

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

**«ОСОБЕННОСТИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НАМАГНИЧЕННЫХ ТЕЛ С
ПЕРИОДИЧЕСКОЙ И ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ»**

Выполнил студент

405 группы

Пятаков Максим Андреевич

подпись студента

Научный руководитель:

д. ф.-м. н., проф. Поляков П. А.

подпись научного руководителя

Допущена к защите _____

Зав. кафедрой д. ф.-м. н., проф. Салецкий А. М. _____

подпись зав. кафедрой

Москва

2020

Оглавление

Введение.....	3
Глава 1. Взаимодействие решетки намагниченных полосок с массивным ферромагнетиком	5
1.1. Метод магнитостатических отображений решения задач взаимодействия намагниченных полосок с массивным ферромагнетиком... 5	
1.2. Взаимодействие решетки намагниченных полосок с массивным ферромагнетиком в дипольном приближении.....	10
1.3. Сила взаимодействия широких намагниченных полосок при малом расстоянии до поверхности ферромагнетика.....	15
1.4. Поверхностная плотность силы для широких намагниченных полосок при малом расстоянии до поверхности ферромагнетика и большом расстоянии между полосками.....	19
1.5. Сравнение поверхностной плотности силы взаимодействия решетки полосок толщиной h_1 и аналогичной плотности силы сплошной магнитной пленки толщиной h_2 в дипольном приближении.....	20
1.6. Взаимодействие решетки намагниченных полосок с массивным ферромагнетиком в общем случае	25
Глава 2. Пондеромоторная сила взаимодействия систем с фрактальной магнитной организацией	32
2.1. Метод расчета сил взаимодействия фрактальных систем	32
2.2. Расчет силы взаимодействия двух подструктур с равномерным распределением магнитных моментов	32
2.3. Расчет силы взаимодействия двух подструктур с распределением магнитных моментов в виде множества Кантора.....	35
2.4. Сравнение силы взаимодействия структуры с равномерным распределением магнитных моментов и аналогичной силы структуры с распределением магнитных моментов в виде множества Кантора.....	37
Заключение	38
Список использованных источников	39

Введение

Постоянные магниты, особенно высококоэрцитивные, играют очень важную роль в большинстве производственных отраслей, используются в различных электродвигательных установках в качестве статора [1]. Электродвигатель является силовым агрегатом многих аппаратов, к примеру, беспилотников [2]. Высококоэрцитивные магниты популярны не только в двигателях постоянного тока, но и в синхронных установках [2]. Ученые в этой сфере занимаются, в том числе исследованием того, как форма, размер или поперечное сечение магнита влияют на эффективность его использования [3, 4]. В частности, выбором электродвигателя с нужными характеристиками можно увеличить быстродействие, а значит, производительность всей установки [5]. Задачами проектирования электродвигательных систем с постоянными магнитами занимались и занимаются крупнейшие зарубежные компании, такие как «Сименс», «Бош Рексрот» и др. [6] От постоянных магнитов требуется достижение максимальной силы сцепления с ферромагнитным материалом. Стремление к увеличению этого показателя и приводит к созданию новых объектов, имеющих порой сложную конфигурацию [4].

В реальных условиях при проектировании систем необходимо учитывать потери, например, в электрической машине с постоянными магнитами таковыми являются джоулевы потери в обмотке статора, различные механические потери, роторные потери [6, 7].

В технике, как правило, используются многослойные тонкие магнитные структуры – пленочные материалы, состоящие из слоев различной природы [8]. Высококоэрцитивными свойствами обладают постоянные магниты в виде пленок, изготовленные с использованием редкоземельных элементов неодима, празеодима, самария [8]. В частности, наилучшие характеристики имеют спеченные магниты, которые производятся на основе неодим-железо-бора ($Nd_2Fe_{14}B$) [8-11]. Они изготавливаются путем спекания порошков металла (железа) с редкоземельным элементом – неодимом, а также с добавлением небольшого количества неметаллического элемента (бора) [11].

Создание новой теоретической базы, то есть разработка новых методов и новой теории в физике, и усовершенствование прежней, теоретические изыскания играют важную роль для дальнейшего ее применения на практике, так как в науке всегда присутствует интеграция теории и эксперимента [12].

Как известно, на вещество, помещенное в любое магнитное поле, будет действовать пондеромоторная сила [13]. Эту же природу имеет сила взаимодействия двух тел, обладающих магнитными полями. Данная работа посвящена теоретическим изысканиям в области взаимодействий магнитных структур с периодической и фрактальной организацией. Первая глава посвящена теоретическому анализу и расчету пондеромоторных сил взаимодействия набора пленочных (полосовых) материалов с бесконечным листом ферромагнитного материала и сплошного магнетика с тем же материалом, а также сравнению полученных результатов. Во второй главе рассматривается взаимодействие магнитных систем, имеющих фрактальную организацию, а именно – структуру в виде множества Кантора, фрактальная размерность (как основная характеристика) которого 0.6 [14]. Обращение к фрактальным системам неслучайно. Если рассматривать магнитную систему как набор магнитных частиц нанометрового размера, то можно высмотреть различную геометрию пространственного расположения этих микрообъектов, характеризующихся случайной анизотропией [9, 15]. Например, фрактальная структура в пленках нанокompозитов $(Co_{41}Fe_{39}B_{20})_x(SiO_2)_{1-x}$ описана в источнике [15], подобие элементов микроструктуры пьезокерамики на основе титаната-цирконата свинца – в [16]. О фракталоподобных доменных структурах магнитоодноосных пленок пермаллоя рассказывается в статье [17].

Глава 1. Взаимодействие решетки намагниченных полосок с массивным ферромагнетиком

1.1. Метод магнитоэлектростатических отображений решения задач взаимодействия намагниченных полосок с массивным ферромагнетиком

В статье [18] исследована сила взаимодействия решетки намагниченных полосок с массивным ферромагнетиком для случая, когда каждую намагниченную полоску можно рассматривать как двумерный магнитный диполь. Это приближение справедливо, если ширина и толщина полоски много меньше расстояния до поверхности ферромагнетика. В статье обнаружено, что максимальная сила взаимодействия достигается при некотором периоде решетки. При меньших или больших периодах по сравнению с этим оптимальным значением магнитная сила взаимодействия существенно уменьшается.

В данной главе разрабатывается общая теория для силы взаимодействия решетки намагниченных полосок с массивным ферромагнетиком. Решение этой магнитоэлектростатической задачи возможно двумя эквивалентными способами – методом магнитных «зарядов» и методом молекулярных токов Ампера [19, 20]. Мы воспользовались вторым способом.

Рассмотрим отдельную полоску (см. рис. 1), однородно намагниченную перпендикулярно ее верхней плоскости. Если вектор намагниченности \vec{M} , то магнитное поле, порождаемое этим однородным распределением намагниченности, будет эквивалентно магнитному полю, создаваемому эффективными молекулярными токами с поверхностной плотностью $J = |\vec{M}|$, циркулирующими по боковым граням полоски [19, 20].

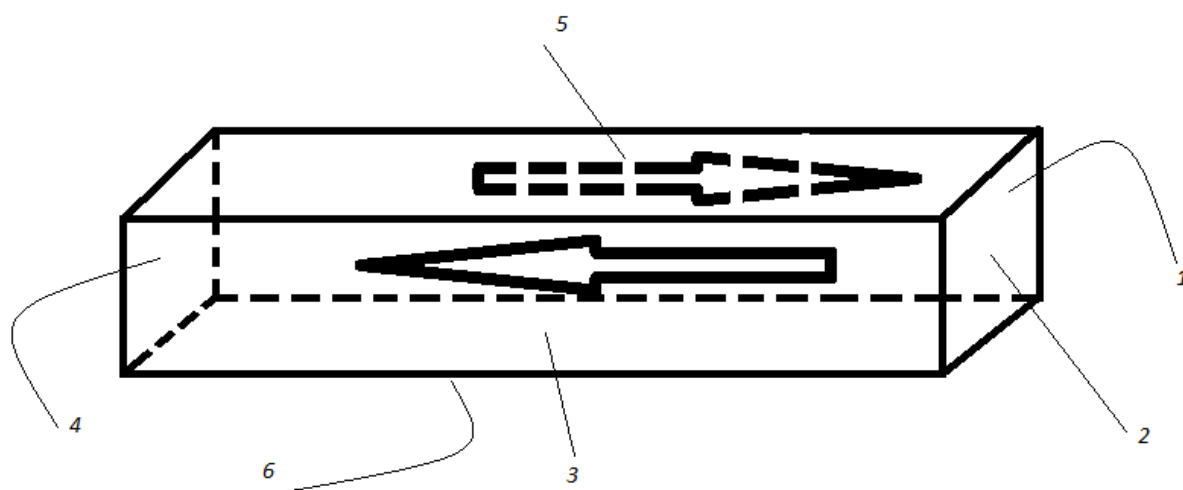


Рис. 1. Токи Ампера на поверхности пленочного материала

Расчет магнитной силы взаимодействия этих токов с ферромагнитной средой в общем случае представляет собой сложную теоретическую задачу. Магнитное поле токов, проникая в ферромагнетик, приводит к неоднородному намагничиванию магнитной среды и соответственно к порождению дополнительного магнитного поля (поля размагничивания). Решение данной самосогласованной задачи расчета результирующей намагниченности, магнитных полей и поперечной силы взаимодействия является сложной проблемой. Однако в случае, когда магнитное поле полосок не является слишком большим, то есть не приводит к намагничиванию насыщения ферромагнетика, эту задачу можно упростить. Принимая во внимание, что для ферромагнетика (например, железа) при магнитных полях, не приводящих к намагничиванию насыщения, эффективная магнитная проницаемость среды в данном диапазоне полей будет много больше единицы $\mu \gg 1$. Тогда магнитное поле размагничивания будет велико и практически экранирует внешнее магнитное поле. В формализме магнитных зарядов это означает, что индуцированные магнитные заряды в основном будут сосредоточены вблизи поверхности ферромагнетика. В этом приближении мы можем свести рассматриваемую магнитостатическую задачу расчета самосогласованного поля в верхней полуплоскости относительно поверхности ферромагнетика к вычислению магнитного поля намагниченных полосок и их магнитостатических отображений относительно этой поверхности.

Проще всего понять это приближение, воспользовавшись электростатической аналогией, а именно, рассматривая эквивалентную электростатическую задачу о взаимодействии однородно поляризованной диэлектрической полоски с полубесконечным диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью $\epsilon \gg 1$. Если диэлектрическая проницаемость много больше единицы, то диэлектрическая восприимчивость данной среды близка к восприимчивости проводника, так как проводник можно рассматривать как диэлектрик с $\epsilon \rightarrow \infty$. Тогда электрическое поле, порожденное поверхностными поляризационными зарядами и поляризованной диэлектрической полоской, будет эквивалентно в верхней полуплоскости электрическому полю поляризованной полоски и его электростатического отображения.

В случае бесконечно длинных полосок влиянием молекулярных токов от граней 2 и 4 (рис. 1) можно пренебречь. Согласно методу изображений рассматривается взаимодействие двух решеток – полосок и их магнитостатических изображений – относительно плоской границы

поверхности ферромагнетика (листа). На рис. 2 показаны все необходимые параметры системы: характерный размер равен L (справа и слева от вертикали $L/2$), расстояние между решетками составляет $2d$, ширина каждой полоски равна a , толщина – h , расстояние между соседними полосками – b , количество пленок по одну сторону от вертикали равно N (всего $2N+1$). Центральной полоске присваивается нулевой номер, и рассматривается сила, с которой решетка полосок притягивает решетку изображений.

Величину индукции dB магнитного поля линейного тока узкой полоски ширины dz' на расстоянии R легко получить, используя теорему о циркуляции [19, 20]. Получим

$$dB \cdot 2\pi R = \mu_0 J' dz'. \quad (1)$$

Из (1) имеем

$$dB = \frac{\mu_0 J' dz'}{2\pi R}. \quad (2)$$

Принимая во внимание, что

$$J' = J = M, \quad (3)$$

получим выражение для силы взаимодействия Ампера между двумя линейными токами шириной dz' и dz :

$$dF_A = J \cdot dz \cdot dB = \frac{\mu_0 M^2 dz dz'}{2\pi R}. \quad (4)$$

Из рис. 2 следует, что

$$\begin{aligned} R_1 &= \sqrt{(n(a+b))^2 + (z-z')^2}, & R_2 &= \sqrt{(n(a+b)-a)^2 + (z-z')^2}, \\ R_3 &= \sqrt{(n(a+b))^2 + (z-z')^2}, & R_4 &= \sqrt{(n(a+b)+a)^2 + (z-z')^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

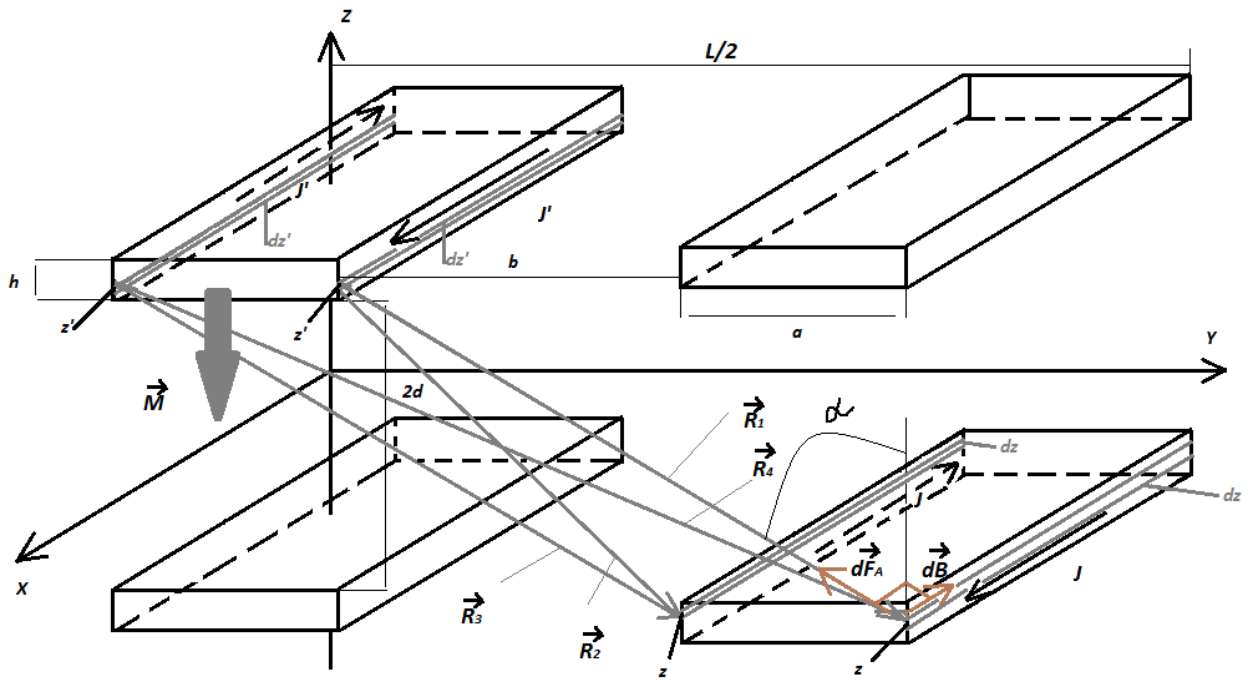


Рис. 2. Система из двух решеток

Проекция на вертикальную ось z силы взаимодействия Ампера двух линейных токов, текущих по узким полоскам dz и dz' с координатами z и z' (см. рис. 2), в соответствии с формулой (4) будет определяться выражением

$$dF_{Az} = \pm dF_A \cdot \cos \alpha = \pm dF_A \cdot \frac{|z' - z|}{R} = \pm \frac{\mu_0 M^2 dz' dz}{2\pi R} \cdot \frac{|z' - z|}{R}. \quad (6)$$

Выражение записано с точностью до знака, так как необходимо учитывать знак проекции. Рассмотрим взаимодействие четырех линейных токов, которые протекают по боковым граням двух полосок (рис. 2):

$$\begin{aligned} dF_{Az}^{(1)} &= dF_A^{(1)} \cdot \cos \alpha = dF_A^{(1)} \cdot \frac{|z' - z|}{R} = \frac{\mu_0 M^2 dz' dz}{2\pi R} \cdot \frac{z' - z}{R}, \\ dF_{Az}^{(2)} &= -dF_A^{(2)} \cdot \cos \alpha = -dF_A^{(2)} \cdot \frac{|z' - z|}{R} = -\frac{\mu_0 M^2 dz' dz}{2\pi R} \cdot \frac{z' - z}{R}, \\ dF_{Az}^{(3)} &= dF_A^{(3)} \cdot \cos \alpha = dF_A^{(3)} \cdot \frac{|z' - z|}{R} = \frac{\mu_0 M^2 dz' dz}{2\pi R} \cdot \frac{z' - z}{R}, \\ dF_{Az}^{(4)} &= -dF_A^{(4)} \cdot \cos \alpha = -dF_A^{(4)} \cdot \frac{|z' - z|}{R} = -\frac{\mu_0 M^2 dz' dz}{2\pi R} \cdot \frac{z' - z}{R}. \end{aligned}$$

Интегрируя эти выражения по толщине полосок h и делая замену $t = -z$, получим следующие выражения для четырех сил взаимодействия

суммарного молекулярного тока, текущего по боковым граням двух намагниченных полосок:

$$\begin{aligned}
 F_{Az}^{(1)} &= \frac{\mu_0 M^2}{2\pi} \int_d^{d+h} dz' \int_{-d-h}^{-d} dz \frac{|z' - z|}{R^2} = -\frac{\mu_0 M^2}{2\pi} \int_d^{d+h} dz' \int_{d+h}^d dt \frac{t + z'}{(y - y')^2 + (t + z')^2} = \\
 &= \frac{\mu_0 M^2}{2\pi} \int_d^{d+h} dz' \int_d^{d+h} dt \frac{t + z'}{(n(a + b))^2 + (t + z')^2}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 F_{Az}^{(2)} &= -\frac{\mu_0 M^2}{2\pi} \int_d^{d+h} dz' \int_{-d-h}^{-d} dz \frac{|z' - z|}{R^2} = \frac{\mu_0 M^2}{2\pi} \int_d^{d+h} dz' \int_{d+h}^d dt \frac{t + z'}{(y - y')^2 + (t + z')^2} = \\
 &= -\frac{\mu_0 M^2}{2\pi} \int_d^{d+h} dz' \int_d^{d+h} dt \frac{t + z'}{(n(a + b) - a)^2 + (t + z')^2}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 F_{Az}^{(3)} &= \frac{\mu_0 M^2}{2\pi} \int_d^{d+h} dz' \int_{-d-h}^{-d} dz \frac{|z' - z|}{R^2} = -\frac{\mu_0 M^2}{2\pi} \int_d^{d+h} dz' \int_{d+h}^d dt \frac{t + z'}{(y - y')^2 + (t + z')^2} = \\
 &= \frac{\mu_0 M^2}{2\pi} \int_d^{d+h} dz' \int_d^{d+h} dt \frac{t + z'}{(n(a + b))^2 + (t + z')^2}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 F_{Az}^{(4)} &= -\frac{\mu_0 M^2}{2\pi} \int_d^{d+h} dz' \int_{-d-h}^{-d} dz \frac{|z' - z|}{R^2} = \frac{\mu_0 M^2}{2\pi} \int_d^{d+h} dz' \int_{d+h}^d dt \frac{t + z'}{(y - y')^2 + (t + z')^2} = \\
 &= -\frac{\mu_0 M^2}{2\pi} \int_d^{d+h} dz' \int_d^{d+h} dt \frac{t + z'}{(n(a + b) + a)^2 + (t + z')^2}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Суммарная проекция силы Ампера, действующей со стороны полоски, расположенной вдоль оси x (нулевой полоски), на изображение под номером n , равна

$$F_{Az0,n} = F_{Az}^{(1)} + F_{Az}^{(2)} + F_{Az}^{(3)} + F_{Az}^{(4)}. \tag{11}$$

С учетом (7)-(11) имеем

$$F_{Az0,n} = \frac{\mu_0 M^2}{2\pi} \int_d^{d+h} dz' \int_d^{d+h} dt \left[2 \frac{t+z'}{(n(a+b))^2 + (t+z')^2} - \frac{t+z'}{(n(a+b)-a)^2 + (t+z')^2} - \frac{t+z'}{(n(a+b)+a)^2 + (t+z')^2} \right]. \quad (12)$$

Сделав замену переменных

$$z' = d + u, \quad t = d + v, \quad (13)$$

получим

$$F_{Az0,n} = \frac{\mu_0 M^2}{2\pi} \int_0^h du \int_0^h dv \left[2 \frac{u+v+2d}{(n(a+b))^2 + (u+v+2d)^2} - \frac{u+v+2d}{(n(a+b)-a)^2 + (u+v+2d)^2} - \frac{u+v+2d}{(n(a+b)+a)^2 + (u+v+2d)^2} \right]. \quad (14)$$

Итак, (14) – итоговое выражение для суммарной проекции силы Ампера, действующей со стороны нулевой полоски на изображение под номером n . Далее осуществляются различные предельные переходы.

1.2. Взаимодействие решетки намагниченных полосок с массивным ферромагнетиком в дипольном приближении

Рассмотрим взаимодействие решетки намагниченных полосок с массивным ферромагнетиком в дипольном приближении [18], то есть когда выполняются условия

$$d \gg a, \quad d \gg h. \quad (15)$$

Преобразуем знаменатель второго слагаемого в подынтегральном выражении (14), используя разложение

$$\frac{1}{1+x} \Big|_{|x|<1} = 1 - x + x^2 + \dots, \quad (16)$$

получим

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(n(a+b)-a)^2 + (u+v+2d)^2} = \frac{1}{n^2(a+b)^2 - 2an(a+b) + a^2 + (u+v+2d)^2} = \\
& = \frac{1}{\left[(n(a+b))^2 + (u+v+2d)^2 \right] \cdot \left[1 + \frac{a^2 - 2an(a+b)}{\underbrace{(n(a+b))^2 + (u+v+2d)^2}_{|x| < 1}} \right]} \approx \\
& \approx \frac{1}{\left[(n(a+b))^2 + (u+v+2d)^2 \right]} \times \\
& \times \left(1 - \frac{a^2 - 2an(a+b)}{(n(a+b))^2 + (u+v+2d)^2} + \left[\frac{a^2 - 2an(a+b)}{(n(a+b))^2 + (u+v+2d)^2} \right]^2 \right) = \\
& = \frac{1}{\left[(n(a+b))^2 + (u+v+2d)^2 \right]} \times \\
& \times \left(1 - \frac{a^2 - 2an(a+b)}{(n(a+b))^2 + (u+v+2d)^2} + \frac{a^4 - 4a^3n(a+b) + (2an(a+b))^2}{\left[(n(a+b))^2 + (u+v+2d)^2 \right]^2} \right). \tag{17}
\end{aligned}$$

В последней дроби пренебрежем слагаемыми, содержащими четвертую и третью степень параметра a , найдем

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(n(a+b)-a)^2 + (u+v+2d)^2} \approx \frac{1}{\left[(n(a+b))^2 + (u+v+2d)^2 \right]} \times \\
& \times \left(1 - \frac{a^2 - 2an(a+b)}{(n(a+b))^2 + (u+v+2d)^2} + \left[\frac{2an(a+b)}{(n(a+b))^2 + (u+v+2d)^2} \right]^2 \right). \tag{18}
\end{aligned}$$

Аналогично преобразуется третье слагаемое в (14). После объединения полученных результатов имеем следующее выражение:

$$\begin{aligned}
& \frac{u+v+2d}{(n(a+b))^2+(u+v+2d)^2} \cdot \left[2 - 2 + \frac{2a^2}{(n(a+b))^2+(u+v+2d)^2} - \right. \\
& \quad \left. - 2 \cdot \left[\frac{2an(a+b)}{(n(a+b))^2+(u+v+2d)^2} \right]^2 \right] = \tag{19} \\
& = 2 \cdot \left[\frac{(u+v+2d)a^2}{\left[(n(a+b))^2+(u+v+2d)^2 \right]^2} - \frac{[2an(a+b)]^2}{\left[(n(a+b))^2+(u+v+2d)^2 \right]^3} \right].
\end{aligned}$$

Подставляем (19) в (14), с учетом условий (15) пренебрегаем u и v по сравнению с $2d$, получаем выражение для силы взаимодействия нулевой и n -й полосок в рассматриваемом приближении

$$\begin{aligned}
F_{Az0,n} &= \frac{\mu_0 M^2}{2\pi} \int_0^h du \int_0^h dv \cdot 2 \cdot \left[\frac{2a^2 d}{\left[(n(a+b))^2+(2d)^2 \right]^2} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{2d(2a(n(a+b)))^2}{\left[(n(a+b))^2+(2d)^2 \right]^3} \right] = \tag{20} \\
&= \frac{\mu_0 M^2}{2\pi} 2 \left[\frac{2a^2 d}{\left[(n(a+b))^2+(2d)^2 \right]^2} - \frac{2d(2a(n(a+b)))^2}{\left[(n(a+b))^2+(2d)^2 \right]^3} \right] \int_0^h \int_0^h dudv.
\end{aligned}$$

Вычисляя двойной интеграл, окончательно получим

$$F_{Az0,n} = \frac{2\mu_0 M^2 h^2}{2\pi} \cdot \left[\frac{2a^2 d}{\left[(n(a+b))^2+(2d)^2 \right]^2} - \frac{8a^2 d (n(a+b))^2}{\left[(n(a+b))^2+(2d)^2 \right]^3} \right]. \tag{21}$$

Просуммируем по n от 1 до N и умножим на 2, тогда получим (в пренебрежении краевыми эффектами) z -компоненту силы взаимодействия нулевой полоски со всеми изображениями, кроме собственного для этой полоски. Вклад во взаимодействие нулевой полоски с собственным изображением учитывается отдельно подстановкой в то же выражение $n=0$. В

результате для силы взаимодействия нулевой полоски с изображениями всех полосок имеем

$$\begin{aligned}
 F_{Az0,\Sigma} = & 2 \sum_{n=1}^N \frac{2\mu_0 M^2 h^2}{2\pi} \left\{ \frac{2a^2 d}{\left[(n(a+b))^2 + (2d)^2 \right]^2} - \frac{8a^2 d (n(a+b))^2}{\left[(n(a+b))^2 + (2d)^2 \right]^3} \right\} + \\
 & + \frac{2\mu_0 M^2 h^2}{2\pi} \left\{ \frac{2a^2 d}{(2d)^4} - 0 \right\} = 2 \sum_{n=1}^N \frac{2\mu_0 M^2 h^2}{2\pi} \left\{ \frac{2a^2 d}{\left[(n(a+b))^2 + (2d)^2 \right]^2} - \right. \\
 & \left. - \frac{8a^2 d (n(a+b))^2}{\left[(n(a+b))^2 + (2d)^2 \right]^3} \right\} + \frac{2\mu_0 M^2 h^2}{2\pi} \frac{a^2}{8d^3}.
 \end{aligned} \quad (22)$$

Выражение (22) может быть переписано в виде

$$F_{Az0,\Sigma} = \frac{\mu_0 M^2 h^2 a^2}{\pi} \left[4 \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{d}{\left[(n(a+b))^2 + 4d^2 \right]^2} - \frac{4d (n(a+b))^2}{\left[(n(a+b))^2 + 4d^2 \right]^3} \right\} + \frac{1}{8d^3} \right]. \quad (23)$$

То есть получили z -компоненту силы взаимодействия нулевой полоски со всеми изображениями (в том числе с собственным изображением).

Пусть L – ширина решетки полосок (см. рис. 3). Тогда количество полосок по одну сторону от вертикальной оси

$$N = \frac{L - a}{2(a + b)}. \quad (24)$$

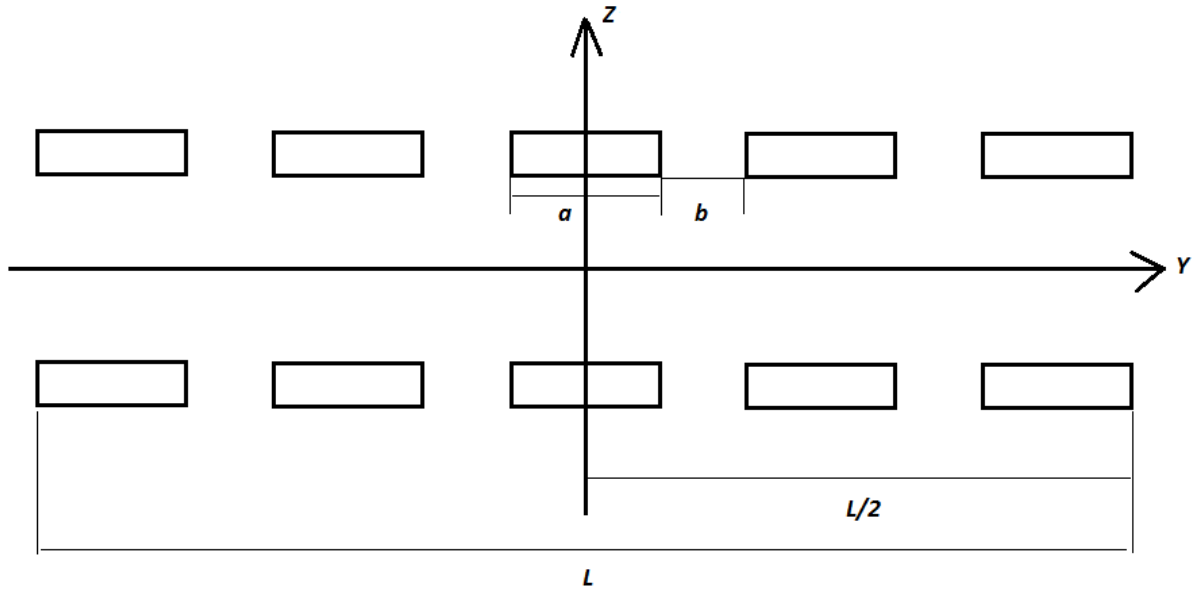


Рис. 3. Решетка намагниченных полосок и ее магнитостатическое изображение

Если число полосок N велико, то, пренебрегая одной полоской, приближенно имеем

$$\frac{N}{L} \approx \frac{1}{2(a+b)}. \quad (25)$$

Принимая во внимание выражение (25), сравнивая различие в обозначениях параметров системы, можно получить соотношение для плотности силы, с точностью до знака совпадающее с формулой (13) в статье [18], если не делать пренебрежений в количестве полосок в верхнем индексе суммирования. Оно имеет вид

$$F_{Az=0,\Sigma}^{\text{на ед. площади}} = -\frac{1}{t+v} \frac{2p^2\mu_0}{2\pi(2a+h)^4} \times \left[\sum_{k=1}^N \left\{ \frac{6}{\left[1+k^2(t+v)^2\right]^2} - \frac{8}{\left[1+k^2(t+v)^2\right]^3} \right\} - 1 \right] \equiv \overline{F_{p,y}^{\text{безр, max}}}, \quad (26)$$

где

$$t = \frac{b}{2a+h}, \quad v = \frac{d}{2a+h}. \quad (27)$$

По формуле (13) из статьи была построена зависимость (см. рис. 4), определены оптимальное расстояние между полосками и соответствующее ему значение максимальной силы.

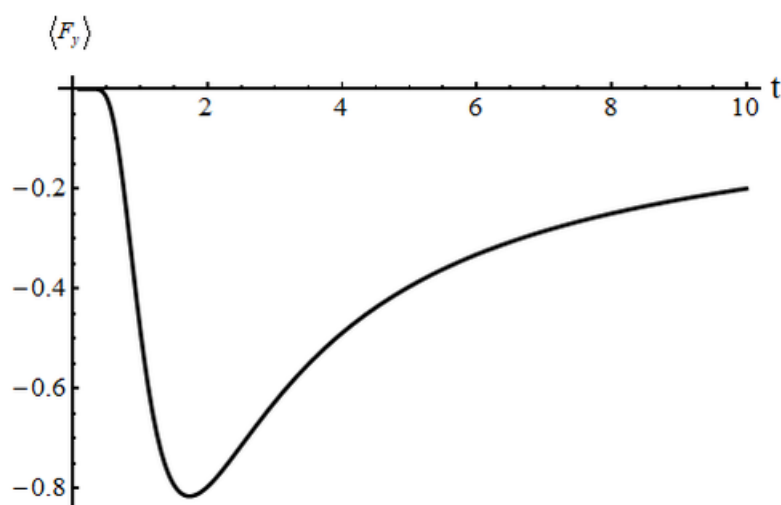


Рис. 4. Зависимость силы взаимодействия решетки магнито жестких полосок от расстояния между ними

Найденные значения при $\nu=0.01$ оказались следующими:

$$\overline{F_{p,y}^{безр., \max}} = -0.8154, \quad (28)$$

$$t = 1.7347.$$

1.3. Сила взаимодействия широких намагниченных полосок при малом расстоянии до поверхности ферромагнетика

Исследуем взаимодействие полоски, ширина которой много больше толщины, с поверхностью ферромагнетика на близких расстояниях до него. Рассмотрим силу взаимодействия двух стенок, одна из которых принадлежит широкой полоске, другая – изображению (см. рис. 5). В этом случае справедливы неравенства

$$d \ll a, \quad h \ll a, \quad h \gg d \Leftrightarrow d \ll h \ll a. \quad (29)$$

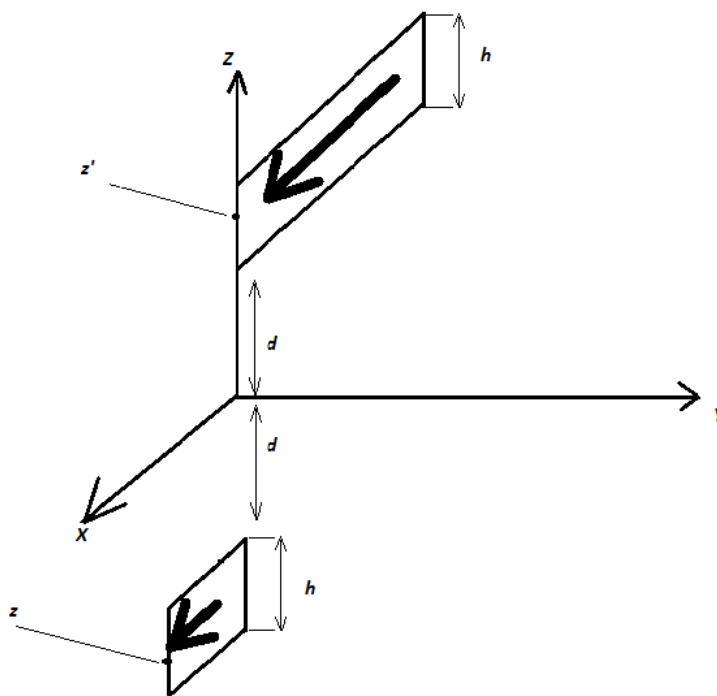


Рис. 5. «Две стенки»

Принимая во внимание неравенства (29) в формуле (14), можем отбросить все слагаемые, кроме силы взаимодействия каждой стенки полоски со своим изображением. То есть основной вклад вносят лишь силы $F^{(1)}$ и $F^{(3)}$ («перекрестные» стенки не взаимодействуют). При этом остается только рассмотреть силу $F^{(1)}$, так как $F^{(1)}=F^{(3)}$, векторы этих сил направлены в одну сторону, в дальнейшем необходимо будет просто удвоить результат при рассмотрении двух других стенок.

При $n=0$ для подынтегрального выражения в (14) имеем следующее выражение:

$$\left. \frac{u+v+2d}{(n(a+b))^2 + (u+v+2d)^2} \right|_{n=0} = \frac{u+v+2d}{(u+v+2d)^2} = \frac{1}{(u+v+2d)}. \quad (30)$$

С учетом (30) исходная формула примет вид

$$F_{Az0,0} = \frac{\mu_0 M^2}{2\pi} \int_0^h du \int_0^h dv \frac{1}{(u+v+2d)}. \quad (31)$$

После взятия простейших интегралов табличного типа выражение (31) легко преобразовать к виду

$$\begin{aligned}
F_{Az0,0} &= \frac{\mu_0 M^2}{2\pi} \left[(2h+2d) \ln(2h+2d) - 2h - 2d - (h+2d) \ln(h+2d) + h + 2d \right. \\
&\quad \left. - (h+2d) \ln(h+2d) + h + 2d + 2d \ln(2d) - 2d \right] = \\
&= \frac{\mu_0 M^2}{2\pi} \left[2h \ln(2h+2d) + 2d \ln(2h+2d) - 2h \ln(h+2d) - 2d \ln(h+2d) - \right. \\
&\quad \left. - 2d \ln(h+2d) - 2d \ln \frac{1}{2d} \right].
\end{aligned} \tag{32}$$

Упрощая логарифмы, получим

$$\begin{aligned}
F_{Az0,0} &= \frac{\mu_0 M^2}{2\pi} \left[(2h+2d) \ln(2h+2d) - (2h+2d) \ln(h+2d) - \right. \\
&\quad \left. - 2d \ln \frac{h+2d}{2d} \right] = \frac{\mu_0 M^2}{2\pi} \left[(2h+2d) \ln \frac{2h+2d}{h+2d} - 2d \ln \frac{h+2d}{2d} \right] = \\
&= \frac{\mu_0 M^2}{2\pi} \left[(2d+h) \ln \frac{2h+2d}{h+2d} - 2d \ln \frac{h+2d}{2d} + h \ln \frac{2(h+d)}{2d+h} \right].
\end{aligned} \tag{33}$$

Учитывая условие $h \gg d$, выражение (33) можно упростить

$$f_z = \frac{\mu_0 J^2}{2\pi} \left[2h \ln 2 - 2d \ln \frac{h}{2d} \right]. \tag{34}$$

Вынесем в (34) h за скобки, найдем:

$$f_z = \frac{\mu_0 J^2}{2\pi} h \left[2 \ln 2 - \frac{2d}{h} \ln \frac{h}{2d} \right]. \tag{35}$$

Пусть $\frac{h}{2d} = x$, x – большое число. Известно, что $-\frac{\ln x}{x} \Big|_{x \gg 1} \sim \frac{1}{x} \approx 0$.

Тогда

$$f_z = \frac{\mu_0 J^2}{2\pi} h [2 \ln 2] = \frac{\mu_0 J^2}{\pi} h \ln 2. \tag{36}$$

Найдем z -проекцию силы на единицу длины (при рассмотрении одной полоски и ее изображения). Для этого достаточно удвоить выражение (36)

$$2f_z = 2 \frac{\mu_0 J^2}{\pi} h \ln 2. \tag{37}$$

Отметим, что соотношение (33), а значит и (37), можно получить и другим путем, не используя выражение (14). Пусть z – координата точки на изображении, z' – координата точки на полоске. Снова справедлива теорема о циркуляции (1), которую сразу можно записать для вертикальной компоненты поля,

$$dB_y \cdot 2\pi R = \mu_0 J dz'. \quad (38)$$

Отсюда

$$dB_y(z) = \frac{\mu_0 J dz'}{2\pi R} = \frac{\mu_0 J dz'}{2\pi(z - z')}. \quad (39)$$

Интегрируем по толщине полоски и получаем поле в зависимости от координаты

$$B_y(z) = \int_d^{h+d} \frac{\mu_0 J dz'}{2\pi(z - z')} = \frac{\mu_0 J}{2\pi} \ln(z' - z) \Big|_{z'=d}^{z'=h+d}. \quad (40)$$

Выполняем подстановку

$$B_y(z) = \frac{\mu_0 J}{2\pi} \ln(z' - z) \Big|_{z'=d}^{z'=h+d} = \frac{\mu_0 J}{2\pi} [\ln(h + d - z) - \ln(d - z)], \quad (41)$$

где надо учитывать, что $z < 0$. Для силы, действующей на элемент изображения толщиной dz , имеем

$$dF_z = J \cdot dz \cdot l \cdot B_y(z), \quad (42)$$

где l – это длина полоски (на данной стадии мы ее учитываем, считая ее достаточно большой). Разделим (42) на длину l , придем к силе на единицу длины:

$$df_z = \frac{dF_z}{l} = J \cdot dz \cdot B_y(z). \quad (43)$$

Интегрируя теперь по толщине изображения, находим вертикальную проекцию силы на единицу длины, с которой полоска притягивает изображение,

$$f_z = \int_{-h-d}^{-d} J \cdot dz \cdot B_y(z) = J \cdot \int_{-h-d}^{-d} dz \cdot \frac{\mu_0 J}{2\pi} [\ln(h + d - z) - \ln(d - z)]. \quad (44)$$

Произведем замену $t = -z$, $dz = -dt$, получим

$$\begin{aligned} f_z &= \frac{\mu_0 J^2}{2\pi} \int_{h+d}^d (-dt) \cdot [\ln(h+d+t) - \ln(d+t)] = \\ &= \frac{\mu_0 J^2}{2\pi} \int_d^{h+d} dt \cdot [\ln(h+d+t) - \ln(d+t)]. \end{aligned} \quad (45)$$

После интегрирования

$$f_z = \frac{\mu_0 J^2}{2\pi} \left[(2d+h) \ln \frac{2h+2d}{2d+h} - 2d \ln \frac{h+2d}{2d} + h \ln \frac{2(h+d)}{2d+h} \right], \quad (46)$$

что совпадает с (33), так как $J \equiv M$.

1.4. Поверхностная плотность силы для широких намагниченных полосок при малом расстоянии до поверхности ферромагнетика и большом расстоянии между полосками

Рассчитаем силу взаимодействия для системы широких намагниченных полосок при малом расстоянии до поверхности ферромагнетика и большом расстоянии между ними, то есть когда выполняются условия

$$d \ll a, \quad h \ll a, \quad h \gg d \Leftrightarrow d \ll h \ll a \sim b. \quad (47)$$

Учтем количество полосок, которое равно $2N+1$, и то, что в данном приближении соседние изображения не оказывают существенного влияния на данную конкретную полоску. Иными словами, взаимодействие происходит только парно, по типу «полоска – ее изображение».

Вычислим z -компоненту силы взаимодействия всех полосок с их изображениями на единицу площади (L – размер системы, см. рис. 3)

$$F_z^{\text{всех полосок на ед. площади}} = F_z \frac{2N+1}{L} = 2f_z(2N+1) = 2(2N+1)f_z. \quad (48)$$

Откуда (с учетом (37)) перепишем

$$F_z^{\text{всех полосок на ед. площади}} = 2(2N+1) \frac{\mu_0 J^2 h}{\pi} \ln 2 \equiv 2(2N+1) \frac{\mu_0 M^2 h}{\pi} \ln 2. \quad (49)$$

Принимая во внимание (25), можно записать (в пренебрежении одной полоской)

$$\frac{2N+1}{L} \approx \frac{2N}{L} = 2 \frac{N}{L} = \frac{2}{2(a+b)} = \frac{1}{(a+b)}. \quad (50)$$

С учетом (50) из соотношения (49) окончательно получим искомое выражение для плотности силы для решетки широких полосок

$$F_z^{\text{всех полосок на ед. площади}} = 2(2N+1) \frac{\mu_0 M^2 h}{\pi} \ln 2 = 2 \left(\frac{L}{a+b} + 1 \right) \frac{\mu_0 M^2 h}{\pi} \ln 2. \quad (51)$$

Отметим, что выражение для поверхностной плотности силы (51) не зависит от расстояния до поверхности ферромагнетика d . Эта сила с увеличением периода решетки $a+b$ стремится к постоянному значению, и наоборот, с уменьшением периода решетки она возрастает обратно пропорционально этому периоду. Причем надо учитывать, что данная формула справедлива только при выполнении неравенств (47).

1.5. Сравнение поверхностной плотности силы взаимодействия решетки полосок толщиной h_1 и аналогичной плотности силы сплошной магнитной пленки толщиной h_2 в дипольном приближении

Пусть имеется сплошная пленка в виде квадрата со стороной q и толщиной h_2 (рис. 6), однородно намагниченная перпендикулярно ее поверхности.

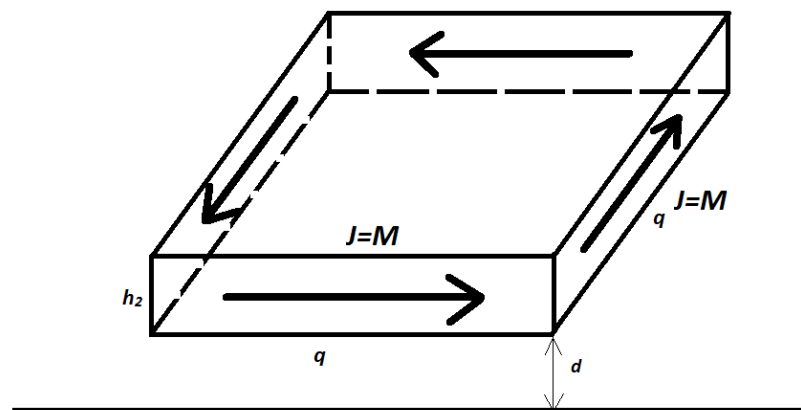


Рис. 6. Сплошная структура – квадрат

Если толщина пластинки h_2 много меньше расстояния до поверхности d , то молекулярный ток, текущий по боковой поверхности пленки, можно считать линейным.

Тогда сила взаимодействия этого линейного тока с его изображением будет определяться законом Ампера

$$\vec{F}_A = [Mh_2 \vec{l} \times \vec{B}],$$

где $|\vec{l}|$ – длина линейного тока,

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{Mh_2}{r}.$$

Отсюда для силы взаимодействия линейного тока на единицу длины находим

$$f_l = \frac{|\vec{F}_A|}{l} = MBh_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{M^2 h_2^2}{r}. \quad (52)$$

Используя соотношение (52), получим выражение для силы, приходящейся на единицу площади квадрата. Учитывая, что $l=q+q+q+q=4q$, площадь квадрата $S=q^2$, для случая $r=2d$, получим

$$f_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{M^2 h_2^2}{2d} \frac{1}{q^2} 4q = \frac{\mu_0 M^2 h_2^2}{2\pi} \frac{2}{dq}. \quad (53)$$

Аналогичная сила для случая решетки полосок в дипольном приближении (26) при значениях параметров решетки, соответствующих максимальному ее значению (28), будет равна [18]

$$f_1 = \left| F_{p,y}^{\max} \right| = \left| F_{p,y}^{\text{безр.}, \max} \right| \cdot \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{p^2}{(2d+h_1)^4} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{M^2 h_1^2 a^2}{(2d+h_1)^4} \cdot 0.82. \quad (54)$$

Сравнивая силы (53) и (54), найдем

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{0.4h_1^2 a^2 dq}{h_2^2 (2d+h)^4}. \quad (55)$$

Введем обозначение

$$F_{10} = \frac{\mu_0 M^2}{2\pi} \frac{h^2 a^2}{(2d+h_1)^4}.$$

Тогда получим

$$F_{p,y}^{\text{безр., max}} = \frac{F_1}{F_{10}} \approx 0.82.$$

Нормируя силы F_1 и F_2 на выражение $F_{20} = \frac{\mu_0 M^2}{2\pi}$, для безразмерных сил будем иметь выражения

$$\begin{aligned} \overline{F_2} &= \frac{F_2}{F_{20}} = \frac{2h_2^2}{dq}, \\ \overline{F_1} &= \frac{F_1}{F_{20}} = 0.82 \frac{h_1^2 a^2}{(2d + h_1)^4} = 0.82 \left(\frac{h_1}{a} \right)^2 v^4. \end{aligned} \quad (56)$$

Тогда

$$\frac{F_{10}}{F_{20}} = \frac{h_1^2 a^2}{(2d + h_1)^4} = \left(\frac{h_1}{a} \right)^2 \left(\frac{a}{2d + h_1} \right)^4 = \left(\frac{h_1}{a} \right)^2 v^4. \quad (57)$$

Далее произведем сравнение.

$$\frac{\overline{F_1}}{\overline{F_2}} = \frac{0.82 \left(\frac{h_1}{d} \right)^2 v^4}{\frac{2h_2^2}{dq}} = 0.82 \left(\frac{h_1}{d} \right)^2 v^4 \frac{dq}{2h_2^2}. \quad (58)$$

Чтобы решетка полосок притягивалась сильнее сплошной пленки, должно выполняться неравенство

$$\frac{\overline{F_1}}{\overline{F_2}} > 1, \quad (59)$$

то есть

$$\frac{\overline{F_1}}{\overline{F_2}} = 0.82 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{h_1^2}{d^2} \cdot \frac{dq}{2h_2^2} = 0.82 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{h^2}{d} \cdot \frac{q}{h_2^2} = 0.82 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{d} \cdot \frac{h_1^2}{h_2^2} > 1. \quad (60)$$

Рассмотрим случай, когда объемные плотности решетки и пленки одинаковы. Объем одной полоски единичной длины ($L=1$ см)

$$V_1 = ah_1L. \quad (61)$$

А общее количество полосок N определяется через параметры системы

$$N = \frac{L}{a+b}. \quad (62)$$

В этом случае объем, занимаемый этими полосками, равен

$$V = NV_1 = \frac{L}{a+b}V_1 = \frac{L}{a+b}ah_1L. \quad (63)$$

Фактически, формула (63) – это объем, занимаемый полосками на площади квадрата со стороной L . Приравниваем к объему квадратной пластинки со стороной $q = L$

$$V_2 = L^2h_2. \quad (64)$$

Получаем

$$V_2 = L^2h_2 = \frac{L}{a+b}dh_1L. \quad (65)$$

Находим связь толщин решетки и пленки, которые имеют одинаковые удельные объемы вещества (одинаковые плотности вещества):

$$h_2 = \frac{dh_1}{a+b}. \quad (66)$$

Введем параметры, аналогичные (27),

$$t = \frac{b}{2d+h}, \quad v = \frac{a}{2d+h}. \quad (67)$$

Для конкретных значений этих параметров (в соответствии с (28)) $v=0.01$, $t=1.73$ для (66) будем иметь

$$h_2 = \frac{0.01 \cdot (2d+h_1)h_1}{0.01 \cdot (2d+h_1) + (2d+h_1) \cdot 1.73} = \frac{0.01}{0.01+1.73}h_1 = \frac{0.01}{1.74}h_1. \quad (68)$$

Тогда в этом случае для (60) найдем следующее неравенство

$$\frac{\overline{F_1}}{F_2} = 0.82 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{d} \cdot (1.74 \cdot 10^2) = 0.82 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1.74^2 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{q}{d} = 1.2 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{q}{d} > 1. \quad (69)$$

Таким образом, сила взаимодействия решетки будет превосходить силу взаимодействия сплошной пленки квадратной формы со стороной q при следующем условии на расстояние до поверхности ферромагнетика:

$$d < 1.2 \cdot 10^{-4} q. \quad (70)$$

Приведем конкретные численные оценки.

1) Пусть $L=q=1$ см, $d=h=1$ мкм. В этом случае

$$\frac{\overline{F_1}}{F_2} = 1.2 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{q}{d} = 1.2 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{10^{-2}}{10^{-6}} = 1.2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^4 = 1.2, \quad a = 30 \text{ нм}. \quad (71)$$

2) Если по-прежнему $L=q=1$ см, но $d=h=0.4$ мкм, в этом случае

$$\frac{\overline{F_1}}{F_2} = 3, \quad a = 12 \text{ нм}. \quad (72)$$

Произведем расчет размерной величины F_1 , используя значения параметров из оценки 1). Работаем изначально в СИ. Согласно (56),

$$\begin{aligned} F_1 &= F_{20} \cdot 0.82 \cdot \left(\frac{h}{a}\right)^2 \cdot v^4 = F_{20} \cdot 0.82 \cdot \left(\frac{1 \text{ мкм}}{0.03 \text{ мкм}}\right)^2 \cdot 10^{-8} = \\ &= F_{20} \cdot \frac{0.82}{9} \cdot 10^4 \cdot 10^{-8} = 0.09(1) \cdot 10^{-4} F_{20} \approx 10^{-5} F_{20}. \end{aligned} \quad (73)$$

Оценим F_{20} (по смыслу это объемная плотность энергии магнитного поля в СИ, деленная на константу π), используя табличную величину для индукции магнитного поля, создаваемого магнитом неодим-железо-бор,

$$\begin{aligned} F_{20} &= \frac{\mu_0 M^2}{2\pi} = \frac{(\mu_0 M)^2}{2\pi\mu_0} = \frac{(1.3 \text{ Тл})^2}{2\pi \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}} = \frac{1.3^2}{8\pi^2 \cdot 10^{-7}} \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3} = \\ &= \frac{1.3^2}{8\pi^2} \cdot 10^7 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \frac{1.3^2}{8\pi^2} \cdot 10^7 \frac{\text{Н}}{10^4 \text{ см}^2} = \frac{1.3^2}{8\pi^2} \cdot 10^3 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2}. \end{aligned} \quad (74)$$

В итоге имеем

$$\begin{aligned} F_1 &= 0.09(1) \cdot 10^{-4} \cdot \frac{1.3^2}{8\pi^2} \cdot 10^3 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} \approx 0.1 \cdot 0.00195 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = \\ &= 0.000195 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = 1.95 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = 1.95 \cdot 10^{-4} \cdot 10^2 \frac{\text{э}}{\text{см}^2} = \\ &= 1.95 \cdot 10^{-2} \frac{\text{э}}{\text{см}^2} = 19.5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{э}}{\text{см}^2} = 19.5 \frac{\text{мэ}}{\text{см}^2} \approx 20 \frac{\text{мэ}}{\text{см}^2}. \end{aligned} \quad (75)$$

Для сплошной же структуры (формула (71))

$$F_2 = \frac{20}{1.2} = 16.6 \frac{мг}{см^2} \approx 17 \frac{мг}{см^2}. \quad (76)$$

Таким образом, сила притяжения решетки намагниченных полосок к массивному ферромагнетику может существенно превосходить аналогичную силу взаимодействия сплошной пленки при одинаковых массах.

Качественно это утверждение можно понять из следующих соображений. Действительно, сила взаимодействия полоски при увеличении ее ширины до бесконечности будет стремиться к нулю. То есть для решетки при увеличении количества полосок (либо при увеличении их ширины) на определенной области пространства до такого, что дискретная структура будет переходить в сплошную (одну большую полоску), сила будет уменьшаться до нулевого значения (в пределе, когда расстояние между полосками равно нулю).

В приближении магнитных зарядов сплошную структуру можно рассматривать как заряженный конденсатор, поле которого существует между обкладками, выходит за его пределы только на краях (краевые эффекты). Если теперь начать увеличивать площадь поверхности обкладки до бесконечности, то при фиксированных других параметрах сила на единицу площади в пределе будет равна нулю. Однако бесконечных полосок не существует, и в реальности на краях будет поле, а значит, будет проявляться взаимодействие.

1.6. Взаимодействие решетки намагниченных полосок с массивным ферромагнетиком в общем случае

В параграфе 1.2 была рассчитана z -компонента силы взаимодействия нулевой полоски со всеми изображениями (23) в дипольном приближении. В данном параграфе производится ее вычисление в более общем случае (без использования дипольного приближения) путем прямого взятия двойных интегралов в выражении (14).

Формула (14) может быть приведена к виду

$$F_{Az0,n} = \frac{\mu_0 M^2}{2\pi} a \int_0^{C_3} dt_1 \int_0^{C_3} dt_2 \left[2 \frac{t_1 + t_2 + C_1}{(nC_2)^2 + (t_1 + t_2 + C_1)^2} - \frac{t_1 + t_2 + C_1}{(nC_2 - 1)^2 + (t_1 + t_2 + C_1)^2} - \frac{t_1 + t_2 + C_1}{(nC_2 + 1)^2 + (t_1 + t_2 + C_1)^2} \right], \quad (77)$$

где $t_1 = \frac{u}{a}$, $t_2 = \frac{v}{a}$, $C_1 = \frac{2d}{a}$, $C_2 = 1 + \frac{b}{a}$, $C_3 = \frac{h}{a}$.

Чтобы получить безразмерную поверхностную плотность z -компоненты силы взаимодействия нулевой полоски с изображениями всех полосок $F_{Az0,\Sigma}^{\text{безразмерная, на ед. площади}}$, умножим (77) на 2 (взаимодействие с собственным изображением учитываем отдельно), просуммируем по n от 1 до N и умножим на $\frac{2N+1}{L} \bigg/ \frac{\mu_0 M^2}{2}$, принимая во внимание формулу (50), получим (множитель около $F_{Az0,\Sigma}^{\text{безразмерная, на ед. площади}}$ оставлен специально, так как определяет вид зависимости)

$$F_{Az0,\Sigma}^{\text{безразмерная, на ед. площади}} \cdot 2 \frac{a}{\pi(a+b)} = 2 \frac{a}{\pi(a+b)} \cdot \sum_{n=1}^N \int_0^{C_3} dt_1 \int_0^{C_3} dt_2 \left[2 \frac{t_1 + t_2 + C_1}{(nC_2)^2 + (t_1 + t_2 + C_1)^2} - \frac{t_1 + t_2 + C_1}{(nC_2 - 1)^2 + (t_1 + t_2 + C_1)^2} - \frac{t_1 + t_2 + C_1}{(nC_2 + 1)^2 + (t_1 + t_2 + C_1)^2} \right] + \int_0^{C_3} dt_1 \int_0^{C_3} dt_2 \left[\frac{1}{(t_1 + t_2 + C_1)} - \frac{t_1 + t_2 + C_1}{1 + (t_1 + t_2 + C_1)^2} \right]. \quad (78)$$

После взятия интегралов в (78) получается выражение

$$\begin{aligned}
F_{Az,0,\Sigma}^{\text{безразмерная, на ед. площади}} &= \sum_{n=1}^N \left\{ C_3 \ln \left[\frac{(C_1 + 2C_3)^2 + n^2 C_2^2}{(C_1 + C_3)^2 + n^2 C_2^2} \right] + (C_1 + C_3) \times \right. \\
&\times \ln \left[\frac{(C_1 + 2C_3)^2 + n^2 C_2^2}{(C_1 + C_3)^2 + n^2 C_2^2} \right] + 2nC_2 \operatorname{arctg} \left[\frac{C_1 + 2C_3}{nC_2} \right] - 2nC_2 \operatorname{arctg} \left[\frac{C_1 + C_3}{nC_2} \right] - \\
&- 2nC_2 \operatorname{arctg} \left[\frac{C_1 + C_3}{nC_2} \right] + 2nC_2 \operatorname{arctg} \left[\frac{C_1}{nC_2} \right] - C_1 \ln \left[\frac{(C_1 + C_3)^2 + n^2 C_2^2}{C_1^2 + n^2 C_2^2} \right] - \frac{1}{2} C_3 \times \\
&\times \ln \left[\frac{(C_1 + 2C_3)^2 + (nC_2 + 1)^2}{(C_1 + C_3)^2 + (nC_2 + 1)^2} \right] - \frac{1}{2} (C_1 + C_3) \ln \left[\frac{(C_1 + 2C_3)^2 + (nC_2 + 1)^2}{(C_1 + C_3)^2 + (nC_2 + 1)^2} \right] - \\
&- (nC_2 + 1) \operatorname{arctg} \left[\frac{C_1 + 2C_3}{nC_2 + 1} \right] + 2(nC_2 + 1) \operatorname{arctg} \left[\frac{C_1 + C_3}{nC_2 + 1} \right] - (nC_2 + 1) \times \\
&\times \operatorname{arctg} \left[\frac{C_1}{nC_2 + 1} \right] + \frac{1}{2} C_1 \ln \left[\frac{(C_1 + C_3)^2 + (nC_2 + 1)^2}{C_1^2 + (nC_2 + 1)^2} \right] - \frac{1}{2} C_3 \times \\
&\times \ln \left[\frac{(C_1 + 2C_3)^2 + (nC_2 - 1)^2}{(C_1 + C_3)^2 + (nC_2 - 1)^2} \right] - \frac{1}{2} (C_1 + C_3) \ln \left[\frac{(C_1 + 2C_3)^2 + (nC_2 - 1)^2}{(C_1 + C_3)^2 + (nC_2 - 1)^2} \right] - \\
&- (nC_2 - 1) \operatorname{arctg} \left[\frac{C_1 + 2C_3}{nC_2 - 1} \right] + 2(nC_2 - 1) \operatorname{arctg} \left[\frac{C_1 + C_3}{nC_2 - 1} \right] - (nC_2 - 1) \times \\
&\times \operatorname{arctg} \left[\frac{C_1}{nC_2 - 1} \right] + \frac{1}{2} C_1 \ln \left[\frac{(C_1 + C_3)^2 + (nC_2 - 1)^2}{C_1^2 + (nC_2 - 1)^2} \right] \left. \right\} + C_3 \ln \left[\frac{C_1 + C_3}{C_1} \right] - \\
&- (C_1 + C_3) \ln \left[\frac{C_1 + C_3}{C_1} \right] + (C_1 + 2C_3) \ln \left[\frac{C_1 + 2C_3}{C_1 + C_3} \right] - \\
&- \frac{1}{2} C_3 \ln \left[\frac{(C_1 + 2C_3)^2 + 1}{(C_1 + C_3)^2 + 1} \right] - \frac{1}{2} (C_1 + C_3) \ln \left[\frac{(C_1 + 2C_3)^2 + 1}{(C_1 + C_3)^2 + 1} \right] - \operatorname{arctg} [C_1 + 2C_3] + \\
&+ 2 \operatorname{arctg} [C_1 + C_3] - \operatorname{arctg} [C_1] + \frac{1}{2} C_1 \ln \left[\frac{(C_1 + C_3)^2 + 1}{C_1^2 + 1} \right]. \tag{79}
\end{aligned}$$

Преобразуем множитель перед суммой в (78) следующим образом:

$$2 \frac{a}{\pi(a+b)} = \frac{2}{\pi \left(1 + \frac{b}{a}\right)} = \frac{2}{\pi(1+C_0)}, \quad C_0 \equiv \frac{b}{a}. \tag{80}$$

По формуле (79) с учетом (80) построена зависимость поверхностной плотности силы от параметра C_0 . Пусть, например,

$$a = 1 \text{ мм} = 10^{-3} \text{ м}, \quad d = h = 1 \text{ мкм} = 10^{-6} \text{ м}, \quad (81)$$

а абсцисса изменяется в пределах $0 \leq C_0 \leq 0.1$. В этом случае

$$C_1 = 2 \frac{d}{a} = 0.002, \quad C_3 = \frac{h}{a} = 0.001, \text{ а сама зависимость имеет вид}$$

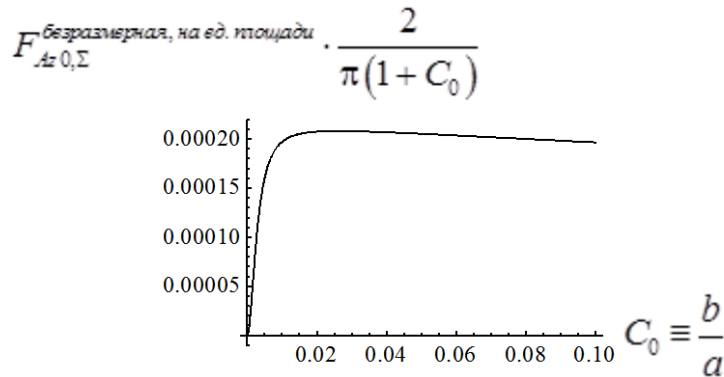


Рис. 7. Зависимость безразмерной z -компоненты силы взаимодействия нулевой полоски со всеми изображениями, приходящейся на единицу площади полоски-изображения, при значениях параметров $C_1=0.002$, $C_3=0.001$

Безразмерное значение максимума силы, а также расстояние между полосками, при котором он реализуется, следующие:

$$F_{Az,0,\Sigma}^{\text{безразмерная, на ед. площади, max}} \approx 0.00021, \quad C_0 \approx 0.026. \quad (82)$$

Оценим размерную величину поверхностной плотности силы, где в качестве магнитного материала возьмем неодим-железо-бор, имеем

$$F_{Az,0,\Sigma}^{\text{безразмерная, на ед. площади, max}} \cdot \frac{2}{\pi(1+C_0)} \cdot \frac{\mu_0 M^2}{2} \approx 140 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}. \quad (83)$$

Пусть теперь параметры системы равны

$$a = 1 \text{ мм} = 10^{-3} \text{ м}, \quad d = h = 100 \text{ мкм} = 10^{-4} \text{ м}, \quad (84)$$

а C_0 принимает значения на отрезке $0 \leq C_0 \leq 10$. Теперь

$$C_1 = 2 \frac{d}{a} = 0.2, \quad C_3 = \frac{h}{a} = 0.1, \text{ а сама зависимость имеет вид}$$

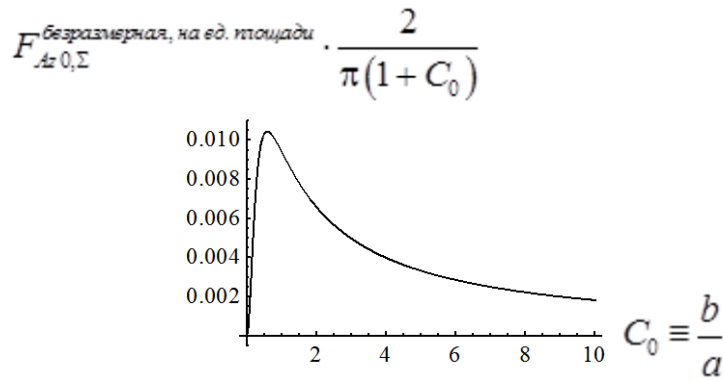


Рис. 8. Зависимость безразмерной z -компоненты силы взаимодействия нулевой полоски со всеми изображениями, приходящейся на единицу площади полоски-изображения, при значениях параметров $C_1=0.2$, $C_3=0.1$

Для безразмерного значения максимума силы, а также расстояния между полосками, при котором он реализуется, получаем

$$F_{Az0,\Sigma}^{\text{безразмерная, на ед. площади, max}} \approx 0.010, C_0 \approx 0.6. \quad (85)$$

Сила в размерных величинах при пересчете по аналогии с (83) оказывается равной

$$F_{Az0,\Sigma}^{\text{безразмерная, на ед. площади, max}} \cdot \frac{2}{\pi(1+C_0)} \cdot \frac{\mu_0 M^2}{2} \approx 7009 \frac{H}{m^2}. \quad (86)$$

Таким образом, при увеличении расстояния до ферромагнетика и толщины полоски в 100 раз, наблюдается увеличение силы в 50 раз. Это означает, что наиболее оптимальным набором параметров системы среди представленных двух, при котором будет достигаться наибольшее значение силы сцепления решетки полосок с ферромагнетиком, является тот, в котором расстояние до ферромагнетика d и толщина полоски h (для рассмотренных случаев равная d) будут наибольшими.

Пусть изменяется только толщина полоски h , принимая поочередно значения 1, 10 и 100 мкм (наборы № 1, № 2 и № 3 соответственно, см. ниже), то есть варьируется константа C_3 при фиксированной C_1 . Если задать остальные параметры системы как

$$a = 1 \text{ мм} = 10^{-3} \text{ м}, d = 100 \text{ мкм} = 10^{-4} \text{ м}, \quad (87)$$

то $C_1 = 2 \frac{d}{a} = 0.2$. Пусть C_0 изменяется на отрезке $0 \leq C_0 \leq 2.5$.

Соответствующие зависимости построены в логарифмическом масштабе в одной системе координат (см. рис. 9). Значения C_0 , реализующие максимум, и максимальные размерные значения силы также найдены (наборы значений 1, 2 и 3 соответственно).

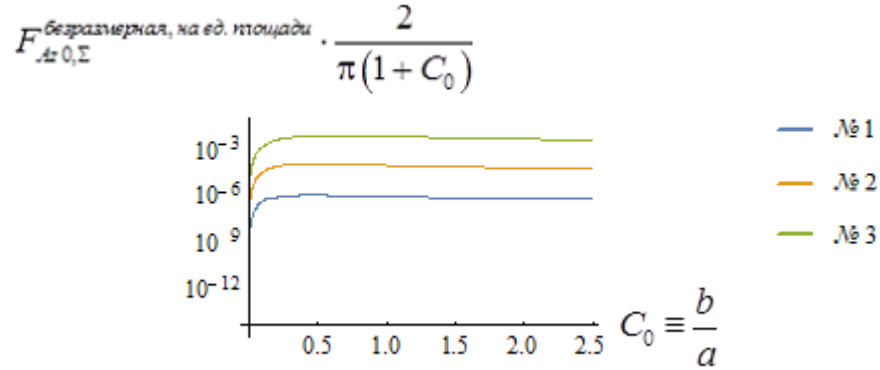


Рис. 9. Зависимость безразмерной z -компоненты силы взаимодействия нулевой полоски с ферромагнетиком, приходящейся на единицу площади полоски-изображения, при наборах значений № 1, № 2, № 3

$$\text{№ 1: } \begin{cases} C_1 = 0.2, C_3 = 0.001, \\ C_0 = 0.458441 \approx 0.5, \\ F_{Az0,\Sigma} \approx 1.2 \frac{H}{M^2}; \end{cases} \quad \text{№ 2: } \begin{cases} C_1 = 0.2, C_3 = 0.01, \\ C_0 = 0.470434 \approx 0.5, \\ F_{Az0,\Sigma} \approx 114 \frac{H}{M^2}; \end{cases} \quad (88)$$

$$\text{№ 3: } \begin{cases} C_1 = 0.2, C_3 = 0.1, \\ C_0 = 0.591241 \approx 0.6, \\ F_{Az0,\Sigma} \approx 7009 \frac{H}{M^2}. \end{cases}$$

Видно, что при увеличении толщины полоски поверхностная плотность силы увеличивается, и, если сравнивать наборы параметров № 1 и № 3, то силы отличаются в 5841 раз. Причем оптимальное значение C_0 увеличивается, хотя и незначительно, для наборов параметров (88). В целом характер зависимости в данном (логарифмическом) масштабе не меняется, характерная особенность в виде максимального значения поверхностной плотности силы остается.

Теперь пусть изменяется только ширина полоски d , принимая поочередно значения 40, 80 и 120 мкм (наборы параметров имеют номера соответственно 4, 5 и 6, см. ниже), то есть сейчас варьируется константа C_1 при фиксированной C_3 . Если задать остальные параметры системы как

$$a = 1 \text{ мм} = 10^{-3} \text{ м}, \quad h = 100 \text{ мкм} = 10^{-4} \text{ м}, \quad (89)$$

то $C_3 = \frac{h}{a} = 0.1$. Пусть максимум плотности силы ищем на отрезке $0 \leq C_0 \leq 1$.

Соответствующие зависимости снова построены в логарифмическом масштабе. Значения C_0 , реализующие максимум, и максимальные размерные значения силы приводятся далее (наборы значений 4, 5 и 6 соответственно).

$$\text{№ 4: } \begin{cases} C_1 = 8 \cdot 10^{-2}, C_3 = 0.1, \\ C_0 = 0.405099 \approx 0.4, \\ F_{Az0,\Sigma} \approx 15029 \frac{H}{M^2}; \end{cases} \quad \text{№ 5: } \begin{cases} C_1 = 16 \cdot 10^{-2}, C_3 = 0.1, \\ C_0 = 0.532976 \approx 0.5, \\ F_{Az0,\Sigma} \approx 8715 \frac{H}{M^2}; \end{cases} \quad (90)$$

$$\text{№ 6: } \begin{cases} C_1 = 24 \cdot 10^{-2}, C_3 = 0.1, \\ C_0 = 0.647072 \approx 0.6, \\ F_{Az0,\Sigma} \approx 5761 \frac{H}{M^2}. \end{cases}$$

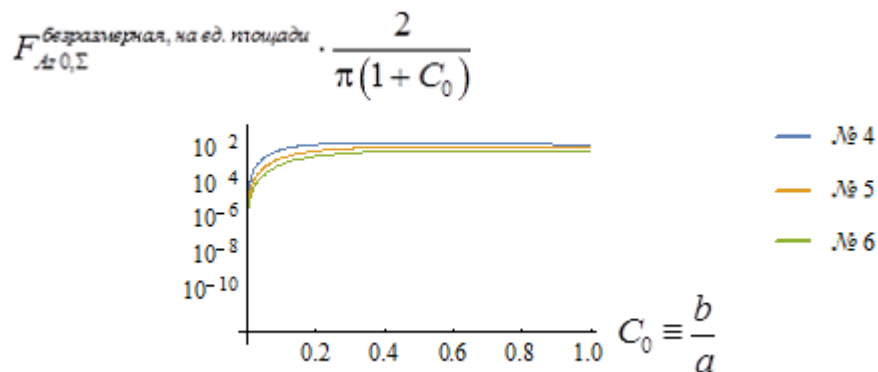


Рис. 10. Зависимость безразмерной z -компоненты силы взаимодействия нулевой полоски с ферромагнетиком, приходящейся на единицу площади полоски-изображения, при наборах значений № 4, № 5, № 6

Как видно, с увеличением расстояния до ферромагнетика d сила уменьшается, а оптимальное значение C_0 увеличивается. Однако отметим, что в целом вид зависимости (в логарифмическом масштабе) для случая, когда толщина полоски фиксирована, а расстояние до ферромагнетика меняется, по-прежнему имеет экстремум, то есть рост поверхностной плотности силы наблюдается только до определенного оптимального значения C_0 .

Глава 2. Пондеромоторная сила взаимодействия систем с фрактальной магнитной организацией

В данной главе проведено теоретическое исследование пондеромоторной силы взаимодействия системы намагниченных полосок с фракталоподобной пространственной структурой. Выполнено сравнение этой силы взаимодействия с аналогичной силой взаимодействия регулярной магнитной решетки, рассмотренной в главе 1.

2.1. Метод расчета сил взаимодействия фрактальных систем

Расчет производится в дипольном приближении, условием применимости которого здесь является $2d \gg R_0$, где R_0 – характерный размер области локализации двумерного диполя. Рассматривается взаимодействие длинных тонких полосок, приходящееся на единицу их длины. Иными словами, введенные полоски проходят через точки, в которых расположены исследуемые магнитные моменты, являющиеся для полосок магнитными моментами единицы их длины. Будем говорить о системе, расположенной под осью X , как о наборе изображений полосок. $|\overline{p}_i| = p_0$ – постоянная величина магнитного момента единицы длины.

Сравниваются две структуры. В первой системе моменты распределены равномерно на некотором расстоянии друг от друга. Вторая структура представляет собой более сложную организацию – фрактал в виде множества Кантора. В обеих системах количество моментов равно восьми, а отрезок берется единичной длины ($L=1$ см, после введения безразмерных параметров $L=1$ отн. ед.).

Расположение 8 дипольных магнитных моментов в виде множества Кантора достаточно просто осуществляется в одномерном случае. Для этого требуются 2 итерации по удалению средних частей исходного отрезка. В данной структуре координаты моментов следующие:

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{2}{27}, x_3 = \frac{2}{9}, x_4 = \frac{8}{27}, x_5 = \frac{2}{3}, x_6 = \frac{20}{27}, x_7 = \frac{8}{9}, x_8 = \frac{26}{27}. \quad (91)$$

2.2. Расчет силы взаимодействия двух подструктур с равномерным распределением магнитных моментов

Рассчитаем вертикальную компоненту силы взаимодействия двух подструктур с равномерным распределением магнитных моментов. На рис. 11 показана данная структура.

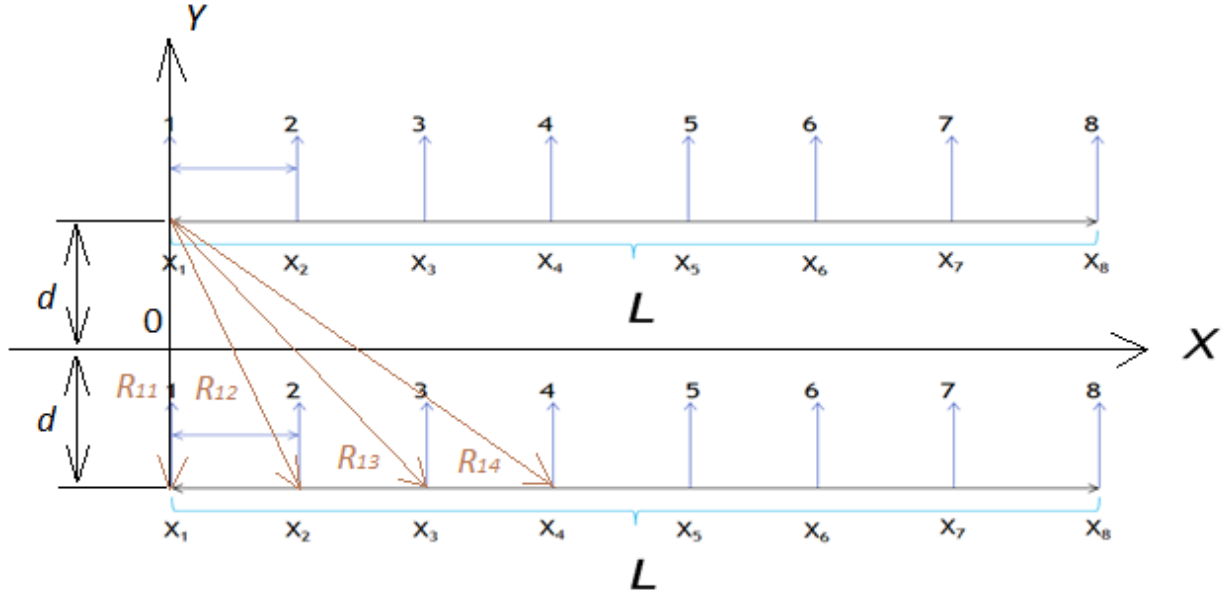


Рис. 11. Две подструктуры с равномерным распределением магнитных моментов

Рассчитаем силу, с которой решетка магнитных дипольных моментов, расположенных в виде множества Кантора, притягивает ферромагнитный материал, а именно – решетку соответствующих изображений (согласно методу изображений). Если рассматривать взаимодействие всех моментов (сумма по i) с одним j -м изображением, вертикальная компонента силы взаимодействия с этим изображением будет определяться как

$$F_{p_j \Sigma p_i, y} = p_0 \frac{\partial}{\partial y_j} B_{j, y}, \quad (92)$$

где B_j определяется как поле двумерного магнитного диполя следующим образом:

$$\vec{B}_j = \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{i=1}^N \left(\frac{2(\vec{p}_i (\vec{r}_j - \vec{r}_i)) (\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^4} - \frac{\vec{p}_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^2} \right). \quad (93)$$

Тогда для вертикальной компоненты силы взаимодействия со всеми моментами (в том числе с собственным для каждого изображения), приходящейся на единицу длины всех изображений, имеем

$$F_{p, y} = \sum_{j=1}^N F_{p_j \Sigma p_i, y}, \quad (94)$$

где N – общее количество моментов.

Расписав вертикальную компоненту для поля (93), получим

$$B_{j,y} = \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{i=1}^N \left(\frac{2p_0(y_j - y_i)^2}{\left[(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \right]^2} - \frac{p_0}{\left[(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \right]} \right). \quad (95)$$

Продифференцировав согласно (92) выражение под суммой в (95) по y , имеем

$$\frac{\partial}{\partial y_j} B_{j,y} = \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{i=1}^N p_0 \left(\frac{6(y_j - y_i)}{\left[(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \right]^2} - \frac{8(y_j - y_i)^3}{\left[(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \right]^3} \right). \quad (96)$$

С учетом (96) выражение (92) примет вид

$$F_{p_j \Sigma p_i, y} = \frac{\mu_0 p_0^2}{2\pi} \sum_{i=1}^N \left(\frac{6(y_j - y_i)}{\left[(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \right]^2} - \frac{8(y_j - y_i)^3}{\left[(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 \right]^3} \right). \quad (97)$$

Так как для координат выполняются дополнительные условия

$$x_j - x_i = \frac{L(j-i)}{N-1}, \quad y_j - y_i = \text{const} = -2d, \quad (98)$$

то с учетом них формула (97) примет вид

$$F_{p_j \Sigma p_i, y} = \frac{\mu_0 p_0^2}{2\pi} \sum_{i=1}^N \left(-\frac{12d}{\left[\left(\frac{L(j-i)}{N-1} \right)^2 + 4d^2 \right]^2} + \frac{64d^3}{\left[\left(\frac{L(j-i)}{N-1} \right)^2 + 4d^2 \right]^3} \right). \quad (99)$$

С учетом (99) выражение (94) для искомой вертикальной компоненты силы взаимодействия всех моментов со всеми изображениями переписется как

$$F_{p,y} = \frac{\mu_0 P_0^2}{2\pi} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \left(\frac{12d}{\left[\left(\frac{L(j-i)}{N-1} \right)^2 + 4d^2 \right]^2} + \frac{64d^3}{\left[\left(\frac{L(j-i)}{N-1} \right)^2 + 4d^2 \right]^3} \right). \quad (100)$$

Приведем выражение (100) к следующему виду:

$$F_{p,y} = \frac{\mu_0 P_0^2}{2\pi d^3} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \left(\frac{12}{\left[\left(\frac{t(j-i)}{N-1} \right)^2 + 4 \right]^2} + \frac{64}{\left[\left(\frac{t(j-i)}{N-1} \right)^2 + 4 \right]^3} \right), \quad (101)$$

где введен параметр $t = \frac{L}{d}$.

Обезразмерим силу (101) путем деления на размерный коэффициент $\frac{\mu_0 P_0^2}{2\pi d^3}$, имеем

$$\hat{F}_{p,y} = \frac{F_{p,y}}{\frac{\mu_0 P_0^2}{2\pi d^3}} = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \left(\frac{12}{\left[\left(\frac{t(j-i)}{N-1} \right)^2 + 4 \right]^2} + \frac{64}{\left[\left(\frac{t(j-i)}{N-1} \right)^2 + 4 \right]^3} \right). \quad (102)$$

Задав значение параметра $t = \frac{L}{d} = \frac{10^{-2}}{10^{-3}} = 10^1 = 10$, можно найти максимум безразмерной силы (102) путем подсчета двойной суммы. Он оказался равным

$$\hat{F}_{p,y}^{\max} = 0.6395101812980428. \quad (103)$$

2.3. Расчет силы взаимодействия двух подструктур с распределением магнитных моментов в виде множества Кантора

Рассчитаем вертикальную компоненту силы взаимодействия двух подструктур с распределением магнитных моментов в виде множества Кантора. На рис. 12 показана данная структура.

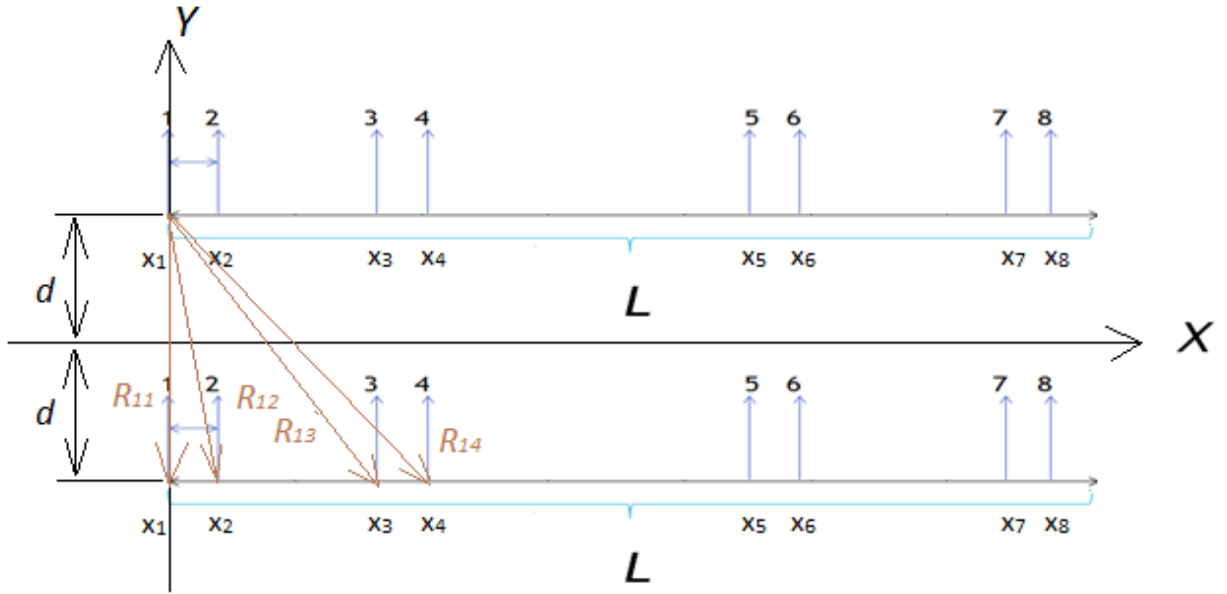


Рис. 12. Две подструктуры с распределением магнитных моментов в виде множества Кантора

С учетом соотношений (94), (97) и второго соотношения из (98) запишем вертикальную компоненту силы взаимодействия двух подструктур с канторовым распределением магнитных моментов, приходящейся на единицу длины полоски, имеем

$$F_{p,y} = \frac{\mu_0 P_0^2}{2\pi} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \left(-\frac{12d}{d^4 \left[\left(\frac{x_j - x_i}{d} \right)^2 + 4 \right]^2} + \frac{64d^3}{d^6 \left[\left(\frac{x_j - x_i}{d} \right)^2 + 4 \right]^3} \right). \quad (104)$$

Преобразуем выражение (104) следующим образом:

$$F_{p,y} = \frac{\mu_0 P_0^2}{2\pi d^3} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \left(-\frac{12}{\left[\left(\frac{x_j - x_i}{d} \right)^2 + 4 \right]^2} + \frac{64}{\left[\left(\frac{x_j - x_i}{d} \right)^2 + 4 \right]^3} \right). \quad (105)$$

Введя безразмерные параметры $\hat{x}_j = \frac{x_j}{d}$, $\hat{x}_i = \frac{x_i}{d}$ и нормировав выражение аналогично (102), получим

$$\hat{F}_{p,y} = \frac{F_{p,y}}{\frac{\mu_0 P_0^2}{2\pi d^3}} = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \left(\frac{12}{\left[(\hat{x}_j - \hat{x}_i)^2 + 4 \right]^2} + \frac{64}{\left[(\hat{x}_j - \hat{x}_i)^2 + 4 \right]^3} \right), \quad (106)$$

где с учетом (91) при $d=10^{-3}$ м нормированные координаты определяются как

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 = 0, \quad \hat{x}_2 = \frac{2000}{27}, \quad \hat{x}_3 = \frac{2000}{9}, \quad \hat{x}_4 = \frac{8000}{27}, \\ \hat{x}_5 = \frac{2000}{3}, \quad \hat{x}_6 = \frac{20000}{27}, \quad \hat{x}_7 = \frac{8000}{9}, \quad \hat{x}_8 = \frac{26000}{27}. \end{aligned} \quad (107)$$

Максимальная безразмерная сила для данной системы оказалась равной

$$\hat{F}_{p,y}^{\max} = 1.9999966698923202. \quad (108)$$

2.4. Сравнение силы взаимодействия структуры с равномерным распределением магнитных моментов и аналогичной силы структуры с распределением магнитных моментов в виде множества Кантора

Для равномерной и неравномерной структур численные значения сил взаимодействия определяются соответственно соотношениями (103) и (108)

(нормировочный множитель $\frac{\mu_0 P_0^2}{2\pi d^3}$ один и тот же в обоих случаях).

Для отношения значений сил (103) и (108) имеем

$$\frac{F_{p,y}^{\text{неравн.}}}{F_{p,y}^{\text{равн.}}} = \frac{\hat{F}_{p,y}^{\text{неравн.}}}{\hat{F}_{p,y}^{\text{равн.}}} = \frac{1.9999966698923202}{0.6395101812980428} \approx 3.1274 \approx 3. \quad (109)$$

Таким образом, максимум силы на единицу длины полоски в системе многих полосок для неравномерной фрактальной канторовой структуры оказался больше приблизительно в три раза. Это означает, что для достижения большего сцепления решетки полосок с ферромагнитным материалом, необходимо полоски располагать не на равных расстояниях друг от друга, а на разных, подчиняющихся определенному закону расположения, например, фрактальному.

Заключение

В работе выполнены теоретические расчеты для различных магнитных систем. Были исследованы пленочные материалы, широко распространенные в микроэлектронике и не только. При расчете поперечной силы взаимодействия решетки полосок, то есть набора тонких пленок, с листом ферромагнетика было показано, что при определенном выборе параметров системы можно добиться выигрыша в силе. Показано, что сила взаимодействия решеточного магнита с, например, железом может существенно превосходить силу взаимодействия аналогичного по массе сплошного магнита с тем же материалом. Был обоснован полученный результат в рамках приближения магнитных зарядов (магнитного конденсатора).

Разработана теория и получена общая аналитическая формула для силы взаимодействия решетки из намагниченных полосок с произвольными параметрами. Показано, что из данной теории вытекают в частных случаях известные ранее приближенные теоретические расчеты. В рамках данной теории удалось проанализировать закономерности силы взаимодействия магнитной решетки с массивным ферромагнетиком в зависимости от толщины, ширины полоски и расстояния решетки до ферромагнетика в самом общем случае.

Были рассмотрены фрактальные системы, которые широко распространены в природе. В качестве фрактального распределения (в одномерном случае) магнитных моментов было рассмотрено множество Кантора. Структурой сравнения была система с равномерным распределением магнитных моментов (как элементарный фрактал) с тем же их количеством. Были рассчитаны для этих двух структур силы взаимодействия со сплошным ферромагнетиком (без внешнего поля). Установлено, что сила взаимодействия в случае множества Кантора больше, чем сила в случае равномерного распределения, приблизительно в три раза.

Список использованных источников

По результатам работы была оформлена статья, которая вышла в печать в мае 2020 г: Пятаков М. А., Поляков П. А., Русакова Н. Е. Изучение взаимодействия ферромагнетиков и расчет меры этого взаимодействия. – *Известия РАН. Серия физическая*. 2020. Т. 84. № 5. С. 719–722. Электронная версия статьи опубликована на сайте научной электронной библиотеки <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=42652163>.

1. Кондратьева Н. В., Родюков Ф. Ф., Шепелявый А. И. Уравнения электрических машин с постоянным вращающимся магнитом в роли статора и их нелокальный анализ. – *Прикладная механика и техническая физика*. 2002. Т. 43. № 6. С. 3–13.
2. Вяткина Е. А., Лютаревич А. Г., Пугачева Е. А., Тевс В. В. Применение электрического двигателя с постоянными магнитами в качестве силовой установки беспилотного летательного аппарата. – *Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований*. 2017. № 12–2. С. 228–232.
3. Татевосян А. А., Огорелков Б. И., Татевосян А. С. Расчет индуктированной ЭДС в витке при относительном движении постоянного магнита с различной формой поперечного сечения. – *Омский научный вестник*. 2014. № 3 (133). С. 179–183.
4. Gerlici J., Шведчикова И. А., Никитченко И. В., Романченко Ю. А. Исследование влияния конфигурации магнитной системы сепаратора на постоянных магнитах на распределение магнитного поля в рабочей зоне. – *Електротехніка і електромеханіка*. 2017. № 2. С. 13–17.
5. Анненков Е. А. Определение оптимальных параметров электродвигателя в разомкнутой системе электродвигатель – механизм. – *Вестник науки и образования*. 2017. № 1 (25). С. 24–27.
6. Лютаревич А. Г., Долингер С. Ю., Чепурко Н. Ю., Хацевский К. В., Лохман Е. А. Вопросы проектирования электродвигателей постоянного тока с высококоэрцитивными магнитами. – *Современные проблемы науки и образования*. 2014. № 5. С. 281.
7. Согрин А. И. Потери в роторе синхронной электрической машины с возбуждением от постоянных магнитов. – *Сборник статей: Материалы 66-й научной конференции (электронный ресурс: <https://elibrary.ru/item.asp?id=22793435>)*. 2014. С. 1264–1272.
8. Зайончковский В. С., Аунг Чжо Чжо. Выбор и обоснование состава пленочной композиции для получения пленочного постоянного магнита с намагниченностью в плоскости пленки, совместимого с кремниевой интегральной технологией. – *Наука, техника и образование*. 2019. № 4 (27). С. 94–103.

9. Самофалов В. Н., Белозоров Д. П., Равлик А. Г. Сильные поля рассеяния в системах магнитов с гигантской магнитной анизотропией. – *Успехи физических наук*. 2013. Т. 183. № 3. С. 287–306.
10. Chalmers V. J., Akmese R. Synchronous machines with inset surface Nd–Fe–B magnets. – *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 1999. V. 196–197. P. 277–279.
11. Михайлова Е. Г., Гончаров В. И. Применение неодимовых магнитов (неодим-железо-бор). – *Сборник статей: Материалы VII Международной научно-практической конференции «Современные инновации: достижения и перспективы III тысячелетия»*. 2017. С. 17–19.
12. Яковлева Е. В., Галеев О. Р. К вопросу о применении логических методов и методов научного познания при обучении физике. – *Вестник Казанского технологического университета*. 2014. Т. 17. № 5. С. 357–360.
13. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Физматлит, 2016, 656 с.
14. Иванов В. В. Формирование фрактальных структур на основе итерационной последовательности и канторова множества точек с заданными характеристиками в 1D-пространстве. – *Успехи современного естествознания*. 2013. № 8. С. 136–137.
15. Исхаков Р. С., Комогорцев С. В., Денисова Е. А., Калинин Ю. Е., Ситников А. В. Фрактальная магнитная микроструктура в пленках нанокompозитов $(Co_{41}Fe_{39}B_{20})_x(SiO_2)_{1-x}$. – *Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 2007. Т. 86. № 7–8. С. 534–538.
16. Галиярова Н. М., Стреляева А. Б. Микроструктура пьезокерамики на основе титаната-цирконата свинца. – *Прикаспийский журнал: управление и высокие технологии*. 2012. № 2 (18). С. 114–120.
17. Лисовский Ф. В., Лукашенко Л. И., Мансветова Е. Г. Термодинамически устойчивые фракталоподобные доменные структуры в магнитных пленках. – *Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 2004. Т. 79. № 7. С. 432–435.
18. Пятаков М. А., Русакова Н. Е., Поляков П. А. Изучение взаимодействия ферромагнетиков и расчет меры этого взаимодействия. – *Сборник статей: Материалы XXVII Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы (фундаментальные физические исследования)»*. Москва, 2019. С. 283–289.
19. Матвеев А. Н. Электричество и магнетизм. М.: Высшая школа, 1983, 463 с.
20. Иродов И. Е. Электромагнетизм. Основные законы. М.: Лаборатория знаний, 2019, 319 с.