}{2}+v\,\mathrm{tg}\,\frac{\phi'}{2}=c\,\mathrm{tg}\,\frac{\phi}{2}-c\,\mathrm{tg}\,\frac{\phi'}{2}$$

Или

$$\mathrm{tg}\,\frac{\phi'}{2}=\frac{c-v}{c+v}\,\mathrm{tg}\,\frac{\phi}{2}$$

Если выразить тангенс через экспоненту, то мы получим:

$$\frac{e^{\frac{i\phi'}{2}}-e^{\frac{-i\phi'}{2}}}{e^{\frac{i\phi'}{2}}+e^{\frac{-i\phi'}{2}}}=\frac{e^{i\phi'}-1}{e^{i\phi'}+1}=\frac{c-v}{c+v}\frac{e^{\frac{i\phi}{2}}-e^{\frac{-i\phi}{2}}}{e^{\frac{i\phi}{2}}+e^{\frac{-i\phi}{2}}}$$

$$((c+v)(e^{\frac{i\phi}{2}}+e^{\frac{-i\phi}{2}})-(c-v)(e^{\frac{i\phi}{2}}-e^{\frac{-i\phi}{2}}))e^{i\phi'}=(c-v)(e^{\frac{i\phi}{2}}-e^{\frac{-i\phi}{2}})+(c+v)(e^{\frac{i\phi}{2}}+e^{\frac{-i\phi}{2}})$$

$$(2ve^{\frac{i\phi}{2}}+2ce^{\frac{-i\phi}{2}})e^{i\phi'}=2ce^{\frac{i\phi}{2}}+2ve^{\frac{-i\phi}{2}}$$

$$e^{i\phi'}=\frac{ce^{\frac{i\phi}{2}}+ve^{\frac{-i\phi}{2}}}{ve^{\frac{i\phi}{2}}+ce^{\frac{-i\phi}{2}}}=\frac{(ce^{\frac{i\phi}{2}}+ve^{\frac{-i\phi}{2}})^2}{(ve^{\frac{i\phi}{2}}+ce^{\frac{-i\phi}{2}})(ce^{\frac{i\phi}{2}}+ve^{\frac{-i\phi}{2}})}$$

Откуда

$$e^{\frac{i\phi'}{2}}=\frac{ce^{\frac{i\phi}{2}}+ve^{\frac{-i\phi}{2}}}{\sqrt{c^2+v^2+2cv\cos\phi}}$$

Что и было получено Хиксом. Здесь взята только положительная ветвь, т.к. $0\le\phi'\le\frac{\pi}{2}$, $0\le\phi\le\frac{\pi}{2}$.

Мы же дополнительно отметим два момента:
1. Эта формула совпадает с формулой отражения от движущегося зеркала полученной в СТО. Доказательство этому будет приведено далее.
2. Выражение для угла отражения можно записать в виде, аналогичном закону Снеллиуса для преломления. Действительно, рассмотрим одно из промежуточных выражений:

$$\frac{\sin\frac{\phi+\phi'}{2}}{\sin\frac{\phi-\phi'}{2}}=\frac{c}{v}$$

Преобразуем его, умножив обе части уравнения на $2\cos\frac{\phi+\phi'}{2}$:

$$2v\sin\frac{\phi+\phi'}{2}\cos\frac{\phi+\phi'}{2}=2c\sin\frac{\phi-\phi'}{2}\cos\frac{\phi+\phi'}{2}$$

$$v\sin(\phi+\phi')=c(\sin\phi-\sin\phi')$$

$$v\sin\phi'\cos\phi+v\sin\phi\cos\phi'=c(\sin\phi-\sin\phi')$$

$$(c+v\cos\phi)\sin\phi'=(c-v\cos\phi')\sin\phi$$

$$\frac{\sin\phi'}{c-v\cos\phi'}=\frac{\sin\phi}{c+v\cos\phi}$$

Обозначив скорости падающей и отраженной волны относительно зеркала как $c_1=c+v\cos\phi$ и $c_2=c-v\cos\phi$, мы и получаем формулу в точности равной закону Снеллиуса:

$$\frac{\sin\phi}{c_1}=\frac{\sin\phi'}{c_2}$$

Но ϕ' здесь угол отражения, а не угол преломления.

2. О смещении интерференционных полос

Как мы уже показали, в общем случае и в ЛСО и в системе эфира картина лучей носит достаточно для вычисления сложный характер, т.ч. мы поступим иначе. Работая в ЛСО рассмотрим волновые фронты от обоих зеркал в пространстве от пластины и до наблюдателя - т.е. уже после повторного прохождения пластины. Пусть длины волн будут λ_1 и λ_2, а угол между фронтами β. Ясно, что при движении указанных волновых фронтов в среде, их точки пересечения будут двигаться по некоторым прямым. Следуя за Хиксом, назовем эти линии максималями. Эти линии обладают тем свойством, что если на их пути поставить экран, то на пересечении этих линий с экраном и будут наблюдаться интерференционые полосы. Тогда, для того чтобы понять как будет изменяться интерференционная картина при повороте интерферометра достаточно получить зависимость расстояния между максималями, угла, который максимали составляют с плоскостью экрана, и положения центральной интерференционной полосы на какой-либо плоскости от направления и скорости эфирного ветра.

Будем работать в ЛСО и предполагать такую конфигурацию (рис. 10):

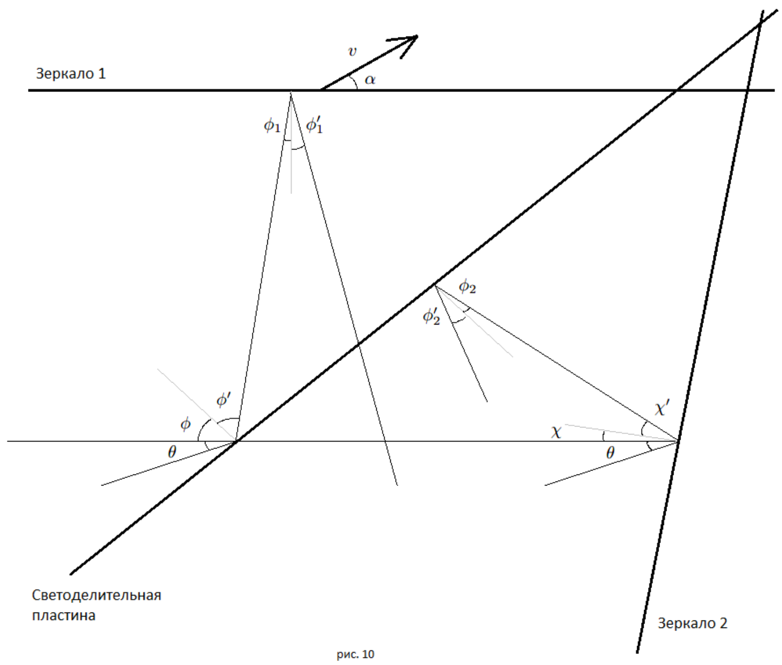

рис. 10

Т.е. интерферометр движется относительно среды в направлении от источника со скоростью v под углом α к плоскости первого зеркала. Тогда ϕ - угол между перпендикуляром к пластине и линии второго плеча, χ - угол отклонения второго зеркала от перпендикуляра ко второму плечу, θ - наклон фронта падающей на пластину и второе зеркало волны относительно перпендикуляра ко второму плечу, а отраженные углы отмечены штрихами. Обратим внимание, что линиями здесь указаны не траектории лучей, а траектории волновых фронтов плоских волн - другими словами, направления перпендикуляров к фронтам волн.

К сожалению, вывод соответствующих формул занимает достаточно много места, т.ч. он вынесен в отдельную главу. Здесь же мы воспользуемся готовыми формулами:

$\psi = \frac{\pi}{2} - \chi$

$$p = p_0(1 + \frac{\xi^2 \cos 2\alpha}{2 \sin \omega})$$

$$x = x_0(1 + \frac{\xi^2 \cos 2\alpha}{2 \sin \omega})$$

Где ψ - угол наклона максималей к плоскости первого зеркала, p - расстояние между ними, x - положение центральной полосы на плоскости первого зеркала, ω - угол между плоскость первого зеркала и отзеркаленной плоскостью второго зеркала, а $p_0 = \frac{\Lambda}{2 \sin \omega}$ и $x_0 = \frac{a \sin(\phi - \chi)}{\sin \omega}$ - расстояние между максималями и положение центральной полосы при отсутствии движения.

Тогда, смещение центральной полосы $\Delta_0 = x - x_0$ имеет вид:

$$\Delta_0 = \xi^2 \frac{\cos 2\alpha}{2 \sin \omega} x_0$$

А m-ая полоса $\Delta_m = x + mp - x_0 - mp_0$ будет сдвигаться как:

$$\Delta_m = \xi^2 \frac{\cos 2\alpha}{2 \sin \omega}(x_0 + mp_0)$$

Т.е. амплитуда смещения полосы линейно зависит от номера полосы. Если плоскость, на которой будет наблюдаться интерференция, параллельна плоскости первого зеркала, то смещение будет иметь вид:

$$\Delta_m = \xi^2 \frac{\cos 2\alpha}{2 \sin \omega \sin \psi}(x_0 + mp_0)$$

Далее надо учесть эффект, специально упомянутый Хиксом, заключающийся в следующем: Рассмотрим сетку волновых фронтов, образованных волнами в области между пластиной и наблюдателем:

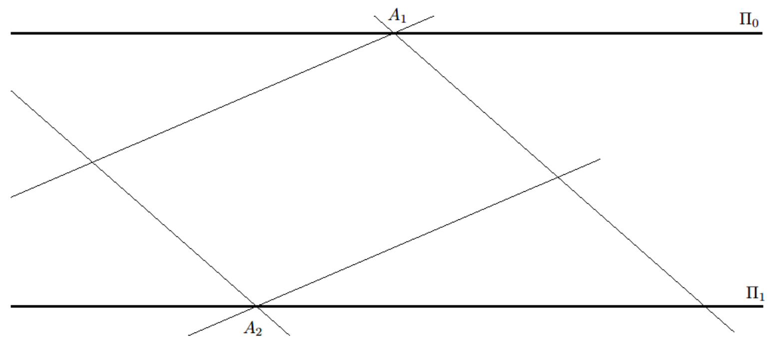

рис. 11

Если на плоскости Π_0 интерференционная полоса находится в точке A_0, то на некоторой плоскости Π_1 эта же полоса будет в точке A_1, поскольку вдоль A_1A_2 проходит соответствующая максималь. Но, волны соответствующие разным фронтам прошли разное расстояние от пересечения с Π_0 в точке A_0 до пересечения с Π_1 в точке A_1. Т.е. оптические пути, пройденные волнами, различны. Если же мы, желая наблюдать интерференцию на плоскости Π_0, наведем на нее оптическую систему, которая будет строить изображение на плоскости Π_1, то из-за таутохронности оптической системы волны, пересекающиеся в A_0 попадут в её изображение A_0' пройдя один и тот же оптический путь. Но поскольку они имеют различные длины волн, то теперь они уже не будут иметь одинаковую фазу, а будут различаться на величину $L_1(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1})$, где L_1 это пройденный оптический путь.

$$L_1(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}) = \frac{L_1}{p}\xi \cos \alpha$$

Поскольку из-за аберрации интерференционные полосы будут смещены дополнительно на некоторую величину пропорциональную $\xi \cos \alpha$, то итоговое смещение m-ой интерференционной полосы можно записать в общем виде:

$$\Delta_m = C_0 \xi \cos \alpha + (C_1 + mC_2)\xi^2 \cos 2\alpha$$

Т.е. в опыте Майкельсона должны были присутствовать и эффекты полного оборота и эффекты полуоборота. Необходимо так же заметить, что при проведении эксперимента проводились серии измерений, и итоговый результат получался их усреднением. Между тем если рассмотреть отклонение центральной полосы без учета прочих эффектов:

$$\Delta_0 = \xi^2 \frac{\cos 2\alpha}{2 \sin \omega} x_0$$

То видно, что в зависимости от знака ω смещение будет происходить в разные стороны относительно x_0. И если окажется так, что в одной серии измерении будет, например, $\omega > 0$, а во втором $\omega < 0$, то при усреднении эффект полуоборота будет искажен, вплоть до аннулирования. Хикс, в уже упомянутой работе, показывает, что в некоторых сериях измерений движение из некоторой начальной точки начинается в сторону увеличения, а в других - в сторону уменьшения, что может быть свидетельством того, что между измерениями величина ω поменяла свой знак.

Так же необходимо заметить, что теория Хикса рассматривает ситуацию, когда схема опыта соответствует действительной конфигурации интерферометра. Между тем, в действительности это было не совсем так: Майкельсон использовал зеркала для увеличения оптического пути, полагая, что это не добавит никаких дополнительных эффектов. Но, поскольку эти зеркала двигаются вместе с интерферометром относительно среды, то при отражении от них изменяются длины волн и углы, из-за чего выражения для величин λ_1, λ_2, ϕ_i, ϕ_i' и всех от них зависящих будут иметь более сложный вид, а не тот, что получается согласно Хиксу.

1. Разность длин волн

Для расчета будем пользоваться указанным рисунком Хикса:

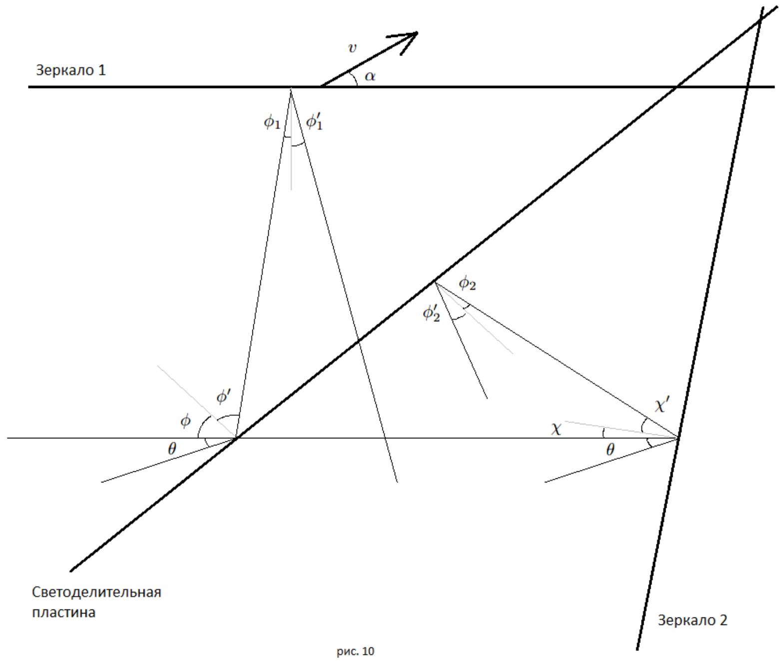

рис. 10

где линиями изображены перпендикуляры к волновым фронтам.

Если на рисунке все-таки изобразить траектории лучей, с наложенными на них волновыми фронтами, то получится так:

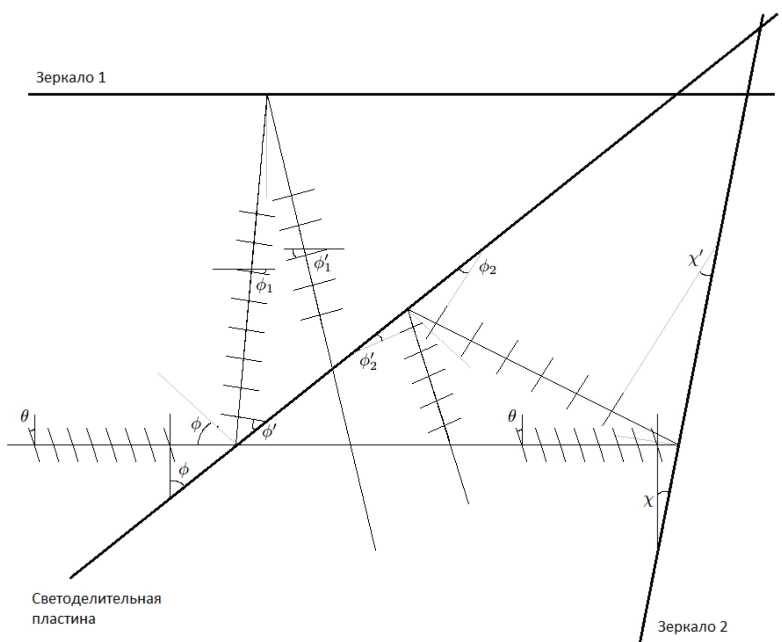

рис. 12

Сама картина поменялась бы непринципиально, но добавила бы больше путаницы.

1. Найдем выражение для разности итоговых длин волн. Как уже было показано, падающая λ и отраженная λ' волны связаны соотношением:

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\sin \phi'}{\sin \phi}$$

где ϕ, ϕ' - углы падения и отражения соответственно. Зная закон отражения, где v - скорость отражающей поверхности перпенкулярно себе навстречу падающему лучу:

$$e^{i\frac{\phi'}{2}} = \frac{ce^{i\frac{\phi}{2}} + ve^{-i\frac{\phi}{2}}}{\sqrt{c^2 + v^2 + 2cv\cos\phi}}$$

выразим зависимость между длинами волн после однократного отражения:

$$e^{i\phi'} = \frac{c^2 e^{i\phi} + 2cv + v^2 e^{-i\phi}}{c^2 + v^2 + 2cv\cos\phi}$$

$$\sin\phi' = \frac{c^2 - v^2}{c^2 + v^2 + 2cv\cos\phi}\sin\phi$$

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{c^2 - v^2}{c^2 + v^2 + 2cv\cos\phi}$$

Теперь вернемся к рисунку. Пусть интерферометр движется относительно эфира со скоростью $\vec{v}$, которая составляет угол α с плоскостью первого зеркала, в направлении от источника. Нам будут нужны скорости отражающих поверхностей в сторону источника. Пусть w_0, w_1 и w_2 это указанные скорости пластины, первого и второго зеркал соответственно. Тогда:

$$\begin{aligned} w_0 &= -v\cos(\phi + \alpha) \\ w_1 &= -v\sin\alpha \\ w_2 &= -v\cos(\chi + \alpha) \end{aligned}$$

Пусть λ_1 и λ_2 это итоговые длины волн, отраженных от первого и второго зеркала соответственно, а λ - длина волны, падающая на светоделительную пластину. Тогда верны следующие соотношения:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda} = \frac{\sin\phi'}{\sin(\phi + \theta)}\frac{\sin\phi_1'}{\sin\phi_1}$$

$$\frac{\lambda_2}{\lambda} = \frac{\sin\chi'}{\sin(\chi + \theta)}\frac{\sin\phi_2'}{\sin\phi_2}$$

Следовательно,

$$\frac{\lambda_1}{\lambda} = \frac{c^2 - w_0^2}{c^2 + w_0^2 + 2cw_0\cos(\phi + \theta)}\frac{c^2 - w_1^2}{c^2 + w_1^2 + 2cw_1\cos\phi_1}$$

$$\frac{\lambda_2}{\lambda} = \frac{c^2 - w_2^2}{c^2 + w_2^2 + 2cw_2\cos(\chi + \theta)}\frac{c^2 - w_0^2}{c^2 + w_0^2 - 2cw_0\cos\phi_2}$$

В дальнейшем нам понадобится разность между длинами волн, т.ч. найдем её. Здесь, однако, будут большие промежуточные выкладки, т.ч. нам будет удобно по ходу выкладок некоторые выражения обозначать новым переменными. Обозначим знаменатели как D_1^2 и D_2^2, тогда:

$$D_1^2 = (c^2 + w_0^2 + 2cw_0\cos(\phi + \theta))(c^2 + w_1^2 + 2cw_1\cos\phi_1)$$

$$D_2^2 = (c^2 + w_2^2 + 2cw_2\cos(\chi + \theta))(c^2 + w_0^2 - 2cw_0\cos\phi_2)$$

И разность длин волн будет выражаться через них как:

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda} = (c^2 - w_0^2)\frac{(c^2 - w_1^2)D_2^2 - (c^2 - w_2^2)D_1^2}{D_1^2 D_2^2}$$

Но с таким выражением сложно работать, так что его надо упростить, выразив только от известных углов ϕ, χ, θ, α и скоростей c, v. Выразим D_1^2 через ϕ, θ и скорости. Для этого подставим $\phi_1 = \phi + \phi' - \frac{\pi}{2}$ и учтем, что из закон отражения следуют следующие соотношения:

$$\begin{aligned} (c^2 + w_0^2 + 2cw_0\cos(\phi + \theta))\sin\phi' &= (c^2 - w_0^2)\sin(\phi + \theta) \\ (c^2 + w_0^2 + 2cw_0\cos(\phi + \theta))\cos\phi' &= (c^2 + w_0^2)\cos(\phi + \theta) + 2cw_0 \end{aligned}$$

Тогда,

$$\begin{aligned}D_1^2 =&(c^2+w_0^2+2cw_0\cos(\phi+\theta))(c^2+w_1^2+2cw_1\cos(\phi+\phi'-\frac{\pi}{2}))\\ =&(c^2+w_0^2+2cw_0\cos(\phi+\theta))(c^2+w_1^2+2cw_1(\sin\phi\cos\phi'+\sin\phi'\cos\phi))\\ =&(c^2+w_0^2+2cw_0\cos(\phi+\theta))(c^2+w_1^2)+2cw_1(\sin\phi((c^2+w_0^2)\cos(\phi+\theta)+2cw_0)+\cos\phi(c^2-w_0^2)\sin(\phi+\theta))\\ =&c^4+c^3(2w_0\cos(\phi+\theta)+2w_1(\sin\phi\cos(\phi+\theta)+\cos\phi\sin(\phi+\theta)))+\\ &c^2(w_1^2+w_0^2+4w_0w_1\sin\phi)+c(2w_0w_1^2\cos(\phi+\theta)+2w_1w_0^2\sin\phi\cos(\phi+\theta)-2w_1w_0^2\cos\phi\sin(\phi+\theta))+w_0^2w_1^2\end{aligned}$$

Т.е.

$$\begin{aligned}D_1^2 =&c^4+2c^3(w_0\cos(\phi+\theta)+w_1\sin(2\phi+\theta))+\\ &c^2(w_1^2+w_0^2+4w_0w_1\sin\phi)+2w_0w_1c(w_1\cos(\phi+\theta)-w_0\sin\theta)+w_0^2w_1^2\end{aligned}$$

D_2^2 найдем аналогично. Т.к. $\phi_2=\phi-\chi-\chi'$, и

$$\begin{aligned}(c^2+w_2^2+2cw_2\cos(\chi+\theta))\sin\chi' &= (c^2-w_2^2)\sin(\chi+\theta)\\ (c^2+w_2^2+2cw_2\cos(\chi+\theta))\cos\chi' &= (c^2+w_2^2)\cos(\chi+\theta)+2cw_2\end{aligned}$$

То:

$$\begin{aligned}D_2^2 =&(c^2+w_2^2+2cw_2\cos(\chi+\theta))(c^2+w_0^2-2cw_0\cos(\phi-\chi-\chi'))\\ =&(c^2+w_2^2+2cw_2\cos(\chi+\theta))(c^2+w_0^2-2cw_0(\cos(\phi-\chi)\cos\chi'+\sin(\phi-\chi)\sin\chi'))\\ =&(c^2+w_2^2+2cw_2\cos(\chi+\theta))(c^2+w_0^2)-\\ &2cw_0(\cos(\phi-\chi)((c^2+w_2^2)\cos(\chi+\theta)+2cw_2)+\sin(\phi-\chi)(c^2-w_2^2)\sin(\chi+\theta))\\ =&c^4+c^3(2w_2\cos(\chi+\theta)-2w_0(\cos(\phi-\chi)\cos(\chi+\theta)+\sin(\phi-\chi)\sin(\chi+\theta)))+\\ &c^2(w_0^2+w_2^2-4w_0w_2\cos(\phi-\chi))+\\ &c(2w_0^2w_2\cos(\chi+\theta)-2w_0w_2^2\cos(\phi-\chi)\cos(\chi+\theta)+2w_0w_2^2\sin(\phi-\chi)\sin(\chi+\theta))+w_0^2w_2^2\end{aligned}$$

Т.е.

$$\begin{aligned}D_2^2 =&c^4+2c^3(w_2\cos(\chi+\theta)-w_0\cos(\phi-2\chi-\theta))+\\ &c^2(w_0^2+w_2^2-4w_0w_2\cos(\phi-\chi))+2w_0w_2c(w_0\cos(\chi+\theta)-w_2\cos(\phi+\theta))+w_0^2w_2^2\end{aligned}$$

Распишем числитель полученной дроби:

$$\begin{aligned}(c^2-w_1^2)D_2^2-(c^2-w_2^2)D_1^2 = c^2(D_2^2-D_1^2)+w_2^2D_1^2-w_1^2D_2^2 =&\\ &2c^5(w_2\cos(\chi+\theta)-w_0\cos(\phi-2\chi-\theta)-w_0\cos(\phi+\theta)-w_1\sin(2\phi+\theta))+\\ &c^4(w_0^2+w_2^2-4w_0w_2\cos(\phi-\chi)-w_1^2-w_0^2-4w_0w_1\sin\phi)+\\ &2c^3w_0(w_0w_2\cos(\chi+\theta)-w_2^2\cos(\phi+\theta)-w_1^2\cos(\phi+\theta)+w_0w_1\sin\theta)+\\ &c^2(w_0^2w_2^2-w_0^2w_1^2)+\\ &c^4(w_2^2-w_1^2)+\\ &2c^3(w_2^2(w_0\cos(\phi+\theta)+w_1\sin(2\phi+\theta))-w_1^2(w_2\cos(\chi+\theta)-w_0\cos(\phi-2\chi-\theta)))+\\ &c^2(w_1^2w_2^2+w_0^2w_2^2+4w_0w_1w_2^2\sin\phi-w_0^2w_1^2-w_1^2w_2^2+4w_0w_1^2w_2\cos(\phi-\chi))+\\ &2w_0w_1w_2c(w_1w_2\cos(\phi+\theta)-w_0w_2\sin\theta-w_0w_1\cos(\chi+\theta)+w_1w_2\cos(\phi+\theta))\end{aligned}$$

После приведения подобных (выражение после c^3 будет удобнее оставить как есть) получим такое выражение:

$$\begin{aligned}&2c^5(w_2\cos(\chi+\theta)-w_0\cos(\phi-2\chi-\theta)-w_0\cos(\phi+\theta)-w_1\sin(2\phi+\theta))+\\ &2c^4(w_2^2-w_1^2-2w_0w_2\cos(\phi-\chi)-2w_0w_1\sin\phi)+\\ &2c^3(w_0w_2(w_0\cos(\chi+\theta)-w_2\cos(\phi+\theta))-w_0w_1(w_1\cos(\phi+\theta)-w_0\sin\theta))+\\ &\quad w_2^2(w_0\cos(\phi+\theta)+w_1\sin(2\phi+\theta))-w_1^2(w_2\cos(\chi+\theta)-w_0\cos(\phi-2\chi-\theta)))+\\ &2c^2(w_0^2w_2^2+2w_0w_1w_2^2\sin\phi-w_0^2w_1^2+2w_0w_1^2w_2\cos(\phi-\chi))+\\ &2c(2w_0w_1^2w_2^2\cos(\phi+\theta)-w_0^2w_1w_2^2\sin\theta-w_0^2w_1^2w_2\cos(\chi+\theta))\end{aligned}$$

Обозначим за E_i выражения при $2c^i$ и подставим вместо w_j соответствующее выражение через v и α: $w_0 = -v\cos(\phi+\alpha),\ w_1 = -v\sin\alpha,\ w_2 = -v\cos(\chi+\alpha)$. Тогда:

$$
\begin{aligned}
E_5 &= v\ \left(-\cos(\chi+\alpha)\cos(\chi+\theta) + \cos(\phi+\alpha)\cos(\phi-2\chi-\theta) + \cos(\phi+\alpha)\cos(\phi+\theta) + \sin\alpha\sin(2\phi+\theta)\right)\\
E_4 &= v^2(\cos^2(\chi+\alpha) - \sin^2\alpha - 2\cos(\phi+\alpha)\cos(\chi+\alpha)\cos(\phi-\chi) - 2\cos(\phi+\alpha)\sin\alpha\sin\phi)\\
E_3 &= v^3(-\cos(\phi+\alpha)\cos(\chi+\alpha)[\cos(\phi+\alpha)\cos(\chi+\theta) - \cos(\phi+\theta)\cos(\chi+\alpha)]+\\
&\qquad \cos(\phi+\alpha)\sin\alpha[\sin\alpha\cos(\phi+\theta) - \sin\theta\cos(\phi+\alpha)]-\\
&\qquad -\cos^2(\chi+\alpha)[cos(\phi+\theta)\cos(\phi+\alpha) + \sin\alpha\sin(2\phi+\theta)]+\\
&\qquad \sin^2\alpha[\cos(\chi+\alpha)\cos(\chi+\theta) - \cos(\phi+\alpha)\cos(\phi-2\chi-\theta)])\\
E_2 &= v^4(\cos^2(\phi+\alpha)\cos^2(\chi+\alpha) + 2\cos(\phi+\alpha)\sin\alpha\cos^2(\chi+\alpha)\sin\phi - \cos^2(\phi+\alpha)\sin^2\alpha+\\
&\qquad 2\cos(\phi+\alpha)\sin^2\alpha\cos(\chi+\alpha)\cos(\phi-\chi))\\
E_1 &= v^5(-2\cos(\phi+\alpha)\sin^2\alpha\cos^2(\chi+\alpha)\cos(\phi+\theta) + \cos^2(\phi+\alpha)\sin\alpha\cos^2(\chi+\alpha)\sin\theta+\\
&\qquad \cos^2(\phi+\alpha)\sin^2\alpha\cos(\chi+\alpha)\cos(\chi+\theta))
\end{aligned}
$$

При дальнейших преобразованиях мы в некоторых случаях будем пользоваться соотношениями:

$$
\begin{gathered}
\cos^2(x+y) - \sin^2 y = \cos x\cos(x+2y)\\
\cos(x+y)\cos(x-y) = \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 2y) = \cos^2 x - \sin^2 y\\
\sin(x+y)\sin(x-y) = \cos^2 y - \cos^2 x = 1 - (\cos^2 x + \sin^2 y)\\
\cos(x_1+y_1)\cos(x_2+y_2) - \cos(x_1+y_2)\cos(x_2+y_1) = -\sin(x_1-x_2)\sin(y_1-y_2)\\
\sin(x_1+y_1)\sin(x_2+y_2) + \cos(x_1+y_2)\cos(x_2+y_1) = \cos(x_1-x_2)\cos(y_1-y_2)\\
\sin(x_1+y_1)\cos(x_2+y_2) - \sin(x_1+y_2)\cos(x_2+y_1) = \cos(x_1-x_2)\sin(y_1-y_2)\\
\cos x_1\cos x_2 + \sin(x_1+y)\sin(x_2-y) = \cos y\cos(y+x_1-x_2)\\
\cos x_1\cos x_2 - \cos(x_1+y)\cos(x_2-y) = \sin y\sin(y+x_1-x_2)
\end{gathered}
$$

Для удобства, введем обозначения: $\delta = 2\phi-\chi$, $\gamma = \chi+\theta-\alpha$ и упростим каждый E_i, в некоторых местах выделив отдельно функции от δ и γ. Т.к. $\chi = 2\phi-\delta$, $\theta = \gamma+\delta-2\phi+\alpha$, то мы получим:

$$
\begin{aligned}
E_5 &= v(-\cos(\chi+\alpha)\cos(\chi+\theta) + \cos(\phi+\alpha)\cos(\phi-2\chi-\theta) + \cos(\phi+\alpha)\cos(\phi+\theta) + \sin\alpha\sin(2\phi+\theta))\\
E_5 &= v(-\cos(2\phi-\delta+\alpha)\cos(\gamma+\alpha) + \cos(\phi+\alpha)\cos(\delta-\phi-\gamma-\alpha)+\\
&\qquad \cos(\phi+\alpha)\cos(\delta+\gamma-\phi+\alpha) + \sin\alpha\sin(\delta+\gamma+\alpha))\\
&= v(\cos\delta[-\cos(2\phi+\alpha)\cos(\gamma+\alpha) + \cos(\phi+\alpha)\cos(\phi+\gamma+\alpha)+\\
&\qquad \cos(\phi+\alpha)\cos(\gamma-\phi+\alpha) + \sin\alpha\sin(\gamma+\alpha)]+\\
&\qquad \sin\delta[-\sin(2\phi+\alpha)\cos(\gamma+\alpha) + \cos(\phi+\alpha)\sin(\gamma+\alpha+\phi)-\\
&\qquad \cos(\phi+\alpha)\sin(\gamma+\alpha-\phi) + \sin\alpha\cos(\gamma+\alpha)])\\
&= v(\cos\delta[-\cos(2\phi+\alpha)\cos(\gamma+\alpha) + \cos(\phi+\alpha)(\cos(\gamma+\alpha+\phi) + \cos(\gamma+\alpha-\phi)) + \sin\alpha\sin(\gamma+\alpha)]+\\
&\qquad \sin\delta[(-\sin(\phi+\alpha+\phi) + \sin(\phi+\alpha-\phi))\cos(\gamma+\alpha) + \cos(\phi+\alpha)(\sin(\gamma+\alpha+\phi) - \sin(\gamma+\alpha-\phi))])\\
&= v(\cos\delta[-\cos(2\phi+\alpha)\cos(\gamma+\alpha) + 2\cos(\phi+\alpha)\cos(\gamma+\alpha)\cos\phi + \sin\alpha\sin(\gamma+\alpha)]+\\
&\qquad \sin\delta[-2\sin\phi\cos(\phi+\alpha)\cos(\gamma+\alpha)) + 2\sin\phi\cos(\phi+\alpha)\cos(\gamma+\alpha))])\\
&= v\ \cos\delta[-\cos(2\phi+\alpha)\cos(\gamma+\alpha) + \cos(\gamma+\alpha)(\cos(2\phi+\alpha) + \cos\alpha) + \sin\alpha\sin(\gamma+\alpha)]\\
&= v\ \cos\delta[\cos(\gamma+\alpha)\cos\alpha + \sin(\gamma+\alpha)\sin\alpha]\\
&= v\ \cos\delta\cos\gamma\\
E_4 &= v^2(\cos^2(\chi+\alpha) - \sin^2\alpha - 2\cos(\phi+\alpha)\cos(\chi+\alpha)\cos(\phi-\chi) - 2\cos(\phi+\alpha)\sin\alpha\sin\phi)\\
&= v^2(\cos^2(\chi+\alpha) - \sin^2\alpha - \cos(\chi+\alpha)[\cos(\chi+\alpha) + \cos(2\phi-\chi+\alpha)] - \sin\alpha[\sin(2\phi+\alpha) - \sin\alpha])\\
&= v^2(-\cos(\chi+\alpha)\cos(2\phi-\chi+\alpha) - \sin\alpha\sin(2\phi+\alpha))\\
&= v^2(-\cos(\chi+\alpha)\cos(\delta+\alpha) - \sin\alpha\sin(\delta+\chi+\alpha))\\
&= v^2(cos\delta[-\cos(\chi+\alpha)\cos\alpha - \sin\alpha\sin(\chi+\alpha)] + \sin\delta[\cos(\chi+\alpha)\sin\alpha - \sin\alpha\cos(\chi+\alpha)])\\
&= v^2(-\cos\delta\cos\chi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_3 = v^3(&-\cos(\phi+\alpha)\cos(\chi+\alpha)[\cos(\phi+\alpha)\cos(\chi+\theta)-\cos(\phi+\theta)\cos(\chi+\alpha)]+\\
&\cos(\phi+\alpha)\sin\alpha[\sin\alpha\cos(\phi+\theta)-\sin\theta\cos(\phi+\alpha)]-\\
&-\cos^2(\chi+\alpha)[cos(\phi+\theta)\cos(\phi+\alpha)+\sin(\phi+\theta+\phi)\sin(\phi+\alpha-\phi)]+\\
&\sin^2\alpha[\cos(\chi+\alpha)\cos(\chi+\theta)-\cos(\chi+\alpha+(\phi-\chi))\cos(\chi+\theta-(\phi-\chi))]])\\
= v^3(&\cos(\phi+\alpha)\cos(\chi+\alpha)\sin(\phi-\chi)\sin(\alpha-\theta)+\cos(\phi+\alpha)\sin\alpha\cos\phi\sin(\alpha-\theta)-\\
&-\cos^2(\chi+\alpha)\cos\phi\cos(\phi+\theta-\alpha)+\sin^2\alpha\sin(\phi-\chi)\sin(\phi+\alpha-\chi-\theta))\\
= v^3(&\sin(\alpha-\theta)[\cos(\phi+\alpha)\cos(\chi+\alpha)\sin(\phi-\chi)+\cos(\phi+\alpha)\sin\alpha\cos\phi]-\\
&-\cos^2(\chi+\alpha)cos\phi\cos(\gamma+\phi-\chi)+\sin^2\alpha\sin(\phi-\chi)\sin(\phi-\gamma))\\
= v^3(&\sin(\alpha-\theta)[\cos(\phi+\alpha)\cos(\chi+\alpha)\sin(\phi-\chi)+\cos(\phi+\alpha)\sin\alpha\cos\phi]+\\
&\cos^2(\chi+\alpha)\cos\phi\sin\gamma\sin(\phi-\chi)-\sin^2\alpha\sin(\phi-\chi)\sin\gamma\cos\phi+\\
&\cos\gamma[-\cos^2(\chi+\alpha)\cos\phi\cos(\phi-\chi)+\sin^2\alpha\sin(\phi-\chi)\sin\phi)]\\
= v^3(&\sin(\alpha-\theta)[\cos(\phi+\alpha)\cos(\chi+\alpha)\sin(\phi-\chi)+\cos(\phi+\alpha)\sin\alpha\cos\phi]+\\
&\cos\chi\cos(\chi+2\alpha)\cos\phi\sin\gamma\sin(\phi-\chi)+\cos\gamma[-\cos^2(\chi+\alpha)\cos\phi\cos(\phi-\chi)+\sin^2\alpha\sin(\phi-\chi)\sin\phi)]\\
= v^3(&\sin(\alpha-\theta)[\cos(\phi+\alpha)\cos(\chi+\alpha)\sin(\phi-\chi)+\cos(\phi+\alpha)\sin\alpha\cos\phi]+\\
&\cos(\chi+2\alpha)\cos\phi\sin(\phi-\chi)(\sin(\gamma-\chi)+\sin\chi\cos\gamma)+\\
&\cos\gamma[-\cos^2(\chi+\alpha)\cos\phi\cos(\phi-\chi)+\sin^2\alpha\sin(\phi-\chi)\sin\phi)]\\
= v^3(&\sin(\alpha-\theta)[\cos(\phi+\alpha)\cos(\chi+\alpha)\sin(\phi-\chi)+\cos(\phi+\alpha)\sin\alpha\cos\phi]+\\
&\cos(\chi+2\alpha)\cos\phi\sin(\phi-\chi)(-\sin(\alpha-\theta)+\sin\chi\cos\gamma)+\\
&\cos\gamma[-\cos^2(\chi+\alpha)\cos\phi\cos(\phi-\chi)+\sin^2\alpha\sin(\phi-\chi)\cos\phi)]\\
= v^3(&\sin(\alpha-\theta)[\cos(\phi+\alpha)\cos(\chi+\alpha)\sin(\phi-\chi)+\cos(\phi+\alpha)\sin\alpha\cos\phi-\cos(\chi+2\alpha)\cos\phi\sin(\phi-\chi)]+\\
&\cos\gamma[\sin\chi\cos(\chi+2\alpha)\cos\phi\sin(\phi-\chi)-\cos^2(\chi+\alpha)\cos\phi\cos(\phi-\chi)+\sin^2\alpha\sin(\phi-\chi)\sin\phi)]\\
= v^3(&\sin(\alpha-\theta)[\cos(\phi+\alpha)\cos(\chi+\alpha)\sin(\delta-\phi)+\cos(\delta-\phi+\chi+\alpha)\sin\alpha\cos\phi-\\
&\quad\cos(\chi+\alpha+\alpha)\cos\phi\sin(\delta-\phi)]+\\
&\cos\gamma[\sin\chi\cos(\chi+2\alpha)\cos\phi\sin(\phi-\chi)-\cos\chi\cos(\chi+2\alpha)\cos\phi\cos(\phi-\chi)-\\
&\quad-\sin^2\alpha\cos\phi\cos(\phi-\chi)+\sin^2\alpha\sin(\phi-\chi)\sin\phi])\\
= v^3(&\sin(\alpha-\theta)[\cos(\phi+\alpha)\cos(\chi+\alpha)\sin(\delta-\phi)-\cos(\chi+\alpha)\cos\alpha\cos\phi\sin(\delta-\phi)+\\
&\quad\sin(\chi+\alpha)\sin\alpha\cos\phi\sin(\delta-\phi)+\cos(\delta-\phi)\cos(\chi+\alpha)\sin\alpha\cos\phi-\sin(\delta-\phi)\sin(\chi+\alpha)\sin\alpha\cos\phi]+\\
&\cos\gamma[-\cos(\chi+2\alpha)\cos^2\phi-\sin^2\alpha\cos(2\phi-\chi)])\\
= v^3(&\sin(\alpha-\theta)\cos(\chi+\alpha)[\sin(\delta-\phi)(\cos(\phi+\alpha)-\cos\alpha\cos\phi)+\cos(\delta-\phi)\sin\alpha\cos\phi]-\\
&-\cos\gamma[\cos(\phi+\alpha+(\chi-\phi+\alpha))\cos^2\phi+\sin^2\alpha\cos(\phi+\alpha-(\chi-\phi+\alpha))]\\
= v^3(&\sin(\alpha-\theta)\cos(\chi+\alpha)\sin\alpha[-\sin(\delta-\phi)\sin\phi)+\cos(\delta-\phi)\cos\phi]-\\
&-\cos\gamma[\cos(\phi+\alpha)\cos(\chi-\phi+\alpha)(\cos^2\phi+\sin^2\alpha)-\sin(\phi+\alpha)\sin(\chi-\phi+\alpha)(\cos^2\phi-\sin^2\alpha)])\\
= v^3(&\sin(\alpha-\theta)\cos(\chi+\alpha)\sin\alpha\cos\delta-\cos\gamma[\cos(\phi+\alpha)\cos(\chi-\phi+\alpha)-\\
&-\cos(\phi+\alpha)\cos(\chi-\phi+\alpha)\sin(\phi+\alpha)\sin(\phi-\alpha)-\sin(\phi+\alpha)\sin(\chi-\phi+\alpha)\cos(\phi+\alpha)\cos(\phi-\alpha)])\\
= v^3(&\sin(\alpha-\theta)\cos(\chi+\alpha)\sin\alpha\cos\delta-\cos\gamma\cos(\phi+\alpha)[\cos(\chi-\phi+\alpha)-\sin(\phi+\alpha)\sin\chi])\\
= v^3(&-\cos\gamma\cos(\phi+\alpha)[\cos\chi\cos(\phi-\alpha)+\sin\chi\sin(\phi-\alpha)-\sin\chi\sin(\phi+\alpha)]+\\
&\sin(\alpha-\theta)\cos(\chi+\alpha)\sin\alpha\cos\delta)\\
= v^3(&-\cos\gamma[\frac{1}{2}\cos\chi(\cos2\phi+\cos2\alpha)-2\sin\chi\cos(\phi+\alpha)\cos\phi\sin\alpha]+\\
&\sin(\alpha-\theta)\cos(\chi+\alpha)\sin\alpha\cos\delta)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_2 = v^4(&\cos^2(\phi+\alpha)\cos^2(\chi+\alpha) + 2\cos(\phi+\alpha)\sin\alpha\cos^2(\chi+\alpha)\sin\phi - \cos^2(\phi+\alpha)\sin^2\alpha + \\
&2\cos(\phi+\alpha)\sin^2\alpha\cos(\chi+\alpha)\cos(\phi-\chi)) \\
= v^4 \ &\cos(\phi+\alpha)[\cos(\phi+\alpha)\cos\chi\cos(\chi+2\alpha) + 2\sin\alpha\cos(\chi+\alpha)(\cos(\chi+\alpha)\sin\phi + \sin\alpha\cos(\phi-\chi))] \\
= v^4 \ &\cos(\phi+\alpha)[\cos(\phi+\alpha)\cos\chi\cos(\chi+2\alpha) + \\
&2\sin\alpha\cos(\chi+\alpha)(\cos\chi\cos\alpha\sin\phi - \sin\chi\sin\alpha\sin\phi + \sin\alpha\cos\phi\cos\chi + \sin\alpha\sin\phi\sin\chi)] \\
= v^4 \ &\cos(\phi+\alpha)[\cos(\phi+\alpha)\cos\chi\cos(\chi+2\alpha) + 2\sin\alpha\cos(\chi+\alpha)\cos\chi\sin(\phi+\alpha)] \\
= v^4 \ &\cos(\phi+\alpha)\cos\chi[\cos(\phi+\alpha)\cos(\chi+2\alpha) + \sin(\phi+\alpha)(\sin(\chi+2\alpha) - \sin\chi)] \\
= v^4 \ &\cos(\phi+\alpha)\cos\chi[\cos(\chi-\phi+\alpha) - \sin(\phi+\alpha)\sin\chi] \\
= v^4 \ &\cos(\phi+\alpha)\cos\chi[\cos\chi\cos(\phi-\alpha) + \sin\chi\sin(\phi-\alpha) - \sin\chi\sin(\phi+\alpha)] \\
= v^4 \ &\cos\chi[\frac{1}{2}\cos\chi(\cos 2\phi + \cos 2\alpha) - 2\sin\chi\sin\alpha\cos\phi\cos(\phi+\alpha)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_1 = v^5(&-2\cos(\phi+\alpha)\sin^2\alpha\cos^2(\chi+\alpha)\cos(\phi+\theta) + \cos^2(\phi+\alpha)\sin\alpha\cos^2(\chi+\alpha)\sin\theta + \\
&\cos^2(\phi+\alpha)\sin^2\alpha\cos(\chi+\alpha)\cos(\chi+\theta)) \\
= v^5 \ &\sin\alpha\cos(\phi+\alpha)\cos(\chi+\alpha)[-2\sin\alpha\cos(\chi+\alpha)\cos(\phi+\theta) + \cos(\phi+\alpha)\cos(\chi+\alpha)\sin\theta + \\
&\cos(\phi+\alpha)\sin\alpha\cos(\chi+\theta)] \\
= v^5 \ &\sin\alpha\cos(\phi+\alpha)\cos(\chi+\alpha)[-2\sin\alpha\cos(\chi+\alpha)\cos(\phi+\alpha+\theta-\alpha) + \\
&\cos(\phi+\alpha)\cos(\chi+\alpha)\sin(\theta+\alpha-\alpha) + \cos(\phi+\alpha)\sin\alpha\cos(\chi+\alpha+\theta-\alpha)] \\
= v^5 \ &\sin\alpha\cos(\phi+\alpha)\cos(\chi+\alpha)[-2\sin\alpha\cos(\chi+\alpha)\cos(\phi+\alpha)\cos(\theta-\alpha) + \\
&2\sin\alpha\cos(\chi+\alpha)\sin(\phi+\alpha)\sin(\theta-\alpha) + \cos(\phi+\alpha)\cos(\chi+\alpha)\sin(\theta-\alpha)\cos\alpha + \\
&\cos(\phi+\alpha)\cos(\chi+\alpha)\cos(\theta-\alpha)\sin\alpha + \cos(\phi+\alpha)\sin\alpha\cos(\chi+\alpha)\cos(\theta-\alpha) - \\
&-\cos(\phi+\alpha)\sin\alpha\sin(\chi+\alpha)\sin(\theta-\alpha)] \\
= v^5 \ &\sin\alpha\cos(\phi+\alpha)\cos(\chi+\alpha)\sin(\theta-\alpha)[2\sin\alpha\cos(\chi+\alpha)\sin(\phi+\alpha) + \cos(\phi+\alpha)\cos(\chi+\alpha)\cos\alpha - \\
&-\cos(\phi+\alpha)\sin\alpha\sin(\chi+\alpha)] \\
= v^5 \ &\sin\alpha\cos(\phi+\alpha)\cos(\chi+\alpha)\sin(\theta-\alpha)[2\sin\alpha\cos\alpha\cos\chi\sin(\phi+\alpha) - 2\sin^2\alpha\sin\chi\sin(\phi+\alpha) + \\
&\cos^2\alpha\cos\chi\cos(\phi+\alpha) - \sin\alpha\cos\alpha\sin\chi\cos(\phi+\alpha) - \\
&-\sin\alpha\cos\alpha\sin\chi\cos(\phi+\alpha) - \sin^2\alpha\cos\chi\cos(\phi+\alpha)] \\
= v^5 \ &\sin\alpha\cos(\phi+\alpha)\cos(\chi+\alpha)\sin(\theta-\alpha)[\cos\chi(\sin 2\alpha\sin(\phi+\alpha) + \cos 2\alpha\cos(\phi+\alpha)) - \\
&-2\sin\chi\sin\alpha(\sin\alpha\sin(\phi+\alpha) + \cos\alpha\cos(\phi+\alpha))] \\
= v^5 \ &\sin\alpha\cos(\phi+\alpha)\cos(\chi+\alpha)\sin(\theta-\alpha)(\cos\chi\cos(\phi-\alpha) - 2\sin\chi\sin\alpha\cos\phi) \\
= v^5 \ &\sin\alpha\cos(\chi+\alpha)\sin(\alpha-\theta)(-\frac{1}{2}\cos\chi(\cos 2\phi + \cos 2\alpha) + 2\sin\chi\sin\alpha\cos\phi\cos(\phi+\alpha))
\end{aligned}
$$

Таким образом,

$$
\begin{aligned}
&2c^5E_5 + 2c^4E_4 + 2c^3E_3 + 2c^2E_2 + 2cE_1 = 2c^5 v\cos\delta\cos\gamma - 2c^4v^2\cos\delta\cos\chi + \\
&2c^3v^3(\cos\gamma[-\frac{1}{2}\cos\chi(\cos 2\phi + \cos 2\alpha) + 2\sin\chi\sin\alpha\cos\phi\cos(\phi+\alpha)] + \cos\delta\sin\alpha\cos(\chi+\alpha)\sin(\alpha-\theta)) + \\
&2c^2v^4\cos\chi[\frac{1}{2}\cos\chi(\cos 2\phi + \cos 2\alpha) - 2\sin\chi\sin\alpha\cos\phi\cos(\phi+\alpha)] - \\
&-2cv^5\sin\alpha\cos(\chi+\alpha)\sin(\alpha-\theta)(\frac{1}{2}\cos\chi(\cos 2\phi + \cos 2\alpha) - 2\sin\chi\sin\alpha\cos\phi\cos(\phi+\alpha)) \\
&= cv[c^2\cos\gamma - cv\cos\chi + v^2\sin\alpha\cos(\chi+\alpha)\sin(\alpha-\theta)][2c^2\cos\delta - v^2\cos\chi(\cos 2\phi + \cos 2\alpha) + \\
&4v^2\sin\chi\sin\alpha\cos\phi\cos(\phi+\alpha)]
\end{aligned}
$$

И итоговую формулу можно записать в виде:

$$
\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda} = \frac{v(c^2 - v^2\cos^2(\phi+\alpha))PQ}{D_1^2 D_2^2}
$$

где:

$$P = c^3\cos(\chi+\theta-\alpha) - c^2 v\cos\chi + cv^2\sin\alpha\cos(\chi+\alpha)\sin(\alpha-\theta)$$
$$Q = 2c^2\cos(2\phi-\chi) - v^2\cos\chi(\cos 2\phi+\cos 2\alpha) + 4v^2\sin\chi\sin\alpha\cos\phi\cos(\phi+\alpha)$$
$$D_1 = \sqrt{(c^2+v^2\cos^2(\phi+\alpha) - 2cv\cos(\phi+\alpha)\cos(\phi+\theta))(c^2+v^2\sin^2\alpha - 2cv\sin\alpha\cos\phi_1)}$$
$$D_2 = \sqrt{(c^2+v^2\cos^2(\chi+\alpha) - 2cv\cos(\chi+\alpha)\cos(\chi+\theta))(c^2+v^2\cos(\phi+\alpha) + 2cv\cos(\phi+\alpha)\cos\phi_2)}$$

2. Угол между волновыми фронтами

Пусть A и B обозначают угол между плоскостью первого зеркала и конечными волновыми фронтами, отраженными от первого и второго зеркала соответственно. (Пусть, для определенности, $A > B$.) Тогда, $A = \phi_1'$, $B = \frac{\pi}{2} - (\phi+\phi_2')$. Угол β между фронтами тогда равен $\beta = A - B$. Нам будет удобно в дальнейшем работать с половинным углом, т.ч. сразу будем искать именно $\frac{\beta}{2}$.

Как мы уже указывали, закон отражения в случае, когда отражающая поверхность движется со скоростью v перпенкулярно себе же навстречу падающему лучу имеет вид:

$$e^{i\frac{\phi'}{2}} = \frac{ce^{i\frac{\phi}{2}} + ve^{-i\frac{\phi}{2}}}{\sqrt{c^2+v^2+2cv\cos\phi}}$$

Используя его найдем оба указанных угла, учитывая что $\phi_1 = \phi+\phi'-\frac{\pi}{2}$, пластина и зеркала как и ранее движутся со скоростями w_0, w_1 и w_2, фронты волн на них падают под углами $\phi+\theta$, ϕ_1 и $\chi+\theta$ соответственно. Тогда:

$$e^{i\frac{A}{2}} = e^{i\frac{\phi_1'}{2}} = \frac{ce^{i\frac{\phi_1}{2}} + w_1e^{-i\frac{\phi_1}{2}}}{\sqrt{c^2+w_1^2+2cw_1\cos\phi_1}}$$

$$e^{i\frac{A}{2}} = \frac{ce^{i(\frac{\phi}{2}-\frac{\pi}{4})}e^{i\frac{\phi'}{2}} + w_1e^{-i(\frac{\phi}{2}-\frac{\pi}{4})}e^{-i\frac{\phi'}{2}}}{\sqrt{c^2+w_1^2+2cw_1\cos\phi_1}}$$

$$e^{i\frac{A}{2}} = \frac{ce^{i(\frac{\phi}{2}-\frac{\pi}{4})}(ce^{i\frac{\phi+\theta}{2}} + w_0e^{-i\frac{\phi+\theta}{2}}) + w_1e^{-i(\frac{\phi}{2}-\frac{\pi}{4})}(ce^{-i\frac{\phi+\theta}{2}} + w_0e^{i\frac{\phi+\theta}{2}})}{\sqrt{c^2+w_1^2+2cw_1\cos\phi_1}\sqrt{c^2+w_0^2+2cw_0\cos(\phi+\theta)}}$$

$$e^{i\frac{A}{2}} = \frac{c^2e^{i(\phi+\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})} + c(w_0e^{-i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})} + w_1e^{-i(\phi+\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}) + w_1w_0e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}}{D_1}$$

Т.к. $-B = \phi+\phi_2'-\frac{\pi}{2}$, то

$$e^{-i\frac{B}{2}} = e^{i(\frac{\phi}{2}-\frac{\pi}{4})}e^{i\frac{\phi_2'}{2}} = e^{i(\frac{\phi}{2}-\frac{\pi}{4})}\frac{ce^{i\frac{\phi_2}{2}} - w_0e^{-i\frac{\phi_2}{2}}}{\sqrt{c^2+w_0^2-2cw_0\cos\phi_2}}$$

подставив $\phi_2 = \phi-\chi-\chi'$, получим

$$e^{-i\frac{B}{2}} = e^{i(\frac{\phi}{2}-\frac{\pi}{4})}\frac{ce^{i\frac{\phi-\chi}{2}}e^{-i\frac{\chi'}{2}} - w_0e^{-i\frac{\phi-\chi}{2}}e^{i\frac{\chi'}{2}}}{\sqrt{c^2+w_0^2-2cw_0\cos\phi_2}}$$

$$e^{-i\frac{B}{2}} = e^{i(\frac{\phi}{2}-\frac{\pi}{4})}\frac{ce^{i\frac{\phi-\chi}{2}}(ce^{-i\frac{\chi+\theta}{2}} + w_2e^{i\frac{\chi+\theta}{2}}) - w_0e^{-i\frac{\phi-\chi}{2}}(ce^{i\frac{\chi+\theta}{2}} + w_2e^{-i\frac{\chi+\theta}{2}})}{\sqrt{c^2+w_0^2-2cw_0\cos\phi_2}\sqrt{c^2+w_2^2+2cw_2\cos(\chi+\theta)}}$$

$$e^{-i\frac{B}{2}} = e^{i(\frac{\phi}{2}-\frac{\pi}{4})}\frac{c^2e^{i(-\chi+\frac{\phi}{2}-\frac{\theta}{2})} + c(w_2e^{i(\frac{\phi}{2}+\frac{\theta}{2})} - w_0e^{i(\chi-\frac{\phi}{2}+\frac{\theta}{2})}) - w_0w_2e^{-i(\frac{\phi}{2}+\frac{\theta}{2})}}{D_2}$$

Тогда:

$$D_1e^{i\frac{A}{2}} = c^2e^{i(\phi+\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})} + c(w_0e^{i(-\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})} + w_1e^{i(-\phi-\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}) + w_0w_1e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}$$
$$D_1e^{-i\frac{A}{2}} = c^2e^{i(-\phi-\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})} + c(w_0e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})} + w_1e^{i(\phi+\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}) + w_0w_1e^{i(-\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}$$
$$D_2e^{i\frac{B}{2}} = c^2e^{i(\chi-\phi+\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})} + c(w_2e^{i(-\phi-\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})} - w_0e^{i(-\chi-\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}) - w_0w_2e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}$$

$$D_2 e^{-i\frac{B}{2}} = c^2 e^{i(-\chi+\phi-\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})} + c(w_2 e^{i(\phi+\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})} - w_0 e^{i(\chi+\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}) - w_0 w_2 e^{i(-\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4})}$$

$$\begin{aligned}
D_1 D_2 e^{i\frac{A-B}{2}} =& c^4 e^{i(2\phi-\chi-\frac{\pi}{2})} + \\
& c^3(w_0 e^{i(-\chi+\phi-\theta-\frac{\pi}{2})} + w_1 e^{i(-\chi-\theta)} + w_2 e^{i(2\phi+\theta-\frac{\pi}{2})} - w_0 e^{i(\chi+\phi+\theta-\frac{\pi}{2})}) + \\
& c^2(w_0 w_1 e^{i(\phi-\chi)} + w_0 w_2 e^{i(\phi-\frac{\pi}{2})} + w_1 w_2 - w_0^2 e^{i(\chi-\frac{\pi}{2})} - w_0 w_1 e^{-i(\phi-\chi)} - w_0 w_2 e^{i(\phi-\frac{\pi}{2})}) + \\
& c(w_0 w_1 w_2 e^{i(\phi+\theta)} - w_0^2 w_1 e^{i(\chi+\theta)} - w_0^2 w_2 e^{i(-\theta-\frac{\pi}{2})} - w_0 w_1 w_2 e^{-i(\phi+\theta)} - \\
& - w_0^2 w_1 w_2
\end{aligned}$$

Или, учитывая что $\beta = A - B$ и немного упростив:

$$\begin{aligned}
D_1 D_2 e^{i\frac{\beta}{2}} = & -ic^4 e^{i(2\phi-\chi)} + \\
& c^3(-2w_0 e^{i\phi}\sin(\chi+\theta) + w_1 e^{-i(\chi+\theta)} - iw_2 e^{i(2\phi+\theta)}) + \\
& c^2(2iw_0 w_1 \sin(\phi-\chi) + w_1 w_2 + iw_0^2 e^{i\chi}) + \\
& c(2iw_0 w_1 w_2 \sin(\phi+\theta) - w_0^2 w_1 e^{i(\chi+\theta)} + iw_0^2 w_2 e^{-i\theta} - \\
& - w_0^2 w_1 w_2
\end{aligned}$$

Откуда, поскольку $w_0 = -v\cos(\phi+\alpha),\ w_1 = -v\sin\alpha,\ w_2 = -v\cos(\chi+\alpha)$:

$$\begin{aligned}
D_1 D_2 \sin\frac{\beta}{2} &= -c^4\cos(2\phi-\chi) + c^3(-2w_0\sin\phi\sin(\chi+\theta) - w_1\sin(\chi+\theta) - w_2\cos(2\phi+\theta)) + \\
&\quad c^2(2w_0 w_1\sin(\phi-\chi) + w_0^2\cos\chi) + \\
&\quad c(2w_0 w_1 w_2\sin(\phi+\theta) - w_0^2 w_1\sin(\chi+\theta) + w_0^2 w_2\cos\theta \\
&= -c^4\cos(2\phi-\chi) + c^3 v(2\cos(\phi+\alpha)\sin\phi\sin(\chi+\theta) + \sin\alpha\sin(\chi+\theta) + \cos(\chi+\alpha)\cos(2\phi+\theta)) + \\
&\quad c^2v^2(2\cos(\phi+\alpha)\sin\alpha\sin(\phi-\chi) + \cos^2(\phi+\alpha)\cos\chi) + \\
&\quad cv^3\cos(\phi+\alpha)[-2\sin\alpha\cos(\chi+\alpha)\sin(\phi+\theta) + \cos(\phi+\alpha)\sin\alpha\sin(\chi+\theta) - \\
&\quad - \cos(\phi+\alpha)\cos(\chi+\alpha)\cos\theta] \\
&= -c^4\cos(2\phi-\chi) + \\
&\quad c^3 v(\sin(2\phi+\alpha)\sin(\chi+\theta) - \sin\alpha\sin(\chi+\theta) + \sin\alpha\sin(\chi+\theta) + \cos(\chi+\alpha)\cos(2\phi+\theta)) + \\
&\quad c^2v^2(2\cos(\phi+\alpha)\sin\alpha\sin\phi\cos\chi - 2\cos(\phi+\alpha)\sin\alpha\cos\phi\sin\chi + \cos^2(\phi+\alpha)\cos\chi) + \\
&\quad cv^3\cos(\phi+\alpha)[-2\sin\alpha\cos\chi\cos\alpha\sin(\phi+\theta) + 2\sin\alpha\sin\chi\sin\alpha\sin(\phi+\theta) + \\
&\quad \cos(\phi+\alpha)\sin\alpha\sin\chi\cos\theta + \cos(\phi+\alpha)\sin\alpha\cos\chi\sin\theta - \\
&\quad - \cos(\phi+\alpha)\cos\chi\cos\alpha\cos\theta + \cos(\phi+\alpha)\sin\chi\sin\alpha\cos\theta] \\
&= -c^4\cos(2\phi-\chi) + c^3 v\cos(\alpha-\theta)\cos(2\phi-\chi) + \\
&\quad c^2v^2(\cos\chi\cos(\phi+\alpha)[2\sin\alpha\sin\phi + \cos(\phi+\alpha)] - 2\sin\chi\sin\alpha\cos\phi\cos(\phi+\alpha)) + \\
&\quad cv^3\cos(\phi+\alpha)[-2\sin\alpha\cos\chi\cos\alpha\sin(\phi+\theta) + 2\sin\alpha\sin\chi\sin\alpha\sin(\phi+\theta) + \\
&\quad 2\cos(\phi+\alpha)\sin\alpha\sin\chi\cos\theta - \cos(\phi+\alpha)\cos\chi\cos(\alpha+\theta) \\
&= -c^4\cos(2\phi-\chi) + c^3 v\cos(\alpha-\theta)\cos(2\phi-\chi) + \\
&\quad c^2v^2(\cos\chi\cos(\phi+\alpha)\cos(\phi-\alpha) - 2\sin\chi\sin\alpha\cos\phi\cos(\phi+\alpha)) + \\
&\quad cv^3\cos(\phi+\alpha)[-\cos\chi(\sin\alpha + \alpha\sin(\phi+\theta) + \cos(\alpha+\theta)\cos(\phi+\alpha)) + \\
&\quad 2\sin\alpha\sin\chi(\sin\alpha\sin(\phi+\theta) + \cos\theta\cos(\phi+\alpha))] \\
&= -c^4\cos(2\phi-\chi) + c^3 v\cos(\alpha-\theta)\cos(2\phi-\chi) + \\
&\quad c^2v^2(\cos\chi\cos(\phi+\alpha)\cos(\phi-\alpha) - 2\sin\chi\sin\alpha\cos\phi\cos(\phi+\alpha)) + \\
&\quad cv^3\cos(\phi+\alpha)[-\cos\chi\cos(\phi-\alpha)\cos(\theta-\alpha)) + 2\sin\alpha\sin\chi\cos\phi\cos(\theta-\alpha))] \\
&= -c(c - v\cos(\alpha-\theta))(c^2\cos(2\phi-\chi) - v^2\cos\chi\cos(\phi+\alpha)\cos(\phi-\alpha) + 2v^2\sin\chi\sin\alpha\cos\phi\cos(\phi+\alpha))
\end{aligned}$$

Т.е., мы получаем, что:

$$\sin\frac{A-B}{2} = \sin\frac{\beta}{2} = -\frac{1}{2}\frac{c(c - v\cos(\alpha-\theta))Q}{D_1 D_2}$$

3. Расстояние между максималями.

Пусть p - расстояние между максималями. Тогда оно легко выражается через длины волны как:

$$p = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + 4\lambda_1\lambda_2 \sin^2 \frac{\beta}{2}}}$$

Действительно, из рисунка видно:

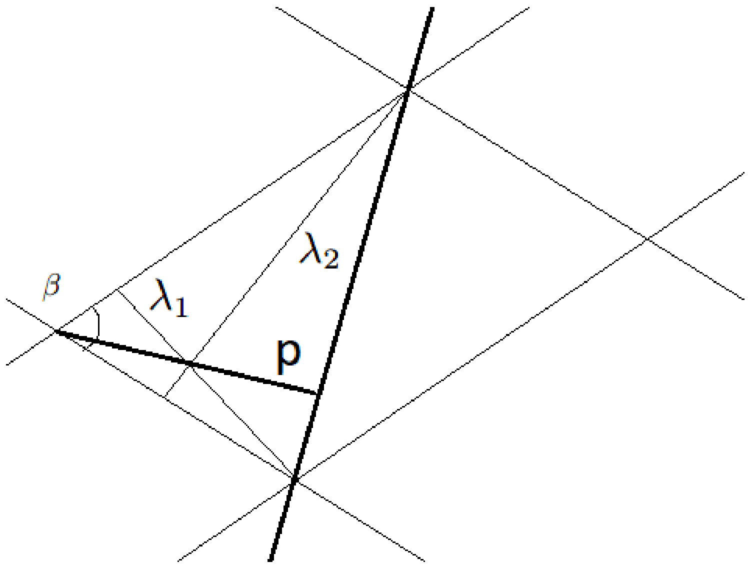

рис. 13

Что p есть высота треугольника, в котором известны две другие высоты λ_1, λ_2 и угол β. Тогда, обозначив за a_i стороны этого треугольника, а за S его площадь, получим:

$$a_1 = \frac{\lambda_1}{\sin\beta}$$

$$a_2 = \frac{\lambda_2}{\sin\beta}$$

$$a_3 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2\cos\beta}$$

$$S = \frac{1}{2}\lambda_1 a_2 = \frac{1}{2}pa_3$$

$$p = \frac{a_2\lambda_1}{a_3} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2\cos\beta}} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + 4\lambda_1\lambda_2\sin^2\frac{\beta}{2}}}$$

Выразим p, подставив известные выражения для разности длин волн и синуса угла:

$$\begin{aligned}
p =& \lambda\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda^2}\frac{1}{\sqrt{(\frac{(\lambda_1-\lambda_2)}{\lambda})^2 + 4\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda^2}\sin^2\frac{\beta}{2}}} \\
=& \lambda\frac{(c^2-w_0^2)(c^2-w_1^2)(c^2-w_2^2)(c^2-w_0^2)}{D_1^2D_2^2}\frac{1}{\sqrt{(\frac{cv(c^2-w_0^2)PQ}{D_1^2D_2^2})^2 + \frac{(c^2-w_0^2)(c^2-w_1^2)(c^2-w_2^2)(c^2-w_0^2)}{D_1^2D_2^2}(\frac{c(c-v\cos(\alpha-\theta))Q}{D_1D_2})^2}} \\
=& \lambda\frac{(c^2-w_0^2)(c^2-w_1^2)(c^2-w_2^2)}{Q\sqrt{(vP)^2 + c^2(c^2-w_1^2)(c^2-w_2^2)(c-v\cos(\alpha-\theta))^2}}
\end{aligned}$$

Т.е.

$$p = \frac{\lambda}{Q}\frac{(c^2 - v^2\cos^2(\phi+\alpha))(c^2 - v^2\sin^2\alpha)(c^2 - v^2\cos^2(\chi+\alpha))}{\sqrt{v^2P^2 + c^2(c^2 - v^2\sin^2\alpha)(c^2 - v^2\cos^2(\chi+\alpha))(c - v\cos(\alpha-\theta))^2}}$$

4. О равенстве частот отраженных волн в ЛСО.

Покажем, что отраженные волны имеют в ЛСО одинаковые частоты. Рассмотрим некоторую точку, закрепленную относительно интерферометра, которая движется навстречу волнам. Тогда в данную точку фронты волн будут приходить с частотами, задаваемыми выражениями:

$$\frac{c + v\sin(\alpha - A)}{\lambda_1}$$

$$\frac{c + v\sin(\alpha - B)}{\lambda_2}$$

Тогда, верны следующие выражения:

$$c + v\sin(\alpha - A) = \frac{\lambda_1}{\lambda}(c - v\cos(\alpha - \theta))$$

$$c + v\sin(\alpha - B) = \frac{\lambda_2}{\lambda}(c - v\cos(\alpha - \theta))$$

Докажем первое. Поскольку $A = \phi_1'$ и $\phi_1 = \phi + \phi' - \frac{\pi}{2}$, то можно преобразовать выражение для $c + v\sin(\alpha - A)$:

$$\begin{aligned}
c + v\sin(\alpha - A) =& c - w_1\cos\phi_1' - u\sin\phi_1' = c - w_1\frac{(c^2 + w_1^2)\cos\phi_1 + 2cw_1}{c^2 + w_1^2 + 2cw_1\cos\phi} - u\frac{(c^2 - w_1^2)\sin\phi_1}{c^2 + w_1^2 + 2cw_1\cos\phi} \\
=&\frac{c^3 - cw_1^2 + c^2w_1\cos\phi_1 - w_1^3\cos\phi_1 - u(c^2 - w_1^2)\sin\phi_1}{c^2 + w_1^2 + 2cw_1\cos\phi} = \frac{(c^2 - w_1^2)(c + w_1\cos\phi_1 - u\sin\phi_1)}{c^2 + w_1^2 + 2cw_1\cos\phi} \\
=&\frac{(c^2 - w_1^2)(c + w_1\cos\phi'\sin\phi + w_1\sin\phi'\cos\phi - u\sin\phi'\sin\phi + u\cos\phi'\cos\phi)}{c^2 + w_1^2 + 2cw_1\cos\phi} \\
=&\frac{(c^2 - w_1^2)(c + (u\cos\phi + w_1\sin\phi)\cos\phi' + (w_1\cos\phi - u\sin\phi)\sin\phi')}{c^2 + w_1^2 + 2cw_1\cos\phi} \\
=&\frac{(c^2 - w_1^2)(c - w_0\cos\phi' - v\sin(\phi + \alpha)\sin\phi')}{c^2 + w_1^2 + 2cw_1\cos\phi} \\
=&\frac{c^2 - w_1^2}{c^2 + w_1^2 + 2cw_1\cos\phi}(c - w_0\frac{(c^2 + w_0^2)\cos(\phi + \theta) + 2cw_0}{c^2 + w_0^2 + 2cw_0\cos(\phi + \theta)} - \frac{(c^2 - w_0^2)v\sin(\phi + \alpha)\sin(\phi + \theta)}{c^2 + w_0^2 + 2cw_0\cos(\phi + \theta)}) \\
=&\frac{(c^2 - w_1^2)(c^3 - cw_0^2 + w_0(c^2 - w_0^2)\cos(\phi + \theta) - (c^2 - w_0^2)v\sin(\phi + \alpha)\sin(\phi + \theta))}{(c^2 + w_1^2 + 2cw_1\cos\phi)(c^2 + w_0^2 + 2cw_0\cos(\phi + \theta))} \\
=&\frac{(c^2 - w_0^2)(c^2 - w_1^2)}{D_1^2}(c - v\cos(\phi + \alpha)\cos(\phi + \theta) - v\sin(\phi + \alpha)\sin(\phi + \theta)) \\
=&\frac{(c^2 - w_0^2)(c^2 - w_1^2)}{D_1^2}(c - v\cos(\alpha - \theta)) = \frac{\lambda_1}{\lambda}(c - v\cos(\alpha - \theta))
\end{aligned}$$

Аналогично доказывается и для $c + v\sin(\alpha - B)$. Но это значит, что

$$\frac{c + v\sin(\alpha - A)}{\lambda_1} = \frac{c + v\sin(\alpha - B)}{\lambda_2}$$

т.е. частоты равны. Если источник так же закреплено относительно интерферометра, т.е. верно соотношение:

$$\lambda = \Lambda\cos\theta\frac{c\cos\theta - v\cos\alpha}{c}$$

То, наблюдаемые частоты равны частоте волн, испущенных источником. Действительно:

$$c - v\cos(\alpha - \theta) = c - v\cos\alpha\cos\theta - v\sin\alpha\sin\theta = c - v\cos\alpha\cos\theta - c\sin^2\theta = \cos\theta(c\cos\theta - v\cos\alpha) = \frac{c\lambda}{\Lambda}$$

откуда:

$$\frac{c + v\sin(\alpha - A)}{\lambda_1} = \frac{c + v\sin(\alpha - B)}{\lambda_2} = \frac{c}{\Lambda}$$

5. Угол между максималями и плоскостью первого зеркала.

Пусть ψ - искомый угол, а A, B - углы, которые составляют с первым зеркалом первый и второй фронты соответственно. Пусть $A > B$. Тогда, из рисунка:

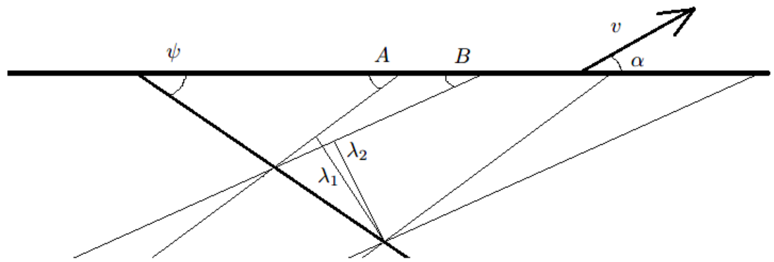

рис. 14

Видно, что:

$$\frac{\sin(\psi + A)}{\sin(\psi + B)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

Поскольку интерферометр движется относительно среды со скоростью v, а направлении составляющем угол α с плоскостью первого зеркала, то длины волн увеличиваются и верно соотношение:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{c + v\sin(\alpha - A)}{c + v\sin(\alpha - B)}$$

Упростим выражение:

$$\frac{\sin(\psi + A)}{\sin(\psi + B)} = \frac{c + v\sin(\alpha - A)}{c + v\sin(\alpha - B)}$$
$$\frac{\operatorname{tg}\psi\cos A + \sin A}{\operatorname{tg}\psi\cos B + \sin B} = \frac{c + v\sin(\alpha - A)}{c + v\sin(\alpha - B)}$$
$$\operatorname{tg}\psi[\cos A(c + v\sin(\alpha - B)) - \cos B(c + v\sin(\alpha - A))] = -\sin A(c + v\sin(\alpha - B)) + \sin B(c + v\sin(\alpha - A))$$

Откуда:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}\psi =&\frac{c(\sin B - \sin A) - v(\sin A\sin(\alpha - B) - \sin B\sin(\alpha - A))}{c(\cos A - \cos B) - v(\cos B\sin(\alpha - A) - \cos A\sin(\alpha - B))}\\
=&\frac{c(\sin B - \sin A) + v\sin\alpha\sin(B - A)}{c(\cos A - \cos B) - v\cos\alpha\sin(B - A)}\\
=&\frac{2c\cos\frac{B+A}{2}\sin\frac{B-A}{2} + 2v\sin\alpha\cos\frac{B-A}{2}\sin\frac{B-A}{2}}{2c\sin\frac{B+A}{2}\sin\frac{B-A}{2} - 2v\cos\alpha\cos\frac{B-A}{2}\sin\frac{B-A}{2}}
\end{aligned}$$

Т.е.

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{c\cos\frac{A+B}{2} + v\sin\alpha\cos\frac{A-B}{2}}{c\sin\frac{A+B}{2} - v\cos\alpha\cos\frac{A-B}{2}}$$

Найдем выражения для косинусов и синусов:

$$\begin{aligned}
D_1 D_2 e^{i\frac{A-B}{2}} =&c^4 e^{i(2\phi - \chi - \frac{\pi}{2})} +\\
&c^3(w_0 e^{i(-\chi + \phi - \theta - \frac{\pi}{2})} + w_1 e^{i(-\chi - \theta)} + w_2 e^{i(2\phi + \theta - \frac{\pi}{2})} - w_0 e^{i(\chi + \phi + \theta - \frac{\pi}{2})}) +\\
&c^2(w_0 w_1 e^{i(\phi - \chi)} + w_0 w_2 e^{i(\phi - \frac{\pi}{2})} + w_1 w_2 - w_0^2 e^{i(\chi - \frac{\pi}{2})} - w_0 w_1 e^{-i(\phi - \chi)} - w_0 w_2 e^{i(\phi - \frac{\pi}{2})}) +\\
&c(w_0 w_1 w_2 e^{i(\phi + \theta)} - w_0^2 w_1 e^{i(\chi + \theta)} - w_0^2 w_2 e^{i(-\theta - \frac{\pi}{2})} - w_0 w_1 w_2 e^{-i(\phi + \theta)} -\\
&- w_0^2 w_1 w_2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
D_1D_2e^{i\frac{A-B}{2}} =& -ic^4e^{i(2\phi-\chi)}+\\
& c^3(-2w_0e^{i\phi}\sin(\chi+\theta)+w_1e^{-i(\chi+\theta)}-iw_2e^{i(2\phi+\theta)})+\\
& c^2(2iw_0w_1\sin(\phi-\chi)+w_1w_2+iw_0^2e^{i\chi})+\\
& c(2iw_0w_1w_2\sin(\phi+\theta)-w_0^2w_1e^{i(\chi+\theta)}+iw_0^2w_2e^{-i\theta})-\\
& -w_0^2w_1w_2\\
D_1D_2e^{i\frac{A+B}{2}} =& c^4e^{i(\chi+\theta)}+\\
& c^3(w_0e^{i(\chi-\phi)}-w_0e^{-i(\chi-\phi)})+w_1e^{i(\chi-2\phi+\frac{\pi}{2}))}+w_2)+\\
& c^2(w_0w_1e^{i(\chi-\phi+\theta+\frac{\pi}{2}))}-w_0w_1e^{-i(\phi+\chi+\theta+\frac{\pi}{2}))}+w_0w_2e^{-i(\phi+\theta)}+w_1w_2e^{-i(2\phi+\theta-\frac{\pi}{2}))}-w_0^2e^{-i(\chi+\theta)}-\\
& \quad -w_0w_2e^{i(\phi+\theta)})+\\
& c(w_0w_1w_2e^{i(-\phi+\frac{\pi}{2}))}-w_0^2w_1e^{i(-\chi+\frac{\pi}{2}))}-w_0^2w_2-w_0w_1w_2e^{i(-\phi+\frac{\pi}{2}))}-\\
& -w_0^2w_1w_2e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}\\
=& c^4e^{i(\chi+\theta)}+\\
& c^3(2iw_0\sin(\chi-\phi)+iw_1e^{i(\chi-2\phi))}+w_2)+\\
& c^2(-2iw_0w_2\sin(\phi+\theta)-2w_0w_1e^{-i\phi}\sin(\chi+\theta)+iw_1w_2e^{-i(2\phi+\theta)}-w_0^2e^{-i(\chi+\theta)}+\\
& c(-iw_0^2w_1e^{-i\chi}-w_0^2w_2)-iw_0^2w_1w_2e^{i\theta}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_1D_2\cos\frac{A-B}{2} =& c^4\sin(2\phi-\chi)+c^3(-2w_0\cos\phi\sin(\chi+\theta)+w_1\cos(\chi+\theta)+w_2\sin(2\phi+\theta))+\\
& c^2(w_1w_2-w_0^2\sin\chi)+c(-w_0^2w_1\cos(\chi+\theta)+w_0^2w_2\sin\theta)-w_0^2w_1w_2\\
D_1D_2\cos\frac{A+B}{2} =& c^4\cos(\chi+\theta)+c^3(w_1\sin(2\phi-\chi)+w_2)+\\
& c^2(-2w_0w_1\cos\phi\sin(\chi+\theta)+w_1w_2\sin(2\phi+\theta)-w_0^2\cos(\chi+\theta))+\\
& c(-w_0^2w_1\sin\chi-w_0^2w_2)+w_0^2w_1w_2\sin\theta\\
D_1D_2\sin\frac{A+B}{2} =& c^4\sin(\chi+\theta)+c^3(-2w_0\sin(\phi-\chi)+w_1\cos(2\phi-\chi))+\\
& c^2(-2w_0w_2\sin(\phi+\theta)+2w_0w_1\sin\phi\sin(\chi+\theta)+w_1w_2\cos(2\phi+\theta)+w_0^2\sin(\chi+\theta))+\\
& c(-w_0^2w_1\cos\chi)-w_0^2w_1w_2\cos\theta
\end{aligned}
$$

Откуда, введя обозначение $u = v\cos\alpha$:

$$
\begin{aligned}
& D_1D_2(c\cos\frac{A+B}{2}+v\sin\alpha\cos\frac{A-B}{2}) = D_1D_2(c\cos\frac{A+B}{2}-w_1\cos\frac{A-B}{2}) = c^5\cos(\chi+\theta)+\\
& c^4(w_1\sin(2\phi-\chi)+w_2)+c^3(-2w_0w_1\cos\phi\sin(\chi+\theta)+w_1w_2\sin(2\phi+\theta)-w_0^2\cos(\chi+\theta))+\\
& c^2(-w_0^2w_1\sin\chi-w_0^2w_2)+w_0^2w_1w_2c\sin\theta-w_1c^4\sin(2\phi-\chi)-\\
& -w_1c^3(-2w_0\cos\phi\sin(\chi+\theta)+w_1\cos(\chi+\theta)+w_2\sin(2\phi+\theta))-w_1c^2(w_1w_2-w_0^2\sin\chi)-\\
& -w_1c(-w_0^2w_1\cos(\chi+\theta)+w_0^2w_2\sin\theta)+w_0^2w_1^2w_2\\
& = c^5\cos(\chi+\theta)+c^4w_2-c^3(w_1^2+w_0^2)\cos(\chi+\theta)-c^2(w_0^2w_2+w_1^2w_2)+cw_0^2w_1^2\cos(\chi+\theta)+w_0^2w_1^2w_2\\
& = \cos(\chi+\theta)(c^5-c^3(w_1^2+w_0^2)+cw_0^2w_1^2)+w_2(c^4-c^2(w_0^2+w_1^2)+w_0^2w_1^2)\\
& = (c\cos(\chi+\theta)+w_2)(c^2-w_1^2)(c^2-w_0^2)
\end{aligned}
$$

$$D_1D_2(c\sin\frac{A+B}{2}-u\cos\frac{A-B}{2})=c^5\sin(\chi+\theta)+c^4(-2w_0\sin(\phi-\chi)+w_1\cos(2\phi-\chi))+$$
$$c^3(-2w_0w_2\sin(\phi+\theta)+2w_0w_1\sin\phi\sin(\chi+\theta)+w_1w_2\cos(2\phi+\theta)+w_0^2\sin(\chi+\theta))+$$
$$c^2(-w_0^2w_1\cos\chi)-cw_0^2w_1w_2\cos\theta-c^4u\sin(2\phi-\chi)-$$
$$-c^3u(-2w_0\cos\phi\sin(\chi+\theta)+w_1\cos(\chi+\theta)+w_2\sin(2\phi+\theta))-c^2u(w_1w_2-w_0^2\sin\chi)-$$
$$-cu(-w_0^2w_1\cos(\chi+\theta)+w_0^2w_2\sin\theta)-w_0^2w_1w_2u$$
$$=c^5\sin(\chi+\theta)+c^4(2v\cos(\phi+\alpha)\sin(\phi-\chi)-v\sin\alpha\cos(2\phi-\chi)-v\cos\alpha\sin(2\phi-\chi))+$$
$$c^3(-2w_0w_2\sin(\phi+\theta)+2w_0w_1\sin\phi\sin(\chi+\theta)+w_1w_2\cos(2\phi+\theta)+w_0^2\sin(\chi+\theta)-$$
$$-v\cos\alpha(-2w_0\cos\phi\sin(\chi+\theta)+w_1\cos(\chi+\theta)+w_2\sin(2\phi+\theta)))+$$
$$c^2(-w_0^2w_1\cos\chi-v\cos\alpha(w_1w_2-w_0^2\sin\chi))-c(w_0^2w_1w_2\cos\theta+v\cos\alpha(-w_0^2w_1\cos(\chi+\theta)+w_0^2w_2\sin\theta))+$$
$$uw_0^2w_1w_2$$
$$=c^5\sin(\chi+\theta)+c^4(v\sin((\phi-\chi)+(\phi+\alpha))+v\sin((\phi-\chi)-(\phi+\alpha))-v\sin((\phi+\alpha)+(\phi-\chi)))+$$
$$c^3(2vw_2\cos(\phi+\alpha)\sin(\phi+\theta)-2vw_0\sin\alpha\sin\phi\sin(\chi+\theta)+2vw_0\cos\alpha\cos\phi\sin(\chi+\theta)-$$
$$-vw_2\sin\alpha\cos(2\phi+\theta)-vw_2\cos\alpha\sin(2\phi+\theta)+w_0^2\sin(\chi+\theta)-vw_1\cos\alpha\cos(\chi+\theta))+$$
$$c^2(w_0^2(v\cos\alpha\sin\chi+v\sin\alpha\cos\chi)-uw_1w_2)-cw_0^2(-vw_2\sin\alpha\cos\theta+vw_2\cos\alpha\sin\theta-vw_1\cos\alpha\cos(\chi+\theta))+$$
$$uw_0^2w_1w_2$$
$$=c^5\sin(\chi+\theta)+c^4(-v\sin(\chi+\alpha))+$$
$$c^3(vw_2\sin((\phi+\alpha)+(\phi+\theta))+vw_2\sin(\theta-\alpha)+2vw_0\cos(\phi+\alpha)\sin(\chi+\theta)-$$
$$-vw_2\sin((\phi+\theta)+(\phi+\alpha))+w_0^2\sin(\chi+\theta)-vw_1\cos\alpha\cos(\chi+\theta))+$$
$$c^2(vw_0^2\sin(\chi+\alpha)-uw_1w_2)-cw_0^2(vw_2\sin(\theta-\alpha)-vw_1\cos\alpha\cos(\chi+\theta))+uw_0^2w_1w_2$$
$$=c^5\sin(\chi+\theta)+c^4(-v\sin(\chi+\alpha))+c^3(vw_2\sin(\theta-\alpha)-w_0^2\sin(\chi+\theta)-vw_1\cos\alpha\cos(\chi+\theta))+$$
$$c^2(vw_0^2\sin(\chi+\alpha)-uw_1w_2)-cw_0^2(vw_2\sin(\theta-\alpha)-vw_1\cos\alpha\cos(\chi+\theta))+uw_0^2w_1w_2$$
$$=(c^2-w_0^2)(c^3\sin(\chi+\theta)-c^2v\sin(\chi+\alpha)+c(vw_2\sin(\theta-\alpha)-vw_1\cos\alpha\cos(\chi+\theta))-uw_1w_2)$$

Т.е.

$$\operatorname{tg}\psi=\frac{(c\cos(\chi+\theta)+w_2)(c^2-w_1^2)}{c^3\sin(\chi+\theta)-c^2v\sin(\chi+\alpha)+c(vw_2\sin(\theta-\alpha)-vw_1\cos\alpha\cos(\chi+\theta))-uw_1w_2}$$

6. Положение центральной линии максимумов.

Найдем положение центральной линии максимумов на плоскости первого зеркала. Пусть плоскость пластины пересекает плоскости первого и второго зеркал вдоль некоторых прямых, перпендикулярных плоскости рисунка. Тогда в плоскости рисунка эти прямые будут точками, которые обозначим как O_1 и O_2 соответственно. Пусть центральная линия максималей пересекает плоскость первого зеркала в точке A. Изобразим линии, соответствующие итоговым фронтам, проходящими через точку O_1 и опять будем предполагать, что угол B наклона второго фронта меньше угла A наклона первого фронта (рис. 15):

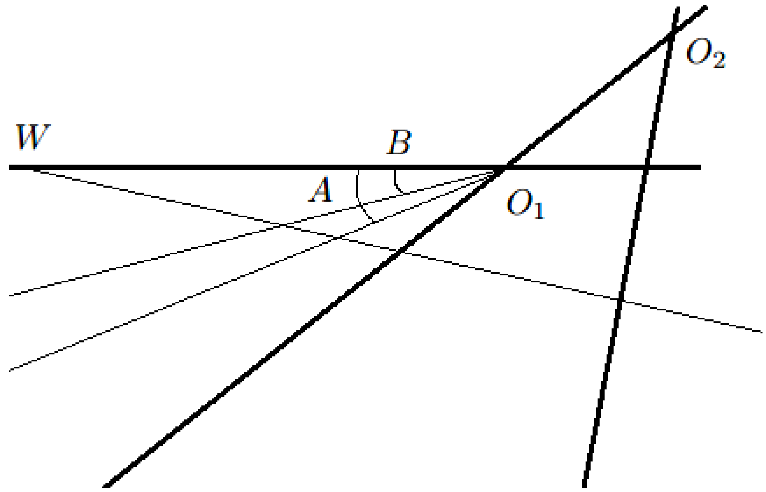

рис. 15

В точке O_1 фаза падающей на пластину волны точно такая же, как и фаза отраженной от первого зеркала волны. Обозначим эту фазу как η_0, фазы отраженных волн в W как η_1 и η_2 соответственно, O_1W за x, а O_1O_2 за a. Тогда:

$$\eta_1 = \eta_0 - \frac{x \sin A}{\lambda_1}$$

У второго фронта в O_2 будет такая же фаза, как и у падающей волны. Поскольку фаза падающей волны в O_2 будет равна

$$\eta_0 + \frac{a \sin(\phi + \theta)}{\lambda}$$

То фаза второго фронта в точке O_1 будет равна:

$$\eta_0 + \frac{a \sin(\phi + \theta)}{\lambda} + \frac{a \cos(\phi + B)}{\lambda_2}$$

А его фаза в точке W тогда:

$$\eta_2 = \eta_0 + \frac{a \sin(\phi + \theta)}{\lambda} + \frac{a \cos(\phi + B)}{\lambda_2} - \frac{x \sin B}{\lambda_2}$$

Поскольку через W проходит максималь, вдоль которой фазы волны равны, то $\eta_1 = \eta_2$:

$$\eta_0 - \frac{x \sin A}{\lambda_1} = \eta_0 + \frac{a \sin(\phi + \theta)}{\lambda} + \frac{a \cos(\phi + B)}{\lambda_2} - \frac{x \sin B}{\lambda_2}$$

$$x\left(\frac{\sin B}{\lambda_2} - \frac{\sin A}{\lambda_1}\right) = a\left(\frac{\sin(\phi + \theta)}{\lambda} + \frac{\cos(\phi + B)}{\lambda_2}\right)$$

$$x\left(\sin B - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sin A\right) = a\left(\frac{\lambda_2}{\lambda} \sin(\phi + \theta) + \cos(\phi + B)\right)$$

$$x((c + v \sin(\alpha - A)) \sin B - (c + v \sin(\alpha - B)) \sin A) = a(c + v \sin(\alpha - A))\left(\frac{\lambda_2}{\lambda} \sin(\phi + \theta) + \cos(\phi + B)\right)$$

$$x\left(2c \cos \frac{B + A}{2} \sin \frac{B - A}{2} + v \sin \alpha \sin(B - A)\right) = a\frac{\lambda_1}{\lambda}(c - v \cos(\alpha - \theta))\left(\frac{\lambda_2}{\lambda} \sin(\phi + \theta) + \cos(\phi + B)\right)$$

$$2x \sin \frac{B - A}{2}\left(c \cos \frac{B + A}{2} + v \sin \alpha \cos \frac{B - A}{2}\right) = a\frac{\lambda_1}{\lambda}(c - v \cos(\alpha - \theta))\left(\frac{\lambda_2}{\lambda} \sin(\phi + \theta) + \cos(\phi + B)\right)$$

Откуда:

$$2x\left[\frac{1}{2}\frac{c(c - v \cos(\alpha - \theta))Q}{D_1 D_2}\right]\left[\frac{(c \cos(\chi + \theta) + w_2)(c^2 - w_1^2)(c^2 - w_0^2)}{D_1 D_2}\right] =$$
$$a\frac{(c^2 - w_0^2)(c^2 - w_1^2)}{D_1^2 D_2^2}(c - v \cos(\alpha - \theta))((c^2 - w_0^2)(c^2 - w_2^2) \sin(\phi + \theta) + D_2^2 \cos(\phi + B))$$

Т.е.

$$xc(c\cos(\chi+\theta)+w_2)Q = a((c^2-w_0^2)(c^2-w_2^2)\sin(\phi+\theta)+D_2^2\cos(\phi+B))$$

Упростим это выражения зная $e^{i\frac{B}{2}}$:

$$\begin{aligned}
D_2e^{i\frac{B}{2}} =& c^2e^{i(\chi-\phi+\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}+c(w_2e^{i(-\phi-\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}-w_0e^{i(-\chi-\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})})-w_0w_2e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})}\\
D_2^2e^{iB} =& c^4e^{i(2\chi-2\phi+\theta+\frac{\pi}{2})}+2c^3(w_2e^{i(\chi-2\phi+\frac{\pi}{2})}-w_0e^{i(-\phi+\frac{\pi}{2})})+\\
& c^2(w_2^2e^{i(-2\phi-\theta+\frac{\pi}{2})}-2w_0w_2e^{i(-\chi-\phi-\theta+\frac{\pi}{2})}+w_0^2e^{i(-2\chi-\theta+\frac{\pi}{2})})-2c^2w_0w_2e^{i(\chi-\phi+\theta+\frac{\pi}{2})}-\\
& -2cw_0w_2(w_2e^{i(-\phi+\frac{\pi}{2})}-w_0e^{i(-\chi+\frac{\pi}{2})})+w_0^2w_2^2e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}\\
D_2^2e^{i(\phi+B)} =& ic^4e^{i(2\chi-\phi+\theta)}+2c^3(iw_2e^{i(\chi-\phi)}-iw_0)+\\
& c^2(iw_2^2e^{i(-\phi-\theta)}-iw_0w_2\cos i(\chi+\theta)+iw_0^2e^{i(-2\chi+\phi-\theta)})-2cw_0w_2(iw_2-iw_0e^{i(-\chi+\phi)})+iw_0^2w_2^2e^{i(\phi+\theta)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2^2\cos(\phi+B) =& -c^4\sin(2\chi-\phi+\theta)-2c^3w_2\sin(\chi-\phi)+c^2w_2^2\sin(\phi+\theta)+c^2w_0^2\sin(2\chi-\phi+\theta)+\\
& 2cw_0^2w_2\sin(\chi-\phi))-w_0^2w_2^2\sin(\phi+\theta)\\
=& -c^2(c^2-w_0^2)\sin((\chi-\phi)+(\chi+\theta))+(c^2-w_0^2)w_2^2\sin(\phi+\theta)-2cw_2(c^2-w_0^2)\sin(\chi-\phi)\\
=& -c^2(c^2-w_0^2)(2\sin(\chi-\phi)\cos(\chi+\theta)+\sin(\phi+\theta))-2cw_2(c^2-w_0^2)\sin(\chi-\phi)+\\
& (c^2-w_0^2)w_2^2\sin(\phi+\theta)\\
=& (c^2-w_0^2)[2c(c\cos(\chi+\theta)+w_2)\sin(\phi-\chi)-(c^2-w_2^2)\sin(\phi+\theta))]
\end{aligned}$$

Т.е.

$$(c^2-w_0^2)(c^2-w_2^2)\sin(\phi+\theta)+D_2^2\cos(\phi+B) = 2c(c^2-w_0^2)(c\cos(\chi+\theta)+w_2)\sin(\phi-\chi)$$

И выражение для x имеет сравнительно простой вид:

$$x = 2a\frac{(c^2-w_0^2)\sin(\phi-\chi)}{Q}$$

7. Смещение из-за использования оптической системы

Рассмотрим, как оптическая система влияет на изображение интерференционных полос. В качестве оптической системой рассмотрим собирающую линзу. Пусть есть некоторая воображаемая плоскость Π_0, сквозь которую проходят оба волновых фронта перед тем, как попасть на линзу, и имеющие одинаковые фазы в некоторой точке P_0 этой плоскости. Пусть линза сфокусирована на эту плоскость, и изображением точки P_0 является точка P_1 плоскости Π_1. Тогда, проходя от P_0 к P_1 обе волны пройдет один и тот же оптический путь L. Но поскольку они имеют различные длины волн, то в точке P_1 они уже будут иметь разность фаз $L(\frac{1}{\lambda_2}-\frac{1}{\lambda_1})$. Таким образом, если в P_0 был максимум интерференции волн, то в её изображении Π_1 этого уже не будет. И наоборот, если в P_1 находится максимум интерференции, то в P_0 разность фаз между интерферирующими волнами равна $L(\frac{1}{\lambda_2}-\frac{1}{\lambda_1})$.

Поскольку

$$\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda} = \frac{v(c^2-w_0^2)PQ}{D_1^2D_2^2}$$

$$\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda^2} = \frac{(c^2-w_0^2)^2(c^2-w_1^2)(c^2-w_2^2)}{D_1^2D_2^2}$$

То

$$\frac{1}{\lambda_2}-\frac{1}{\lambda_1} = \frac{vPQ}{\lambda(c^2-w_0^2)(c^2-w_1^2)(c^2-w_2^2)}$$

8. Преобразование формул с учетом приближений.

Поскольку в общем виде формулы достаточно сложны, мы воспользуемся некоторыми приближениями. Будем считать, что:
- плоскость первого зеркала параллельна второму плечу
- источник света жестко связан с интерферометром
- можно пренебречь отношением скоростей второй степени и выше в том случае, если они не делятся на малую величину
- отклонение ϕ от $\frac{\pi}{4}$ и χ от нуля достаточно малы, чтобы можно было ими пренебречь в выражениях, умножаемых на $\xi^2 = \frac{v^2}{c^2}$.
- при этом, хотя величина $\cos(2\phi - \chi)$ мала, она много больше чем ξ^2. Иначе, как мы увидим далее, вместо интерференционной картины была бы равномерная засветка

Сначала укажем все формулы в общем виде, затем применим указанные приближения:

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda} = \frac{v(c^2 - w_0^2)PQ}{D_1^2 D_2^2}$$

$$\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} = \frac{vPQ}{\lambda(c^2 - w_0^2)(c^2 - w_1^2)(c^2 - w_2^2)}$$

$$\sin\frac{A - B}{2} = \sin\frac{\beta}{2} = -\frac{1}{2}\frac{c(c - v\cos(\alpha - \theta))Q}{D_1 D_2}$$

$$p = \lambda\frac{(c^2 - w_0^2)(c^2 - w_1^2)(c^2 - w_2^2)}{Q\sqrt{(vP)^2 + c^2(c^2 - w_1^2)(c^2 - w_2^2)(c - v\cos(\alpha - \theta))^2}}$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{(c\cos(\chi + \theta) + w_2)(c^2 - w_1^2)}{c^3\sin(\chi + \theta) - c^2 v\sin(\chi + \alpha) + c(vw_2\sin(\theta - \alpha) - vw_1\cos\alpha\cos(\chi + \theta)) - uw_1w_2}$$

$$x = 2a\frac{(c^2 - w_0^2)\sin(\phi - \chi)}{Q}$$

где:

$$\begin{aligned}
w_0 &= -v\cos(\phi + \alpha)\\
w_1 &= -v\sin\alpha\\
w_2 &= -v\cos(\chi + \alpha)\\
P &= c^3\cos(\chi + \theta - \alpha) - c^2 v\cos\chi + cv^2\sin\alpha\cos(\chi + \alpha)\sin(\alpha - \theta)\\
Q &= 2c^2\cos(2\phi - \chi) - v^2\cos\chi(\cos 2\phi + \cos 2\alpha) + 4v^2\sin\chi\sin\alpha\cos\phi\cos(\phi + \alpha)\\
D_1 &= \sqrt{(c^2 + v^2\cos^2(\phi + \alpha) - 2cv\cos(\phi + \alpha)\cos(\phi + \theta))(c^2 + v^2\sin^2\alpha - 2cv\sin\alpha\cos\phi_1)}\\
D_2 &= \sqrt{(c^2 + v^2\cos^2(\chi + \alpha) - 2cv\cos(\chi + \alpha)\cos(\chi + \theta))(c^2 + v^2\cos(\phi + \alpha) + 2cv\cos(\phi + \alpha)\cos\phi_2)}
\end{aligned}$$

При указанных приближениях верны следующие соотношения:

$$c\sin\theta = v\sin\alpha$$

$$\lambda = \Lambda\cos\theta\frac{c\cos\theta - v\cos\alpha}{c}$$

где λ обозначает длины волны, испущенную источником.

Откуда:

$$\begin{aligned}
P =&c(c^2\cos(\chi-\alpha)\cos\theta - c^2\sin\theta(\sin\chi\cos\alpha-\sin\alpha\cos\chi) - cv\cos\chi + \\
&\sin\alpha\cos(\chi+\alpha)(v^2\sin\alpha\cos\theta - v^2\cos\alpha\sin\theta)) \\
=&c(c^2\cos(\chi-\alpha)\cos\theta - cv\sin\alpha\sin\chi\cos\alpha + cv\sin^2\alpha\cos\chi - cv\cos\chi + \\
&v^2\sin^2\alpha\cos(\chi+\alpha)\cos\theta - cv\sin^2\theta\cos\chi\cos^2\alpha + cv\sin^2\theta\sin\chi\cos\alpha\sin\alpha) \\
=&c((c^2\cos(\chi-\alpha) + v^2\sin^2\alpha\cos(\chi+\alpha))\cos\theta - \cos\alpha(cv\sin\alpha\sin\chi + cv\cos\alpha\cos\chi + \\
&cv\sin^2\theta\cos\chi\cos\alpha - cv\sin^2\theta\sin\chi\sin\alpha)) \\
=&c((c^2\cos(\chi-\alpha) + v^2\sin^2\alpha\cos(\chi+\alpha))\cos\theta - cv\cos\alpha(\cos(\chi-\alpha) + \sin^2\theta\cos(\chi+\alpha))) \\
=&(c^2\cos(\chi-\alpha) + v^2\sin^2\alpha\cos(\chi+\alpha))(c\cos\theta - v\cos\alpha) \\
=&c^3(\cos(\chi-\alpha) + \xi^2\sin^2\alpha\cos(\chi+\alpha))(\cos\theta - \xi\cos\alpha) \\
\approx&c^3(\cos\theta\cos(\chi-\alpha) - \xi\cos\alpha\cos(\chi-\alpha) + \xi^2\sin^2\alpha\cos\alpha\cos\theta) \\
Q =&c^2(2\cos(2\phi-\chi) - \xi^2\cos\chi\cos2\phi - \xi^2\cos\chi\cos2\alpha + 4\xi^2\sin\chi\sin\alpha\cos\phi\cos(\phi+\alpha)) \\
\approx&c^2(2\cos(2\phi-\chi) - \xi^2\cos2\alpha)
\end{aligned}$$

Поскольку

$$c - v\cos(\alpha-\theta) = c - v\cos\alpha\cos\theta - v\sin\alpha\sin\theta = c\cos^2\theta - v\cos\alpha\cos\theta = \cos\theta(c\cos\theta - v\cos\alpha)$$

То можно упростить подкоренное выражения для p:

$$\begin{aligned}
&v^2P^2 + c^2(c^2-w_1^2)(c^2-w_2^2)(c - v\cos(\alpha-\theta))^2 = v^2(c^2\cos(\chi-\alpha) - v^2\sin^2\alpha\cos(\chi+\alpha))^2(c\cos\theta - v\cos\alpha)^2 + \\
&\quad c^2(c^2-w_1^2)(c^2-w_2^2)\cos^2\theta(c\cos\theta - v\cos\alpha)^2 = \\
&= (c\cos\theta - v\cos\alpha)^2(v^2(c^2\cos(\chi-\alpha) - v^2\sin^2\alpha\cos(\chi+\alpha))^2 + c^2(c^2-w_1^2)(c^2-w_2^2)\cos^2\theta)
\end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned}
p =&\lambda\frac{(c^2-w_0^2)(c^2-w_1^2)(c^2-w_2^2)}{Q(c\cos\theta - v\cos\alpha)\sqrt{v^2(c^2\cos(\chi-\alpha) - v^2\sin^2\alpha\cos(\chi+\alpha))^2 + c^2(c^2-w_1^2)(c^2-w_2^2)\cos^2\theta}} \\
=&\frac{\Lambda\cos\theta}{Q}\frac{c^2(1-\xi^2\cos(\phi+\alpha))(1-\xi^2\sin\alpha)(1-\xi^2\cos(\chi+\alpha))}{\sqrt{\xi^2(\cos(\chi-\alpha) - \xi^2\sin^2\alpha\cos(\chi+\alpha))^2 + (1-\xi_1^2)(1-\xi_2^2)\cos^2\theta}} \\
\approx&\frac{c^2\Lambda}{Q} = \frac{\Lambda}{2\cos(2\phi-\chi) - \xi^2\cos2\alpha} \approx \frac{\Lambda}{2\cos(2\phi-\chi)}\left(1 + \frac{\xi^2\cos2\alpha}{2\cos(2\phi-\chi)}\right) \\
\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} =&\frac{vc^3(\cos(\chi-\alpha) + \xi^2\sin^2\alpha\cos(\chi+\alpha))(\cos\theta - \xi\cos\alpha)Q}{\lambda c^6(1-\xi^2\cos^2(\phi+\alpha))(1-\xi^2\sin^2\alpha)(1-\xi^2\cos^2(\chi+\alpha))} \\
\approx&\frac{v(\cos(\chi-\alpha))(c\cos\theta - v\cos\alpha)Q}{\lambda c^4} \approx \frac{v(\cos(\chi-\alpha))Q}{\Lambda\cos\theta c^3} \\
\approx&\frac{\xi(\cos(\chi-\alpha))}{p\cos\theta} \approx \frac{\xi}{p}\cos\alpha, \text{ т.к. } \cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\xi^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tg}\psi =&[(c\cos\chi\cos\theta - c\sin\chi\sin\theta - v\cos\chi\cos\alpha + v\sin\chi\sin\alpha)(c^2-w_1^2)]/[c^3\sin\chi\cos\theta + c^3\sin\theta\cos\chi - \\
&- c^2 v\sin\chi\cos\alpha - c^2 v\cos\chi\sin\alpha - cv^2\cos\chi\cos\alpha\sin\theta\cos\alpha + cv^2\cos\chi\cos\alpha\sin\alpha\cos\theta + \\
&cv^2\sin\chi\sin\alpha\sin\theta\cos\alpha - cv^2\sin\chi\sin\alpha\sin\alpha\cos\theta + cv^2\sin\alpha\cos\alpha\cos\chi\cos\theta - \\
&cv^2\sin\alpha\cos\alpha\sin\chi\sin\theta - v^3\cos\alpha\sin\alpha\cos\chi\cos\alpha + v^3\cos\alpha\sin\alpha\sin\chi\sin\alpha]^{-1} \\
=&[(c\cos\theta - v\cos\alpha)\cos\chi(c^2-w_1^2)]/[(c\cos\theta - v\cos\alpha)((c^2-v^2\sin^2\alpha)\sin\chi - 2v^2\cos\alpha\sin\alpha\cos\chi)]^{-1} \\
=&\frac{\cos\chi(c^2-w_1^2)}{((c^2-v^2\sin^2\alpha)\sin\chi - 2v^2\cos\alpha\sin\alpha\cos\chi)} \\
\operatorname{ctg}\psi =& \operatorname{tg}\chi - \frac{\xi^2\sin 2\alpha}{1-\xi^2\sin\alpha} \\
\psi \approx& \frac{\pi}{2} - \chi \\
x =& 2ac^2\frac{(1-\xi^2\cos(\phi+\alpha))\sin(\phi-\chi)}{Q} \approx \frac{a\sin(\phi-\chi)}{\cos(2\phi-\chi)}(1+\frac{\xi^2\cos 2\alpha}{2\cos(2\phi-\chi)})
\end{aligned}
$$

Обратим внимание на ширину полос p. Видно, что если $\cos(2\phi-\chi)$ одного порядка с ξ^2, то ширины полосы очень сильно изменялись бы при повороте интерферометра. Поскольку ни в опыте Майкельсона, ни в опыте Майкельсона-Морли на этом внимание не акцентировалось, можно предположить что при измерениях ширина полосы изменялась слабо, а тогда можем считать $\cos(2\phi-\chi)$ хотя и малой величиной, но такой что $\cos(2\phi-\chi) \gg \xi^2$.

Далее, естественнее вместо угла $(2\phi-\chi)$ рассматривать угол $\omega = \frac{\pi}{2} - 2\phi + \chi$, поскольку ω это есть угол клина, образованного плоскостью первого зеркала и отзеркаленной относительно пластины плоскостью второго зеркала. Тогда $\cos(2\phi-\chi) = \sin\omega$. Если обозначить за p_0 и x_0 ширины полос и положение центральной линии при отсутствии движения, то, можно записать формулы таким образом:

$$p_0 = \frac{\Lambda}{2\sin\omega}$$

$$x_0 = \frac{a\sin(\phi-\chi)}{\sin\omega}$$

$$p = p_0(1+\frac{\xi^2\cos 2\alpha}{2\sin\omega})$$

$$x = x_0(1+\frac{\xi^2\cos 2\alpha}{2\sin\omega})$$

Заметил, что направление максималей ψ можно считать не изменяется при повороте интерферометра и однозначно определяется наклоном второго зеркала.

9. Об отражении волны от движущегося зеркала.

Покажем, что полученное Хиксом выражение для угла отражения от движущегося зеркала в точности совпадает с тем, которое следует и из теории относительности. Найдем угол отражения от движущегося в направлении к источнику зеркала согласно специальной теории относительности. Пусть в покоящейся системе отсчета K вектор $\vec{k}_0$ падает на движущееся навстречу системе K зеркало под углом θ. Тогда:

$$
\begin{cases}
x = k_0\cos\theta \\
y = k_0\sin\theta \\
z = 0 \\
t = \frac{k_0}{c}
\end{cases}
$$

В системе отсчета K', связанной с движущимся зеркалом, будем иметь вектор $\vec{k}'$:

$$
\begin{cases}
x' = \frac{x+vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\
y' = y \\
z' = 0 \\
t' = \frac{t+\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}
\end{cases}
$$

Поскольку в данной системе отсчета угол падения равен углу отражения, то отраженный вектор $\vec{k}''$ будет отличаться от вектора $\vec{k}'$ только знаком перед x компонентой:

$$\begin{cases} x'' = -x' = -\frac{x+vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y'' = y' \\ z'' = 0' \\ t'' = t' = \frac{t+\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

Возвращаясь обратно в покоящуюся систему отсчета получим отраженный вектор $\vec{k}_1$:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{x''-vt''}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = -\frac{(1+\frac{v^2}{c^2})x+2vt}{1-\frac{v^2}{c^2}} \\ y_1 = y'' = y \\ z_1 = 0'' \\ t_1 = \frac{t''-\frac{v}{c^2}x''}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{(1+\frac{v^2}{c^2})t+2\frac{v}{c^2}x}{1-\frac{v^2}{c^2}} \end{cases}$$

Тогда, $\vec{k}_1$ будет составлять угол θ_1 с осью OX:

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{y_1}{x_1} = -\frac{(1-\frac{v^2}{c^2})y}{(1+\frac{v^2}{c^2})x+2vt} = -\frac{(1-\frac{v^2}{c^2})\sin\theta}{(1+\frac{v^2}{c^2})\cos\theta+2\frac{v}{c}}$$

Для удобства будем отсчитывать угол не от оси OX, а от нормали к плоскости, и окончательно запишем выражения для угла отражения в виде:

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{(c^2-v^2)\sin\theta}{(c^2+v^2)\cos\theta+2vc}$$

Теперь вернемся к формуле, полученной Хиксом:

$$\operatorname{tg}\frac{\phi'}{2} = \frac{c-v}{c+v}\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}$$

Поскольку

$$\operatorname{tg}\phi' = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\phi'}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\phi'}{2}}$$

То, мы получим:

$$\operatorname{tg}\phi' = \frac{2\frac{c-v}{c+v}\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}}{1-(\frac{c-v}{c+v})^2\operatorname{tg}^2\frac{\phi}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\phi' = \frac{2(c^2-v^2)\sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2}}{(c+v)^2\cos^2\frac{\phi}{2}-(c-v)^2\sin\frac{\phi}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\phi' = \frac{(c^2-v^2)\sin\phi}{(c^2+v^2)\cos\phi+2vc}$$

Как видим, формулы различаются лишь обозначением углов.

ВЫВОДЫ

1. Классическая теорий опыта не соответствует конфигурации прибора и для плоской волны она неверна.
2. В зависимости от угла наклона между зеркалами смещение интерференционных полос в некоторый начальный момент времени может происходит в разные стороны. Если этого не учитывать, то при усреднении можно сильно исказить искомый эффект, вплоть до полного аннулирования. В опытах с интерферометрами типа Майкельсона наклон между зеркалами никак не анализировался.
3. В опыте использовалась система зеркал для увеличения оптических путей, но не делалось никаких попыток оценить вносимые ею изменения. Между тем, не очевидно, что этими изменениями можно пренебречь.
4. Из теории Хикса, помимо смещения интерференционных полос с периодом в полоборота с амплитудой, пропорциональной второму порядку отношения скоростей, следуют два дополнительных эффекта. Это изменение ширины полос при повороте интерферометра с такими же амплитудой и периодом, что можно назвать эффектом Хикса. И смещение интерференционных полос с периодом полного оборота и амплитудой пропорциональной первой степени отношения скоростей из-за использования оптической системы, что можно называть эффектом Хикса-Миллера.
5. Как следствие изменения ширины полос, амплитуда смещение интерференционной полосы линейно зависит от её порядка.

Список литературы

[1] *A. Michelson.* The relative motion of the earth and the luminiterous aether. Amer. J. Phys, 1881, 22, p. 120-129.

[2] *W.M. Hicks.* On the Michelson-Morley experiment relating to the drift of the Aether. Phil. Mag., 1902, 3, p. 9-42

[3] *К. Мёллер.* Теория относительности. Москва, Атомиздат, 1975, 400 с.

[4] *Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс.* Фейнмановские лекции по физике. Том 2. Москва, Издательство "МИР"1965, 167 с.

[5] *У.И. Франкфурт, А.М. Френк.* Оптика движущихся тел. Москва, Издательство "НАУКА 1972, 213.

[6] *С.И. Вавилов.* Экспериментальные основания теории относительности М-Л, 1928, стр 74-78, Собрание сочинений, Том 4. 1956, стр 53-61.

[7] *Г.А. Лоренц.* Теории и модели эфира. Перевод с английского под редакцией проф. А.К. Тимирязева и З.А. Цейтлина. Москва, 1936.

[8] *Ф.В. Загребнев.* Расчёт и методологический анализ основных экспериментов по оптике движущихся тел. Классическая физика и теория познания, № 5, 2018.

[9] *W. Cartmell* The Michelson-Morley experiment. Phil. Mag. 1902, 3, p 555-556.