

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра общей физики

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

**РАЗРАБОТКА УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО КОМПЛЕКТА
ДЛЯ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ
ПРИ ПОДГОТОВКЕ ОБУЧАЮЩИХСЯ
К ОЛИМПИАДАМ ПО ФИЗИКЕ**

Выполнил студент

405 академической группы

Трушников Николай Дмитриевич

Научный руководитель:

к.ф.-м.н. доцент

Якута Алексей Александрович

Допущена к защите «___» мая 2018 г.

Зав. кафедрой

Д.ф.-м.н. профессор А.М. Салецкий

Москва 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРНЫХ ИСТОЧНИКОВ. И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ	7
ГЛАВА 2. РАЗРАБОТКА УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО КОМПЛЕКТА И ЕГО СТРУКТУРА	11
ГЛАВА 3. ЗАДАЧИ, ВКЛЮЧЕННЫЕ В ПОСОБИЕ «МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ ПРИ ПОДГОТОВКЕ ОБУЧАЮЩИХСЯ К ОЛИМПИАДАМ ПО ФИЗИКЕ»	19
Силовые характеристики электростатического поля.	19
Поток вектора напряженности электростатического поля.	34
Потенциал электростатического поля.	36
Энергия электростатического поля.	44
ВЫВОДЫ	50
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	52
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	53
Приложение 1. Решения задач, включенных в пособие «Методы решения задач электростатики при подготовке обучающихся к олимпиадам по физике»	56
Приложение 2. Справка о внедрении разработки в учебный процесс	124

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы среди обучающихся растет популярность профильного физического образования – как среднего, так и высшего. По этой причине увеличивается конкурс среди старшеклассников при поступлении в профильные физико-математические классы школ, а также при поступлении абитуриентов на физико-математические, технические и инженерные специальности высших учебных заведений. Всё более востребованными становятся различные интеллектуальные соревнования по физике, подготовка к которым позволяет обучающимся лучше освоить учебный материал, а участие – получить предусмотренные законодательством преимущества при поступлении в вузы.

Одной из главных целей физического образования является приобретение обучающимся компетенций, необходимых для решения физических задач. В частности, одним из официальных требований к уровню подготовки выпускников образовательных организаций, которое контролируется на едином государственном экзамене по физике, является овладение умениями и навыками для решения задач по физике [1].

Данные компетенции тем более необходимы обучающимся, участвующим в различных интеллектуальных соревнованиях по физике. Поэтому при подготовке к участию в олимпиадах необходимой частью учебного процесса являются практические занятия, отводимые для самостоятельного решения задач.

Олимпиадные задания имеют характерную отличительную особенность, которая состоит в следующем. Формально для выполнения таких заданий (решения олимпиадных задач) достаточно знаний, получаемых обучающимися при освоении программы базового курса физики. Но на практике оказывается, что соответствующие задачи не могут быть решены путем формального применения общеизвестных формул и приемов. Связано это, в

первую очередь, с тем, что существует множество нетривиальных идей и различных специальных методов решения физических задач, которые дают возможность элегантного и быстрого получения решений даже достаточно трудных и нестандартных задач. По этой причине одним из залогов успеха при подготовке обучающихся к участию в олимпиадах по физике является применение специальной методики обучения, для чего необходим специально подобранный комплект задач, используемый преподавателем в ходе образовательного процесса. Такие комплекты задач разрабатываются достаточно давно и в настоящее время изданы в виде многочисленных сборников.

Однако, абсолютное большинство учебно-методических материалов, посвященных методам решения физических задач повышенного уровня трудности, структурированы либо по хронологическому, либо по тематическому признаку. Это усложняет и для обучающегося, и для педагога процесс подготовки к интеллектуальным соревнованиям по физике – ведь методы и идеи, необходимые для решения задач, не раскрыты в таких материалах явным образом, и чаще всего не могут быть осознаны и сформулированы обучающимся самостоятельно.

Таким образом, для качественной подготовки к олимпиадам высокого уровня по физике необходимо выделить методы и приемы, которые используются для решения определенных типов заданий. Обучающимся должна быть разъяснена сущность каждого метода, затем применение этого метода должно быть продемонстрировано на нескольких примерах, и далее навыки применения метода должны быть закреплены у обучающихся в процессе самостоятельного решения ими схожих и аналогичных задач. Такая система подготовки может быть достаточно эффективной, ведь получаемые обучающимися знания и умения, необходимые для решения задач, оказываются систематизированными на основании применяемых методов. Обучающийся в процессе самостоятельного решения предложенных заданий, применяя разъясненные ему ранее методы и приемы решения определенных типов задач, получает инструментарий для успешного самостоятельного решения более

сложных физических задач, в том числе и задач теоретических туров олимпиад по физике.

Для подготовки обучающихся описанным способом необходимы специально разработанные и соответствующим образом структурированные учебно-методические материалы. Создание подобных материалов является в настоящее время важной задачей, стоящей перед преподавателями и методистами, осуществляющими профессиональную деятельность в сфере профильного физического образования старшеклассников и студентов младших курсов вузов физических и технических специальностей.

Целью данной бакалаврской работы является создание и апробация учебно-методического комплекта по теме «Электростатика», структурированного по вышеописанному «идейному» принципу. Для этого нами, прежде всего, были проанализированы существующие в настоящее время учебно-методические материалы, используемые для подготовки обучающихся к олимпиадам по физике. Затем были определены темы, согласно которым можно классифицировать задачи, и отобраны соответствующие этим темам задачи, наиболее важные с методической точки зрения. Часть задач были разработаны автором самостоятельно. Далее был выделен набор базовых идей, приемов и методов, которые могут применяться для решения различных задач электростатики по данным темам. Сущность этих идей, приемов и методов была кратко сформулирована. Для всех отобранных задач были написаны краткие решения, раскрывающие сущность используемых при решении методов и идей.

Таким образом, созданный учебно-методический комплект включает в себя: 1) описание идей, приемов и методов решения нестандартных физических задач; 2) набор специально подобранных задач, иллюстрирующих применение этих идей, приемов и методов; 3) краткие решения указанных задач. Для удобства практического применения задачи и их решения оформлены в виде учебно-методического пособия.

Необходимо отметить, что в 2017 году на кафедре общей физики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова был разработан аналогичный учебно-методический комплект по разделу «Механика» [25], поэтому данная работа является следующим шагом по созданию учебно-методического комплекта по всему курсу «олимпиадной» физики.

Работа состоит из введения, трех глав и двух приложений. В первой главе сделан обзор литературных источников и поставлена решаемая задача. Вторая глава посвящена описанию процесса разработки созданного учебно-методического комплекта и его структуре. В третьей главе приведены условия задач, включенных в разработанное автором учебно-методическое пособие «Методы решения задач электростатики при подготовке обучающихся к олимпиадам по физике». Решения задач, вошедших в состав указанного учебно-методического пособия, вынесены в Приложение 1. Во втором приложении помещена копия справки о внедрении авторской разработки в учебный процесс.

ГЛАВА 1

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРНЫХ ИСТОЧНИКОВ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Степень и качество освоения обучающимися той или иной учебной дисциплины, в том числе, и физики, традиционно оценивается по приобретенным обучающимися компетенциям и навыкам. Одной из важнейших компетенций, которую должны приобрести школьники и студенты в процессе изучения курса физики, является умение решать различные физические задачи. Данную компетенцию принято считать наиболее сформированной в том случае, если обучающийся успешно справляется с решением незнакомых ему ранее задач – при этом говорят о сформированности устойчивого навыка. Для формирования данного навыка необходимо как знание стандартных физических моделей, явлений, физических величин и соотношений между ними, так и умение строить подходящие для данной физической задачи математические модели и оперировать необходимым математическим инструментарием.

Умение решать физические задачи обычно вырабатывается у учащихся при помощи рассмотрения педагогом «типичных» примеров, для которых можно предложить стандартные алгоритмы решений. Данный метод обучения решению физических задач применяется в образовательном процессе при первичном знакомстве с изучаемым разделом физики, когда обучающийся еще недостаточно хорошо ориентируется в физических понятиях и существующих способах решения задач. Также этот метод успешно применяется при работе с незаинтересованными в предмете обучающимися, для которых курс общей физики не является профильным.

В качестве методического сопровождения данного способа обучения выступают учебно-методические комплекты для преподавателей, призванные помочь педагогам выстроить более емкий и математически строгий курс (например, работы [3, 10, 11, 13]), а также учебно-методические комплекты,

предназначенные для самостоятельного обучения решению задач ([2, 7, 8, 12, 14, 15]).

Однако, при более углубленном изучении физики (на профильном уровне) и перед обучающимся, и перед педагогами встает следующая проблема. При рассмотрении более сложных в физическом плане и содержательных в математическом смысле задач гораздо сложнее заранее, до начала решения, понять весь ход и структуру будущих рассуждений, а, тем более, составить типовой алгоритм решения задачи. В результате процесс обучения решению физических задач повышенной трудности зачастую сводится к бессистемному рассмотрению решений тех или иных задач, которые являются наиболее «интересными» или «важными» с точки зрения конкретного педагога. Иногда применяются также метод «поточного» решения олимпиадных задач – когда обучающемуся рекомендуют решать как можно больше различных олимпиадных задач, запоминая их условия и способы решения. При этом за кадром остаются общие идеи и методы решения, характерные в целом для задач того или иного типа.

Особенно явственно эта проблема проявляется при подготовке высокомотивированных школьников и студентов к олимпиадам высокого уровня по физике. По этой причине задачи в создаваемых учебных пособиях для подготовки к интеллектуальным соревнованиям обычно группируются по хронологическому, как в изданиях [6], или тематическому, как в работах [4, 5, 19, 20, 22, 23, 24], принципу. В части этих сборников есть только ответы к задачам, а в остальных приведены и решения, но при этом задачи (или решения) не структурированы в соответствии с каким-либо идейными признаками.

Систематизация методики решения задач, содержащихся в подобных сборниках – это достаточно трудоемкая работа, что связано с кратно большим, чем в «типовых» задачах, количеством идей, заложенных авторами в задачи. Для решения подобных задач обучающийся может либо сам додуматься до всех заложенных в задачу идей, что самостоятельно сделать достаточно непросто, либо педагог должен объяснить ученику конкретный подход

дующий метод решения, но далеко не все педагоги сами в полной мере владеют всеми подобными методами. Попытки систематизации задач по применяемым для их решения физическим и математическим методам предпринимались и раньше – например, авторами пособий для школьников и учителей [7], а также для студентов [8].

Недостаток вышеуказанных сборников, задачи в которых систематизированы по методам решения, состоит в широком охвате тем при малом количестве задач, рассмотренных по каждой теме. Большое количество рассмотренных разнородных методов не дает возможности составить по каждому из них списка задач для самостоятельного решения с целью отработки полученных обучающимися навыков. Поэтому для закрепления компетенций по решению сложных задач обучающемуся все равно необходим опытный педагог, который может составить для учащегося «дорожную карту» для самостоятельного применения изученного метода. Только в прошлом году на кафедре общей физики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова была предпринята попытка создания учебного пособия, в котором значительное число трудных задач было сгруппировано по «идейному» принципу, а также для каждой задачи были написаны методические указания, раскрывающие указанные идеи [25].

Из сказанного следует вывод: на данный момент существует проблема нехватки учебно-методических пособий, основанных на систематизации физических и математических идей, применяемых для решения задач и предназначенных для обучения школьников и студентов решению физических задач повышенной сложности. Соответственно, существует общественный запрос со стороны педагогического сообщества и обучающихся на создание подобных учебно-методических пособий.

Востребованность подобных учебно-методических пособий также обусловлена ощутимым ростом интереса школьников и студентов к профильному физическому образованию. Каждый год возрастает конкурс на обучение в вузах по физико-математическим и инженерно-техническим специальностям,

открываются новые физические факультеты, учреждаются новые физические олимпиады, растет конкуренция за призовые места даже на физических олимпиадах высокого уровня ([9, 21]). Из-за этого на олимпиадах все чаще предлагаются задачи, решение которых без использования редких, не рассматриваемых в рамках стандартных учебных курсов, методов представляется очень трудным. Возможным решениям данной проблемы посвящены многие методические публикации [10-15], а также научные педагогические исследования [16].

Для решения сформулированной выше проблемы нами было решено разработать учебно-методический комплект, структура которого должна быть основана на методах решения физических задач повышенной сложности. В рамках создания такого комплекта, который должен содержать большое число задач по каждой теме курса физики, нами было решено ограничиться разделом «Электростатика». Разработке учебно-методического комплекта, предназначенного для обучения решению задач электростатики при подготовке обучающихся к олимпиадам по физике, и посвящена данная квалификационная работа бакалавра.

ГЛАВА 2

РАЗРАБОТКА УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО КОМПЛЕКТА И ЕГО СТРУКТУРА

Разработка учебно-методического комплекта, посвященного методам решения задач повышенной сложности курса электростатики, проходила в несколько этапов.

На первом этапе были проанализированы школьные учебники, предназначенные для изучения старшеклассниками курса электростатики на профильном уровне [17, 18]. Также были проанализированы задачи по электростатике, содержащиеся в различных сборниках задач [4, 5, 6, 7, 20, 22, 23, 24]. По итогам анализа были выделены основные темы, к которым можно отнести те или иные задачи. В результате этой работы из всех вышеупомянутых учебно-методических материалов были отобраны задачи повышенной сложности по выделенным темам.

Абсолютное большинство отобранных для комплекта задач не были снабжены решениями, поэтому на втором этапе разработки комплекта для всех задач были написаны решения, причем в них были добавлены специальные пояснения, связанные с применением рассматриваемых методов. Далее отобранные задачи были классифицированы по методам их решения. Сами же методы были выстроены в соответствии с наиболее часто реализуемым на практике порядком усвоения обучающимися элементов знаний.

Это определило порядок рассмотрения задач в учебно-методическом пособии, которое было создано на третьем этапе выполнения работы. Оглавление этого пособия приведено ниже:

Силовые характеристики электростатического поля.

- 1.1) Рассмотрение устойчивости положения зарядов.
- 1.2) Применение принципа суперпозиции напряженностей полей.

1.3) Вычисление напряженностей поля равномерно заряженных отрезков.

1.4) Вычисление нормальной компоненты напряженности поля участков равномерно заряженных плоскостей.

1.5) Расчет сил при помощи нахождения давления электростатического поля.

1.6) Применение метода суперпозиции зарядов.

1.7) Применение метода размерностей для вычисления напряженности поля.

Поток вектора напряженности электростатического поля.

2.1) Вычисление нормальной компоненты силы, действующей на заряженные участки плоскости, при помощи нахождения потока сквозь рассматриваемые участки плоскости.

2.2) Применение теоремы Гаусса для расчета напряженностей полей, создаваемых симметричными системами зарядов.

2.3) Применение теоремы Гаусса для исследования линий напряженности электростатического поля.

Потенциал электростатического поля.

3.1) Применение принципа суперпозиции потенциала поля.

3.2) Применение метода размерностей для вычисления потенциала.

3.3) Вычисление потенциала проводника в удобной для этого точке проводника.

3.4) Метод электростатических изображений.

3.5) Использование линейности связи потенциалов и зарядов для системы проводящих тел.

Энергия электростатического поля

4.1) Применение закона сохранения энергии в нерелятивистских системах.

4.2) Расчет электростатических сил при помощи метода виртуальных перемещений.

4.3) Расчет давления и потенциальной энергии электростатического поля путем нахождения плотности энергии поля.

Пособие состоит из четырех разделов, которые посвящены рассмотрению задач, относящихся к соответствующей теме курса «Электростатика»:

1. «Силовые характеристики электростатического поля»;
2. «Поток вектора напряженности электростатического поля»;
3. «Потенциал электростатического поля»;
4. «Энергия электростатического поля»;

Разделы нумеруются одиночными арабскими цифрами. Всего в пособии рассмотрены 18 основных методов решения задач повышенной сложности по электростатике. Этим методам даны наименования, и каждый из них обозначен номером, который содержит две разделенные точкой цифры: первая из них обозначает номер раздела, а вторая – номер метода внутри раздела (например – «3.1»). Перечислим методы решения задач, легшие в основу разработанного учебно-методического пособия, и кратко очертим круг задач, которые могут быть решены путем применения каждого из методов.

1.1) Рассмотрение устойчивости положения зарядов.

Данный метод основан на применении метода виртуальных перемещений в положениях равновесия системы для анализа устойчивости этих положений. Сущность метода состоит в записи условий равновесия элемента системы в положении его устойчивого равновесия и в положении, бесконечно мало отличающемся от этого положения равновесия – в обоих указанных случаях сумма действующих на рассматриваемый элемент системы сил и моментов сил должна быть равна нулю. Этот метод рекомендуется применять для задач, в которых необходимо определить область значений парамет-

ров системы, при которых возможно достижение системой состояния устойчивого равновесия.

1.2) Применение принципа суперпозиции напряженностей полей.

Данный метод используется для решения задач о нахождении напряженности поля в пространстве, создаваемого системой многих зарядов. При этом следует использовать соображения симметрии, а также тот факт, что одинаковые (геометрически подобные) системы зарядов создают одинаковые (подобные) электрические поля. Также данный метод удобно использовать для определения сил, действующих на заряженное тело со стороны системы многих зарядов.

1.3) Вычисление напряженностей полей равномерно заряженных отрезков.

Метод основан на равенстве напряженностей поля равномерно заряженного отрезка и поля соответствующей данному отрезку равномерно заряженной дуги окружности. Эта окружность вписана в треугольник, двумя углами которого являются концы отрезка, а инцентр треугольника совпадает с точкой наблюдения. Применение этого метода позволяет рассчитывать напряженность поля, создаваемого прямыми отрезками (в том числе, бесконечной и полубесконечной прямыми), не прибегая к сложным вычислениям.

1.4) Вычисление нормальной компоненты напряженности поля участков равномерно заряженных плоскостей.

Метод основан на использовании связи компоненты напряженности электрического поля, нормальной к плоскому участку равномерно заряженной поверхности и создаваемой этой поверхностью в точке наблюдения, с телесным углом, под которым видна поверхность из точки наблюдения. Этот метод удобно использовать также для определения напряженности поля, создаваемого объемными системами, состоящими из нескольких равномерно заряженных участков плоскостей.

1.5) Расчет сил при помощи нахождения давления электростатического поля.

Метод основан на вычислении силы давления электростатического поля, которое может быть легко найдено, если известна нормальная составляющая напряженности внешнего электростатического поля вблизи заряженной поверхности. Этот метод удобно применять для нахождения сил взаимодействия сферических равномерно заряженных сегментов с точечными зарядами и друг с другом.

1.6) Применение принципа суперпозиции зарядов.

Этот метод заключается в представлении незаряженного объема пространства как наложения двух одинаковых соответствующих объемов, в которых распределены заряды противоположных знаков. Этот метод удобно применять для «формирования» симметричных систем в случае, если незаряженный объем включается сразу в несколько таких систем, для каждой из которых напряженность поля известна (например, если указанный объем образуется при пересечении двух сфер).

1.7) Применение метода размерностей для вычисления напряженности поля.

Соответствующий метод заключается в поиске показателей степеней геометрических параметров и плотности заряда рассматриваемой системы в зависимости модуля напряженности поля данной системы от вышеуказанных параметров. Этот метод удобно использовать для вычисления напряженности поля при кратном изменении параметров системы.

2.1) Вычисление нормальной компоненты силы, действующей на заряженный участок плоскости, при помощи нахождения потока вектора напряженности внешнего электрического поля через рассматриваемый участок плоскости.

Суть метода состоит в использовании связи нормальной к заряженному участку плоскости компоненты электрической силы и потока через этот участок вектора напряженности внешнего электрического поля. С помощью этого соотношения удобно вычислять силы взаимодействия симметричных систем, состоящих из плоских равномерно заряженных тел.

2.2) Применение теоремы Гаусса для расчета напряженностей полей, создаваемых симметричными системами зарядов.

Данный метод удобен для вычисления напряженностей полей бесконечных симметричных заряженных тел.

2.3) Применение теоремы Гаусса для исследования линий напряженности электростатического поля.

Метод исследования линий напряженности электростатического поля основан на том, что бесконечно узкий пучок линий напряженности можно окружить гауссовой поверхностью в виде криволинейного цилиндра с боковыми поверхностями, в каждой точке параллельными линиям пучка. Данный метод применяется для определения геометрических параметров рассматриваемой линии (например, углов, под которыми линии «выходят» из заряженных тел или «входят» в них).

3.1) Применение принципа суперпозиции потенциалов полей.

Данный метод используется для решения задач о нахождении потенциала поля, создаваемого в пространстве системой многих зарядов. При этом следует использовать соображения симметрии, а также тот факт, что одинаковые (геометрически подобные) системы зарядов создают одинаковое (подобное) распределение потенциала.

3.2) Применение метода размерностей для вычисления потенциала.

Метод заключается в поиске показателей степеней геометрических параметров и плотности заряда рассматриваемой системы в зависимости потенциала поля данной системы от вышеуказанных параметров. Этот метод удобно использовать для вычисления потенциала поля при кратном изменении параметров системы.

3.3) Вычисление потенциала проводника в удобной для этого точке проводника.

Метод основан на свойстве эквипотенциальности проводника (в случае электростатики). Суть метода состоит в выборе из всех эквипотенциальных

точек проводника той, для которой потенциал ищется проще всего (например, с помощью соображений симметрии).

3.4) Метод электростатических изображений.

Данный метод заключается в представлении напряженности поля, создаваемого вне проводящего тела зарядами, находящимися снаружи от тела, и поляризационными зарядами на поверхности тела, в виде суперпозиции напряженностей полей систем реальных зарядов и мнимых зарядов-изображений, расположенных определенным образом. Это позволяет рассчитывать силы взаимодействия между заряженными телами и проводящими телами при наличии определенных типов симметрии.

3.5) Использование линейности связи потенциалов и зарядов для системы проводящих тел.

Этот метод позволяет определять потенциалы и заряды тел в системах многих заряженных тел, используя представление искомым зарядов через потенциалы (и наоборот) с помощью емкостных (потенциальных) коэффициентов, а также применяя в отношении этих коэффициентов теорему о взаимности.

4.1) Применение закона сохранения энергии в нерелятивистских системах.

Данный метод позволяет определять неизвестные значения скоростей зарядов или расстояния между зарядами, решая уравнение, получаемое из закона сохранения энергии.

4.2) Расчет электростатических сил при помощи метода виртуальных перемещений.

Соответствующий метод позволяет рассчитывать силы, действующие на заряды в статичной системе, используя закон изменения полной энергии системы при малом виртуальном перемещении исследуемого тела в электростатическом поле остальных зарядов.

4.3) Расчет давления и потенциальной энергии электростатического поля путем нахождения плотности энергии поля.

Данный метод позволяет вычислять давление и потенциальную энергию электростатического поля с помощью нахождения плотности энергии поля. Данный метод удобно использовать при известном распределении напряженности поля в пространстве.

Для демонстрации рассматриваемых методов решения задач повышенной сложности по электростатике создано учебно-методическое пособие, в котором представлены условия и решения 96 задач, относящихся к соответствующим разделам. В случае, если подобрать в литературных источниках задачи, подходящие для демонстрации определенных методов, не удавалось, то нужные задачи разрабатывались автором самостоятельно. Решения всех задач, включенных в пособие, либо подготовлены автором, либо существенно дополнены и переработаны. Также иногда видоизменялись и условия задач, взятых из других учебно-методических пособий, если в условиях содержались неточности формулировок, которые могли привести к неоднозначному пониманию задачи или к ошибкам в ее решении.

Разработанное учебно-методическое пособие предназначено для обучающихся 10-х – 11-х классов общеобразовательной школы, изучающих физику на профильном уровне и готовящихся к участию в олимпиадах высокого уровня по физике, для их наставников — учителей, педагогов дополнительного образования, руководителей физических кружков и факультативов, а также для студентов, готовящихся к участию в олимпиадах по физике. Задачи, вошедшие в созданное учебно-методическое пособие «Методы решения задач электростатики при подготовке обучающихся к олимпиадам по физике», приведены в главе 3. Решения этих задач вынесены в Приложение 1 к данной работе.

ГЛАВА 3

ЗАДАЧИ, ВКЛЮЧЕННЫЕ В ПОСОБИЕ «МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ ПРИ ПОДГОТОВКЕ ОБУЧАЮЩИХСЯ К ОЛИМПИАДАМ ПО ФИЗИКЕ»

Силовые характеристики электростатического поля.

1.1. Рассмотрение устойчивости положения зарядов.

Задача №1.

Две маленькие бусинки массами m каждая заряжены зарядами Q и Q . Бусинки надеты на гладкие изолирующие спицы, которые расположены в вертикальной плоскости симметрично по отношению к вертикали, и угол между которыми равен 90° (рис. 3.1). Каково расстояние между бусинками в положении равновесия?

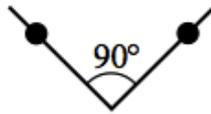


Рисунок 3.1. К условию задачи №1.

Задача №2.

В трёх вершинах равностороннего треугольника ABC разместили электрические заряды: в вершинах A и B — закреплённые электрические заряды $+q$ и $-q$ соответственно, в вершине C — незакреплённый электрический заряд $+q_1$. Укажите, в какой точке D плоскости ABC надо разместить ещё один электрический заряд $+q$, чтобы находящийся в точке C электрический заряд $+q_1$ находился в равновесии?

Задача №3.

Найдите модуль электростатической силы, действующей на точечный заряд Q в бесконечной системе точечных зарядов (рис. 3.2). Все заряды за-

креплены в вакууме на одной прямой, имеют одинаковый знак, расстояния между соседними зарядами одинаковы и равны a .

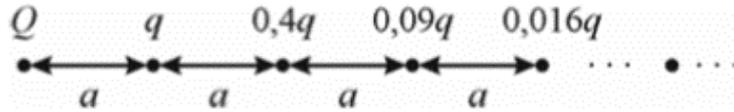


Рисунок 3.2. К условию задачи №3.

Задача №4.

На нерастяжимой диэлектрической нити, расположенной в вакууме, закреплены на одинаковых расстояниях a друг от друга N точечных положительных зарядов (рис. 3.3). Величины зарядов указаны на рисунке. Модуль силы натяжения участка нити между первым и вторым зарядами равен T . Чему равен модуль силы натяжения T_{23} участка нити между вторым и третьим зарядами? Чему равна величина T_{23} при $N = 2018$?

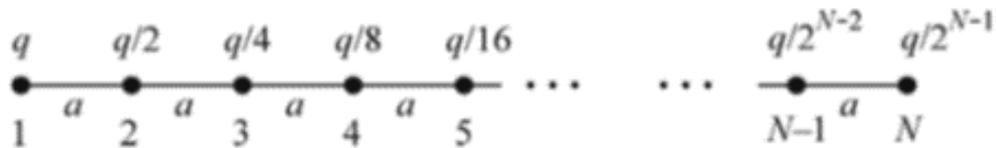


Рисунок 3.3. К условию задачи №4.

Задача №5.

Три маленьких одинаково заряженных шарика массами по $m = 4$ г каждый подвешены на одинаковых шёлковых нитях длинами $l = 1$ м. Верхние концы нитей закреплены в одной точке. При равновесии расстояние между любыми двумя шариками равно $a = 1$ см. Каков заряд q каждого шарика?

Задача №6.

Три одинаковых заряженных шарика скреплены непроводящими нитями, образуя прямоугольный треугольник BAC . Угол ABC равен α , $BC = l$ (рис. 3.4). Найдите модуль и направление ускорения, с которым начнет двигаться шарик A , если перерезать нить BC . Заряды шариков q , массы m .

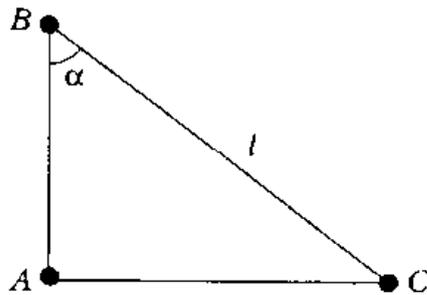


Рисунок 3.4. К условию задачи №6.

Задача №7.

Положительный q_1 и отрицательный q_2 точечные заряды закреплены на оси Ox по разные стороны от гладкой непроводящей пластины, плоскость которой перпендикулярна Ox (рис. 3.5). Маленький положительно заряженный шарик также находится на Ox , упираясь в пластину, как показано на рисунке. Первоначально пластина расположена вблизи отрицательного заряда, шарик при этом находится в равновесии. Пластину начинают поступательно перемещать вдоль Ox , медленно увеличивая расстояние l между пластиной и отрицательным зарядом. Когда l превышает $1/3$ расстояния между зарядами, шарик «улетает» с оси Ox при любом сколь угодно малом воздействии в направлении поперек Ox . Определите модуль отношения $\frac{q_1}{q_2}$. Влиянием вещества пластины на электрическое поле, а также силой тяжести пренебречь.

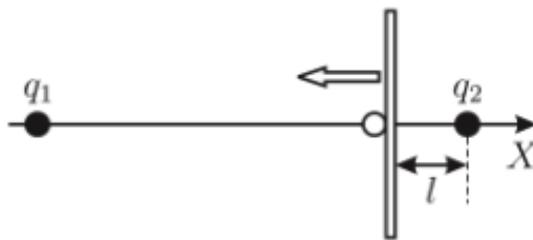


Рисунок 3.5. К условию задачи №7.

Задача №8.

Какой минимальный заряд q нужно закрепить в нижней точке сферической полости радиусом R , чтобы в поле силы тяжести небольшой шарик массой m и зарядом Q находился в верхней точке этой полости в положении устойчивого равновесия (рис. 3.6)?

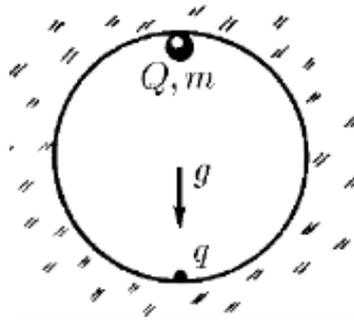


Рисунок 3.6. К условию задачи №8.

Задача №9.

Небольшой шарик с зарядом q покоится на гладком горизонтальном непроводящем столе. К шарикю присоединена горизонтальная пружина жёсткостью k , второй конец которой закреплён. Вдоль оси пружины к шарикю с большого расстояния очень медленно приближают такой же шарик с зарядом $-q$. Найдите деформацию пружины в момент столкновения шариков.

1.2. Применение принципа суперпозиции напряженностей полей.

Задача №10.

Две пересекающиеся под углом α бесконечные заряженные плоскости делят пространство на четыре области (рис. 3.7). Найдите модуль и направление вектора напряженности электрического поля во всех областях, если поверхностные плотности зарядов плоскостей равны $+\sigma$ и $-\sigma$.

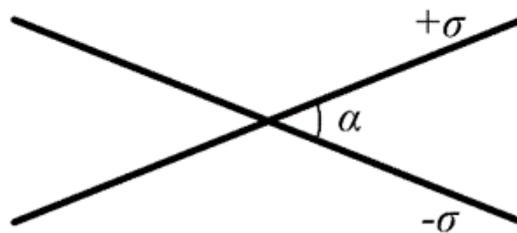


Рисунок 3.7. К условию задачи №10.

Задача №11.

Равномерно заряженный по объёму шарик радиусом R внесли в однородное электрическое поле напряжённостью \vec{E}_0 . Максимальный угол между векторами напряжённости результирующего поля и поля \vec{E}_0 оказался равным

60° . Найдите заряд шарика, если после его внесения во внешнее поле распределение заряда в шарике не изменилось.

Задача №12.

Две стороны правильного треугольника образованы одинаковыми равномерно заряженными тонкими палочками. При этом в центре O треугольника модуль напряженности электрического поля равен E_Σ . Найдите модуль и направление вектора напряженности, который будет в точке O , если одну из палочек убрать.

Задача №13.

Стороны AB , BC и CD квадрата $ABCD$ образованы одинаковыми равномерно заряженными тонкими палочками. При этом в центре O квадрата модуль напряженности электрического поля равен E_Σ . Найдите модуль и направление вектора напряженности, который будет в точке O , если убрать палочку AB .

Задача №14.

Чему равен модуль напряжённости электрического поля в центре равномерно заряженного тонкого кольца радиусом R ? Чему он равен на оси кольца на расстоянии h от его центра? Заряд кольца Q .

Задача №15.

Чему равен модуль напряжённости электрического поля на оси равномерно заряженного тонкого диска радиусом R на расстоянии h от его центра? Поверхностная плотность заряда диска σ .

Задача №16.

Бесконечная плоскость с круглым отверстием радиусом R равномерно заряжена с поверхностной плотностью заряда σ . Найдите модуль напряженности $E(l)$ электрического поля на оси отверстия как функцию расстояния l до его центра.

Задача №17.

Плотности поверхностного заряда на прямоугольных горизонтальных пластинах плоского конденсатора равны $+\sigma$ и $-\sigma$ (рис. 3.8). Расстояние между пластинами намного меньше размера пластин. Определите модуль и направление вектора напряженности электрического поля в точке A (середине отрезка, соединяющего соответствующие углы пластин).

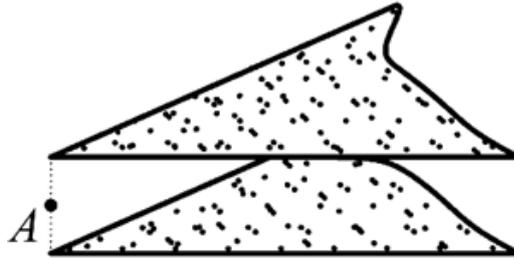


Рисунок 3.8. К условию задачи №17.

Задача №18.

Две длинные и широкие полосы, расположенные горизонтально друг над другом, равномерно заряжены с плотностью зарядов $+\sigma$ и $-\sigma$. Точка M находится на высоте h над краем полос на оси, лежащей в их вертикальной плоскости симметрии (рис. 3.9). Расстояние между полосами d мало по сравнению с h . Найдите:

- а) направление вектора напряженности результирующего поля в точке M ;
- б) модуль напряженности результирующего поля в точке M , если известно, что бесконечная равномерно заряженная тонкая нить создает на расстоянии r от себя поле напряженностью $E_{\text{нити}} = \frac{2k\lambda}{r}$, направленное перпендикулярно нити.

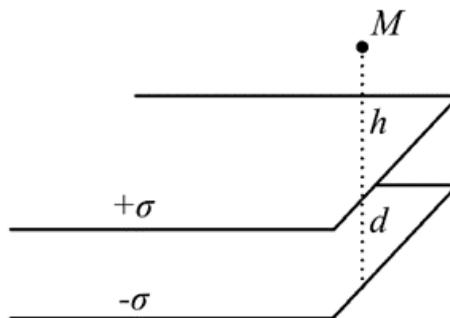


Рисунок 3.9. К условию задачи №18.

Задача №19.

Две бесконечные горизонтальные пластины толщиной h заряжены равномерно по объему и сложены вместе (рис. 3.10). Объемная плотность заряда первой пластины ρ , а второй $-\rho$. Найдите максимальный модуль напряженности электрического поля. Каково распределение поля внутри пластин?

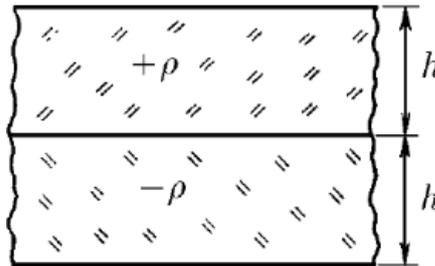


Рисунок 3.10. К условию задачи №19.

Задача №20.

Шар радиусом R равномерно заряжен по объему с плотностью заряда ρ . Найдите зависимость модуля напряженности электрического поля от расстояния до центра шара. Постройте график этой зависимости.

Задача №21.

Пользуясь принципом суперпозиции, докажите, что напряженность электрического поля равномерно заряженной по поверхности полусферы во всех точках плоскости, стягивающей края полусферы, перпендикулярна этой плоскости.

Задача №22.

Равномерно заряженную по поверхности полусферу разрезали на две части так, как показано на рисунке 3.11 (по линии aa' , проходящей через точку A), и эти части разнесли на большое расстояние друг от друга. В какой точке напряженность электрического поля больше – в точке A' или в точке A'' ?

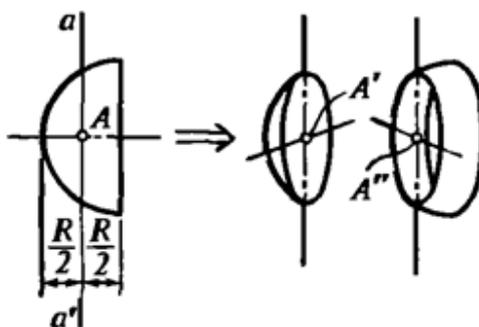


Рисунок 3.11. К условию задачи №22.

1.3. Вычисление напряженностей поля равномерно заряженных отрезков.

Задача №23.

Отрезок AB равномерно заряжен по длине. Как направлен вектор напряженности электрического поля, создаваемого этим отрезком в точке C : по медиане треугольника ACB ; по его биссектрисе; по высоте; ни по одной из этих линий (рис. 3.12)?

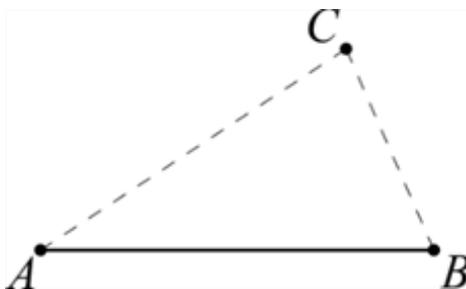


Рисунок 3.12. К условию задачи №23.

Задача №24.

Найдите потенциал в точке A , находящейся на расстоянии h от края полубесконечной нити, заряженной однородно с линейной плотностью заряда λ (рис. 3.13).

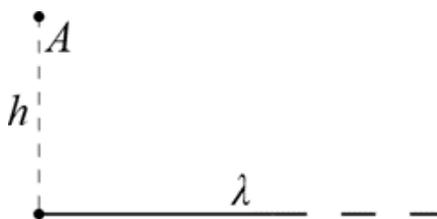


Рисунок 3.13. К условию задачи №24.

Задача №25.

Найдите напряженность поля в точке O . Нить бесконечна, равномерно заряжена с линейной плотностью заряда λ , радиус закругления равен R (рис. 3.14). Точка O находится в центре кривизны закругления.

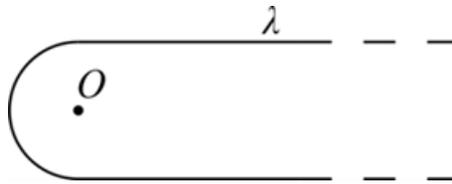


Рисунок 3.14. К условию задачи №25.

Задача №26.

Найдите точку внутри проволочного равномерно заряженного по длине непроводящего треугольника, в которой на пробный заряд q не будет действовать сила Кулона.

Задача №27.

Найдите точку внутри проволочного равномерно заряженного по длине, непроводящего четырехугольника в которой на пробный заряд q не будет действовать сила Кулона. Известно, что суммы длин противоположных сторон четырехугольника одинаковы.

1.4. Вычисление нормальной компоненты напряженности поля участков равномерно заряженных плоскостей.

Задача №28.

Докажите, что составляющая вектора напряжённости электрического поля, перпендикулярная поверхности равномерно заряженного участка плоской поверхности, равна по модулю $E_{\perp} = k\Omega\sigma$, где Ω — телесный угол, под которым виден этот участок из рассматриваемой точки пространства, σ — поверхностная плотность заряда. Найдите, пользуясь этим свойством, напряжённость электрического поля:

а) в центре куба, пять граней которого равномерно заряжены с поверхностной плотностью заряда σ , а одна грань не заряжена;

б) в центре правильного тетраэдра, три грани которого заряжены с поверхностной плотностью σ_1 , а четвёртая — с поверхностной плотностью заряда σ_2 ;

в) равномерно заряженной плоскости, если поверхностная плотность заряда σ ;

г) на оси длинной трубы с поперечным сечением в виде правильного треугольника, если поверхностная плотность заряда граней трубы равна соответственно $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$;

д) в вершине конуса с углом при вершине α и высотой h , равномерно заряженного с объёмной плотностью заряда ρ ;

е) на ребре длинного бруска, равномерно заряженного с объёмной плотностью заряда ρ ; поперечное сечение бруска — правильный треугольник со стороной a .

Задача №29.

Три прилегающие друг к другу грани кубика заряжены равномерно с поверхностной плотностью заряда $+\sigma$, а остальные грани — с плотностью заряда $-\sigma$. Найдите напряжённость E электрического поля в центре кубика.

Задача №30.

На расстоянии $l = 10$ см от точечного заряда находится равномерно заряженная квадратная пластинка размером $2l \times 2l = 20 \text{ см} \times 20 \text{ см}$ (рис. 3.15, заряд расположен на продолжении нормали к центру пластинки). Во сколько раз изменится сила взаимодействия между пластинкой и зарядом, если заряд пластинки сосредоточить в ее центре?

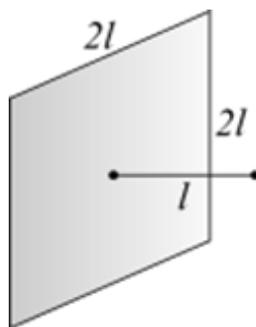


Рисунок 3.15. К условию задачи №30.

Задача №31.

Изолированная пластина в виде правильного треугольника ABC со стороной $\sqrt{2}a$ равномерно заряжена с поверхностной плотностью заряда σ (рис. 3.16). Найдите напряженность электрического поля в точке O , находящейся вне плоскости пластины, если расстояния от O до вершин пластины равны a .

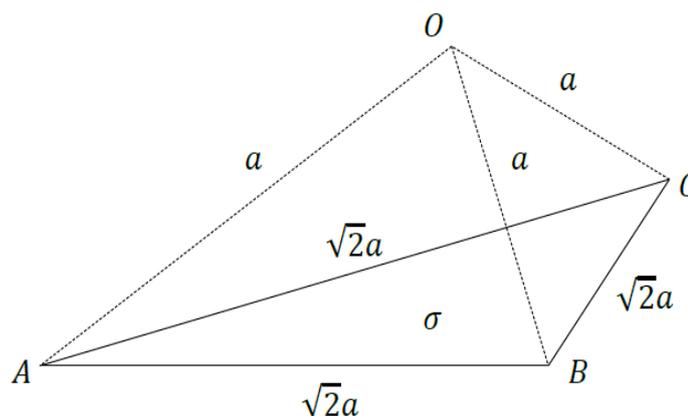


Рисунок 3.16. К условию задачи №31.

1.5. Расчет сил при помощи нахождения давления электростатического поля.

Задача №32.

В равномерно заряженной с поверхностной плотностью заряда σ сфере радиусом R вырезано маленькое отверстие. Какова напряженность электрического поля в центре этого отверстия?

Задача №33.

Тонкая сфера радиусом R заряжена до поверхностной плотности заряда σ . Какое давление испытывает сфера из-за действия электрических сил отталкивания?

Задача №34.

Оцените, какой максимальный заряд можно сообщить сферической капле радиусом R , если коэффициент поверхностного натяжения жидкости равен σ .

Задача №35.

В центр равномерно заряженной полусферы, поверхностная плотность заряда которой равна σ , поместили заряд q . С какой силой этот заряд действует на половину полусферы?

Задача №36.

Определите напряженность электрического поля, создаваемого в центре сферы A (рис. 3.17) равномерно заряженной:

- а) полусферой;
- б) половиной полусферы;
- в) четвертой частью полусферы.

Поверхностная плотность заряда равна σ .

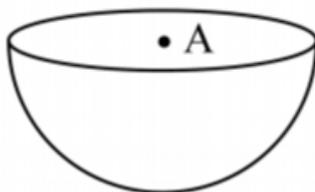


Рисунок 3.17. К условию задачи №36.

Задача №37.

Определите напряженность электрического поля в центре равномерно заряженного полушария радиусом R с объемной плотностью заряда ρ .

Задача №38.

Тонкую сферу радиусом R , заряженную до поверхностной плотности заряда σ , разрезали пополам. С какой силой отталкиваются половинки этой сферы?

Задача №39.

Равномерно заряженная зарядом Q сфера радиусом R разрезана на две части по плоскости, отстоящей на расстояние h от центра сферы (рис. 3.18). Найдите силу, с которой отталкиваются друг от друга эти части. Какой минимальный точечный заряд (по модулю) нужно поместить в центр сферы для того, чтобы ее части не разлетались?

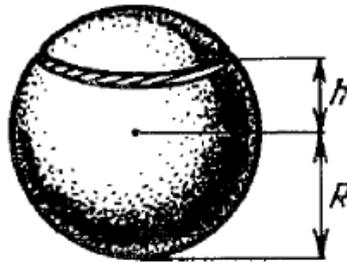


Рисунок 3.18. К условию задачи №39.

Задача №40.

Найдите силу взаимодействия двух непроводящих полусфер радиусами R и r с зарядами Q и q соответственно, распределенными равномерно по поверхностям полусфер (рис. 3.19). Центры и плоскости максимальных сечений полусфер совпадают.

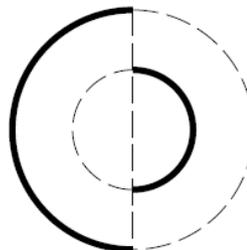


Рисунок 3.19. К условию задачи №40.

1.6. Применение принципа суперпозиции зарядов.

Задача №41.

В равномерно заряженной бесконечной пластине вырезали сферическую полость (рис. 3.20). Толщина пластины равна h , объёмная плотность заряда ρ . Найдите модуль и направление вектора напряжённости электрического поля в точке A и в точке B .

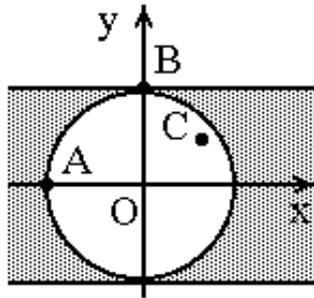


Рисунок 3.20. К условию задачи №41.

Задача №42.

В равномерно заряженном шаре радиусом R вырезали сферическую полость радиусом r , центр которой находится на расстоянии a от центра шара (рис. 3.21). Объёмная плотность заряда равна ρ . Найдите модуль и направление напряжённости электрического поля в полости.

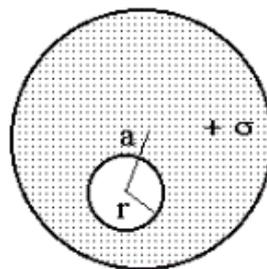


Рисунок 3.21. К условию задачи №42.

Задача №43.

При пересечении двух равномерно заряженных шаров радиусами R , центры которых находятся на расстоянии l друг от друга, образуются два «полумесяца», равномерно заряженные разноименными зарядами (рис. 3.21). Объёмная плотность электрического заряда слева $-\rho$, справа ρ . Найдите мо-

дуль и направление напряжённости электрического поля в области пересечения шаров.

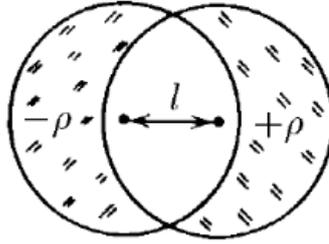


Рисунок 3.22. К условию задачи №43.

Задача №44.

Как должны быть распределены электрические заряды по поверхности сферы радиусом R для того, чтобы они создавали внутри сферы однородное электрическое поле напряженностью \vec{E} ? Найдите зависимость поверхностной плотности зарядов σ_M от угла α , который вектор \vec{E} составляет с радиус-вектором, проведенным из центра сферы в точку M на ее поверхности.

1.7. Применение метода размерностей для вычисления напряженности поля.

Задача №45.

Однородно заряженный по объему куб создает в своей вершине A электрическое поле напряженностью E_0 . Из куба удаляют кубик вдвое меньших размеров, (рис. 3.23). Чему теперь будет равна напряженность поля в той точке, где находилась вершина A исходного куба?

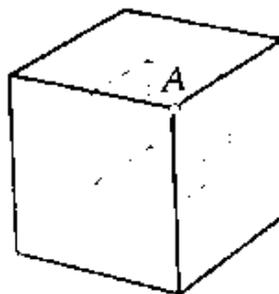


Рисунок 3.23. К условию задачи №45.

Поток вектора напряженности электростатического поля.

2.1. Вычисление нормальной компоненты силы, действующей на заряженные участки плоскости, при помощи нахождения потока сквозь рассматриваемые участки плоскости.

Задача №46.

Поток напряжённости электрического поля через плоскую поверхность, равномерно заряженной с поверхностной плотностью заряда σ , равен $\Phi_{\text{внеш}}$ (поток внешнего для данной поверхности поля). Чему равна нормальная плоскости пластины компонента электростатической силы, действующей на пластину?

Задача №47.

С какой силой действует на каждую грань тетраэдра заряд q , помещённый в его центре? Поверхностная плотность заряда граней равна σ .

Задача №48.

С какой силой расталкиваются равномерно заряженные грани куба? Тетраэдра? Поверхностная плотность заряда граней σ , длина ребра l .

2.2. Применение теоремы Гаусса для расчета напряженностей полей, создаваемых симметричными системами зарядов.

Задача №49.

Определите и изобразите графически зависимость напряженности электрического поля от расстояния:

а) внутри и вне равномерно объёмно заряженного бесконечного цилиндра радиуса R , если объёмная плотность заряда внутри цилиндра равна ρ ;

б) внутри и вне равномерно заряженной бесконечной пластины толщины h , если объёмная плотность заряда в пластине равна ρ .

в) внутри и вне равномерно заряженного шарового слоя с внутренним радиусом r , внешним радиусом $R > r$, если объёмная плотность заряда внутри шарового слоя равна ρ .

Задача №50.

Найдите распределение объёмной плотности электрического заряда $\rho(r)$:

а) в шаре радиуса R , при условии, что напряжённость электрического поля шара E_0 направлена вдоль его радиуса и не меняется по модулю;

б) в бесконечном цилиндре радиуса R , при условии, что напряжённость электрического поля цилиндра E_0 направлена вдоль радиуса сечения и не меняется по модулю.

2.3. Применение теоремы Гаусса для исследования линий напряжённости электростатического поля.

Задача №51.

(Теорема Ирншоу). Докажите, что электрический заряд не может находиться в устойчивом равновесии под действием только электростатических сил.

Задача №52.

Линия напряжённости электрического поля выходит из положительно-го заряда $+q_1$ под углом α к прямой, соединяющей его с отрицательным зарядом $-q_2$. Под каким углом β линия напряжённости войдёт в заряд $-q_2$?

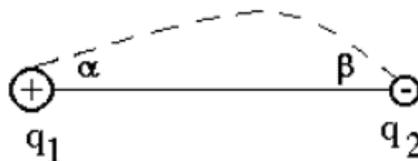


Рисунок 3.24. К условию задачи №52.

Потенциал электростатического поля.

3.1. Применение метода суперпозиции потенциала поля.

Задача №53.

Две стороны правильного треугольника образованы одинаковыми равномерно заряженными тонкими палочками, при этом в центре O треугольника потенциал равен φ_{Σ} . Найдите потенциал в точке O , если одну из палочек убрать.

Задача №54.

Стороны AB , BC и CD квадрата $ABCD$ образованы одинаковыми равномерно заряженными тонкими палочками, при этом в центре O квадрата потенциал равен φ_{Σ} . Найдите потенциал в точке O , если убрать палочку AB .

Задача №55.

Чему равен потенциал электрического поля в центре равномерно заряженного тонкого кольца радиусом R ? Чему он равен на оси кольца на расстоянии h от его центра? Заряд кольца Q .

Задача №56.

Чему равен потенциал электрического поля в центре равномерно заряженного тонкого диска радиусом R ? Поверхностная плотность заряда диска σ .

Задача №57.

Три одинаковых точечных заряда расположены в вершинах равностороннего треугольника со стороной a . Напряжённость электрического поля в точке, находящейся посередине между двумя зарядами, по модулю равна E . Найдите потенциал электрического поля в этой точке.

3.2. Применение метода размерностей для вычисления потенциала.

Задача №58.

Тонкий ромб равномерно заряжен по поверхности. Потенциалы углов ромба относительно бесконечности оказались равны $\varphi_1 = 1,00$ В и $\varphi_2 = 1,23$ В. Найдите потенциал центра ромба относительно бесконечности.

Задача №59.

Пирамида $SABCD$ высотой H равномерно заряжена по объёму (рис. 3.25). Потенциал в точке S равен φ_0 . От этой пирамиды плоскостью, параллельной основанию, отрезают пирамиду $SA'B'C'D'$ высотой h и удаляют её на бесконечность. Найдите потенциал φ' в той точке, где находилась вершина S исходной пирамиды.

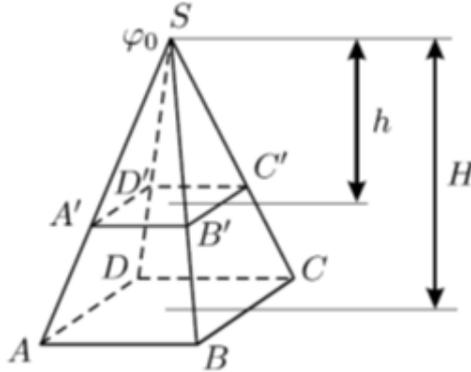


Рисунок 3.25. К условию задачи №59.

Задача №60.

Два кубика с рёбрами $3a$ и a и общим центром разбивают пространство на три области. Область внутри маленького кубика равномерно заряжена по объёму с плотностью $-\rho_1$ ($\rho_1 > 0$), пространство между поверхностями маленького и большого кубиков равномерно заряжено с объёмной плотностью $+\rho_2$ ($\rho_2 > 0$), вне большого кубика зарядов нет. Найдите отношение объёмных плотностей заряда $\frac{\rho_1}{\rho_2}$, при котором потенциал в центре кубиков будет равен нулю, как и в бесконечно удаленной точке.

3.3. Вычисление потенциала проводника в удобной для этого точке проводника.

Задача №61.

В системе, состоящей из трех concentric проводящих сфер радиусами r , $2r$ и $4r$, по внутренней сфере распределен заряд Q , по средней –

заряд $-Q$, а по внешней – снова заряд Q . Найдите потенциалы сфер, приняв потенциал в бесконечно удаленной точке равным нулю. Как изменятся заряды каждой из сфер, если внутреннюю и внешнюю сферы соединить через малое отверстие в средней сфере тонким изолированным проводом, не имеющим контакта со средней сферой? Провод и отверстие практически не влияют на распределение поля.

Задача №62.

Точечный заряд q расположен на расстоянии r от центра проводящей сферы радиусом R . Заряд сферы равен Q . Найдите потенциал сферы.

Задача №63.

Проводящая сфера радиусом R имеет заряд q . Сферу окружают концентрической сферической проводящей незаряженной оболочкой радиусом $3R$. Чему станет равен потенциал сферы, если заземлить оболочку?

Задача №64.

Проводящую незаряженную сферу радиусом R окружают концентрической сферической проводящей оболочкой радиусом $2R$, несущей заряд Q (рис. 3.26). Чему станет равен потенциал оболочки после заземления сферы?

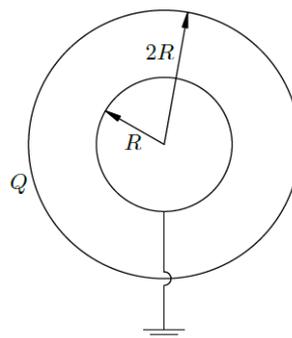


Рисунок 3.26. К условию задачи №64.

Задача №65.

Три концентрические проводящие сферы имеют радиусы R , $2R$ и $3R$. Заряд средней сферы равен q . Внутренняя и внешняя сферы не заряжены, и их на некоторое время соединяют тонкой проволокой (рис. 3.2г). Какой заряд пройдет по проволоке?

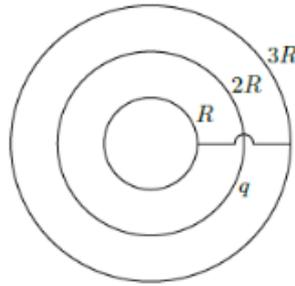


Рисунок 3.27. К условию задачи №65.

Задача №66.

Система состоит из двух концентрических проводящих сфер (внутренней радиусом R , внешней радиусом $2R$) и точечного заряда $q > 0$, который находится на расстоянии $3R$ от центра O сфер. Внешняя сфера имеет заряд $-q$. Внутреннюю незаряженную сферу заземляют.

- а) Чему равен полный заряд, индуцируемый на сфере радиусом R ?
- б) Какой заряд индуцируется на внутренней поверхности сферы радиусом R ?
- в) Какой заряд индуцируется на внутренней поверхности сферы радиусом $2R$? Как он распределится: равномерно или неравномерно?

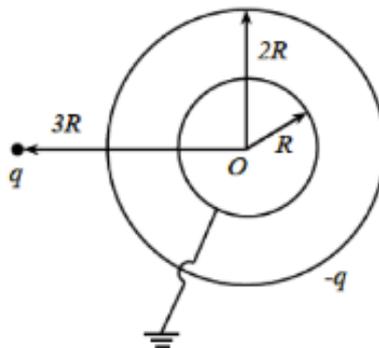


Рисунок 3.28. К условию задачи №66.

Задача №67.

Точечный заряд q расположен между двумя проводящими незаряженными сферами на расстоянии x от их общего центра. Сферы соединяют тонким проводником, не нарушающим сферическую симметрию. Найдите заряд Δq , протекший по проводнику. Радиусы сфер a и b известны.

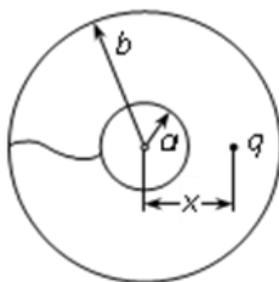


Рисунок 3.29. К условию задачи №67.

Задача №68.

Одинаковые точечные заряды q находятся на расстояниях a и b от заземленной проводящей сферы малого радиуса r , как расстояние до поверхности земли и до других заземленных предметов намного больше a и b . Найдите суммарную силу, с которой заряды действуют на сферу.

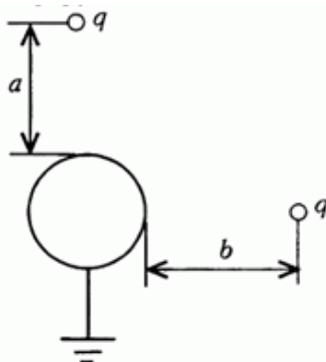


Рисунок 3.30. К условию задачи №68.

Задача №69.

В центре уединенного проводящего заряженного кольца радиусом a потенциал равен φ_0 . Это кольцо поднесли к заземленному проводящему шару радиусом b так, что только центр O кольца оказался на поверхности шара. Найдите индуцированный на шаре заряд.

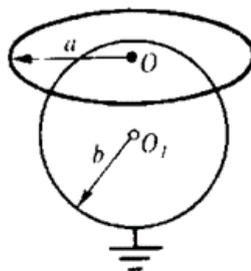


Рисунок 3.31. К условию задачи №69.

Задача №70.

Проводящий шар радиусом R имеет сферическую полость радиусом r , касающуюся наружной поверхности шара (рис. 3.32). Заряд шара равен Q . В полости, на расстоянии r_1 от её центра, находится точечный заряд q_1 . Вне шара, на расстоянии r_2 от его центра, находится точечный заряд q_2 .

а) Найдите потенциал $\varphi_{\text{ш}}$ шара.

б) Найдите потенциал φ_O в центре O полости.

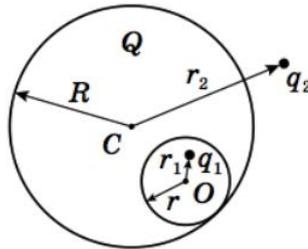


Рисунок 3.32. К условию задачи №70.

3.4. Метод электростатических изображений

Задача №71.

Точечный заряд q находится на расстоянии h от бесконечной металлической плоскости. Какая сила действует на заряд со стороны плоскости?

Задача №72.

По одну сторону от незаряженной металлической плоскости на расстоянии h от неё находятся два одинаковых точечных заряда q . Найдите модуль силы, действующей на каждый из зарядов, если расстояние между ними $2h$.

Задача №73.

Два одинаковых точечных заряда q закреплены на концах непроводящего стержня длиной R . Стержень расположен перпендикулярно проводящей незаряженной плоскости большого размера (рис. 3.33). Расстояние от плоскости до ближайшего к ней конца стержня также равно R . Найдите модуль силы F , действующей на стержень с зарядами со стороны плоскости.

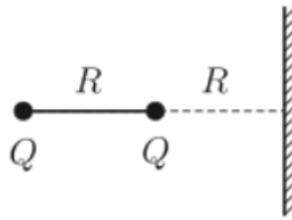


Рисунок 3.33. К условию задачи №74.

Задача №74.

Две бесконечные проводящие плоскости, пересекаясь под прямым углом, делят пространство на четыре области. В области I находится точечный заряд q на одинаковом расстоянии l от обеих плоскостей (рис. 3.34). Есть ли электрическое поле в областях II – IV? Чему равен модуль силы, которая действует на заряд q ?

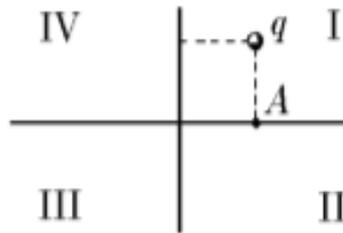


Рисунок 3.34. К условию задачи №75.

Задача №75.

В точке A , расположенной на расстоянии r от центра O незаряженной проводящей сферы радиусом R , находится точечный заряд q (рис. 3.35). Сферу заземляют длинным тонким проводником. На сколько изменится (после заземления) потенциал φ_B точки B , являющейся вершиной равностороннего треугольника ABO ?

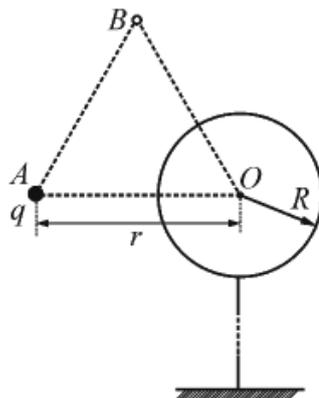


Рисунок 3.35. К условию задачи №76.

Задача №76.

На расстоянии $2R$ от центра незаряженного проводящего шара радиусом R расположен точечный заряд q (рис. 3.36). На какую величину $\Delta\varphi_A$ изменится потенциал точки A , если шар удалить на бесконечность? Точка A не принадлежит шару.

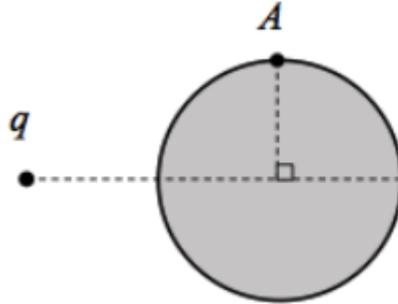


Рисунок 3.36. К условию задачи №77.

3.5. Использование линейности связи потенциалов и зарядов для системы проводящих тел.

Задача №77.

Три одинаковых проводящих шара закреплены так, что их центры образуют равносторонний треугольник со стороной, большей диаметра шара. На каждый шар нанесен одинаковый заряд Q . Когда один из шаров заземлили, его заряд стал равен $Q_1' = -\frac{Q}{4}$. Затем этот шар отсоединили от «земли», и заземлили второй шар, а потом, отсоединив от земли второй шар, заземлили третий. Чему в результате стали равны заряды второго и третьего шаров?

Задача №78.

Три небольших одинаковых незаряженных металлических шарика, находящихся в вакууме, помещены в вершинах равностороннего треугольника. Шарики поочередно по одному разу соединяют тонким проводом с удаленным проводником, потенциал которого поддерживается постоянным. В результате на первом шарике оказывается заряд Q_1 , а на втором Q_2 . Определите заряд третьего шарика.

Энергия электростатического поля.

4.1. Применение закона сохранения энергии в нерелятивистских системах.

Задача №79.

N одинаковых шарообразных капелек ртути заряжены до одного и того же потенциала φ_0 . Какой будет потенциал φ большой капли, получившейся в результате слияния этих капелек?

Задача №80.

Четыре точечных заряда q расположены вдоль одной прямой на расстоянии l друг от друга. Какую работу надо совершить, чтобы поместить их в вершинах: а) тетраэдра с ребром l ; б) квадрата со стороной l ?

Задача №81.

Для того, чтобы сложить вместе две одинаковые тонкие пластины с равными зарядами, которые были удалены друг от друга на большое расстояние, необходимо совершить работу A . Какую работу нужно совершить, чтобы сложить вместе n таких пластин?

Задача №82.

Равномерно заряженные грани правильного тетраэдра имеют одинаковый заряд. Чтобы сложить две грани тетраэдра вместе, необходимо совершить работу A . Какую работу нужно совершить, чтобы сложить все грани тетраэдра в одну стопку?

Задача №83.

Равномерно заряженный по поверхности непроводящий лист, имеющий форму прямоугольного равнобедренного треугольника, сложили вдвое. При этом была совершена работа A . Какую работу нужно совершить, чтобы еще раз так же сложить полученный треугольник?

Задача №84.

Два протона и два позитрона удерживаются в вершинах квадрата, причём одинаковые частицы находятся в противоположных вершинах. Частицы отпускают. Найдите отношение кинетических энергий протона и позитрона через достаточно большой промежуток времени. Масса протона в 2000 раз больше массы позитрона.

Задача №85.

На плоский слой толщиной H с положительным объемным зарядом плотностью ρ под углом α падают частицы с положительным зарядом q (рис. 3.37). При каких кинетических энергиях частицы смогут пролететь через заряженный слой?

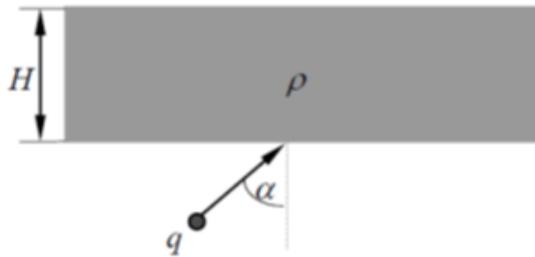


Рисунок 3.37. К условию задачи №85.

Задача №86.

Электрон, движущийся со скоростью V_1 , переходит из области поля с потенциалом φ_1 в область с потенциалом φ_2 . Под каким углом к границе раздела областей будет двигаться электрон, если он подлетел к ней под углом α ?

Задача №87.

Три одинаковых маленьких одноименно заряженных шарика, каждый с зарядом q и массой m , связаны тремя нерастяжимыми непроводящими нитями длиной l каждая. Шарика неподвижны и расположены на гладкой горизонтальной изолирующей поверхности, образуя правильный треугольник. Одна из нитей пережигается. Чему будут равны максимальные значения скоростей шариков в процессе их движения?

Задача №88.

Два небольших шарика, имеющих одинаковые массы и заряды и находящихся на одной вертикали на высотах h_1 и h_2 , одновременно бросили в одну сторону в горизонтальном направлении с одинаковыми начальными скоростями V . Первый шарик коснулся земли на расстоянии L от вертикали, с которой производилось бросание. На какой высоте H в этот момент находился второй шарик? Сопротивлением воздуха и влиянием индуцированных зарядов пренебречь.

Задача №89.

Два закрепленных одинаковых тонких металлических кольца расположены соосно на некотором расстоянии друг от друга. Кольца заряжены равными по модулю, но противоположными по знаку зарядами (рис. 3.38). Для пролета вдоль прямой, проходящей через центры колец перпендикулярно их плоскостям, заряженной частице необходима некоторая минимальная начальная скорость V_0 на большом удалении от колец. Найдите отношение максимальной скорости частицы к ее минимальной скорости во время пролета этой частицей колец, если начальная скорость частицы на большом расстоянии от колец будет в n раз больше V_0 .

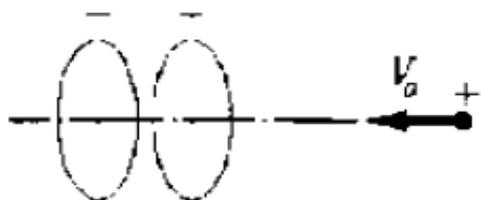


Рисунок 3.38. К условию задачи №89.

Задача №90.

Три маленьких заряженных шарика закреплены на одной прямой так, что расстояния между соседними шариками равны a (рис. 3.39). Массы шариков m , $2m$ и $5m$, их заряды q , q и $2q$ соответственно. Шарики одновременно отпускают. Найдите модули их скоростей после разлета на большие расстояния друг от друга.

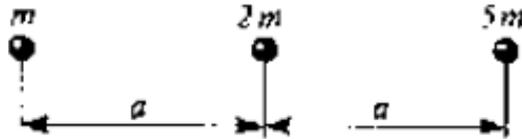


Рисунок 3.39. К условию задачи №90.

Задача №91.

На два длинных и гладких диэлектрических стержня, расположенных в горизонтальной плоскости на расстоянии a друг от друга, нанизаны две одинаковые бусинки массой m каждая, заряженные одноименными зарядами Q и q (рис. 3.40). В начальный момент одна из бусинок покоится, а другую издали запускают в ее сторону с некоторой начальной скоростью. При какой величине этой скорости она обгонит первоначально покоящуюся бусинку? Трения нет.

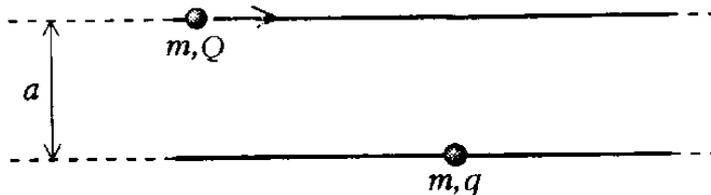


Рисунок 3.40. К условию задачи №91.

Задача №92.

Проводящий шар радиусом a с зарядом $-Q$ закреплен, и рядом с ним помещены еще два тела: небольшой шарик с зарядом $+Q$ (на расстоянии $2a$ от центра шара) по одну сторону и кольцо радиусом $4a$, центр которого расположен на расстоянии $3a$ от центра шара – по другую (рис. 3.41). Ось кольца проходит через центры шара и маленького шарика. По кольцу равномерно

распределен заряд $-2Q$. Из произвольной точки A на поверхности шара вылетает электрон с начальной скоростью V_0 . Найдите скорость электрона после удаления на очень большое расстояние от этой системы зарядов.

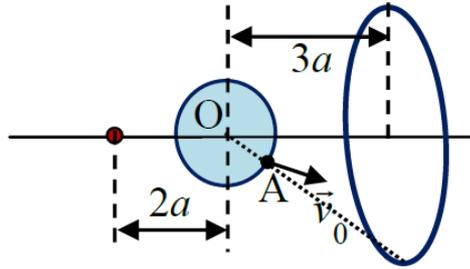


Рисунок 3.41. К условию задачи №92.

4.2. Расчет электростатических сил при помощи метода виртуальных перемещений.

Задача №93.

Тонкое кольцо радиусом R заряжено зарядом Q , равномерно распределенным по кольцу. Вдоль оси кольца расположена очень длинная нить, начинающаяся в его центре и равномерно заряженная с линейной плотностью заряда γ (рис. 3.42). Найдите модуль силы электростатического взаимодействия нити с кольцом.

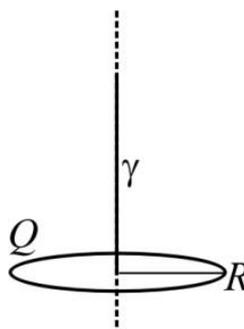


Рисунок 3.42. К условию задачи №93.

Задача №94.

В плоский конденсатор с размерами обкладок $a \times a$ и расстоянием между ними d наполовину помещают проводящую пластинку толщиной c с размерами $a \times a$, расположив ее параллельно обкладкам (рис. 3.43). Опреде-

лите, какую по модулю силу нужно приложить к пластинке для того, чтобы удержать ее на месте, в двух следующих случаях:

- а) заряды обкладок противоположны и по модулю равны Q .
- б) между обкладками поддерживается постоянное напряжение U .

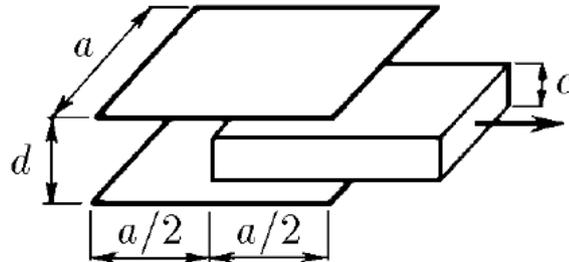


Рисунок 3.43. К условию задачи №94.

4.3. Расчет давления и потенциальной энергии электростатического поля путем нахождения плотности энергии поля.

Задача №95.

Большая тонкая проводящая пластина площадью S и толщиной d помещена в постоянное однородное электрическое поле напряженностью E , перпендикулярное пластине. Какое количество теплоты выделится в пластине, если поле выключить?

Задача №96.

В однородном электрическом поле находится незаряженный металлический шар. При выключении поля в шаре выделилось количество теплоты ΔQ . Какое количество теплоты выделилось бы в шаре втрое большего радиуса?

ВЫВОДЫ

В результате выполнения данной бакалаврской работы был разработан учебно-методический комплект, который включает в себя описание идей, приемов и методов решения нестандартных физических задач; набор специально подобранных задач, иллюстрирующих применение этих идей, приемов и методов; краткие решения указанных задач.

Было создано учебно-методическое пособие, состоящее из четырех разделов, в которых рассмотрены 18 методов решения задач повышенной сложности. Эти методы проиллюстрированы при помощи 96 задач, которые снабжены краткими решениями.

Элементы учебно-методического пособия по мере их разработки проходили апробацию на занятиях кружков и факультативов для учащихся 10-х и 11-х классов, являющихся кандидатами в сборную школьников города Москвы и готовящихся к участию в заключительном этапе всероссийской олимпиады школьников по физике.

Учебно-методическое пособие внедрено в учебный процесс государственной образовательной организации, что подтверждено справкой, выданной государственным автономным образовательным учреждением дополнительного профессионального образования города Москвы Центр педагогического мастерства (Приложение 2).

Научно-методическая ценность работы определяется тем, что в результате выполнения работы автором разработано учебно-методическое пособие особого типа, основанное на идейных подходах к решению сложных физических задач. Данная работа представляет собой развитие опыта ведущих педагогов в области методики обучения старшеклассников и студентов младших курсов решению задач повышенной сложности.

Практическая значимость работы состоит в том, что применение на практике подготовленного учебно-методического пособия может позволить повысить качество обучения старшеклассников и студентов младших курсов решению задач электростатики, а также компетентность педагогов. Результаты работы могут быть использованы при проведении учебных занятий для подготовки обучающихся к участию в олимпиадах высокого уровня по физике, при организации курсов повышения квалификации, кружковых и факультативных занятий. Идея создания учебно-методического комплекта, построенного на классификации математических и физических идей и методов, применяемых при решении задач, в настоящее время является новой и перспективной. Структура и состав созданного учебно-методического пособия разработаны автором самостоятельно. Этим определяется новизна работы.

В результате выполнения работы получены следующие основные результаты и сделаны следующие выводы.

1) Выявлена проблема нехватки учебно-методических пособий, основанных на систематизации физических и математических идей, применяемых для решения задач и предназначенных для обучения школьников и студентов решению физических задач повышенной сложности. Соответственно, выявлен общественный запрос со стороны педагогического сообщества и обучающихся на создание подобных учебно-методических пособий.

2) Разработан учебно-методический комплект для обучения решению задач электростатики при подготовке обучающихся к олимпиадам по физике.

3) Создано учебно-методическое пособие «Методы решения задач электростатики при подготовке обучающихся к олимпиадам по физике», включающее в себя рассмотрение 18 методов, которые иллюстрируются при помощи 96 задач.

4) Проведены апробация и внедрение созданного учебно-методического комплекта в учебный процесс, в ходе которых получены свидетельства его прикладной значимости и эффективности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Созданный учебно-методический комплект может быть востребован преподавателями физики в общеобразовательных учреждениях, в учреждениях дополнительного профессионального и высшего образования, а также может быть использован обучающимися при самостоятельном изучении раздела «Электростатика» курса общей физики.

Работа над совершенствованием уже созданных и над созданием новых учебно-методических комплектов, основанных на систематизации физических и математических идей, применяемых для решения задач и предназначенных для обучения школьников и студентов решению физических задач повышенной сложности, имеет перспективы продолжения путем включения в рассмотрение ряда других разделов курса общей физики.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю доценту кафедры общей физики физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова Якуте Алексею Александровичу за всеобъемлющую профессиональную поддержку на всех этапах работы: от выбора темы до финального этапа, на котором было создано учебно-методическое пособие по электростатике.

Автор также благодарен администрации государственного бюджетного образовательного учреждения города Москвы «Школа №1329» и заведующему кафедрой физики этой школы Лукьянову Илье Владимировичу за организацию кружков и элективных курсов, в ходе преподавания на которых автор апробировал методику обучения школьников применению методов решения задач, изложенных в данной работе.

Отдельную благодарность автор выражает руководству государственного автономного образовательного учреждения дополнительного профессионального образования города Москвы Центр педагогического мастерства за предоставленную возможность апробации учебно-методического комплекта при работе со сборной школьников города Москвы по физике.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Кодификатор элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников образовательных организаций для проведения единого государственного экзамена по физике // Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Федеральный институт педагогических измерений», 2017.
2. Физика. Задачник-практикум для поступающих в вузы: учебно-методическое пособие / В.А. Макаров, С.С. Чесноков. — М.: Лаборатория знаний, 2016. — 363 с. : ил. — (ВМК МГУ — школе).
3. Буханов В.М., Васильева О.Н., Жукарев А.С., Лукашева Е.В., Русаков В.С. Электричество и магнетизм. Разработка семинарских занятий. (Университетский курс общей физики) / Уч. пособие. — М.: Физический факультет МГУ, 2015. — 776 с.
4. Задачи Московских городских олимпиад по физике. 1986–2005. Приложение: олимпиады 2006 и 2007: Под ред. М. В. Семёнова, А. А. Якуты — 2-е изд., испр. и доп. — М.: МЦНМО, 2007. — 696 с.
5. Григорьев Ю.М., Муравьев В.М., Потапов В.Ф. Олимпиадные задачи по физике. Международная олимпиада «Туймаада»: Под ред. Селюка Б.В. — М.: Изд.-во МЦНМО, 2007. — 160 с.
6. Всероссийские олимпиады по физике. 1992–2001: Под ред. С.М. Козела, В.П. Слободянина. // М.: «Вербум–М», 2002.
7. Бутиков Е.И., Быков А.А., Кондратьев А.С. Физика в примерах и задачах // М.: Наука, 1989. — 464 с.

8. Жукарев А.С., Матвеев А.Н., Петерсон В.К. Задачи повышенной сложности в курсе общей физики: Учебное пособие. 2-е изд., испр. / Под общей ред. А.Н. Матвеева. — М.: Эдиториал УРСС, 2001. — 192 с.

9. <http://vos.olimpiada.ru> (электронное средство массовой информации).

10. Семенов М.В., Старокуров Ю.В., Якута А.А. Методические рекомендации по подготовке учащихся к участию в олимпиадах высокого уровня по физике. — М.: Физический ф-т МГУ, 2007. — 60 с.

11. Вишнякова Е.А., Зинковский В.И., Макаров В.А., Семёнов М.В., Черепецкая Е.Б., Чесноков С.С., Якута А.А. Новые учебные пособия для подготовки школьников к олимпиадам по физике и дополнительным профильным вступительным испытаниям в МГУ имени М.В. Ломоносова. // Научная конференция «Ломоносовские чтения — 2011». Секция физики: Сб. тез. докл. — Москва, 2011. — С. 175–178.

12. Балаш В.А. Задачи по физике и методы их решения. Изд. 3-е, перераб. и испр. Пособие для учителей. — М., «Просвещение», 1974.

13. Каменецкий С.Е., Орехов В.П. Методика решения задач по физике в средней школе. Пособие для учителей. — М., «Просвещение», 1971.

14. Беликов Б.С. Решение задач по физике. Общие методы: Учеб. пособие для студентов вузов. — М.: Высш. шк., 1986. — 256 с.: ил.

15. Вишнякова Е.А., Макаров В.А., Семенов М.В., Черепецкая Е.Б., Чесноков С.С., Якута А.А. Отличник ЕГЭ. Физика. Решение сложных задач. / Под ред. В.А. Макарова, М.В. Семёнова, А.А. Якуты; ФИПИ. — М.: Интеллект-Центр, 2010. — 368 с.

16. Подлесный Д.В. Методика подготовки и проведения физических олимпиад в основной школе России: диссертация на соискание ученой степени кандидата педагогических наук: 13.00.02. — М., 2001. — 233 с.

17. Е.И. Бутиков, А.С. Кондратьев. Физика для углублённого изучения. Кн.2: Электродинамика. Оптика. М.: Физматлит, 2004. — 336 с.
18. Грачев А.В., Погожев В.А., Боков П.Ю., Салецкий А.М.: Физика. 10 класс. Учебник. Базовый и профильный уровень. ФГОС. Вентана-Граф, 2017. — 464 с.
19. И.М. Гельфгат, Л.Э. Генденштейн, Л.А. Кирик 1001 задача по физике с решениями // ИЛЕКСА, Москва, 2017.
20. Н. В. Турчина, Л.И. Рудакова, О.И. Суров и др. Физика: 3800 задач для школьников и поступающих в вузы // М.: Дрофа, 2000.
21. <http://www.physolymp.ru/p> (официальный Интернет-портал всероссийской олимпиады школьников).
22. Зильберман А. Р. Школьные физические олимпиады. — М.: МЦНМО, 2009.
23. Баткин. В.И., Башкатов Ю.Л., Лежнин С.И., Савченко О.Я. Физика в задачах: учеб. пособие / Под ред. О.Я. Савченко. Новосибирск: НГУ, 2013.
24. Электростатика. Сборник задач для физико-математических классов. / Екатеринбург: СУНЦ УрФУ, 2017.
25. Паринов Д.А. Методы решения задач повышенной сложности школьного курса механики / Магистерская диссертация. – Москва: физический факультет МГУ, 2017.

Решения задач, включенных в пособие
«Методы решения задач электростатики при подготовке обучающихся
к олимпиадам по физике».

СИЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

1.1. Рассмотрение устойчивости положения зарядов.

Задача №1.

Нарисуем треугольник сил, действующих на один из зарядов (рис. 3.44). Сила Кулона, действующая со стороны второго заряда, направлена горизонтально, сила тяжести – вертикально, сила реакции опоры направлена под углом 45° к горизонтали, т.к. она перпендикулярна спице.

Таким образом, треугольник сил прямоугольный и равнобедренный, т.е. по модулю силы тяжести и Кулона равны друг другу $\frac{kQ^2}{x^2} = mg$ (здесь и далее для сокращения записи часто используется общепринятое обозначение $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, если это не приводит к недоразумениям или неудобствам). Отсюда

$$x = Q\sqrt{\frac{k}{mg}}.$$

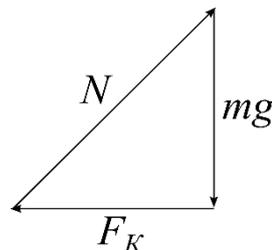


Рисунок 3.44. К решению задачи №1.

Задача №2.

Пусть сторона треугольника ABC равна l . Заметим, что тогда равнодействующая сил, приложенных к заряду q_1 , равна по модулю $F_1 = \frac{kqq_1}{l^2}$ и коллинеарна вектору \overline{AB} .

Поэтому очевидно, что третий заряд необходимо поместить в точку D равностороннего треугольника DBC (D не совпадает с A) (рис. 3.45).

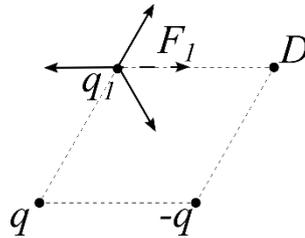


Рисунок 3.45. К решению задачи №2.

Задача №3.

Пронумеруем заряды: пусть заряд q – первый, $0,4q$ – второй и т.д.

Заметим, что величина каждого следующего заряда задается с помощью его порядкового номера n следующим образом:

$$q_n = q \frac{n^2}{10^{n-1}}.$$

Запишем выражение для модуля силы, действующей на заряд Q :

$$F = \frac{kQq}{a^2} + \frac{0,4kQq}{(2a)^2} + \frac{0,09kQq}{(3a)^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{kQq \left(\frac{n^2}{10^{n-1}} \right)}{a^2 n^2} = \frac{kQq}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n-1}} = \frac{10kQq}{9a^2}.$$

Задача №4.

Учитывая, что сумма сил, действующих на первый заряд, равна нулю, запишем выражение для силы T :

$$T = \sum_{n=2}^N \frac{kq \frac{q}{2^{n-1}}}{((n-1)a)^2} = \frac{kq^2}{a^2} \sum_{n=2}^N \frac{1}{2^{n-1}(n-1)^2}.$$

Учитывая, что сумма сил, действующих на второй заряд, равна нулю, запишем выражение для силы T_{23} :

$$\begin{aligned} T_{23} &= T - \frac{kq \frac{q}{2}}{a^2} + \sum_{n=3}^N \frac{k \frac{q}{2} \frac{q}{2^{n-1}}}{((n-2)a)^2} = \\ &= T - \frac{kq^2}{2a^2} + \frac{kq^2}{4a^2} \sum_{n=2}^{N-1} \frac{1}{2^{n-1}(n-1)^2} = \\ &= \frac{5}{4}T - \frac{kq^2}{2a^2} - \frac{kq^2}{4a^2} \frac{1}{2^{N-1}(N-1)^2}. \end{aligned}$$

Заметим, что при $N = 2018$ последним слагаемым можно пренебречь, поэтому:

$$T_{23} \approx \frac{5}{4}T - \frac{kq^2}{2a^2}.$$

Задача №5.

Шарики лежат в горизонтальной плоскости, причем в вершинах равностороннего треугольника. Результирующая сила отталкивания, действующая на каждый из шариков, направлена горизонтально вдоль оси симметрии этого треугольника и равна по модулю:

$$F = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{kq^2}{a^2} = \sqrt{3} \frac{kq^2}{a^2}.$$

Заметим, что на каждый из шариков действует горизонтальная сила \vec{F} , вертикальная сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити \vec{T} . Эти силы составляют треугольник сил, из которого можно выразить угол наклона к вертикали силы натяжения нити, а, значит, и угол α между вертикалью и нитью:

$$\sin \alpha = \frac{F}{\sqrt{F^2 + (mg)^2}}.$$

С другой стороны, угол α можно выразить из геометрических соображений:

$$\sin \alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}a}{l}.$$

Таким образом,

$$\frac{F}{\sqrt{F^2 + (mg)^2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}a}{l},$$

откуда

$$F = mg \frac{\frac{a}{\sqrt{3}l}}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{3l^2}}}$$

и искомая величина заряда шарика:

$$q = a \sqrt{\frac{mga}{3kl\sqrt{1 - \frac{a^2}{3l^2}}}} \approx 1,2 \text{ нКл.}$$

Задача №6.

Введем горизонтальную ось Ox , направленную вдоль AC , и вертикальную ось Oy , направленную вдоль AB .

Рассмотрим систему, состоящую из нити AC и зарядов на ее концах (после перерезания нити BC). Внешними силами для этой системы являются сила натяжения нити AB и две кулоновские силы, действующие со стороны заряда, находящегося в точке B , причем проекцию на Ox имеет только сила

Кулона, действующая на заряд, находящийся в точке C . Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось Ox для рассматриваемой системы:

$$\frac{kq^2}{l^2} \sin \alpha = 2ma_x,$$

$$a_x = \frac{kq^2}{2ml^2} \sin \alpha.$$

Рассмотрим систему, состоящую из нити AB и зарядов на ее концах (также после перерезания нити BC). Аналогично предыдущему случаю, запишем второй закон Ньютона в проекции на ось Oy для этой системы:

$$\frac{kq^2}{l^2} \cos \alpha = 2ma_y,$$

$$a_y = \frac{kq^2}{2ml^2} \cos \alpha.$$

Заметим, что в обе рассмотренные системы входит заряд, находящийся в точке A , т.е. a_x и a_y – это проекции полного ускорения заряда на Ox и Oy . Значит:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{kq^2}{2ml^2}.$$

Это ускорение направлено под углом α к оси Oy .

Задача №7.

Шарик может улететь с оси Ox только в том случае, если его положение равновесия не является устойчивым. Рассмотрим случай, когда положение шарика перестает быть устойчивым, т.е. при малом поперечном отклонении не возникает результирующей возвращающей силы. Пусть шарик отклонился от оси Ox в поперечном направлении на небольшое расстояние Δy , угол отклонения от этой оси относительно заряда q_1 равен α , а угол откло-

нения от той же оси относительно заряда q_2 равен β . Учитывая малость этих углов, выразим их через Δy :

$$\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{(2/3)l}, \quad \beta \approx \operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{(1/3)l}, \quad \text{т.е.} \quad \beta = 2\alpha.$$

Учитывая, что мы рассматриваем случай, когда равновесие только что перестало быть устойчивым, сумма проекций на вертикальную ось сил, действующих на шарик, при малом отклонении Δy равна нулю:

$$\frac{kqq_1}{(2l/3)^2} \sin \alpha = \frac{kqq_2}{(l/3)^2} \sin \beta$$

(заряды взяты по модулю). Отсюда искомый модуль отношения зарядов:

$$\frac{q_1}{q_2} = 4 \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = 8.$$

Задача №8.

Рассмотрим, при каком заряде нижнего шарика положение верхнего является устойчивым. Для этого рассмотрим отклонение верхнего шарика вдоль поверхности полости на малый угол α от вертикали относительно нижнего шарика. В этом случае угол отклонения верхнего шарика от вертикали относительно центра полости равен 2α (по теореме о центральном и вписанном углах). Из-за малости угла α расстояние между шариками можно считать по-прежнему равным $2R$.

Получим условие устойчивого равновесия, записав второй закон Ньютона для верхнего шарика в проекции на касательную, проведенную к поверхности полости в точке расположения верхнего шарика, учитывая малость углов отклонения:

$$\frac{kqQ}{(2R)^2} \sin \alpha > mg \sin 2\alpha,$$

$$\frac{kqQ}{(2R)^2} \alpha > mg \cdot 2\alpha,$$

$$q > \frac{8mgR^2}{kQ}.$$

Задача №9.

Введем ось Ox , проходящую через оба шарика, так, чтобы положение шарика при недеформированной пружине соответствовало началу отсчета (ось направлена в сторону отрицательно заряженного шарика).

Второй шарик приближают очень медленно, поэтому шарик на пружине квазистатически проходит бесконечно большое число положений устойчивого равновесия. Рассмотрим момент, когда положение равновесия шарика на пружине перестает быть устойчивым. Пусть деформация пружины в этот момент составляла x_0 , а расстояние между шариками было равно x_1 . Если сместить шарик на пружине из этого положения равновесия на малое расстояние Δx вдоль оси Ox , то сумма сил, действующих на этот шарик, по-прежнему должна быть равна нулю. Следовательно,

$$\begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{x_1^2} = kx_0, \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(x_1 - \Delta x)^2} = k(x_0 + \Delta x). \end{cases}$$

Подставим первое равенство во второе и преобразуем получившееся выражение:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(x_1 - \Delta x)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{x_1^2} + k\Delta x,$$

$$k\Delta x = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{(x_1 - \Delta x)^2} - \frac{1}{x_1^2} \right) \approx \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2x_1\Delta x}{x_1^4},$$

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 k}},$$

$$x_0 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 k x_1^2} = \frac{1}{2} x_1.$$

Если приблизить отрицательно заряженный шарик к шарик, закрепленному на пружинке, на еще сколь угодно малое расстояние, то положение системы перестанет быть устойчивым, и шарики окончательно притянутся друг к другу за короткое время. Таким образом, деформация пружины в момент столкновения будет равна:

$$x_{\text{кон}} = x_0 + x_1 = \frac{3}{2} x_1 = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 k}}.$$

1.2. Применение принципа суперпозиции напряженностей полей.

Задача №10.

Согласно принципу суперпозиции электрических полей, в каждой точке пространства напряженность поля будет складываться из напряженностей каждой из плоскостей. Напряженность поля бесконечной равномерно заряженной плоскости равна по модулю $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ и направлена перпендикулярно плоскости. В верхней и нижней частях пространства вектор суммы векторов напряженностей направлен горизонтально, а в правой и левой – вертикально (рис. 3.46). Из геометрических соображений получим ответ:

$$E_{\text{гор}} = 2E \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \sin \frac{\alpha}{2},$$

$$E_{\text{верт}} = 2E \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

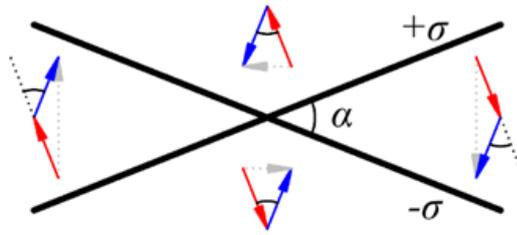


Рисунок 3.46. К решению задачи №10.

Задача №11.

Максимальный угол отклонения вектора напряженности результирующего поля от направления внешнего однородного поля необходимо искать в точках с максимальным модулем напряженности поля шарика, т.е. в точках на поверхности шарика, где $E_{\text{шарика}} = \frac{kq}{r^2}$.

Направление этого вектора напряженности поля шарика может быть любым (в зависимости от точки на поверхности шарика), поэтому максимальный угол отклонения достигается, когда угол между вектором напряженности результирующего поля и вектором напряженности поля шарика равен 90° . На векторной диаграмме конец вектора напряженности поля шарика «пробегает» по всем точкам сферы радиусом $E_{\text{шарика}}$, а максимальный угол отклонения достигается, когда вектор напряженности \vec{E}_Σ результирующего поля касается этой сферы (рис. 3.47).

Таким образом:

$$\sin \alpha = \frac{E_{\text{ш}}}{E_0} = \frac{kq}{R^2 E_0} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$q = \frac{\sqrt{3} R^2 E_0}{2k} = 2\sqrt{3} \pi \epsilon_0 R^2 E_0.$$

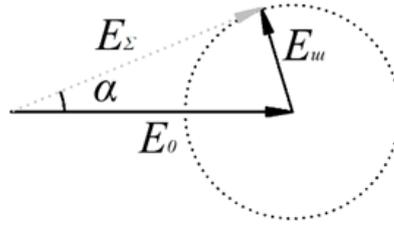


Рисунок 3.47. К решению задачи №11.

Задача №12.

Так как точка O лежит на срединных перпендикулярах каждой из палочек, то вектор \vec{E}_0 напряженности одной палочки перпендикулярен ей. Из принципа суперпозиции для напряженности поля и из соображений симметрии следует, что вектор \vec{E}_Σ – это диагональ ромба со сторонами E_0 и противолежащим углом 60° (рис. 3.48). Поэтому модуль вектора напряженности поля одной палочки равен $E_0 = E_\Sigma$.

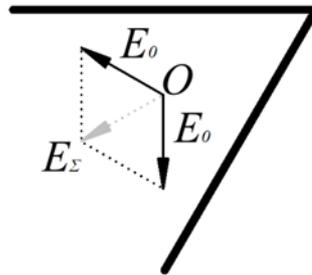


Рисунок 3.48. К решению задачи №12.

Задача №13.

Аналогично предыдущей задаче, используем принцип суперпозиции для напряженности поля. В силу симметрии модули напряженности поля всех палочек будут одинаковы. Поскольку напряженности полей от палочек AB и CD компенсируют друг друга, то модуль напряженности поля, создаваемого в точке O одной палочкой, равен $E_0 = E_\Sigma$ (рис. 3.49). Если убрать палочку AB , то напряженность поля палочки CD не будет компенсироваться, и напряженность результирующего поля будет равна $\sqrt{2}E_0 = \sqrt{2}E_\Sigma$ и направлена по биссектрисе $\angle BCD$.

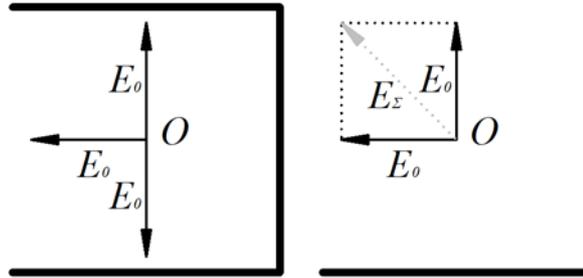


Рисунок 3.49. К решению задачи №13.

Задача №14.

Решим задачу для произвольного h , а затем найдем решение в частном случае, когда $h = 0$. Будем использовать принцип суперпозиции.

Разобьем кольцо на одинаковые маленькие участки длиной Δl с зарядом Δq . Если рассмотреть два диаметрально противоположных участка, то сумма напряженностей полей, создаваемых этими участками на расстоянии h от центра кольца, будет направлена вдоль оси кольца, т.к. по модулю напряженности поля участков одинаковы, компоненты напряженностей, параллельные оси кольца коллинеарны, а компоненты напряженностей, перпендикулярные оси кольца антиколлинеарны. Таким образом, находя напряженность результирующего поля всего кольца, как сумму напряженностей поля маленьких участков, можно сразу искать сумму компонент, параллельных оси кольца (рис. 3.50).

$$\Delta E_{\Sigma} = \frac{k\Delta q}{R^2 + h^2} \sin \alpha = \frac{kh\Delta q}{\sqrt{(R^2 + h^2)^3}},$$

$$E_{\Sigma} = \sum \Delta E_{\Sigma} = \frac{kqh}{\sqrt{(R^2 + h^2)^3}}$$

При $h = 0$ получаем $E_{\Sigma} = 0$, что очевидно из соображений симметрии.

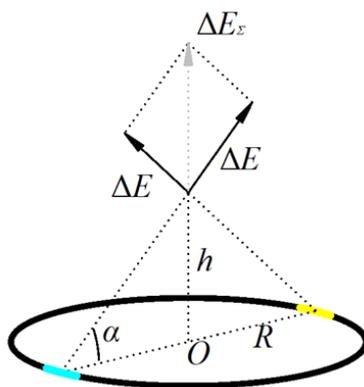


Рисунок 3.50. К решению задачи №14.

Задача №15.

Разобьем диск на тонкие кольца толщиной Δr . Рассмотрим одно из таких колец радиусом $r < R$ и воспользуемся результатом предыдущей задачи:

$$\Delta E = \frac{kh\Delta q}{(h^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{h\sigma \cdot 2\pi r\Delta r}{(h^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma h}{2\epsilon_0} \cdot \frac{h \operatorname{ctg} \alpha \cdot \left(-\frac{h}{\sin^2 \alpha} \Delta \alpha\right)}{(h^2 + h^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha)^{3/2}} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cos \alpha \Delta \alpha.$$

Напряженность поля диска на его оси симметрии является суперпозицией напряженностей полей колец, на которые мы разбили диск.

$$E = \sum_i \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (-\cos \alpha_i \Delta \alpha_i) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sum_i \Delta \sin \alpha_i = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}}\right).$$

Заметим, что в пределе при $h \rightarrow 0$ получается выражение для модуля напряженности поля бесконечной заряженной плоскости $E_{\text{плоск}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$.

Задача №16.

Бесконечную плоскость с круглым отверстием можно рассматривать, как суперпозицию плоскости без отверстия с поверхностной плотностью заряда σ и диска с поверхностной плотностью заряда $-\sigma$. Тогда и напряженность поля во всех точках пространства можно рассматривать, как суперпозицию напряженностей полей таких плоскости и диска. Для напряженности

поля на оси отверстия (и, соответственно, диска) воспользуемся результатом одной из предыдущих задач. Тогда

$$E = E_{\text{плоск}} + E_{\text{диск}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}}\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}}.$$

Задача №17.

Из соображений симметрии следует, что в точке A вектор напряженности результирующего поля будет направлен вертикально, т.к. вертикальные компоненты векторов напряженностей полей пластин коллинеарны, а горизонтальные антиколлинеарны.

Используем принцип суперпозиции напряженностей полей. Заметим, что система «занимает четверть пространства» для наблюдателя, находящегося в точке A . Таким образом, если добавить еще три таких же пары прямоугольных пластин, мы получим две параллельные равномерно и противоположно заряженные плоскости, напряженность поля между которыми направлена вертикально и равна в точке A :

$$E_{\Sigma} = 2 \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Но рассматриваемая система – лишь четверть от двух таких параллельных плоскостей, поэтому

$$E_A = \frac{1}{4} E_{\Sigma} = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}.$$

Задача №18.

а) Если «удвоить» каждую из полос, построив ее до бесконечной полосы, то из точки M будут видны две почти бесконечные плоскости, напряженность результирующего поля которых будет равна нулю. Если бы вектор напряженности результирующего поля исходных полос имел в точке M вертикальную компоненту, то из соображений симметрии следует, что

вектор напряженности результирующего поля «удвоенных» пластин имел бы вертикальную компоненту, т.е. указанная результирующая напряженность не была бы равна нулю. Также из соображений симметрии следует, что вектор напряженности результирующего поля исходной системы направлен перпендикулярно границам пластин.

Таким образом, вектор напряженности результирующего поля направлен горизонтально, перпендикулярно границам пластин.

б) Изобразим вертикальный разрез системы плоскостью ее симметрии, проходящей через точку M . Проведем два близких луча MA_1A_2 и MB_1B_2 (рис. 3.51). Заметим, что очень узкая полоска шириной A_1B_1 эквивалентна нити с линейной плотностью заряда $\lambda_1 = \sigma \cdot A_1B_1$, находящейся на расстоянии $r_1 = MA_1$ от точки M . Напряженность поля ΔE_1 , создаваемая в точке M этой нитью, направлена по линии A_1M и равна:

$$\Delta E_1 = \frac{2k\lambda_1}{r_1} = \frac{2k\sigma \cdot A_1B_1}{MA_1}.$$

Аналогичен вклад нижней полоски A_2B_2 :

$$\Delta E_2 = \frac{2k\lambda_2}{r_2} = \frac{2k\sigma \cdot A_2B_2}{MA_2}.$$

Из подобия ΔMA_1B_1 и ΔMA_2B_2 следует, что напряженности полей двух соответствующих нитей взаимно компенсируются.

Не компенсируется вклад в напряженность результирующего поля только одной полоски P_1Q , не имеющей «пары» на нижней пластине:

$$E_\Sigma = \frac{2k\sigma \cdot P_1Q}{P_1M} \approx \frac{2k\sigma d}{h} = \frac{\sigma d}{2\pi\epsilon_0 h}.$$

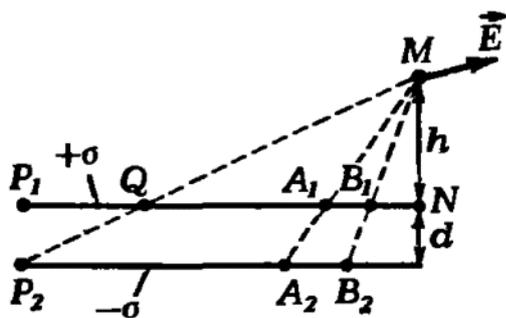


Рисунок 3.51. К решению задачи №18.

Задача №19.

Очевидно, что в каждой точке пространства поле будет направлено вертикально, поэтому введем вертикальную ось Oz , направленную вниз, так, чтобы начало координат находилось на границе раздела пластин.

Рассмотрим очень тонкий слой толщиной Δz . Поверхностная плотность заряда в этом слое $\sigma = \frac{q}{S} = \frac{\rho V}{S} = \rho \Delta z$, где S – площадь поверхности слоя, V – объем слоя. Очень тонкий слой можно рассматривать, как бесконечную плоскость, т.е. этот слой вносит вклад в напряженность поля, равный $\Delta E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\rho \Delta z}{2\epsilon_0}$. Напряженность поля от слоя конечной толщины d будет складываться из напряженностей слоев толщиной Δz .

Заметим, что вне пластин (при $z < -h$ и при $z > h$) напряженность поля будет равна нулю, т.к. каждая из пластин создает вне себя поле, модуль напряженности которого равен $E_{вне} = \frac{\rho h}{2\epsilon_0}$, но, в силу противоположных знаков зарядов, эти векторы напряженностей антиколлинеарны, и их сумма равна нулю.

Для модуля напряженности поля в точках с координатами $-h \leq z < 0$ можно записать следующее выражение:

$$E(z) = \frac{\rho(z+h)}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho z}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho h}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho(z+h)}{\varepsilon_0}.$$

Для напряженности поля в точках с координатами $0 \leq z \leq h$ можно записать следующее выражение:

$$E(z) = \frac{\rho h}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho z}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho(h-z)}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho(h-z)}{\varepsilon_0}.$$

Максимальный модуль напряженности электрического поля достигается при $z = 0$ – он равен $E_{\max} = \frac{\rho h}{\varepsilon_0}$.

Задача №20.

Разобьем шар на большое количество концентрических сферических слоев малой толщиной ΔR . Каждая такая сфера создает поле снаружи и не создает поля внутри себя, поэтому на расстоянии r от центра шара нас будут интересовать вклады в напряженность поля только от сферических слоев, находящихся внутри сферы радиусом r .

Напряженность поля одной сферы снаружи от нее равна $\Delta E = \frac{k\Delta q}{r^2}$, где Δq – заряд сферического слоя. Таким образом, напряженность на расстоянии $r < R$ от центра шара будет равна:

$$E(r) = \sum \Delta E = \sum \frac{k\Delta q}{r^2} = \frac{kq(r)}{r^2} = \frac{k\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{r^2} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}.$$

Когда $r > R$, тот же метод вычисления даст

$$E(r) = \frac{kq}{r^2} = \frac{k\rho \frac{4}{3}\pi R^3}{r^2} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}.$$

Задача №21.

Добавим к рассматриваемой полусфере вторую такую же, построив исходную полусферу до полной сферы. Напряженность поля внутри получившейся сферы \vec{E}_0 равна нулю во всех точках, в том числе и в точках, лежащих на границе раздела полусфер. С другой стороны, эта напряженность является суперпозицией напряженностей полей исходной и добавленной полусфер:

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_{\text{исх}} + \vec{E}_{\text{доб}} = 0$$

или

$$\vec{E}_{\text{исх}} = -\vec{E}_{\text{доб}}.$$

Поскольку полусферы одинаковые, то это возможно только в том случае, если оба вектора напряженности перпендикулярны плоскости, делящей сферу пополам.

Задача №22.

Пусть для определенности исходная полусфера заряжена положительно. Дополним полусферу до равномерно заряженной сферы. Внутри этой сферы напряженность поля во всех точках равна нулю. Очевидно, что построенная нами правая полусфера создает в точке A напряженность поля $-E_{\text{полусф}}$, направленную влево, а, значит, исходная полусфера создает в этой точке напряженность поля $E_{\text{полусф}}$, направленную вправо. Левый сектор исходной полусферы создает напряженность поля E_A , направленную вправо, правый – создает напряженность поля $E_{A'}$, направленную влево. Таким образом:

$$E_A - E_{A'} = E_{\text{полусф}} > 0,$$

то есть

$$E_A > E_{A'}.$$

1.3. Вычисление напряженностей поля равномерно заряженных отрезков.

Задача №23.

Рассмотрим маленький участок отрезка длиной Δl . Пусть α – угол между высотой h и направлением на Δl из точки C , $\Delta\alpha$ – угол, под которым виден Δl из точки C , r – расстояние от точки C до Δl (рис. 3.52).

Напряженность поля, создаваемая этим маленьким участком в точке C , равна по модулю:

$$\Delta E = \frac{k\Delta q}{r^2} = \frac{k\lambda\Delta r}{r^2 \cos\alpha} = \frac{k\lambda r\Delta\alpha}{r^2 \cos\alpha} = \frac{k\lambda\Delta\alpha}{h} = \frac{k\lambda\Delta x}{h^2},$$

где Δx – длина дуги окружности радиусом h (отмечена синим).

Таким образом, вклад участка Δl в суммарную напряженность поля эквивалентен вкладу соответствующего элемента дуги окружности радиусом h (рис. 3.53). Значит, весь отрезок AB можно заменить на соответствующую дугу окружности с той же линейной плотностью заряда λ (отмечена синим).

Вектор суммарной напряженности поля будет лежать на оси симметрии этой дуги, т.е. на биссектрисе $\angle ACB$.

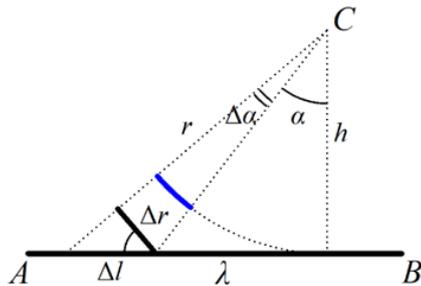


Рисунок 3.52.
К решению задачи №23.

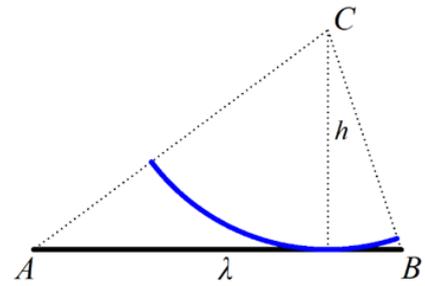


Рисунок 3.53.
К решению задачи №23.

Задача №24.

Используя результат предыдущей задачи, заменим полубесконечную прямую соответствующей четвертью окружности радиусом h , заряженной с

той же линейной плотностью заряда (рис. 3.54). В таком случае все точки дуги будут равноудалены от точки A , поэтому искомым потенциал:

$$\varphi_A = \frac{k\lambda\pi h}{2h} = \frac{\lambda}{8\epsilon_0}.$$

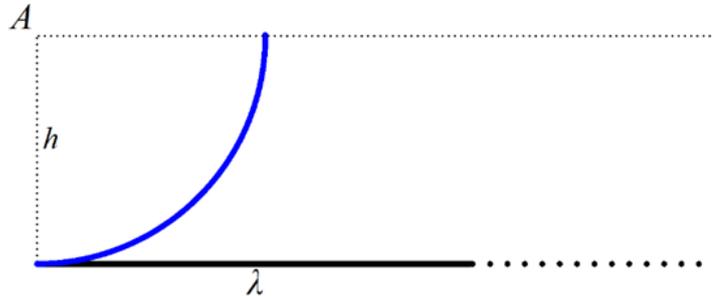


Рисунок 3.54. К решению задачи №24.

Задача №25.

Используя результат предыдущей задачи, заменим две полубесконечные прямые соответствующими четвертями окружностей. После этого построения задача сведется к поиску напряженности поля в центре однородно заряженного кольца. Как известно, напряженность в центре такого кольца равна нулю.

Задача №26.

Как известно, напряженность в центре однородно заряженного кольца равна нулю. Таким образом, задача сводится к поиску точки, для которой все три стороны треугольника будут соответствовать дугам окружности, причем так, чтобы эти три дуги составляли полную окружность (см. предыдущие задачи раздела). Искомая точка – это инцентр I (центр вписанной окружности $\triangle ABC$, рис. 3.55).

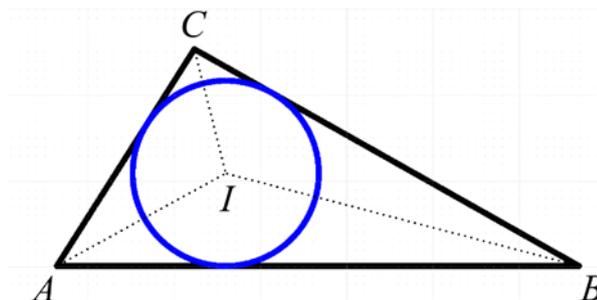


Рисунок 3.55. К решению задачи №26.

Задача №27.

Равенство сумм длин противоположных сторон четырехугольника – необходимое и достаточное условие того, что в четырехугольник можно вписать окружность. Далее задача решается аналогично предыдущей.

1.4. Вычисление нормальной компоненты напряженности поля участков равномерно заряженных плоскостей.

Задача №28.

Рассмотрим маленькую площадку площадью ΔS на рассматриваемом участке плоской поверхности. Нормальная к этой поверхности составляющая напряженности поля, создаваемого рассматриваемой площадкой, равна по модулю:

$$\Delta E_{\perp} = \frac{k\Delta q}{r^2} \cos \alpha = \frac{k\sigma\Delta S}{r^2} \cos \alpha = k\sigma\Delta\Omega,$$

где α – угол между напряженностью поля от площадки и нормалью к поверхности, r – расстояние от площадки до точки наблюдения, $\Delta\Omega$ – соответствующий площадке телесный угол. Для модуля нормальной составляющей полной напряженности получим:

$$E_{\perp} = \sum k\sigma\Delta\Omega = k\Omega\sigma.$$

Используя полученное равенство, решим поставленные задачи:

а) Рассматриваемую систему можно представить в виде наложения на одну из граней куба, заряженного всюду с поверхностной плотностью заряда $+\sigma$, дополнительной грани с поверхностной плотностью заряда $-\sigma$. Напряженность поля в центре равномерно заряженного по поверхности куба равна нулю, а дополнительная грань создает напряженность:

$$E_a = k\Omega\sigma = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (-\sigma) \frac{4\pi}{6} = -\frac{\sigma}{6\epsilon_0}$$

(соответствующий телесный угол равен $1/6$ от полного телесного угла, т.к. каждая грань куба «закрывает» наблюдателю, находящемуся в центре, $1/6$ часть пространства). Напряженность результирующего поля направлена к центру незаряженной грани.

б) Рассматриваемую систему можно представить в виде наложения на одну из граней тетраэдра, заряженного всюду с поверхностной плотностью заряда σ_1 , дополнительной грани с поверхностной плотностью заряда $\sigma_2 - \sigma_1$. Напряженность поля в центре равномерно заряженного по поверхности тетраэдра равна нулю, а дополнительная грань создает напряженность:

$$E_{\sigma} = k\Omega\sigma = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}(\sigma_2 - \sigma_1)\frac{4\pi}{4} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{4\epsilon_0}$$

(соответствующий телесный угол равен $1/4$ от полного телесного угла, т.к. каждая грань тетраэдра закрывает наблюдателю, находящемуся в центре, $1/4$ пространства). Напряженность результирующего поля направлена от центра грани, отличающейся от трех остальных.

в) Плоскость «закрывает» для наблюдателя половину пространства при нахождении в любой точке вне плоскости, т.е.:

$$E_{\sigma} = k\Omega\sigma = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sigma\frac{4\pi}{2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Поле направлено перпендикулярно плоскости, от нее.

г) Рассматриваемую систему можно представить в виде трубы с тремя гранями, всюду равномерно заряженными с поверхностной плотностью заряда σ_1 , на одну из граней которой наложена дополнительная грань с поверхностной плотностью заряда $\sigma_2 - \sigma_1$, а на другую – дополнительная грань с поверхностной плотностью заряда $\sigma_3 - \sigma_1$. Напряженность поля на оси равномерно заряженной трубы равна нулю. Напряженности, создаваемые дополнительными гранями, равны:

$$E_2 = k\Omega\sigma = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi}{3} (\sigma_2 - \sigma_1) = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{3\epsilon_0},$$

$$E_3 = k\Omega\sigma = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi}{3} (\sigma_3 - \sigma_1) = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{3\epsilon_0}.$$

Угол между этими векторами напряженностей равен 120° . По теореме косинусов определим модуль напряженности результирующего поля:

$$E = \sqrt{E_2^2 + E_3^2 - 2E_2E_3 \cos 60^\circ} = \frac{\sqrt{(\sigma_2 - \sigma_1)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - (\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1)}}{3\epsilon_0}.$$

Направление вектора напряженности результирующего поля зависит от соотношения между σ_1 , σ_2 и σ_3 .

д) Разобьем конус на диски толщиной Δh плоскостями, перпендикулярными оси конуса. Каждый из этих дисков виден из вершины конуса под одним и тем же телесным углом $\Omega = 2\pi(1 - \cos \alpha)$, зависимость которого от угла α известна из курса геометрии. Вклад в напряженность результирующего поля от каждого диска равен:

$$\Delta E_d = k\Omega\sigma = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi(1 - \cos \alpha)\rho\Delta h = \frac{\rho(1 - \cos \alpha)\Delta h}{2\epsilon_0}.$$

Таким образом, напряженность результирующего поля равна:

$$E = \sum \Delta E_d = \sum \frac{\rho(1 - \cos \alpha)\Delta h}{2\epsilon_0} = \frac{\rho(1 - \cos \alpha)h}{2\epsilon_0}.$$

Вектор напряженности направлен вдоль оси конуса.

е) Пусть h – высота бруска, опущенная из ребра, в котором находится точка наблюдения, на противоположную грань. Заметим, что для наблюдателя, находящегося на ребре, брусок «занимает» $1/6$ от всего пространства, т.е. телесный угол, под которым видно любое сечение бруска, перпендикулярное указанной высоте, равен $\Omega = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$.

Разобьем брусок на слои толщиной Δh плоскостями, перпендикулярными указанной высоте. Вклад от каждого такого слоя в напряженность результирующего поля равен:

$$\Delta E_c = k\Omega\sigma = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi}{3} \rho\Delta h = \frac{\rho\Delta h}{6\epsilon_0}.$$

Таким образом, напряженность результирующего поля равна:

$$E = \sum \Delta E_c = \sum \frac{\rho\Delta h}{6\epsilon_0} = \frac{\rho h}{6\epsilon_0} = \frac{\sqrt{3}\rho a}{12\epsilon_0}.$$

Вектор напряженности направлен вдоль высоты h .

Задача №29.

Введем прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ с началом в вершине куба так, чтобы грани, заряженные с плотностью $+\sigma$, лежали в плоскостях Oxy , Oxz и Oyz . Тогда вектор напряженности результирующего поля трех этих граней будет направлен вдоль пространственной диагонали куба, от начала координат, и будет равен:

$$E_+ = \sqrt{E_z^2 + E_y^2 + E_x^2} = \sqrt{3} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma \frac{4\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}\sigma}{6\epsilon_0}.$$

Но, в силу симметрии, вклад E_- оставшихся трех граней куба будет таким же, т.е. напряженность результирующего поля равна:

$$E = E_+ + E_- = 2E_+ = \frac{\sqrt{3}\sigma}{3\epsilon_0}.$$

Задача №30.

Искомое отношение сил равно отношению напряженностей результирующих полей в точке расположения точечного заряда.

Заметим, что в первоначальной конфигурации квадратная пластинка «занимает» для наблюдателя $\frac{1}{6}$ полного телесного угла: если добавить еще пять таких пластинок, то из них можно собрать куб, а наблюдатель окажется в его центре.

Напряженность поля, создаваемая равномерно заряженной пластинкой в точке расположения точечного заряда, равна:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma \frac{4\pi}{6} = \frac{\sigma}{6\epsilon_0}.$$

Напряженность поля во втором случае равна:

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{l^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(2l)^2}{l^2} = \frac{\sigma}{\pi\epsilon_0}.$$

Таким образом, искомое отношение модулей сил равно:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{\pi}{6}.$$

Задача №31.

Заметим, что пластина «видна» из точки O под телесным углом $\Omega = \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$, т.к. часть $OABC$ куба занимает восьмую часть полного телесного угла 4π (рис. 3.56).

Таким образом, напряженность поля в данной точке равна:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma \frac{\pi}{2} = \frac{\sigma}{8\epsilon_0}.$$

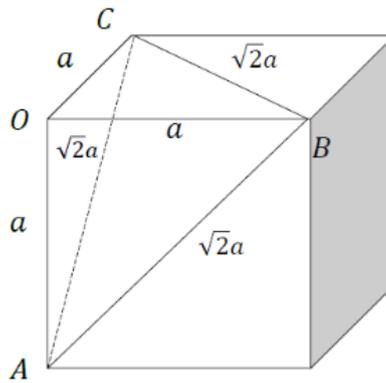


Рисунок 3.56. К решению задачи №31.

1.5. Расчет сил при помощи нахождения давления электростатического поля.

Задача №32.

Рассмотрим поле вблизи поверхности внутри и вне сферы как суперпозицию поля от вырезанного участка и от остальной части сферы. Заметим, что поле от вырезанного участка вблизи самого участка можно рассматривать как поле бесконечной равномерно заряженной плоскости (его напряженность равна $E_{\text{выр}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$), т.к. расстояние от точки наблюдения до участка намного меньше его радиуса кривизны.

Напряженность поля внутри сферы равна нулю, а снаружи около поверхности сферы она равна $E_{\text{вне}} = \frac{kq}{R^2}$. Но в рассматриваемых точках напряженность поля $E_{\text{ост}}$ от остальной части сферы практически не изменяется, а у напряженности поля вырезанного участка меняется направление:

$$E_{\text{внутри}} = E_{\text{ост}} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = 0,$$

$$E_{\text{вне}} = E_{\text{ост}} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{kq}{R^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Таким образом,

$$E_{\text{ост}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Задача №33.

Рассмотрим маленькую площадку площадью ΔS на поверхности рассматриваемой сферы. Напряженность поля, создаваемая остальной частью сферы в точках этой площадки, как было показано при решении предыдущей задачи, равна $E_{\text{ост}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. Значит, на эту площадку действует сила со стороны остальной части сферы:

$$\Delta F = E_{\text{ост}} \Delta q = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \sigma \Delta S = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \Delta S.$$

Зная, что напряженность поля остальной части сферы направлена перпендикулярно площадке, вычислим давление, создаваемое силами электрического отталкивания:

$$P = \frac{\Delta F}{\Delta S} = \sigma E_{\text{ост}} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}.$$

Это давление одинаково во всех точках поверхности сферы.

Задача №34.

Из-за явления поверхностного натяжения поверхность капли, согласно формуле Лапласа, может выдерживать разность давлений с двух сторон от ее поверхности, равную:

$$\Delta P = \frac{2\sigma}{R}.$$

Если зарядить каплю, то заряд равномерно распределится по поверхности, и на поверхность капли начнет действовать давление электростатического поля, значение которого было найдено в предыдущей задаче. Таким обра-

зом, в случае максимально возможного заряда капли вышеуказанные давления сравниваются:

$$\frac{2\sigma}{R} = \frac{\left(\frac{q}{4\pi R^2}\right)^2}{2\varepsilon_0} = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4},$$

откуда

$$q = \sqrt{64\pi^2\sigma\varepsilon_0 R^3} = 8\pi R\sqrt{\sigma\varepsilon_0 R}.$$

Задача №35.

В каждой точке полусферы напряженность поля заряда направлена вдоль радиуса и равна $E = \frac{kq}{R^2}$, а давление, оказываемое зарядом на точки полусферы, равно

$$P = \sigma E = \frac{kq\sigma}{R^2}.$$

Заметим, что из-за симметрии сила взаимодействия будет направлена вдоль оси симметрии системы, т.е. перпендикулярно плоскости, ограничивающей полусферу. Эту же силу можно рассчитать, как сумму проекций на ось симметрии сил, действующих на маленькие участки полусферы:

$$F = \sum_i \Delta F_i \cos \alpha_i = P \sum_i \Delta S_i \cos \alpha_i = P \sum_i \Delta S_{\perp} = P\pi R^2,$$

где α_i – угол между осью симметрии и радиальным направлением в рассматриваемой точке, ΔS_i – площадь рассматриваемого участка сферы, ΔS_{\perp} – проекция площади рассматриваемого участка сферы на плоскость перпендикулярную оси симметрии.

Таким образом, выразим искомую силу:

$$F = P\pi R^2 = \frac{kq\sigma}{R^2} \pi R^2 = kq\pi\sigma = \frac{q\sigma}{4\varepsilon_0}.$$

Задача №36.

а) Воспользуемся результатом предыдущей задачи. Сила, действующая на равномерно заряженную полусферу со стороны заряда, помещенного в центр сферы, равна $F = \frac{q\sigma}{4\epsilon_0}$. Согласно третьему закону Ньютона сила, действующая на заряд со стороны полусферы по модулю тоже равна F , причем $F = qE_{\text{полусферы}}$, а, значит, $E_{\text{полусферы}} = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}$.

б) Напряженность поля полусферы – это суперпозиция напряженностей полей двух половин полусферы, причем векторы напряженностей полей, создаваемых половинами полусфер, одинаковы и взаимно перпендикулярны. Значит, напряженность половины полусферы

$$E_{(1/2 \text{ полусферы})} = \frac{\sqrt{2}\sigma}{8\epsilon_0}.$$

в) Введем прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ с началом в центре сферы так, чтобы ось Oz была направлена вдоль оси симметрии полусферы, а оси Ox и Oy лежали в плоскостях, которыми полусфера делится на четыре равные части.

В силу симметрии, векторы напряженностей полей четвертой полусферы одинаковы по модулю, причем для каждого из этих векторов равны по модулю проекции на плоскость $Oxyz$. Из-за симметрии складываются только проекции указанных векторов на ось Oz , а остальные проекции сокращаются. Модуль проекции напряженности поля от четверти полусферы на любую из осей равен $E_{x,y,z} = \frac{1}{\sqrt{3}} E_{(1/4 \text{ полусферы})}$, значит:

$$E_{\text{полусферы}} = 4E_z = \frac{4}{\sqrt{3}} E_{(1/4 \text{ полусферы})}.$$

Отсюда

$$E_{(1/4 \text{ полусферы})} = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\sigma}{4\epsilon_0} = \frac{\sqrt{3}\sigma}{16\epsilon_0}.$$

Задача №37.

Представим полушарие как набор большого числа концентрических полусферических слоев толщиной Δr . Каждый из таких слоев можно рассматривать, как полусферу, равномерно заряженную по поверхности с плотностью заряда σ . Вычислим σ , записав выражение для величины заряда Δq полусферического слоя:

$$\Delta q = 2\pi r^2 \rho \Delta r = \sigma \cdot 2\pi r^2,$$

откуда

$$\sigma = \rho \Delta r.$$

Воспользуемся результатами решения предыдущих задач. Напряженность результирующего поля всего полушара – это суперпозиция напряженностей полей всех полусферических слоев:

$$E_{\text{полушара}} = \sum_i \Delta E_i = \sum_i \frac{\rho \Delta r}{4\epsilon_0} = \frac{\rho R}{4\epsilon_0}.$$

Задача №38.

Если полусферы прижаты друг к другу, то распределение напряженности поля эквивалентно распределению напряженности поля в случае неразрезанной сферы. Воспользуемся результатами предыдущих задач: на каждую точку обеих полусфер оказывается электростатическое давление $P = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$.

Значит, сила, действующая на каждую из полусфер, равна

$$F = PS_{\text{сеч}} = P\pi R^2 = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \pi R^2.$$

Задача №39.

Если части сфер прижаты друг к другу, то распределение напряженности поля эквивалентно распределению напряженности поля в случае неразрезанной сферы. Воспользуемся результатами предыдущих задач: на каждую точку обеих частей сферы оказывается электростатическое давление $P = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$.

Значит, сила, действующая на каждую из частей сферы, равна:

$$F = PS_{\text{сеч}} = P\pi(R^2 - h^2) = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \pi(R^2 - h^2) = \frac{Q^2(R^2 - h^2)}{32\pi\varepsilon_0 R^4}.$$

Для того чтобы части сферы не разлетались, нужно, чтобы давление электрических сил на каждую из поверхностей было равно нулю. Для этого необходимо, чтобы суммарная напряженность электрического поля, создаваемая вблизи каждого малого элемента поверхности внешними (для данного элемента) зарядами, была равна нулю. Ранее было показано, что часть равномерно заряженной сферы, из которой удален малый элемент, создает в месте, где находился этот элемент, поле напряженностью $E_{\text{ост}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, направленное от центра сферы. Поместим в центр сферы искомый точечный заряд q . Тогда

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = 0.$$

Отсюда следует, что нужного результата можно достичь, если поместить в центр сферы отрицательный точечный заряд, равный по модулю $Q/2$.

Задача №40.

Пусть искомая сила взаимодействия равна F . Добавим в систему еще одну так же заряженную полусферу радиусом R , дополнив ею левую полусферу до замкнутой сферы. Тогда напряженность поля внутри получившейся большой сферы равна нулю. Это означает, что силы, действующие со сторо-

ны каждой из больших полусфер на маленькую полусферу компенсируют друг друга, т.е. равны F по модулю.

Вернемся к исходной системе и добавим в нее еще одну так же заряженную маленькую полусферу, дополнив ею правую полусферу до замкнутой сферы. Тогда со стороны большой полусферы на каждую из маленьких полусфер действует направо по силе F , т.е. суммарная сила взаимодействия равна $2F$. С другой стороны, напряженность поля замкнутой сферы вне нее не отличается от напряженности поля точечного заряда. Сила взаимодействия маленькой замкнутой сферы с зарядом $2q$ и большой полусферы с зарядом Q равна:

$$2F = \frac{2q\sigma}{4\epsilon_0} = \frac{2q \frac{Q}{2\pi R^2}}{4\epsilon_0} = \frac{kqQ}{R^2},$$

откуда

$$F = \frac{kqQ}{2R^2} = \frac{qQ}{8\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Отметим, что полученный результат остается справедливым и в случае, если полусферы повернуты друг относительно друга на произвольный угол вокруг оси, проходящей через центр сфер перпендикулярно плоскости рисунка (это доказывается при помощи аналогичных рассуждений).

1.6. Применение метода суперпозиции зарядов.

Задача №41.

Представим данную систему как результат наложения на бесконечную пластину толщиной h с плотностью заряда ρ шара диаметром h с плотностью заряда $-\rho$. Тогда, благодаря аддитивности электрического заряда, в точках, расположенных внутри шара, результирующая плотность заряда будет равна нулю, т.е. получится полость.

Используя принцип суперпозиции напряженностей полей, найдем напряженности в точках A и B как сумму напряженностей полей шара и слоя, значения которых по отдельности известны из решений предыдущих задач:

$$E_A = E_{A\text{шара}} + E_{A\text{пластины}} = \frac{-\rho \frac{h}{2}}{3\epsilon_0} + 0 = -\frac{\rho h}{6\epsilon_0}.$$

Знак «минус» свидетельствует о том, что вектор напряженности поля направлен к центру полости.

$$E_B = E_{B\text{шара}} + E_{B\text{пластины}} = \frac{-\rho \frac{h}{2}}{3\epsilon_0} + \frac{\rho h}{2\epsilon_0} = \frac{\rho h}{3\epsilon_0}.$$

вектор напряженности поля направлен от центра полости.

Задача №42.

Представим систему как результат наложения на большой шар радиусом R и плотностью заряда ρ шара радиусом r и плотностью заряда $-\rho$. Тогда, благодаря аддитивности электрического заряда, в точках, расположенных внутри маленького шара результирующая плотность заряда будет равна нулю, т.е. получится полость.

Рассмотрим произвольную точку внутри полости. Пусть \vec{r}_1 – ее радиус-вектор, проведенный из центра большого шара, а \vec{r}_2 – ее радиус-вектор, проведенный из центра полости.

Используя принцип суперпозиции напряженностей полей, вычислим напряженность поля в выбранной точке как сумму напряженностей полей большого и малого шаров (основываясь на результатах предыдущих задач):

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho \vec{r}_1}{3\epsilon_0} + \left(-\frac{\rho \vec{r}_2}{3\epsilon_0} \right) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{\rho \vec{a}}{3\epsilon_0},$$

где \vec{a} – постоянный вектор, направленный из центра шара в центр полости. Таким образом, в полости поле однородно.

Задача №43.

Благодаря аддитивности электрического заряда, в точках, расположенных в области пересечения шаров результирующая плотность заряда будет равна нулю.

Рассмотрим произвольную точку внутри этой области. Пусть \vec{r}_1 – ее радиус-вектор, проведенный из центра левого шара, а \vec{r}_2 – ее радиус-вектор, проведенный из центра правого шара.

Используя принцип суперпозиции напряженностей полей, вычислим напряженность поля в выбранной точке как сумму напряженностей полей шаров (аналогично предыдущей задаче):

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho \vec{r}_1}{3\epsilon_0} + \left(-\frac{\rho \vec{r}_2}{3\epsilon_0} \right) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{\rho \vec{l}}{3\epsilon_0},$$

где \vec{l} – постоянный вектор, направленный из центра левого шара в центр правого шара. Таким образом, в полости поле однородно.

Задача №44.

Используем результат предыдущей задачи в предельном случае, когда $l \rightarrow 0$, а $\rho l \rightarrow \text{const}$, т.е. в случае предельного перехода от двух пересекающихся шаров к сфере с поверхностной плотностью заряда, зависящей от координаты. Как было показано в предыдущих задачах, $\sigma = \rho \Delta r$, где Δr – толщина тонкого слоя в радиальном направлении. Рассмотрим зависимость толщины слоя от угла α между линией центров шаров и направлением на рассматриваемую область:

$$\Delta r(\alpha) = l \cos \alpha.$$

Таким образом, $\sigma(\alpha) = \rho l \cos \alpha$. Но, как известно из решения предыдущей задачи, напряженность поля внутри такой системы постоянна и равна

$$\vec{E} = \frac{\rho \vec{l}}{3\epsilon_0}, \text{ т.е.:}$$

$$E = \frac{\rho l}{3\epsilon_0} = \frac{\sigma(0)}{3\epsilon_0} = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0},$$

$$\sigma_0 = 3\epsilon_0 E.$$

Таким образом, искомое распределение поверхностной плотности заряда:

$$\sigma(\alpha) = 3\epsilon_0 E \cos \alpha.$$

1.7. Применение метода размерностей для вычисления напряженности поля.

Задача №45.

Из соображений симметрии следует, что вектор напряженности поля равномерно заряженного куба в его вершине будет направлен вдоль пространственной диагонали куба.

Используя метод размерностей, получим, что модуль напряженности поля пропорционален заряду куба и обратно пропорционален квадрату линейного размера куба, т.е. $E = \frac{\gamma q}{a^2} = \frac{\gamma \rho a^3}{a^2} = \gamma \rho a$, где a – длина ребра куба, γ – размерный коэффициент пропорциональности.

Напряженность поля E_0 в вершине куба складывается из напряженности поля куба с вдвое меньшими длинами ребер и напряженности E остальной части исходного куба, т.е.:

$$E_0 = \gamma \rho a = \frac{\gamma \rho a}{2} + E.$$

Отсюда

$$E = \frac{\gamma \rho a}{2} = \frac{E_0}{2}.$$

ПОТОК ВЕКТОРА НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

2.4. Вычисление нормальной компоненты силы, действующей на заряженные участки плоскости, при помощи нахождения потока сквозь рассматриваемые участки плоскости.

Задача №46.

Рассмотрим маленький участок пластины площадью ΔS . Пусть напряженность внешнего поля вблизи этого участка равна E и направлена под углом α к нормали участка. Тогда нормальная компонента силы, действующей на участок, равна:

$$\Delta F_n = E_n \Delta q = E \cos \alpha \cdot \sigma \Delta S = \sigma \Delta \Phi_{\text{внеш}}.$$

Таким образом, полная величина нормальной компоненты электростатической силы равна:

$$F_n = \sum_i (\Delta F_n)_i = \Phi_{\text{внеш}} \sigma.$$

Задача №47.

В силу симметрии задачи сила, действующая со стороны заряда на грань тетраэдра, направлена перпендикулярно грани. Воспользуемся результатом предыдущей задачи. Поток через одну грань тетраэдра вектора напряженности поля, создаваемого зарядом, рассчитаем по теореме Гаусса:

$$\Phi = 4\Phi_{\text{гр}} = \frac{q}{\epsilon_0},$$

$$\Phi_{\text{гр}} = \frac{q}{4\epsilon_0}.$$

Тогда сила, действующая со стороны заряда на грань тетраэдра, равна:

$$F = F_n = \Phi_{\text{гр}} \sigma = \frac{\sigma q}{4\epsilon_0}.$$

Задача №48.

а) В силу симметрии задачи сила, действующая на грань куба, направлена перпендикулярно грани. Воспользуемся результатом предыдущей задачи. Поток напряженности поля остальных пяти граней куба через рассматриваемую грань в силу принципа суперпозиции можно рассмотреть, как разность полного потока через рассматриваемую грань и собственного потока этой грани:

$$\Phi_{\text{внеш}} = \frac{\Phi_{\text{полн}}}{6} - \Phi_{\text{собств}}$$

Рассчитаем полный поток по теореме Гаусса:

$$\Phi_{\text{полн}} = \frac{q_{\text{ин}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \cdot 6l^2}{\epsilon_0}$$

Из очень близких к грани точек сама грань видна под телесным углом $\Omega \approx 2\pi$, поэтому нормальная к грани компонента поля вблизи грани будет равна:

$$E_n = k\Omega\sigma \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Тогда собственный поток грани и искомая сила равны:

$$\Phi_{\text{собств}} = E_n l^2 = \frac{\sigma l^2}{2\epsilon_0}$$

$$F = \Phi_{\text{внеш}} \sigma = \sigma \left(\frac{\Phi_{\text{полн}}}{6} - \Phi_{\text{собств}} \right) = \frac{\sigma^2 l^2}{2\epsilon_0}$$

Расчет для тетраэдра аналогичен:

$$F = \Phi_{\text{внеш}} \sigma = \sigma \left(\frac{\Phi_{\text{полн}}}{4} - \Phi_{\text{собств}} \right) = \sigma \left(\frac{\sigma \cdot 4 \frac{\sqrt{3}}{4} l^2}{4\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \right) = \frac{\sqrt{3}}{8} \frac{\sigma^2 l^2}{\epsilon_0}$$

2.5. Применение теоремы Гаусса для расчета напряженностей полей, создаваемых симметричными системами зарядов.

Задача №49.

а) Распределение зарядов в пространстве осесимметрично, а значит, и распределение напряженности поля тоже будет осесимметричным, т.е. напряженность поля в каждой точке пространства будет направлена радиально.

Для определения величины напряженности поля на расстоянии $r \leq R$ от оси цилиндра рассмотрим цилиндрическую гауссову поверхность, соосную исходному цилиндру. Пусть высота выделенного этой поверхностью цилиндра равна h . Запишем для выбранной поверхности теорему Гаусса:

$$\Phi = E(r) \cdot 2\pi r h = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\rho \pi r^2 h}{\epsilon_0},$$

$$E(r) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}.$$

Аналогично рассчитаем напряженность поля вне цилиндра:

$$\Phi = E(r) \cdot 2\pi r h = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\rho \pi R^2 h}{\epsilon_0},$$

$$E(r) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}.$$

б) Распределение зарядов в пространстве симметрично относительно средней плоскости пластины, а каждый тонкий слой пластины создает поле, напряженность которого перпендикулярна этому слою. Таким образом, распределение напряженности поля симметрично относительно средней

плоскости пластины, причем напряженность поля во всем пространстве перпендикулярна пластине.

Для определения величины напряженности поля на расстоянии $x \leq \frac{h}{2}$ от средней плоскости пластины рассмотрим гауссову поверхность в виде параллелепипеда, средняя плоскость которого совпадает со средней плоскостью пластины. Пусть высота этого параллелепипеда $2x$, а площадь грани, параллельной пластине, равна S . Запишем для выбранной поверхности теорему Гаусса:

$$\Phi = 2E(x) \cdot S = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{2\rho Sx}{\epsilon_0},$$

$$E(x) = \frac{\rho x}{\epsilon_0}.$$

Аналогично рассчитаем напряженность поля вне пластины:

$$\Phi = 2E(x) \cdot S = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\rho Sh}{\epsilon_0},$$

$$E(x) = \frac{\rho h}{2\epsilon_0}.$$

в) Распределение зарядов в пространстве центрально симметричное, а значит, и распределение напряженности поля тоже будет центрально симметричным, т.е. напряженность поля в каждой точке пространства будет направлена радиально.

Для определения величины напряженности поля на расстоянии $x \leq r$ от центра шарового слоя рассмотрим сферическую гауссову поверхность, концентрическую шаровому слою. Запишем для выбранной поверхности теорему Гаусса:

$$\Phi = E(x) \cdot 4\pi x^2 = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{0}{\epsilon_0},$$

$$E(x) = 0.$$

Аналогично рассчитаем напряженность поля в остальных точках. При $r \leq x \leq R$:

$$\Phi = E(x) \cdot 4\pi x^2 = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\frac{4}{3}\pi\rho(x^3 - r^3)}{\epsilon_0},$$

$$E(x) = \frac{\rho(x^3 - r^3)}{3\epsilon_0 x^2}.$$

При $x > R$:

$$\Phi = E(x) \cdot 4\pi x^2 = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\frac{4}{3}\pi\rho(R^3 - r^3)}{\epsilon_0},$$

$$E(x) = \frac{\rho(R^3 - r^3)}{3\epsilon_0 x^2}.$$

Задача №50.

а) Рассмотрим гауссову поверхность в виде тонкого шарового слоя радиусом r и толщиной $\Delta r \ll r$ внутри исходного шара. Применим для этой поверхности теорему Гаусса. Поток через поверхность слоя равен:

$$\Phi = 4\pi E_0((r + \Delta r)^2 - r^2) \approx 8\pi E_0 r \Delta r.$$

Заряд внутри слоя:

$$q_{in} \approx \rho(r) \cdot 4\pi r^2 \Delta r.$$

Поэтому

$$\frac{\rho(r) \cdot 4\pi r^2 \Delta r}{\epsilon_0} = 8\pi E_0 r \Delta r,$$

$$\rho(r) = \frac{2\varepsilon_0 E_0}{r}.$$

б) Рассмотрим гауссову поверхность в виде тонкого цилиндрического слоя высотой h , радиусом r и толщиной $\Delta r \ll r$, находящегося внутри исходного цилиндра. Аналогично предыдущему случаю, применим для этой поверхности теорему Гаусса:

$$\Phi = 2\pi h E_0 ((r + \Delta r) - r) = 2\pi h E_0 \Delta r,$$

$$q_{in} \approx \rho(r) \cdot 2\pi r h \Delta r,$$

$$\frac{\rho(r) \cdot 2\pi r h \Delta r}{\varepsilon_0} = 2\pi h E_0 \Delta r,$$

$$\rho(r) = \frac{\varepsilon_0 E_0}{r}.$$

2.6. Применение теоремы Гаусса для исследования линий напряженности электростатического поля.

Задача №51.

Заряд находится в положении устойчивого равновесия, если при любом малом отклонении заряда от положения равновесия на заряд начинает действовать возвращающая сила.

Пусть для определенности рассматриваемый заряд $q > 0$. Окружим этот заряд гауссовой поверхностью так, чтобы внутри нее не было других зарядов. Тогда по теореме Гаусса поток напряженности внешнего поля через выбранную поверхность должен быть нулевым, т.к. источники внешнего поля находятся вне поверхности. С другой стороны, заряд должен находиться в положении устойчивого равновесия, а, значит, при отклонении заряда (до гауссовой поверхности) на заряд должна действовать возвращающая сила, то есть напряженность внешнего поля должна быть направлена внутрь поверхности. Заряд можно отклонять от положения равновесия в любую сторону

внутри гауссовой поверхности, а, значит, суммарный поток напряженности внешнего поля должен быть отрицателен.

Из полученного противоречия следует утверждение теоремы Ирншоу.

Задача №52.

Заменим точечные заряды на равномерно заряженные непроводящие шарики очень малого радиуса r . Окружим все линии напряженности, выходящие из первого заряда под углами $[\alpha; \alpha + \Delta\alpha]$ к линии, соединяющей заряды, и входящие во второй заряд под углами $[\beta; \beta + \Delta\beta]$ к этой линии, гауссовой поверхностью так, чтобы поток через нее был ненулевым только на «торцах» этой поверхности (являющихся кольцами на поверхности шариков), вблизи зарядов. В силу малости радиусов шариков при расчете потока через каждый «торец» пренебрежем напряженностью поля дальнего заряда по сравнению с напряженностью поля ближнего заряда. Тогда по теореме Гаусса:

$$\Phi = \frac{0}{\varepsilon_0} = \frac{kq_2}{r^2} \cdot 2\pi r \sin \beta \cdot r \Delta\beta - \frac{kq_1}{r^2} \cdot 2\pi r \sin \alpha \cdot r \Delta\alpha,$$

$$q_1 \sin \alpha \cdot \Delta\alpha = q_2 \sin \beta \cdot \Delta\beta.$$

Просуммируем получившееся выражение:

$$\sum_i q_1 \sin \alpha_i \cdot \Delta\alpha_i = \sum_i q_2 \sin \beta_i \cdot \Delta\beta_i,$$

$$-\sum_i q_1 \cdot \Delta(\cos \alpha_i) = -\sum_i q_2 \cdot \Delta(\cos \beta_i),$$

$$q_1(1 - \cos \alpha) = q_2(1 - \cos \beta),$$

$$2q_1 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 2q_2 \sin^2 \frac{\beta}{2},$$

$$\begin{cases} \beta = 2 \arcsin \left(\sqrt{\frac{q_1}{q_2}} \sin \frac{\alpha}{2} \right), \\ \text{причем } \sqrt{\frac{q_1}{q_2}} \sin \frac{\alpha}{2} \leq 1. \end{cases}$$

Если $\sqrt{\frac{q_1}{q_2}} \sin \frac{\alpha}{2} > 1$, то это означает, что линия напряженности выходит

из положительного заряда и уходит на бесконечно большое расстояние.

ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

3.6. Применение метода суперпозиции потенциала поля.

Задача №53.

Из принципа суперпозиции для потенциала и из соображений симметрии (палочки одинаковы, точка O расположена одинаково для каждой из палочек) следует, что каждая из палочек создает в точке O одинаковый потенциал, а, значит, потенциал одной палочки $\varphi_0 = \frac{\varphi_\Sigma}{2}$.

Задача №54.

Аналогично предыдущей задаче, используем принцип суперпозиции для потенциала и находим, что $\varphi_0 = \frac{2}{3} \varphi_\Sigma$.

Задача №55.

Потенциал, создаваемый каждым из указанных маленьких участков, равен $\Delta\varphi_\Sigma = \frac{k\Delta q}{\sqrt{R^2 + h^2}}$, а потенциал результирующего поля равен

$$\varphi_\Sigma = \sum \Delta\varphi_\Sigma = \frac{kq}{\sqrt{R^2 + h^2}}.$$

При $h=0$ получаем $\varphi_\Sigma = \frac{kq}{R}$.

Задача №56.

Разобьем диск на тонкие кольца толщиной Δr . Рассмотрим одно из таких колец радиусом $r < R$ и воспользуемся результатом предыдущей задачи. Для центра диска

$$\Delta\varphi = \frac{k\Delta q}{\sqrt{r^2 + h^2}} = \frac{k\sigma \cdot 2\pi r\Delta r}{\sqrt{r^2 + h^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}} \Delta r.$$

Отсюда получаем, что:

$$\varphi = \sum_{r=0}^R \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}} \Delta r = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0} \sum_{r=0}^R \frac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}} \Delta r.$$

Задача №57.

Суперпозиция напряженностей полей двух одинаковых зарядов в середине соединяющего их отрезка равна нулю. Таким образом, E – это модуль напряженности поля, создаваемого только третьим зарядом. Вычислим величину каждого из точечных зарядов:

$$E = \frac{kq}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2} = \frac{4}{3} \frac{kq}{a^2},$$

$$q = \frac{3}{4} \frac{Ea^2}{k} = 3\pi\varepsilon_0 Ea^2.$$

Тогда потенциал электрического поля в интересующей нас точке:

$$\varphi = 2 \frac{kq}{a/2} + \frac{kq}{\sqrt{3}a/2} = \left(4 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \frac{kq}{a} = \left(3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) Ea.$$

3.7. Применение метода размерностей для вычисления потенциала.

Задача №58.

Используя метод размерностей, получим следующую зависимость потенциала от геометрических размеров ромба:

$$\varphi = \frac{\gamma q}{a} = \frac{\gamma \sigma a^2}{a} = \gamma \sigma a.$$

где a – характерный геометрический параметр ромба (например, длина стороны), γ – размерный коэффициент пропорциональности.

Заметим, что любой ромб делится своими средними линиями на четыре одинаковых вдвое меньших ромба, причем одна из вершин каждого из них – это центр исходного.

Используя принцип суперпозиции потенциалов, заметим, что потенциал в центре ромба складывается из четырех потенциалов в вершинах меньших ромбов:

$$\varphi_0 = 2 \frac{\varphi_1}{2} + 2 \frac{\varphi_2}{2} = 2,23 \text{ В.}$$

Потенциалы в вершинах четырех ромбов вдвое меньше исходных, т.к. потенциал линейно зависит от геометрических размеров плоских фигур, как было показано выше.

Задача №59.

Используя метод размерностей, получим следующую зависимость потенциала от геометрических размеров пирамиды:

$$\varphi = \frac{\gamma q}{a} = \frac{\gamma \rho a^3}{a} = \gamma \rho a^2.$$

где a – характерный геометрический параметр пирамиды (например, высота), γ – размерный коэффициент пропорциональности.

Используя принцип суперпозиции потенциалов, заметим, что потенциал в вершине исходной пирамиды $SABCD$ складывается из потенциала в последствии удаленной пирамиды $SA'B'C'D'$ и потенциала оставшейся части:

$$\varphi = \varphi' + \varphi_x.$$

Отсюда

$$\varphi_x = \varphi - \varphi' = \gamma\rho(H^2 - h^2) = \gamma\rho H^2 \left(1 - \frac{h^2}{H^2}\right) = \varphi \left(1 - \frac{h^2}{H^2}\right).$$

Задача №60.

Используя метод размерностей, получим следующую зависимость потенциала от геометрических размеров куба:

$$\varphi = \frac{\gamma q}{a} = \frac{\gamma \rho a^3}{a} = \gamma \rho a^2.$$

где a – характерный геометрический параметр куба (например, длина ребра), γ – размерный коэффициент пропорциональности.

Представим себе, что исходная система получена путем вложения в куб с плотностью заряда ρ_2 маленького куба с плотностью $-(\rho_1 + \rho_2)$. Тогда, благодаря аддитивности электрического заряда, в точках, расположенных внутри маленького куба результирующая плотность заряда будет равна:

$$\rho_a = -(\rho_1 + \rho_2) + \rho_2 = -\rho_1.$$

Используя принцип суперпозиции потенциалов, заметим, что потенциал в центре системы будет складываться из потенциалов в центрах двух таких кубов с вышеуказанными объемными плотностями заряда. Потенциал в центре системы будет равен нулю, как и потенциал на бесконечно большом расстоянии от системы, при условии:

$$\varphi_a + \varphi_{3a} = 0,$$

то есть

$$-\gamma(\rho_1 + \rho_2)a^2 + \gamma\rho_2(3a)^2 = 0,$$

откуда

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = 8.$$

3.8. Вычисление потенциала проводника в удобной для этого точке проводника.

Задача №61.

Рассчитаем потенциалы сфер (первая – внутренняя, третья – внешняя):

$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{kQ}{R} - \frac{kQ}{2R} + \frac{kQ}{4R} = \frac{3}{4} \frac{kQ}{R}, \\ \varphi_2 = \frac{kQ}{2R} - \frac{kQ}{2R} + \frac{kQ}{4R} = \frac{1}{4} \frac{kQ}{R}, \\ \varphi_3 = \frac{kQ}{4R} - \frac{kQ}{4R} + \frac{kQ}{4R} = \frac{1}{4} \frac{kQ}{R}. \end{cases}$$

После соединения первой и третьей сферы их потенциалы станут одинаковыми, причем потенциал третьей сферы не изменится – ведь перераспределение зарядов внутри системы не влияет на напряженность поля снаружи третьей сферы. Пусть с первой на третью сферу перетек заряд q . Запишем выражения для получившихся потенциалов:

$$\varphi_1 = \frac{k(Q-q)}{R} - \frac{kQ}{2R} + \frac{k(Q+q)}{4R} = \varphi_3 = \frac{1}{4} \frac{kQ}{R}.$$

Отсюда

$$q = \frac{2}{3}Q.$$

Задача №62.

Если $r > R$, то потенциал проводящей сферы равен потенциалу ее центра, который равен потенциалу точечного заряда, так как сфера не заряжена и создает в своем центре нулевой потенциал:

$$\varphi = \frac{kq}{r}.$$

Если $r < R$, то на внутренней поверхности сферы индуцируется заряд $-q$. Поэтому напряженность поля снаружи сферы создается зарядом $+q$, равномерно распределенным по внешней поверхности сферы, и поэтому потенциал сферы равен:

$$\varphi = \frac{kq}{R}.$$

Задача №63.

После заземления внешней оболочки ее потенциал станет равным нулю. Следовательно, на поверхности оболочки будет индуцирован заряд $-q$. Тогда потенциал сферы равен:

$$\varphi_{\text{сф}} = \frac{kq}{R} - \frac{kq}{3R} = \frac{2}{3} \frac{kq}{R}.$$

Задача №64.

После заземления сферы она приобретет заряд Q_1 и ее потенциал станет равным нулю:

$$\varphi_{\text{сф}} = \frac{kQ_1}{R} + \frac{kQ}{2R} = 0,$$

откуда

$$Q_1 = -\frac{Q}{2}.$$

В результате потенциал оболочки станет равен:

$$\varphi_{\text{обол}} = \frac{kQ_1}{2R} + \frac{kQ}{2R} = \frac{kQ}{4R}.$$

Задача №65.

Пусть с внутренней на внешнюю сферу по проволоке прошел заряд Δq . Запишем условие равенства потенциалов для внутренней и внешней сфер:

$$-\frac{k\Delta q}{R} + \frac{kq}{2R} + \frac{k\Delta q}{3R} = \frac{kq}{3R}.$$

Отсюда

$$\Delta q = \frac{q}{4}.$$

Задача №66.

а) Пусть q_1 – полный заряд, индуцированный на внутренней сфере после ее заземления. Найдем этот заряд, используя тот факт, что потенциал в точке O равен потенциалу внутренней сферы и равен нулю:

$$\frac{kq_1}{R} - \frac{kq}{2R} + \frac{kq}{3R} = 0,$$

откуда

$$q_1 = \frac{q}{6}$$

б) Для того, чтобы определить заряд, индуцируемый на внутренней поверхности внутренней сферы, окружим эту поверхность гауссовой поверхностью так, чтобы гауссова поверхность лежала в проводнике внутренней сферы. Напряженность поля в проводнике равна нулю, а значит и поток вектора напряженности равен нулю. Следовательно, по теореме Гаусса, и заряд на внутренней поверхности внутренней сферы равен нулю.

в) Для того, чтобы на внутренней поверхности сферы радиусом R не было индуцированного заряда, необходимо, чтобы на внешней поверхности этой сферы заряд был распределен равномерно, а значит, равномерно будет распределен и заряд на внутренней поверхности внешней сферы – ведь напряженность поля внутри слоя проводника внешней сферы отсутствует. Поскольку на внутренней сфере индуцирован полный заряд q_1 , то на внутренней поверхности внешней сферы будет индуцирован заряд:

$$-q_1 = -\frac{q}{6}.$$

Задача №67.

Пусть после соединения сфер проводником на внешнюю сферу с внутренней перетек заряд Δq . Потенциал внутренней сферы после этого:

$$\varphi_a = -\frac{k\Delta q}{a} + \frac{kq}{x} + \frac{k\Delta q}{b}.$$

Окружим внутреннюю сферу и точечный заряд гауссовой сферой так, чтобы она проходила внутри «стенок» внешней сферы, где напряженность поля равна нулю, т.к. внешняя сфера – проводник. Согласно теореме Гаусса, сумма зарядов внутри выбранной поверхности равна нулю, а это означает, что на внутренней поверхности большой сферы сконцентрировался заряд $\Delta q - q$, а на внешней поверхности – заряд q . Таким образом, потенциал внешней сферы равен:

$$\varphi_b = \frac{kq}{b},$$

причем

$$\varphi_a = -\frac{k\Delta q}{a} + \frac{kq}{x} + \frac{k\Delta q}{b} = \frac{kq}{b} = \varphi_b,$$

откуда

$$\Delta q = \frac{a}{x} \cdot \frac{b-x}{b-a} q.$$

Задача №68.

Рассчитаем потенциал в центре сферы (он равен потенциалу самой сферы и потенциалу Земли, который при решении задач такого рода принимают равным нулю):

$$\varphi_{\text{сф}} = \frac{kQ}{r} + \frac{kq}{a} + \frac{kq}{b} = 0,$$

откуда заряд Q сферы:

$$Q = -qr \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

Заряды разноименные, поэтому на сферу с их стороны действуют силы притяжения. Радиус сферы $r \ll a, b$. Поэтому можно рассматривать сферу как точечный заряд. Тогда

$$F = \sqrt{\left(\frac{kqQ}{a^2} \right)^2 + \left(\frac{kqQ}{b^2} \right)^2} = kq|Q| \sqrt{\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4}} = kq^2 r \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \sqrt{\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4}}.$$

Задача №69.

Потенциал в центре уединенного кольца, несущего заряд $q_{\text{кол}}$, равен $\varphi_0 = \frac{kq_{\text{кол}}}{a}$. Потенциал сферы равен сумме потенциалов, создаваемых зарядами сферы $q_{\text{сф}}$ и кольца. При этом данный потенциал равен нулю, т.к. сфера заземлена. Для центра сферы можно записать:

$$\frac{kq_{\text{сф}}}{b} + \frac{kq_{\text{кол}}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{kq_{\text{сф}}}{b} + \frac{\varphi_0 a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0,$$

откуда

$$q_{\text{сф}} = -\frac{4\pi\varepsilon_0\varphi_0 ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Задача №70.

а) Шар проводящий, поэтому внутри шара напряженность поля равна нулю. На внутренней поверхности полости индуцируется заряд $-q_1$, из-за чего на поверхности шара распределен заряд $Q + q_1$. Тогда потенциал в центре шара равен:

$$\varphi_{\text{ш}} = \frac{kq_2}{r_2} + \frac{k(Q + q_1)}{R}.$$

б) Для определения потенциала в центре полости рассчитаем разность потенциалов между центром шара и центром полости. В пространстве от центра шара до границы полости напряженность поля равна нулю, а значит и разность потенциалов на этом участке равна нулю. При перемещении от границы полости до центра полости к разности потенциалов добавляются два слагаемых – за счет заряда, индуцированного на поверхности полости, и заряда, находящегося в полости:

$$\varphi_{\text{ш}} - \varphi_0 = -\frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_1}{r}.$$

Отсюда

$$\varphi_0 = \frac{kq_2}{r_2} + \frac{k(Q + q_1)}{R} + \frac{kq_1}{r_1} - \frac{kq_1}{r}.$$

3.9. Метод электростатических изображений.

Задача №71.

Поскольку проводящая плоскость не заряжена и бесконечна, то ее потенциал можно считать равным нулю. Взаимодействие точечного заряда q с такой бесконечной проводящей плоскостью идентично взаимодействию этого заряда с таким же по модулю, но противоположным по знаку зарядом $-q$, расположенным зеркально симметрично относительно плоскости (то есть со своим зеркальным изображением). Это объясняется тем, что заряд и его зеркальное изображение совместно обеспечивают равенство нулю потенциала в любой точке поверхности плоскости. Поэтому электрическое поле над плоскостью, создаваемое зарядом q и его зеркальным изображением, эквивалентно полю, создаваемому зарядом q и зарядами, индуцированными на плоскости (напряженность поля в проводнике, разумеется, равна нулю). Поскольку

действующая на заряд сила Кулона определяется напряженностью электрического поля, то искомая сила равна

$$F = \frac{kq^2}{(2h)^2} = \frac{kq^2}{4h^2}.$$

Задача №72.

Для каждого из зарядов можно построить его зеркальное изображение относительно плоскости. (Легко убедиться в том, что полученная система из двух реальных и двух «фиктивных» зарядов обеспечивает равенство нулю потенциала во всех точках проводящей поверхности.) Два реальных заряда и два их изображения составляют квадрат со стороной $2h$. Каждый реальный заряд будет взаимодействовать с обоими изображениями и с другим реальным зарядом.

Рассмотрим перпендикулярную и параллельную плоскости компоненты сил взаимодействия одного из реальных зарядов со всеми остальными:

$$F_{\perp} = \frac{kq^2}{4h^2} + \frac{kq^2}{(2\sqrt{2}h)^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4 + \sqrt{2}}{16} \frac{kq^2}{h^2},$$

$$F_{\parallel} = \frac{kq^2}{4h^2} - \frac{kq^2}{(2\sqrt{2}h)^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4 - \sqrt{2}}{16} \frac{kq^2}{h^2},$$

$$F = \sqrt{F_{\perp}^2 + F_{\parallel}^2} = \frac{kq^2}{h^2} \sqrt{\left(\frac{4 + \sqrt{2}}{16}\right)^2 + \left(\frac{4 - \sqrt{2}}{16}\right)^2} = \frac{3}{8} \frac{kq^2}{h^2}.$$

Задача №73.

Для каждого из зарядов можно построить его зеркальное изображение относительно плоскости. Два реальных заряда и два их изображения будут лежать на одной прямой, располагаясь симметрично относительно проводящей плоскости. Сложим все силы, действующие со стороны изображений на реальные заряды:

$$F = \frac{kq^2}{(2R)^2} + 2 \frac{kq^2}{(3R)^2} + \frac{kq^2}{(4R)^2} = \frac{77}{144} \frac{kq^2}{R^2}.$$

Задача №74.

Электрическое поле от зарядов-изображений существует только в области I, в которой находится реальный заряд, а в остальных областях поля нет. В данном случае один реальный заряд q будет взаимодействовать с тремя своими изображениями, причем два из них будут отрицательными ($-q$), а одно – положительным. Эти четыре заряда образуют квадрат и, в силу симметрии, результирующая сила будет направлена вдоль диагонали квадрата, на которой лежит реальный заряд. В проекцию на эту диагональ:

$$F = \sqrt{2} \frac{kq^2}{(2l)^2} - \frac{kq^2}{(2\sqrt{2}l)^2} = \frac{2\sqrt{2}-1}{8} \frac{kq^2}{l^2}.$$

Задача №75.

До заземления у реального заряда было два изображения в сфере. Первое изображение (заряд $q_1 = -\frac{qR}{r}$, расположенный на расстоянии $a = \frac{R^2}{r}$ от центра сферы) вместе с реальным зарядом обеспечивало равенство нулю потенциала на поверхности сферы. Второе изображение (заряд $q_2 = \frac{qR}{r}$, расположенный в центре сферы) обеспечивало необходимое (отличное от нуля!) значение потенциала сферы. Следовательно, потенциал в точке B создавался тремя точечными зарядами.

При заземлении потенциал сферы обращается в ноль, поэтому изображение q_2 пропадает. Поэтому изменение потенциала точки B равно:

$$\Delta\varphi_B = 0 - \frac{kq_2}{r} = -\frac{kqR}{r^2}.$$

Задача №76.

В начальном состоянии заряд создавал в шаре два изображения. Первое изображение (заряд $q_1 = -\frac{qR}{2R} = -\frac{q}{2}$, расположенный на расстоянии $a = \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2}$ от центра шара) вместе с реальным зарядом обеспечивало равенство нулю потенциала на поверхности шара. Второе изображение (заряд $q_2 = \frac{qR}{2R} = \frac{q}{2}$, расположенный в центре шара) обеспечивало необходимое значение потенциала шара. После удаления шара на бесконечно большое расстояние от заряда q эти изображения пропали. Поэтому изменение потенциала точки A равно:

$$\Delta\varphi_A = 0 - \frac{kq_2}{R} - \frac{kq_1}{\sqrt{R^2 + (R/2)^2}} = -\frac{kq}{2R} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}} \right).$$

3.10. Использование линейности связи потенциалов и зарядов для системы проводящих тел.

Задача №77.

Положения шаров в пространстве и среда между ними не изменяются, а значит, при любых зарядах справедливы соотношения, следующие из линейности связи между потенциалами проводящих тел и зарядами, создающими эти потенциалы:

$$\begin{cases} \varphi_1 = k_{11}Q_1 + k_{12}Q_2 + k_{13}Q_3, \\ \varphi_2 = k_{21}Q_1 + k_{22}Q_2 + k_{23}Q_3, \\ \varphi_3 = k_{31}Q_1 + k_{32}Q_2 + k_{33}Q_3. \end{cases}$$

Из симметрии системы следует, что:

$$k_{11} = k_{22} = k_{33} = \alpha,$$

$$k_{12} = k_{21} = k_{13} = k_{31} = k_{23} = k_{32} = \beta.$$

Поэтому после первого заземления, после которого потенциал первого шара стал равным нулю, а $Q_2 = Q_3 = Q$, справедливо соотношение:

$$\varphi_1' = \alpha Q_1' + 2\beta Q = 0,$$

откуда

$$\beta = -\frac{\alpha Q_1'}{2Q}$$

(буквами со штрихами обозначены величины после заземления, число штрихов обозначает номер заземления – первое, второе или третье). После второго заземления:

$$\varphi_2'' = \beta Q_1' + \alpha Q_2'' + \beta Q = 0,$$

$$Q_2'' = \frac{Q_1'(Q + Q_1')}{2Q} = -\frac{3}{32}Q.$$

После третьего заземления:

$$\varphi_3''' = \beta Q_1' + \beta Q_2'' + \alpha Q_3''' = 0,$$

$$Q_3''' = \frac{Q_1'(Q_1' + Q_2'')}{2Q} = \frac{11}{256}Q.$$

Задача №78.

Пусть потенциал удаленного проводника равен φ , расстояние между центрами шариков x , радиус шариков r , искомый заряд третьего шарика Q_3 . Запишем выражения для потенциалов шариков после их соединения с удаленным проводником.

$$\begin{cases} \varphi = \varphi_1 = \frac{kQ_1}{r}, \\ \varphi = \varphi_2 = \frac{kQ_2}{r} + \frac{kQ_1}{x}, \\ \varphi = \varphi_3 = \frac{kQ_3}{r} + \frac{k(Q_1 + Q_2)}{x}. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \frac{Q_1}{r} = \frac{Q_2}{r} + \frac{Q_1}{x}, \\ \frac{Q_3}{r} + \frac{Q_1 + Q_2}{x} = \frac{Q_2}{r} + \frac{Q_1}{x}. \end{cases}$$

Далее получаем:

$$x = \frac{rQ_1}{Q_1 - Q_2},$$

$$Q_3 = \frac{Q_2^2}{Q_1}.$$

ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

4.4. Применение закона сохранения энергии в нерелятивистских системах.

Задача №79.

Потенциал уединенной капли радиусом r равен $\varphi_0 = \frac{kq}{r}$. Исходя из за-

кона сохранения заряда и из сохранения объема капель, запишем:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{kNq}{R}, \\ N \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi R^3. \end{cases}$$

$$\varphi_1 = \frac{kNq}{R} = \frac{kNq}{rN^{1/3}} = \varphi_0 N^{2/3}.$$

Задача №80.

Из закона изменения энергии (с учетом равенства нулю кинетической энергии в процессе перемещения зарядов):

$$A_{\text{тет}} = 6 \frac{kq^2}{l} - \left(3 \frac{kq^2}{l} + 2 \frac{kq^2}{2l} + \frac{kq^2}{3l} \right) = \frac{5}{3} \frac{kq^2}{l},$$

$$A_{\text{квал}} = \left(4 \frac{kq^2}{l} + 2 \frac{kq^2}{\sqrt{2}l} \right) - \left(3 \frac{kq^2}{l} + 2 \frac{kq^2}{2l} + \frac{kq^2}{3l} \right) = \frac{3\sqrt{2}-1}{3} \frac{kq^2}{l}.$$

Задача №81.

Рассмотрим процесс прикладывания к стопке $i+1$ -ой пластины. В этом случае к стопке пластин с общим зарядом iQ приближают пластину с зарядом Q . Работа по перемещению пластины в поле стопки пластин пропорциональна произведению этих зарядов, таким образом:

$$A_{i+1} = iA.$$

Работа по складыванию стопки из n пластин вычисляется суммированием:

$$A_n = \sum_{i=1}^{n-1} iA = \frac{n(n-1)}{2} A.$$

Задача №82.

При поочередном складывании граней тетраэдра работа совершается только против сил отталкивания складываемых граней, т.к. относительно несложных граней в силу симметрии положение складываемых граней не изменяется. Поэтому, используя результат предыдущей задачи получим:

$$A_n = \sum_{i=1}^3 iA = 6A.$$

Задача №83.

Используя метод размерностей, определим, как зависит совершаемая при складывании листа работа от характеристик системы:

$$A \sim q_1 \Delta\varphi \sim q_1 \frac{q_2}{a},$$

где q_1, q_2 – заряды складываемых тел, a – характерный геометрический параметр.

Заметим, что в обоих случаях складываются одни и те же заряды, но геометрический размер треугольников во втором случае в $\sqrt{2}$ раз меньше, чем в первом. Значит:

$$A_2 = \sqrt{2}A.$$

Задача №84.

Вначале на все частицы действуют одинаковые по модулю силы. Но массы протонов в 2000 раз превышают массы позитронов. Это означает, что ускорения позитронов будут по модулю в 2000 раз больше ускорений протонов. Поэтому позитроны быстро удалятся на очень большое расстояние, а затем протоны будут разлетаться уже только взаимодействуя друг с другом. Таким образом, при вычислении конечных скоростей позитронов протоны можно считать неподвижными.

Из закона изменения энергии:

$$4 \frac{ke^2}{a} + 2 \frac{ke^2}{\sqrt{2}a} = \frac{ke^2}{\sqrt{2}a} + 2 \frac{mV_{\text{поз}}^2}{2},$$

где a – сторона квадрата, m – масса позитрона, $V_{\text{поз}}$ – конечная скорость позитрона. Отсюда

$$W_{\text{поз}} = \frac{mV_{\text{поз}}^2}{2} = \left(4 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{ke^2}{2a}.$$

После удаления позитронов на очень большое расстояние начинают двигаться и протоны:

$$\frac{ke^2}{\sqrt{2a}} = 2 \frac{MV_{\text{пр}}^2}{2},$$

$$W_{\text{пр}} = \frac{MV_{\text{пр}}^2}{2} = \frac{ke^2}{2\sqrt{2a}}.$$

Следовательно,

$$\frac{W_{\text{поз}}}{W_{\text{пр}}} = 4\sqrt{2} + 1.$$

Задача №85.

Введем координатную ось Ox , направленную вниз (см. рисунок в условии задачи) перпендикулярно заряженному слою так, что средняя плоскость слоя соответствует $x=0$. Тогда, используя полученные ранее результаты:

$$E(x) = \begin{cases} \frac{\rho x}{\varepsilon_0}; & \text{при } |x| < \frac{H}{2}, \\ \frac{\rho H}{2\varepsilon_0}; & \text{при } |x| \geq \frac{H}{2}. \end{cases}$$

Примем потенциал на нижней границе слоя $\varphi\left(\frac{H}{2}\right) = 0$. Тогда

$$\varphi(0) = \varphi\left(\frac{H}{2}\right) + \int_0^{H/2} \frac{\rho x}{\varepsilon_0} dx = \frac{\rho H^2}{8\varepsilon_0}.$$

Запишем закон сохранения энергии для частицы, которая долетела до середины слоя:

$$W_{\text{кин0}} + q\varphi\left(\frac{H}{2}\right) = W_{\text{кин1}} + q\varphi(0).$$

Учтем, что условием пролета частицы сквозь слой является наличие у нее ненулевой проекции скорости на ось Ox при $x=0$, т.е. должно выполняться условие

$$W_{\text{кин1}} > \frac{mV_0^2 \sin^2 \alpha}{2}.$$

$$W_{\text{кин}0} = W_{\text{кин}1} + q\varphi(0) - q\varphi\left(\frac{H}{2}\right) > \frac{mV_0^2 \sin^2 \alpha}{2} + q \frac{\rho H^2}{8\epsilon_0} = W_{\text{кин}0} \sin^2 \alpha + q \frac{\rho H^2}{8\epsilon_0}.$$

Отсюда

$$W_{\text{кин}0} > \frac{q\rho H^2}{8\epsilon_0 \cos^2 \alpha}.$$

Задача №86.

Представим себе, что на границе между двумя областями есть бесконечно узкий зазор, поле в котором однородно и направлено по касательной к границе областей. (Это поле в зазоре моделирует изменение касательной составляющей напряженности поля при переходе через границу. Нормальная составляющая напряженности, согласно теореме Гаусса, меняться не может, т.к. на границе областей нет свободных зарядов). Значит, при переходе в другую область изменяться будут лишь касательные составляющие скорости электрона.

Применим для электрона закон сохранения энергии и запишем закон сохранения импульса в проекции на нормаль к границе областей:

$$\begin{cases} mV_1 \cos \alpha = mV_2 \cos \beta, \\ \frac{mV_1^2}{2} - |e|\varphi_1 = \frac{mV_2^2}{2} - |e|\varphi_2. \end{cases}$$

Заметим, что с учетом первого уравнения системы:

$$\frac{mV_1^2}{2} = \frac{m}{2} \left((V_1 \cos \alpha)^2 + (V_1 \sin \alpha)^2 \right) = \frac{m}{2} \left((V_2 \cos \beta)^2 + (V_1 \sin \alpha)^2 \right).$$

Поэтому

$$\frac{mV_1^2 \sin^2 \alpha}{2} - |e|\varphi_1 = \frac{mV_2^2 \sin^2 \beta}{2} - |e|\varphi_2,$$

$$\text{tg } \beta = \text{tg } \alpha \sqrt{1 + \frac{2|e|(\varphi_2 - \varphi_1)}{mV_1^2 \sin^2 \alpha}}.$$

Задача №87.

Максимальные скорости шариков достигаются при максимальной кинетической энергии системы, а, значит, при минимальной потенциальной энергии системы. Расстояние между двумя парами зарядов неизменно из-за нерастяжимости нитей, а между крайними зарядами расстояние достигает максимального значения (а потенциальная энергия – минимального), когда все три заряда выстраиваются вдоль одной прямой.

Из симметрии системы следует, что импульсы p двух крайних зарядов равны друг другу по модулю, а в момент, когда все заряды находятся на одной прямой, эти импульсы сонаправлены. Импульс центрального заряда в этот момент равен по модулю $2p$ и антиколлинеарен импульсам крайних зарядов в силу закона сохранения импульса.

Таким образом, можно записать закон сохранения энергии для начального и конечного состояний системы:

$$3 \frac{kq^2}{l} = 2 \frac{kq^2}{l} + \frac{kq^2}{2l} + 2 \frac{p^2}{2m} + \frac{(2p)^2}{2m},$$

$$\frac{kq^2}{2l} = 3 \frac{p^2}{m},$$

$$V_{\text{кр}} = \frac{p}{m} = q \sqrt{\frac{k}{6ml}}, \quad V_{\text{ср}} = 2V_1 = 2q \sqrt{\frac{k}{6ml}}.$$

Задача №88.

Рассмотрим движение шариков, как системы материальных точек. Силы Кулона в этой системе являются внутренними, а, значит, не влияют на ускорение центра масс системы, располагающегося посередине между зарядами. Сумма *внешних* сил, действующих на тела системы, направлена вертикально (внешние силы – только силы тяжести), а значит, центр масс движется в однородном вертикальном поле тяжести, причем начальная скорость центра масс направлена горизонтально и равна V .

Первый шарик упадет через время $t = \frac{L}{V}$ после запуска. Высота центра масс через это время станет равна:

$$H_c = \frac{h_1 + h_2}{2} - g \frac{t^2}{2} = \frac{h_1 + h_2 - g \frac{L^2}{V^2}}{2}.$$

Центр масс всегда расположен посередине между шариками. Учитывая, что вертикальная координата первого шарика в момент касания им земли равна нулю ($y_1 = 0$), получаем:

$$H = 2H_c - y_1 = 2H_c = h_1 + h_2 - g \frac{L^2}{V^2}.$$

Задача №89.

Направим ось Ox вдоль направления движения заряженной частицы и поместим начало координат посередине между кольцами. Пусть $V_{\text{нач}}$ – начальная скорость заряда, $\varphi(x)$ – потенциал, создаваемый кольцами в точке с координатой x , $V(x)$ – скорость заряда в точке с координатой x . Тогда из закона сохранения энергии:

$$\frac{mV_{\text{нач}}^2}{2} = q\varphi(x) + \frac{mV^2(x)}{2}.$$

Известно, что $V_{\text{нач}} = V_0$ – это минимальная скорость заряда, при которой он пролетает сквозь кольца. Значит, скорость заряда $V(x)$ обращается в ноль в точке с максимальным потенциалом:

$$\frac{mV_0^2}{2} = q\varphi_{\text{max}}(x).$$

Поскольку заряды колец одинаковы по модулю и противоположны по знаку, то из соображений симметрии следует, что для потенциалов колец справедливо соотношение: $\varphi_{\text{min}}(x) = -\varphi_{\text{max}}(x)$.

Рассмотрим теперь частицу, имеющую начальную скорость nV_0 . Минимальную скорость V_{\min} она имеет в точке с максимальным потенциалом $\varphi_{\max}(x)$, а максимальную скорость V_{\max} – в точке с минимальным потенциалом $\varphi_{\min}(x)$. Значит:

$$\begin{cases} \frac{m(nV_0)^2}{2} = q\varphi_{\max}(x) + \frac{mV_{\min}^2}{2} = \frac{mV_0^2}{2} + \frac{mV_{\min}^2}{2}, \\ \frac{m(nV_0)^2}{2} = q\varphi_{\min}(x) + \frac{mV_{\max}^2}{2} = -q\varphi_{\max}(x) + \frac{mV_{\max}^2}{2} = -\frac{mV_0^2}{2} + \frac{mV_{\max}^2}{2}. \end{cases}$$

Отсюда

$$\frac{V_{\min}}{V_{\max}} = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}}.$$

Задача №90.

После разлета шариков на большие расстояния их суммарная кинетическая энергия будет равна начальной энергии взаимодействия:

$$W = \frac{kq^2}{a} + \frac{2kq^2}{a} + \frac{2kq^2}{2a} = \frac{4kq^2}{a}.$$

Пронумеруем шарики слева направо и определим проекции начальных ускорений шариков на ось Ox , направив ее влево:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{\frac{kq^2}{a^2} + \frac{2kq^2}{(2a)^2}}{m} = \frac{3}{2} \frac{kq^2}{ma^2}, \\ a_2 = \frac{-\frac{kq^2}{a^2} + \frac{2kq^2}{a^2}}{2m} = \frac{1}{2} \frac{kq^2}{ma^2}, \\ a_3 = \frac{-\frac{2kq^2}{a^2} - \frac{2kq^2}{(2a)^2}}{5m} = -\frac{1}{2} \frac{kq^2}{ma^2}. \end{cases}$$

Заметим, что относительно второго шарика начальные ускорения первого и третьего шариков равны по модулю и противоположны по направлению. Это означает, что второй шарик будет всегда оставаться посередине между крайними, а отношение модулей ускорений шариков, а, значит, и модулей их скоростей, будет постоянным:

$$|a_1| : |a_2| : |a_3| = 3 : 1 : 1 = |V_1| : |V_2| : |V_3|.$$

Из закона сохранения энергии найдем меньшую скорость (второго или третьего шарика):

$$\frac{4kq^2}{a} = \frac{m(3V)^2}{2} + \frac{2mV^2}{2} + \frac{5mV^2}{2} = 8mV^2.$$

Отсюда

$$V_2 = V_3 = V = q\sqrt{\frac{k}{2ma}}, \quad V_1 = 3V = 3q\sqrt{\frac{k}{2ma}}.$$

Задача №91.

Пусть издали с начальной скоростью V_0 запускают бусинку с зарядом Q . Она обгонит вторую бусинку, если при минимальном расстоянии между бусинками скорость первой бусинки будет больше скорости второй. При этом выполняются законы сохранения импульса и энергии.

$$\begin{cases} mV_0 = mV_1 + mV_2, \\ V_1 > V_2, \\ \frac{mV_0^2}{2} = \frac{kqQ}{a} + \frac{mV_1^2}{2} + \frac{mV_2^2}{2}. \end{cases}$$

Отсюда

$$V_0^2 = (V_1 + V_2)^2 = \frac{2kqQ}{ma} + V_1^2 + V_2^2,$$

$$\left(\frac{V_0}{2}\right)^2 > V_1 V_2 = \frac{kqQ}{am},$$

$$V_0 > 2\sqrt{\frac{kqQ}{am}}.$$

Задача №92.

Запишем закон сохранения энергии для вылетевшего электрона:

$$\frac{mV_0^2}{2} - |e|\phi_{\text{ш}} = \frac{mV^2}{2} - |e|\phi_{\infty}.$$

Здесь V – искомая скорость электрона, $\phi_{\text{ш}}$ – потенциал шара, ϕ_{∞} – потенциал в бесконечно удаленной точке. Потенциал поверхности шара совпадает с потенциалом в его центре:

$$\phi_{\text{ш}} = \frac{-kQ}{a} + \frac{kQ}{2a} - \frac{2kQ}{\sqrt{(3a)^2 + (4a)^2}} = \frac{-9kQ}{10a}.$$

Считая, что $\phi_{\infty} = 0$, из закона сохранения энергии находим:

4.5. Расчет электростатических сил при помощи метода виртуальных перемещений.

Задача №93.

Мысленно отрезем от дальнего конца нити (бесконечно удаленного от кольца) маленький элемент длиной Δx с зарядом $\Delta q = \gamma \Delta x$, перенесем его к кольцу и приклеим ко второму концу нити, который находится в центре кольца. Данная процедура эквивалентна перемещению нити в сторону кольца на малое расстояние Δx . При таком перемещении нити электростатическое поле, создаваемое кольцом, совершило работу $\Delta A = -F \Delta x$, где F – искомая сила отталкивания кольца и нити. С другой стороны, эта же работа сил электростатического поля кольца равна:

$$\Delta A = \Delta q(\varphi_{\infty} - \varphi_0) = -\Delta q \frac{kQ}{R}.$$

Таким образом, получим следующее выражение для модуля силы отталкивания:

$$F = \frac{\Delta q}{\Delta x} \frac{kQ}{R} = \frac{k\gamma Q}{R}.$$

Задача №94.

а) В случае постоянства заряда на обкладках запишем выражение для модуля силы, действующей со стороны электрического поля на проводящую пластину в направлении, параллельном обкладкам конденсатора:

$$F = -\frac{\Delta W}{\Delta x} = -\frac{\Delta\left(\frac{Q^2}{2C}\right)}{\Delta x},$$

где C – общая емкость системы. Пусть пластина вдвинута в конденсатор на расстояние x , а y и z – расстояния от обкладок конденсатора до поверхностей проводящей пластины, то есть $y + z = d - c$. Тогда:

$$C(x) = \frac{a-x}{a} \frac{\varepsilon_0 S}{d} + \frac{1}{\left(\frac{x}{a} \frac{\varepsilon_0 S}{y}\right)^{-1} + \left(\frac{x}{a} \frac{\varepsilon_0 S}{z}\right)^{-1}} = \frac{\varepsilon_0 S}{d} + \frac{\varepsilon_0 S x c}{ad(d-c)}.$$

Тогда

$$F(x) = -\frac{\Delta\left(\frac{Q^2}{2C}\right)}{\Delta x} = \frac{Q^2}{2C^2(x)} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{Q^2}{2C^2(x)} \cdot \frac{\varepsilon_0 S c}{ad(d-c)},$$

$$F\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{2Q^2 c d (d-c)}{\varepsilon_0 a^3 (2d-c)^2}.$$

б) В случае постоянства напряжения на обкладках запишем выражение для силы, действующей со стороны электрического поля на проводящую пластину в направлении, параллельном обкладкам конденсатора:

$$F = -\frac{\Delta W}{\Delta x} = -\frac{U^2}{2} \frac{\Delta C(x)}{\Delta x} = \frac{\varepsilon_0 ac U^2}{2d(d-c)}.$$

Задача №95.

Сразу после выключения внешнего поля, когда индуцированные заряды еще не успели перераспределиться, внутри проводника существовало поле напряженностью $-E$, которое компенсировало внешнее поле до его выключения.

Потенциальная энергия системы в момент сразу после выключения внешнего поля равна:

$$W_0 = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} Sd.$$

После прекращения переходных процессов напряженность поля вне и внутри проводника стала равна нулю, а это означает, что вся начальная потенциальная энергия перешла в теплоту, то есть $\Delta Q = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} Sd$.

Задача №96.

При помещении металлического шара во внешнее поле на поверхности шара происходит перераспределение зарядов. При выключении поля, после быстрого переходного процесса, распределение зарядов по шару вновь становится однородным (нейтральным). Перераспределение зарядов по поверхности шара и объясняет изменение потенциальной энергии взаимодействия зарядов, что приводит к превращению части потенциальной энергии в теплоту.

Рассмотрим шар в момент сразу после выключения внешнего поля. Мысленно разобьем поверхность шара на множество заряженных элементов маленькой площади ΔS и запишем выражение для потенциальной энергии взаимодействия этих зарядов:

$$W_0 = \sum_i \sum_j \frac{k\sigma_i \Delta S_i \sigma_j \Delta S_j}{r_{ij}}..$$

Здесь σ – поверхностная плотность заряда соответствующего элемента, r_{ij} – расстояние между двумя элементами с номерками i и j . После выключения поля распределение зарядов становится нейтральным. Следовательно, вся энергия W_0 переходит в теплоту. Если увеличить радиус шара в 3 раза, то числитель в выражении для W_0 увеличится в 81 раз (каждая площадь увеличивается в 9 раз), а знаменатель увеличится втрое.

Таким образом, выделившееся количество теплоты увеличится в $\frac{81}{3} = 27$ раз.

Справка о внедрении разработки в учебный процесс.

	Департамент образования г. Москвы • Государственное автономное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования г. Москвы	
ЦЕНТР ПЕДАГОГИЧЕСКОГО МАСТЕРСТВА		
119270, Москва, Хамовнический вал, д.6 • Телефон/факс: (199) 212-27-82 • e-mail: info@cprm77.ru • http://cprm77.ru ОКПО 82464605 • ОГРН 1077761137222 • ИНН 7725618950 • КПП 770401001		
23 05	2018 года № 755	
На № _____	от _____	
Справка о внедрении		
<p>Государственное автономное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования города Москвы «Центр педагогического мастерства» подтверждает, что авторская разработка Трушников Николая Дмитриевича «Учебно-методический комплект для обучения решению задач электростатики при подготовке обучающихся к олимпиадам по физике» внедрена в учебный процесс ГАОУ ДПО ЦПМ и применялась автором в 2017/2018-м учебном году при проведении учебно-тренировочных сборов для подготовки одаренных и высокомотивированных школьников, являющихся кандидатами в сборную города Москвы, к олимпиадам высокого уровня по физике, в том числе к заключительному этапу всероссийской олимпиады школьников по физике.</p>		
Директор		И.В. Яценко