ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ ШКОЛЬНОГО КУРСА МЕХАНИКИ

Выполнил студент
205М академической группы
Паринов Данила Александрович

____

Научный руководитель:
к.ф.-м.н. доцент
Якута Алексей Александрович

____

Допущена к защите
Заведующий кафедрой
профессор
Салецкий Александр Михайлович

Москва
2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ. 3

ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. 5

ГЛАВА 2. РАЗРАБОТКА УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО ПОСОБИЯ И ЕГО СТРУКТУРА. 9

ГЛАВА 3. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ «МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ ШКОЛЬНОГО КУРСА МЕХАНИКИ». 17

3.1 Кинематика. 17

3.2 Динамика. 43

3.3 Статика. 55

ГЛАВА 4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ, ИХ АПРОБАЦИЯ И ВНЕДРЕНИЕ. 70

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. 73

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 74

Приложение 1.
Справки о внедрении разработки в учебный процесс. 78

ВВЕДЕНИЕ.

Одной из задач физического образования на любом этапе изучения физики является обучение школьника или студента навыку применения полученных знаний для решения физических задач. Овладение соответствующими умениями и навыками является, например, одним из официальных требований к уровню подготовки выпускников образовательных организаций, контролируемому на едином государственном экзамене по физике [1].

Умение решать задачи необходимо также школьникам, участвующим в различных физических олимпиадах. Поэтому важной частью подготовки школьников к интеллектуальным соревнованиям являются практические занятия, посвященные решению задач. Специфика олимпиадных заданий заключается в том, что, хотя для их выполнения, как правило, и достаточно знаний в объёме программы общеобразовательной школы, методика решения таких задач является нестандартной и весьма разнообразной. Поэтому при подготовке школьников к участию в олимпиадах по физике важную роль играет формирование комплекта задач, который используется педагогом в педагогическом процессе.

Для обеспечения эффективной подготовки к интеллектуальным соревнованиям высокого уровня по физике важно выделить методы и приёмы, используемые для решения определённых классов задач. Каждый из этих методов (приёмов) нужно объяснить школьнику, проиллюстрировать применение этого метода на конкретных примерах, и дать задачи для самостоятельного решения с целью закрепления навыка применения этого метода. Такая система подготовки, как показывает опыт, оказывается достаточно эффективной, поскольку получаемые обучающимися знания и опыт являются систематизированными. Школьник в процессе решения нестандартных задач, используя определённые методы и приёмы, учится видеть аналогии между различными физическими ситуациями и приобретает «набор инструментов», умелое применение которого в дальнейшем позволяет успешно справляться со сложными физическими задачами, в том числе и с заданиями теоретических туров физических олимпиад.

Для реализации такой программы подготовки школьников требуются специально разработанные и особым образом структурированные учебно-методические материалы. Подготовка таких материалов является на данный момент актуальной проблемой, стоящей перед педагогами и методистами, осуществляющими профессиональную деятельность в сфере профильного физического образования старшеклассников и студентов младших курсов вузов физических и технических специальностей.

ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Одно из главных умений, которое в процессе изучения курса общей физики должно быть сформировано как у школьников, так и у студентов — это умение решать различные задачи по физике. Следует отметить, что для формирования этого умения необходимо обеспечить предварительное выполнение двух следующих условий: усвоение обучающимися необходимых знаний (таких как основные физические модели, определения физических величин, формулировки и содержание законов физики, основные формулы и соотношения) и приобретение учащимися необходимых навыков (таких как уверенное оперирование математическими понятиями, построение математических моделей, применение математических методов, проведение математических преобразований).

Умение решать физические задачи преподаватели традиционно формируют путём рассмотрения так называемых «стандартных» физических задач, для решения которых можно предложить (явно или неявно) типовые схемы. Существует значительное число учебно-методических пособий, посвященных методике обучения решению физических задач, авторы которых используют данный подход. В качестве примеров таких пособий можно привести работы [2, 3], предназначенные для самостоятельного обучения школьников решению задач, и издания [4–7], предназначенные для преподавателей общей физики и посвящённые практическим аспектам методики обучения студентов решению физических задач. Характерной особенностью данного подхода к обучению решению физических задач является выделение типовых задач и стремление к алгоритмизации процедуры их решения.

Такой подход является плодотворным на начальных этапах изучения физики или при работе с обучающимися, которые имеют недостаточно сильную мотивацию к изучению предмета (например, не планируют связывать свою дальнейшую профессиональную деятельность с областью, для работы в которой необходимо владение точными науками).

Если же речь идёт об углублённом изучении физики (на профильном уровне) либо, тем более, о подготовке одарённых и высокомотивированных учащихся к олимпиадам высокого уровня по физике, то возможности использования указанного подхода являются весьма ограниченными. Это связано с тем обстоятельством, что наиболее интересные и содержательные в физическом плане задачи, которые обучающиеся должны научиться решать, обычно являются нестандартными, и для решения таких задач невозможно предложить заранее составленный алгоритм действий. Поэтому авторы учебных пособий, предназначенных для подготовки обучающихся, осваивающих физику на профильном уровне подготовки, как правило, идут по пути создания сборников, в которых сложные задачи просто приведены с какими-либо возможными решениями. При этом задачи в таком сборнике могут быть сгруппированы как по тематическому принципу (см., напр., [8, 9]), так и по хронологическому (напр., [10]).

При ознакомлении с подобными пособиями обычно создается впечатление, что методика решения содержащихся в них задач не может быть как-либо систематизирована. Это связано с тем, что в основу большинства сложных задач, как правило, её автором заложена какая-либо нетривиальная идея. Поэтому для решения такой задачи либо обучающийся должен самостоятельно прийти к осознанию этой идеи, либо его должен ознакомить с данной идеей преподаватель. Попытки создания учебных пособий, в которых авторы ставят своей целью знакомство обучающихся именно с физическими и математическими идеями, а не с типовыми алгоритмами решения задач, предпринимались и ранее (в качестве широко известных примеров можно привести пособие для школьников и учителей [11], а также пособие для студентов [12]).

Ещё одна трудность, возникающая при обучении решению нестандартных задач, связана с тем, что в каждом конкретном учебном пособии содержится весьма мало задач (иногда всего одна-две), решение которых основано на использовании определенной идеи. Поэтому обучающемуся для того, чтобы попрактиковаться в решении задач, основанных на глубоких идеях, необходимо использовать большое число различных задачников и учебных пособий. Практика показывает, что делать это предпочтительно под руководством опытного педагога, поскольку обучающемуся на начальном этапе подготовки трудно самостоятельно выявить задачи, основанные на той или иной идее. Учебные пособия, в которых трудные задачи сгруппированы по «идейному» принципу, и содержащие при этом методические указания по решению таких задач, раскрывающие указанные идеи, автору неизвестны.

Таким образом, в настоящее время существует следующая научно-методическая проблема: дефицит специальных учебно-методических пособий, основанных на систематизации физических и математических идей и предназначенных для обучения школьников и студентов решению задач по физике повышенной сложности.

Актуальность этой проблемы связана с тем, что в последние годы заметно возрос интерес старшеклассников к физическому образованию. С каждым годом увеличивается конкурс в технические вузы, растет количество участников физических олимпиад, в том числе и высокого уровня (см., напр., [13]). На олимпиадах обучающимся предлагаются трудные задачи, для решения которых им, как правило, необходимо уметь нестандартно мыслить, обладать обширными и прочными знаниями, а также быть знакомыми с широким кругом физических идей и приемов решения физических задач. В связи с этим потребность в обучении школьников решению задач повышенной трудности всё более возрастает, а значит, увеличивается и потребность в соответствующих методиках и специальных учебных пособиях, являющихся инструментами реализации этих методик. Подходам к решению данной проблемы посвящено значительное число публикаций (напр., [14–20]) и научных педагогических исследований (напр., [21, 22]).

Для решения сформулированной выше проблемы нами было предложено пойти по пути разработки учебно-методического пособия, в основе структуры которого лежат методы решения задач повышенной сложности курса общей физики. В связи с большим предполагаемым объёмом работы тематика пособия была заранее сужена — было решено ограничиться решением более узкой задачи: рассмотреть в учебно-методическом пособии только лишь методы решения задач повышенной сложности школьного курса механики. Данная магистерская диссертация посвящена решению сформулированной задачи.

ГЛАВА 2. РАЗРАБОТКА УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО ПОСОБИЯ И ЕГО СТРУКТУРА.

Разработка учебно-методического пособия, посвященного методам решения задач повышенной сложности школьного курса механики, проходила в несколько этапов.

На первом этапе были проанализированы школьные учебники, предназначенные для изучения старшеклассниками курса механики на профильном уровне [23, 24]. В результате были выявлены основные элементы знаний, которые обучающиеся должны усвоить в процессе изучения курса. Также были подвергнуты анализу задачи по механике, содержащиеся в различных сборниках задач [8, 10, 25–28]. В результате этой работы, во-первых, из массива содержащихся в них задач по механике были отобраны задачи повышенной сложности, а, во-вторых, был дополнен перечень ранее выявленных элементов знаний. В него были добавлены элементы, которые, как правило, не усваиваются обучающимися в процессе обучения в школе (даже при изучении физики на профильном уровне), но необходимы для успешного выступления на олимпиадах высокого уровня по физике.

На втором этапе работы были проанализированы решения отобранных задач (поскольку большинство задач в проанализированных задачниках были снабжены только ответами, то для проведения такого анализа отобранные задачи было необходимо сначала решить, что и было сделано). В результате были выявлены основные физические и математические идеи, лежащие в основе решения отобранных задач. Это, в свою очередь, позволило выделить общие методы решения задач повышенной сложности школьного курса механики. Далее отобранные задачи были классифицированы по методам их решения. Сами же методы были выстроены в соответствии с наиболее часто реализуемым на практике порядком усвоения обучающимися элементов знаний.

Это определило порядок рассмотрения задач в учебно-методическом пособии, которое было создано на третьем этапе выполнения работы. Оглавление этого пособия приведено ниже.

1. Кинематика.
   - 1.1. Расчёт средней скорости при прямолинейном движении материальной точки.
     - 1.1.1. Средняя скорость при равномерном движении на двух участках.
     - 1.1.2. Последовательный расчёт средней скорости.
     - 1.1.3. Средняя скорость при равнопеременном движении.
   - 1.2. Использование обратимости механического движения.
   - 1.3. Применение геометрических методов в кинематических задачах.
     - 1.3.1. Пространство скоростей.
     - 1.3.2. Треугольник скоростей для равноускоренного движения.
     - 1.3.3. Нахождение экстремума из геометрических соображений.
   - 1.4. Применение графиков для решения задач по теме «Кинематика».
   - 1.5. Кинематические связи.
2. Динамика.
   - 2.1. Использование понятия импульса.
     - 2.1.1. Закон сохранения импульса в задачах о столкновении тел.
     - 2.1.2. Импульс силы.
     - 2.1.3. Использование понятия о центре масс.

2.2. Применение законов сохранения и изменения механической энергии.

2.2.1. Движение тел в поле силы тяжести.

2.2.2. Движение тел при наличии пружин.

2.2.3. Учёт работы неконсервативных сил.

2.2.4. Вращательное движение.

2.3. Применение графиков для решения задач по теме «Закон сохранения механической энергии».

3. Статика.

3.1. Гидростатика.

3.1.1. Нахождение уровня жидкости в сосуде путём определения силы давления на его дно.

3.1.2. Точка приложения силы Архимеда.

3.1.3. Нахождение распределения давления в движущихся сосудах с жидкостью.

3.2. Теорема о трёх силах.

3.3. Метод виртуальных перемещений.

3.4. Статически неопределимые системы.

4. Выбор удобной системы отсчёта.

4.1. Система отсчёта центра масс.

4.2. Система отсчёта, связанная с текущей жидкостью.

4.3. Переход в неинерциальные системы отсчёта.

Пособие состоит из четырёх разделов, которые посвящены рассмотрению задач, относящихся к соответствующей теме курса «Механика» — это «Кинематика», «Динамика», «Статика» и «Выбор удобной системы отсчета». Последняя тема выделена отдельно постольку, поскольку соответствующий технический приём используется при решении широкого круга задач, относящихся как к кинематике, так и к динамике. Разделы нумеруются одиночными арабскими цифрами.

Всего в пособии рассмотрено 15 основных методов решения задач повышенной сложности по механике. Этим методам даны наименования, и каждый из них обозначен номером, который содержит две разделенные точкой цифры: первая из них обозначает номер раздела, а вторая — номер метода внутри раздела (например — «1.2.»). Некоторые методы могут применяться в разных физических ситуациях, и существует присущая этим ситуациям специфика применения метода. В этих случаях разновидности одного и того же метода обозначались номером, который содержит три разделенные точкой цифры: две первые цифры обозначают метод, а третья — его разновидность (например — «1.3.2.»).

Перечислим методы решения задач, лёгшие в основу разработанного учебно-методического пособия, и кратко очертим круг задач, которые могут быть решены путем применения каждого из методов.

1.1. Расчет средней скорости при прямолинейном движении материальной точки.

Данный метод основан на определении средней путевой скорости. Его рекомендуется применять для решения задач трех типов. Задачи первого типа соответствуют случаю, когда движение может быть разбито на два участка, на каждом из которых скорость остаётся постоянной, то есть движение является равномерным, но разные участки проходятся с разными скоростями. Задачи второго типа соответствуют случаю, когда путь состоит из более чем двух участков движения с разными скоростями. Наконец, третий случай соответствует равнопеременному (равноускоренному или равнозамедленному) движению.

1.2. Использование обратимости механического движения.

Этот метод может быть эффективно применён в тех случаях, когда скорость движущегося тела в некоторый момент времени практически мгновенно («скачком») изменяет свое направление, не меняя модуля. Частным случаем этого является остановка тела, поскольку нулевой вектор является обратным самому себе.

1.3. Применение геометрических методов в кинематических задачах.

Данная группа методов позволяет свести решение физической задачи к геометрическим построениям и к дальнейшему анализу получающихся геометрических объектов. При проведении соответствующих рассуждений используется векторный характер таких физических величин, как радиус-вектор, перемещение, скорость, ускорение. Задачи могут решаться путем перехода в пространство скоростей (построение и анализ годографа скорости) и методом построения треугольника скоростей (особенно эффективным этот прием оказывается при рассмотрении равноускоренного движения). Также геометрический метод может быть применен при решении задач, требующих нахождения экстремальных значений кинематических величин.

1.4. Применение графиков для решения задач по теме «Кинематика».

Соответствующий метод применяется для решения задач, в которых используется графическое представление зависимостей между кинематическими характеристиками тел системы. Метод предполагает анализ графика, установление соответствия между различными участками графика и характером механического движения, а также, при необходимости, проведение дополнительных построений на графике либо численное интегрирование графической зависимости.

1.5. Кинематические связи.

В этом разделе рассмотрены основные виды кинематических связей, встречающиеся при решении задач по теме «Кинематика». Рассматриваются соответствующие физические модели: абсолютно твёрдое тело, нерастяжимая нить, движение без проскальзывания, скольжение без отрыва от поверхности. Обсуждаются методы решения соответствующих задач.

2.1. Использование понятия импульса.

Данную группу методов удобно применять для рассмотрения задач динамики, в процессе решения которых не требуется искать ускорения тел в каждый момент времени, а достаточно определить лишь изменения их скоростей. Рассматриваются приёмы решения задач о различных типах столкновений тел. Иллюстрируется методика применения для решения задач понятия импульса силы. К данной группе методов также отнесено использование понятия о центре масс системы материальных точек, поскольку импульс механической системы может быть представлен как произведение суммарной массы материальных точек системы на скорость её центра масс.

2.2. Применение законов сохранения и изменения механической энергии.

В данном разделе рассмотрено применение законов сохранения и изменения механической энергии для решения задач различных типов (движение тел в поле сил тяжести, движение тел при наличии пружин, вращательное движение). Указаны методы, позволяющие получить выражения для потенциальной энергии определённых систем или работы диссипативных сил в наиболее простом виде.

2.3. Применение графиков для решения задач по теме «Закон сохранения механической энергии».

Зачастую графический метод оказывается наиболее простым для нахождения работ сил, что и продемонстрировано на примере задач, разобранных в этом разделе.

3.1. Гидростатика.

Рассмотрен метод нахождения уровня жидкости в сосуде путём определения силы давления на его дно, метод нахождения точки приложения силы Архимеда, а также метод нахождения давления в движущихся сосудах с жидкостью путём выделения некоторого объёма жидкости и приравнивания суммы сил давлений, действующих на этот объём, и произведения массы данного объёма на ускорение его центра масс.

3.2. Теорема о трёх силах.

Рассмотрено применение метода, основанного на использовании того факта, что в случае равновесия твердого тела при наличии трёх лежащих в одной плоскости сил линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

3.3 Метод виртуальных перемещений. В данном разделе описана суть метода виртуальных перемещений, рассмотрен пример применения данного метода для нахождения силы реакции связи.

3.4 Статически неопределимые системы. В данном разделе описан метод решения задач, в которых рассматриваются статически неопределимые системы (то есть такие системы, силы реакции в которых невозможно определить с помощью одних лишь уравнений статики).

4.1 Система отсчёта центра масс.

Метод перехода в систему отсчёта, движущуюся поступательно со скоростью центра масс, полезен при решении задач о столкновениях тел, поскольку в системе отсчёта центра масс сталкивающихся тел их суммарный импульс равен нулю, что существенно упрощает получающиеся при записи решения уравнения, а в некоторых случаях позволяет даже «угадать» решение.

4.2 Система отсчёта, связанная с текущей жидкостью.

Метод перехода в систему отсчёта, связанную с текущей жидкостью, позволяет «избавиться» в уравнениях от скорости течения жидкости, что обычно упрощает описание движения.

4.3 Переход в неинерциальные системы отсчёта.

Рассмотрен метод перехода в неинерциальные системы отсчёта, движущиеся поступательно с постоянным ускорением, либо вращающиеся с постоянной угловой скоростью. Такой приём зачастую позволяет превратить динамические задачи в статические.

В пособии для иллюстрации применяемых методов решения задач повышенной сложности по механике представлены условия и решения 38 задач. Все условия задач, которые цитируются по задачникам, снабжены соответствующими ссылками. В тех случаях, когда для иллюстрации того ил иного метода решения недоставало подходящих задач, они разрабатывались автором самостоятельно. Все решения задач, содержащиеся в пособии, либо написаны автором данной работы заново, либо существенно переработаны и отредактированы. Редакции также иногда подвергались и условия задач, взятые из задачников — это делалось в тех случаях, когда редактирование было необходимо для исправления неточностей в формулировках условий.

Разработанное учебно-методическое пособие предназначено для обучающихся 7-х — 11-х классов общеобразовательной школы, изучающих физику на профильном уровне и готовящихся к участию в олимпиадах высокого уровня по физике, а также для их наставников — учителей, педагогов дополнительного образования, руководителей физических кружков и факультативов.

Ниже приведён текст созданного учебно-методического пособия «Методы решения задач повышенной сложности школьного курса механики».

ГЛАВА 3. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ «МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ ШКОЛЬНОГО КУРСА МЕХАНИКИ».

Кинематика.

Расчёт средней скорости при прямолинейном движении материальной точки.

Средняя скорость при равномерном движении на двух участках.

По определению, средняя путевая скорость при равномерном прямолинейном движении есть отношение всего пройденного пути ко всему времени движения:

$$v_{\text{ср}} = \frac{s_{\text{полн}}}{t_{\text{полн}}}. \tag{3.1}$$

Часто встречаются задачи, в которых движение разбито на несколько участков, на каждом из которых скорость остаётся постоянной, то есть движение является равномерным, но разные участки проходятся с разными скоростями. Для каждого участка по отдельности справедливо уравнение $s = vt$, где s, v и t — соответственно пройденный путь, скорость и время движения на данном участке. Это уравнение позволяет выразить любую из трёх величин (s, v, t) через две другие. (две из трёх величин обычно заданы в условии). Таким образом для каждого участка можно узнать пройденный на нём путь и время движения на этом участке. Полный путь $s_{\text{полн}}$ можно найти как сумму путей на всех участках, а полное время $t_{\text{полн}}$ — как сумму времён, после чего рассчитать среднюю скорость по формуле (3.1).

Задача 1. Первый час автомобиль ехал по дороге со скоростью 40 км/ч, следующий час — со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на всём пути и на второй половине пути. [29]

Решение. Движение можно разбить на два участка, на каждом из которых оно равномерное. Известны скорости и времена движения для каждого из участков. Значит, можно рассчитать путь, пройденный на каждом из участков: $s_1 = 40$ км, $s_2 = 60$ км. Полный путь автомобиля $s_{\text{полн}} = s_1 + s_2 = 100$ км, а полное время движения — 2 часа. Значит, средняя скорость движения автомобиля 50 км/ч. За второй час автомобиль проехал больше половины пути, значит, всю вторую половину пути автомобиль двигался со скоростью 60 км/ч и средняя скорость на второй половине пути также 60 км/ч.

Теперь ответим на дополнительный вопрос: какова средняя скорость автомобиля на *первой* половине пути? Получилась новая задача, в которой движение также разбивается на два участка с постоянными скоростями (40 км/ч и 60 км/ч). Для первого участка известен путь $s'_1 = 40$ км и время движения $t'_1 = 1$ ч. Также известен суммарный путь, пройденный на двух участках $s' = s_{\text{полн}}/2 = 50$ км. Значит, путь на втором участке $s'_2 = s' - s'_1 = 10$ км, а время движения $t'_2 = s'_2/v_2 = 10$ мин. Первая половина пути пройдена за время $t_1 = t'_1 + t'_2 = 70$ мин, средняя скорость на первой половине пути

$$v_{\text{ср}1} = \frac{50\ \text{км}}{70\ \text{мин}} \approx 43\ \text{км/ч}.$$

Последовательный расчёт средней скорости.

Для нахождения средней скорости в случаях, когда путь состоит из трёх или более участков с различными скоростями, бывает удобно рассчитывать среднюю скорость последовательно. Этот метод, например, можно применить при решении следующей задачи.

Задача 2. Автомобиль проехал половину пути с постоянной скоростью $v_1 = 60$ км/ч. Половину оставшегося времени движения он ехал с постоянной скоростью $v_2 = 15$ км/ч, а последний участок пути — с постоянной скоростью $v_3 = 45$ км/ч. Чему равна средняя скорость автомобиля на всём пути? [26]

Решение. По условию второй и третий участки автомобиль проехал за одинаковое время. Обозначим каждое из этих времён t, тогда суммарное время прохождения второго и третьего учатка будет равно $2t$. Средняя скорость на втором и третьем участках:

$$v_{23} = \frac{v_2 t + v_3 t}{2t} = \frac{v_2 + v_3}{2} = 30 \text{ км/ч}.$$

Теперь мы можем «объединить» второй и третий участки пути, то есть сказать, что всю вторую половину пути автомобиль двигался с постоянной скоростью v_{23}. Если весь путь равен L, то время прохождения первой половины пути равно $L/(2v_1)$, а время прохождения второй половины пути равно $L/(2v_{23})$. Средняя скорость автомобиля на всём пути

$$v_{\text{ср}} = \frac{L}{\dfrac{L}{2v_1} + \dfrac{L}{2v_{23}}} = \frac{2}{\dfrac{1}{v_1} + \dfrac{1}{v_{23}}} = 40 \text{ км/ч}.$$

Средняя скорость при равнопеременном движении.

Понятие средней скорости может быть полезным и при решении задач по теме «Равноускоренное движение». Пусть тело движется вдоль оси x с постоянным ускорением. Проекцию ускорениия тела на ось x обозначим a. Проекция скорости тела на ось x меняется по закону $v(t) = v_0 + at$, где v_0 — проекция начальной скорости тела. Пусть проекция на ось x перемещения тела в момент времени τ равна s, а $v_{\text{ср}}$ — проекция на ось x средней скорости тела на временном промежутке от $t = 0$ до $t = \tau$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{\tau} = v_0 + a\frac{\tau}{2} = \frac{v_0 + v(\tau)}{2}.$$

Какое именно из этих равенств окажется полезным для решения той или иной задачи, зависит от того, что задано в условии. Рассмотрим пример.

Задача 3. Свободно падающее без начальной скорости тело прошло последние $s = 30$ м за время $\tau = 0{,}5$ с. С какой высоты H падало тело? [26]

Решение. Пусть t — полное время движения тела. Тогда средняя скорость на последнем участке:

$$v_{\text{ср}} = \frac{g(t-\tau)+gt}{2} = g\left(t - \frac{\tau}{2}\right) = \frac{s}{\tau}.$$

Из полученного уравнения выразим полное время движения

$$t = \frac{s}{g\tau} + \frac{\tau}{2}.$$

Поскольку тело падало без начальной скорости, начальная высота равна

$$H = \frac{gt^2}{2} = \frac{g}{2}\left(\frac{s}{g\tau} + \frac{\tau}{2}\right)^2 = 5\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}\left(\frac{30\ \text{м}}{10\ \text{м/с}^2 \cdot 0{,}5\ \text{с}} + 0{,}25\ \text{с}\right)^2 \approx 195\ \text{м}.$$

Использование обратимости механического движения.

Механическое движение тела является обратимым, если ускорение тела зависит только от его положения в пространстве и не зависит от его скорости или от времени. Пусть тело, двигаясь таким образом, переместилось по некоторой траектории из точки A в точку B. Изменим направление скорости тела на противоположное, не меняя модуль: тело вернётся в A по той же траектории, за то же время. Любую точку траектории на «обратном» пути тело пройдёт со скоростью, равной по модулю, но противоположной по направлению скорости тела в этой точке на «прямом» пути.

Принцип обратимости движения справедлив, в частности, для равнопеременного движения. Для начала, применим этот принцип для решения сравнительно простой задачи.

Задача 4. Тело падает без начальной скорости с высоты H. В момент, когда тело упруго ударяется о землю, из той же начальной точки без начальной скорости начинает падать второе тело. На какой высоте h встретятся тела? Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

Решение. После упругого удара о землю скорость первого тела поменяет направление на противоположное, сохранив модуль. Дальнейшее движение первого тела, по принципу обратимости, будет симметрично его падению: если тело было на высоте h за время t до удара, то спустя время t после удара оно также окажется на этой высоте. С другой стороны, падение второго тела в точности повторяет падение первого, следовательно, два тела окажутся на одной высоте через время $t_1 = \tau/2$ после удара первого тела о землю, где τ — это полное время падения с высоты H:

$$H = \frac{g\tau^2}{2}.$$

Значит, высота, на которой произойдёт встреча, равна

$$h = H - \frac{gt_1^2}{2} = H - \frac{H}{4} = \frac{3}{4}H.$$

Может возникнуть вопрос: не проще ли было приведённую выше задачу решить «в лоб» — записать закон движения каждого из тел и составить уравнение для момента встречи? Конечно же, можно было поступить и так, однако приведённые в решении рассуждения можно сделать «в уме» и практически сразу прийти к верному заключению относительно момента встречи.

Решение следующей задачи уже заметно упрощается и становится более наглядным при использовании принципа обратимости.

Задача 5. Камень бросили с горизонтальной площадки под углом к горизонту в направлении вертикальной стены. Камень упруго ударился о стену и упал на площадку. Известно, что время полёта от момента бросания до удара составило t_1, а время полёта от удара до падения — t_2. Определите, на какой высоте h камень ударился о стену. Стена перпендикулярна плоскости, в которой движется камень. Влиянием воздуха можно пренебречь. [31]

Решение. Заметим, что векторы скорости камня непосредственно перед упругим ударом о стену и сразу после него симметричны относительно стены. То есть, можно вообще не учитывать удар и решать эквивалентную задачу: тело бросили под углом к горизонту, через время t_1 тело оказалось на высоте h, а ещё через время t_2 упало в некоторой точке. Требуется найти высоту h.

Запустим из указанной точки падения камень обратно, со скоростью, равной по модулю и противоположной по направлению скорости камня непосредственно перед падением. По принципу обратимости камень будет двигаться по той же самой траектории, через время t_2 после броска он окажется на высоте h, а ещё через время t_1 упадёт в ту же точку, из которой он был брошен в первый раз. Значит, t_1 и t_2 — это два корня квадратного уравнения

$$h = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2},$$

где v_{0y} — проекция начальной скорости камня на ось, направленную вертикально вверх. По теореме Виета:

$$t_1 t_2 = \frac{2h}{g}, \quad \text{откуда} \quad h = \frac{g t_1 t_2}{2}.$$

Для применения принципа обратимости требуется, чтобы скорость тела в некоторый момент скачком изменилась на противоположную. Такое может произойти, например, при упругом ударе. Однако существует случай, когда не требуется ничего менять. Пусть в некоторый момент скорость тела обращается в ноль. Для дальнейшего движения справедлив принцип обратимости, поскольку нулевой вектор является обратным самому себе.

Задача 6. После сообщения шарику некоторой начальной скорости он сразу начинает вкатываться на наклонную плоскость. На расстоянии $l = 30$ см от точки начала движения шарик побывал дважды: через $t_1 = 1$ с и $t_2 = 2$ с после начала движения. Считая движение равноускоренным, найдите начальную скорость v_0 шарика и его ускорение a. [26]

Решение. В точке наивысшего подъёма скорость шарика равна нулю, значит, шарик вновь окажется на расстоянии $l = 30$ см от начала движения спустя то же время, что и время движения с момента первого прохождения этой точки до наивысшего подъёма. То есть в точке в точке наивысшего подъёма шарик оказался спустя время

$$\tau = \frac{t_1 + t_2}{2} = 1{,}5\ c$$

после начала движения.

Средняя скорость v шарика с начала движения до момента времени t_1 равна скорости шарика в момент времени $t_1/2$, поскольку движение является равноускоренным:

$$\frac{l}{t_1} = v(t_1/2) = 30\ \frac{\text{см}}{\text{с}},$$

а спустя время $\tau - t_1/2$ шарик остановится, значит,

$$v(t_1/2) = a \cdot (\tau - t_1/2)\,, \quad \text{откуда} \quad a = \frac{30\ \text{см/с}}{1\ \text{с}} = 30\ \text{см/с}^2.$$

Начальная скорость шарика

$$v_0 = a \cdot \left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) = 45\ \text{см/с}.$$

Применение геометрических методов в кинематических задачах.

Пространство скоростей.

Человек, приступающий к решению задачи по кинематике, в первую очередь пытается представить как изменяется положение тела в пространстве с течением времени. Однако, для решения ряда задач полезнее будет проанализировать то, как меняется со временем вектор скорости тела, то есть исследовать задачу в пространстве скоростей.

Задача 7. На частицу массой m, имеющую скорость v, начинает действовать постоянная по модулю сила F, вектор которой за время действия τ поворачивается с постоянной угловой скоростью на угол 180° (рис. 3.1). Векторы скорости частицы и силы всё время находятся в плоскости рисунка. В начальный момент угол между силой F и скоростью частицы составлял 90°. Определите модуль и направление конечной скорости частицы u

через время τ после начала действия силы F. Влиянием других сил можно пренебречь. [32]

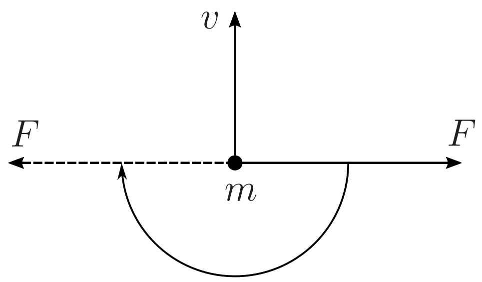

Рисунок 3.1 — сплошной линией показан вектор силы в начальный момент, а пунктиром показан вектор силы в конечный момент

Решение. Вектор ускорения частицы, как и вектор действующей на неё силы, поворачивается с постоянной угловой скоростью (обозначим её ω), а модуль ускорения остаётся неизменным и равным $a = F/m$. Зафиксируем в пространстве скоростей начало вектора скорости частицы. Найдём кривую, которую будет описывать с течением времени конец вектора скорости, то есть построим годограф скорости.

В пространстве скоростей вектор скорости — это аналог радиус-вектора частицы в обычном пространстве. А вектор ускорения в пространстве скоростей является аналогом вектора скорости в обычном пространстве. Значит, исходная задача аналогична следующей: вектор скорости тела поворачивается с постоянной угловой скоростью ω, не меняя свой модуль v, требуется найти траекторию движения тела. Понятно, что в таком случае тело будет двигаться по окружности радиусом $R = \dfrac{v}{\omega}$. Значит, в исходной задаче конец вектора скорости тоже будет описывать окружность радиусом $v_R = \dfrac{a}{\omega} = \dfrac{F}{\omega m}$ (рис. 3.2).

Как следует из рисунка, модуль конечной скорости частицы равен

$$u = |v - 2v_R| = \left| v - \frac{2F}{\omega m} \right|,$$

конечная скорость сонаправлена с начальной, если $v > 2v_R$, и противоположно направлена, если $v < 2v_R$.

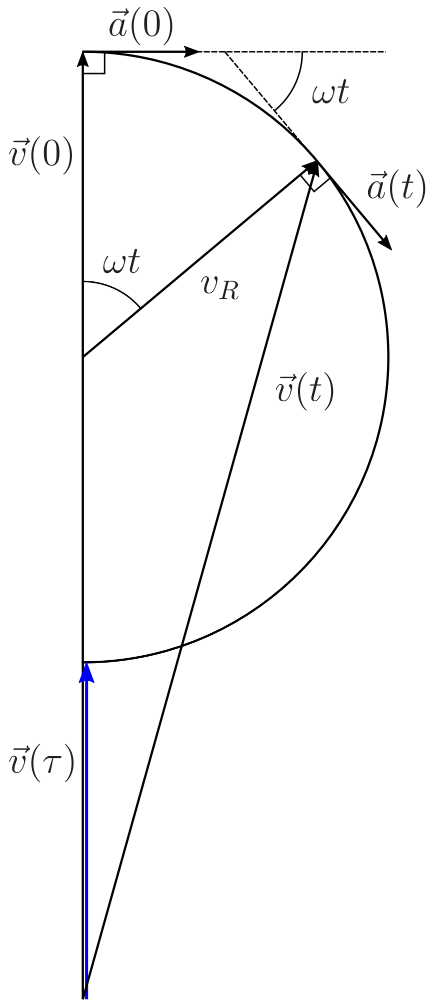

Рисунок 3.2 — на рисунке показаны векторы скорости $\vec{v}(0)$ и ускорения $\vec{a}(0)$ частицы в начальный момент, в некоторый момент времени t (векторы $\vec{v}(t)$ и $\vec{a}(t)$), а также вектор конечной скорости $\vec{v}(\tau)$ (изображён синим цветом).

Треугольник скоростей для равноускоренного движения.

Исследование законов движения тела с помощью треугольника скоростей оказывается весьма полезным методом для решения задач о движении в плоскости с постоянным ускорением. Обычно это задачи о движении тел, брошенных под углом к горизонту, в которых поле силы тяжести считают однородным, а сопротивлением воздуха пренебрегают.

Классический метод предполагает запись закона движения и закона изменения скорости тела в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси. Таким образом, получается система из четырёх уравнений. Если же воспользоваться геометрической интерпретацией, то все эти четыре уравнения можно отобразить на одном рисунке, что сделает дальнейшее решение задачи проще и нагляднее.

Пусть $\vec{v}_0$ — начальная скорость тела, $\vec{v}_1$ — конечная скорость тела, $\vec{g}$ — ускорение тела, направленное вертикально вниз, t — время движения. Поскольку движение равноускоренное, справедливо следующее уравнение:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{g}t.$$

Если изобразить это векторное уравнение на рисунке, получится треугольник скоростей (рис. 3.3). Проведём в этом треугольнике медиану к стороне gt, которой соответствует вектор $\vec{v}_m$:

$$\vec{v}_m = \vec{v}_0 + \frac{1}{2}\vec{g}t = \vec{v}_1 - \frac{1}{2}\vec{g}t = \frac{\vec{v}_0 + \vec{v}_1}{2}.$$

Получается, что $\vec{v}_m$ есть вектор средней скорости тела за время движения, то есть

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{s}}{t}, \quad \text{где } \vec{s} \text{ — перемещение тела.}$$

Таким образом, на одном рисунке оказывается отображён и закон изменения скорости тела, и закон движения тела. Также заметим, что высота, опущенная на сторону gt, является проекцией вектора средней скорости на горизонтальное направление, следовательно, эта высота равна $\dfrac{L}{t}$, где L — смещение тела по горизонтали за время движения.

Задача 8. Тело бросают из точки, которая находится на высоте H над поверхностью Земли. Точка, в которую нужно попасть, лежит на расстоянии L по горизонтали от точки броска. При какой начальной скорости бросания это возможно? [29]

Решение. Требуется найти наименьшее необходимое значение начальной скорости, тогда при бросании с любой бóльшей начальной скоростью попасть в цель будет заведомо возможно. Для ответа на данный вопрос можно вывести уравнение траектории тела, однако быстрее и нагляднее будет воспользоваться треугольником скоростей. Пусть угол между векторами $\vec{v}_0$ и $\vec{v}_1$

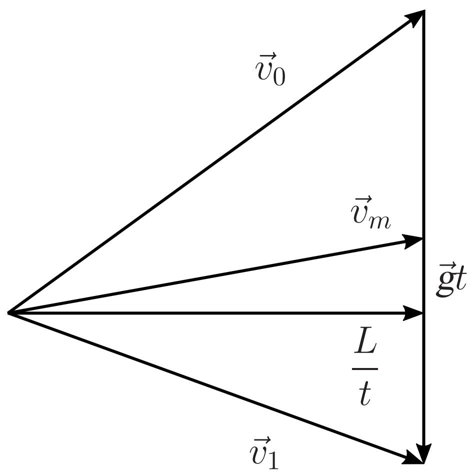

Рисунок 3.3 — треугольник скоростей для тела, двигающегося с постоянным ускорением $\vec{g}$.

равен α. Выразим площадь треугольника скоростей S_Δ двумя способами:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}v_0 v_1 \sin\alpha = \frac{1}{2}\frac{L}{t}gt, \quad \text{откуда} \quad v_0 v_1 \sin\alpha = Lg.$$

Модуль конечной скорости v_1 следующим образом связан с модулем начальной скорости v_0:

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gH}.$$

Это выражение можно получить либо из закона сохранения механической энергии, либо записав выражение для перемещения тела, движущегося с постоянным ускорением, в проекции на вертикальную ось. Получаем следующее уравнение с двумя неизвестными:

$$v_0 \sin\alpha \sqrt{v_0^2 + 2gH} = Lg,$$

из которого видно, что v_0 принимает минимальное возможное значение тогда, когда $\sin\alpha$ максимален, то есть когда конечная скорость перпендикулярна начальной.

Получается, что треугольник скоростей в данной задаче прямоугольный. Как было показано выше, медиана в треугольнике скоростей равна перемещению тела s, делённому на время движения t. С другой стороны, в прямоугольном треугольнике медиана равна половине гипотенузы:

$$\frac{s}{t} = \frac{\sqrt{L^2 + H^2}}{t} = \frac{gt}{2}, \quad \text{откуда} \quad gt^2 = 2\sqrt{L^2 + H^2} = 2s.$$

Теперь запишем для прямоугольного треугольника скоростей теорему Пифагора:

$$(gt)^2 = v_0^2 + v_1^2.$$

Используя полученные ранее выражения, имеем:

$$2gs = 2v_0^2 + 2gH, \quad \text{откуда} \quad v_0^2 = g(s - H).$$

Окончательно,

$$v_0 = \sqrt{g\left(\sqrt{L^2 + H^2} - H\right)}.$$

Задача 9. Кот Леопольд сидел у края крыши. Два озорных мышонка выстрелили в него камнем из рогатки. Камень, описав дугу, упал у ног кота (рис. 3.4) через время $\tau = 1$ с. На каком расстоянии S от мышей находился кот Леопольд, если векторы скоростей камня в момент выстрела и в момент падения были взаимно перпендикулярны? [10]

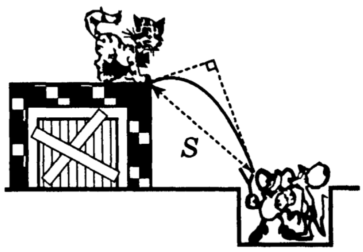

Рисунок 3.4 — к условию задачи 9.

Решение. По условию, треугольник скоростей в этой задаче также прямоугольный. Вновь можно воспользоваться тем фактом, что в прямоугольном треугольнике медиана равна половине гипотенузы:

$$\frac{S}{\tau} = \frac{1}{2}g\tau, \quad \text{откуда} \quad S = \frac{g\tau^2}{2} \approx 5 \text{ м}.$$

Нахождение экстремума из геометрических соображений.

Когда для решения той или иной задачи требуется найти максимум или минимум той или иной функции, обычно решают уравнение, получающееся при приравнивании к нулю производной этой функции. Однако, если исследуемая функция является модулем некоторого вектора, то часто оказывается, что удобнее найти экстремум такой функции из «геометрических» соображений.

Допустим, что некоторое небольшое тело движется с постоянным известным ускорением $\vec{a}$, также известна начальная скорость этого тела $\vec{v}_0$ и требуется найти момент времени, когда модуль смещения тела от начальной точки максимален. Вместо того, чтобы вводить систему координат, выражать модуль смещения, пользуясь теоремой Пифагора и затем вычислять производную получившейся функции, лучше воспользоваться следующим соображением: модуль вектора смещения достигнет своего экстремального значения в тот момент, когда вектор скорости будет перпендикулярен вектору смещения. Действительно, пусть $\vec{r}$ — вектор смещения тела от начальной точки, а r — модуль этого вектора. Тогда

$$\frac{d(r^2)}{dt} = 2r\frac{dr}{dt} = \frac{d(\vec{r}\cdot\vec{r})}{dt} = 2\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = 2\vec{r}\cdot\vec{v},$$

где $\vec{v}$ — вектор мгновенной скорости тела, а точкой обозначено скалярное произведение векторов. Значит, если производная модуля вектора смещения по времени равна нулю, то и скалярное произведение вектора смещения и вектора скорости должно быть равно нулю.

Тогда для нахождения искомого момента времени, достаточно решить следующее уравнение:

$$\left(\vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}\right)\cdot(\vec{v}_0 + \vec{a}t) = 0,$$

которое сводится к квадратному уравнению относительно времени t.

Приведённое выше условие экстремальности модуля вектора смещения можно пояснить и не прибегая к математическому анализу. Действительно, когда проекция вектора скорости на направление вектора смещения положительна, тело удаляется от точки начала движения, а когда проекция отрицательна — наоборот, приближается. И только когда указанная проекция равна нулю расстояние от точки начала движения тела до его текущего положения достигает своего максимального или минимального значения.

В случае, если траектория тела разбита на два участка, на которых движение происходит с разными постоянными скоростями, можно применять ещё один метод решения, который иллюстрируется следующей задачей.

Задача 10. Человек находится на берегу озера в точке A и хочет в кратчайшее время попасть в точку B, находящуюся на озере (рис. 3.5). Скорость движения человека в воде v_1, а по берегу v_2. По какой траектории следует двигаться человеку, если $v_2 > v_1$? [26]

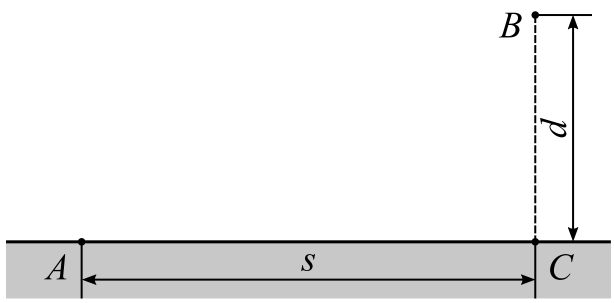

Рисунок 3.5 — к условию задачи об оптимальном пути.

Решение. Если движение происходит с постоянной скоростью, то скорейший путь от одной точки до другой лежит по соединяющей эти точки прямой. Значит, оптимальной траекторией служит ломаная, состоящая из отрезка AE, преодолеваемого со скоростью v_2, и отрезка EB, преодолеваемого со скоростью v_1 (рис. 3.6). Остаётся найти оптимальное положение точки E, в которой человек должен начинать плыть по озеру.

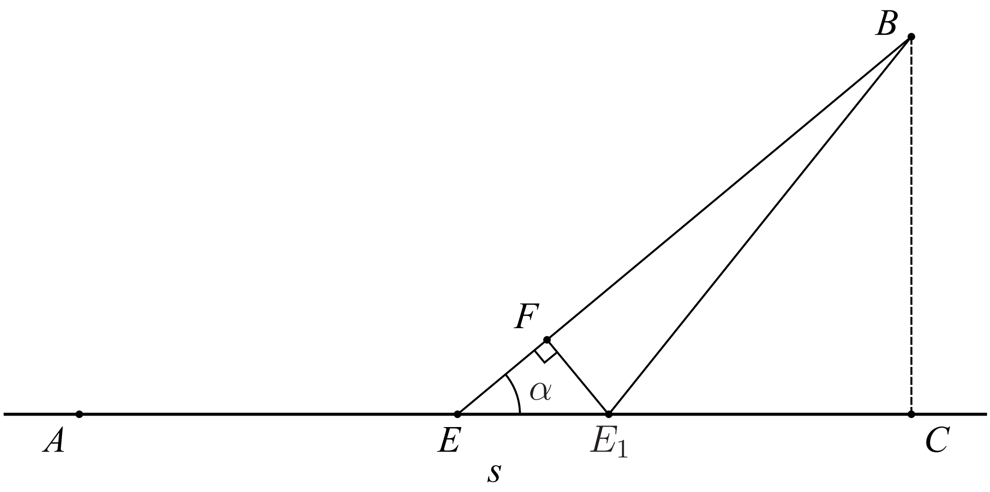

Рисунок 3.6 — к решению задачи об оптимальном пути.

Пусть t — время движения по траектории AEB. Сместим излом траектории в точку E_1, находящуюся близко к точке E ($|EE_1| \to 0$) и найдём время t_1 движения по новой траектории. На отрезке EB отметим точку F так, чтобы $FB = E_1B$. При устремлению к нулю длины отрезка EE_1, величина угла $\angle EBE_1$ будет стремиться к нулю, а величина угла $\angle E_1FE$ будет стремиться к $\pi/2$, поэтому на рисунке этот угол показан как прямой. Двигаясь по новой траектории, человеку придётся преодолеть дополнительное расстояние по суше, равное длине отрезка EE_1, зато проплываемое им расстояние сократится на длину отрезка EF. Значит,

$$\Delta t = t_1 - t = \frac{|EE_1|}{v_2} - \frac{|EF|}{v_1} = |EE_1| \left(\frac{1}{v_2} - \frac{\cos\alpha}{v_1} \right).$$

Если положение точки E оптимально, то разность времён Δt должна быть равна нулю (иначе существует направление, в котором нужно сместить точку E для того, чтобы получить выигрыш во времени). Отсюда

$$\cos\alpha = \frac{v_1}{v_2}.$$

Найденное значение косинуса угла α однозначно определяет искомую траекторию.

Применение графиков для решения задач по теме «Кинематика».

Нередко встречаются задачи, в условии которых задан график некоторой зависимости, и для решения требуется провести анализ этой зависимости. Для решения подобных задач можно пользоваться следующим алгоритмом:

1. обратить внимание на то, какие именно величины отложены на осях (легко перепутать, например, путь и модуль перемещения, модуль скорости и её проекцию, а по оси абсцисс не всегда откладывается время);

2. выделить особые точки графика — в которых имеются скачки, изломы, экстремумы, достигаются нулевые значения, и понять, как изменяется

характер движения в моменты времени, соответствующие этим особым точкам графика;

3. если это необходимо, провести дополнительные построения (например, построить касательную к графику в некоторой точке) либо численное интегрирование.

Задача 11. На длинном прямом шоссе автомобили движутся с постоянной скоростью V_1 всюду, за исключением моста, на котором автомобили движутся с другой постоянной скоростью V_2. На рисунке 3.7 изображён график зависимости расстояния l между двумя едущими друг за другом автомобилями от времени t. Найдите скорости V_1 и V_2, а также длину моста. [8]

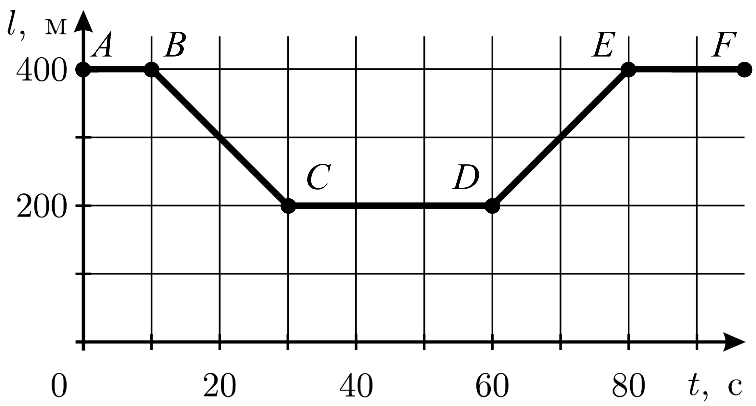

Рисунок 3.7 — к условию задачи о двух автомобилях.

Решение. В условии приведён график зависимости от времени расстояния между автомобилями, поэтому проводя касательные к графику можно найти лишь скорость автомобилей относительно друг друга, но невозможно найти скорости автомобилей относительно земли.

Точки излома делят график на пять отрезков. Проанализируем характер движения автомобилей на каждом из этих участках. Отрезок графика AB соответствует периоду, когда ещё ни один автомобиль не достиг моста. Обе машины движутся с одинаковыми скоростями V_1. Отрезок BC соответствует этапу, когда первый автомобиль уже движется по мосту со скоростью

V_2, а первый автомобиль все ещё движется по шоссе со скоростью V_1. Поскольку на этом участке расстояние между автомобилями сокращается со скоростью 10 м/с, то можно сделать вывод, что

$$V_1 - V_2 = 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

В момент времени, соответствующий точке B на графике, первый автомобиль находился в начале моста, а второй автомобиль находился на расстоянии 400 м от первого, следовательно, и от начала моста. Точка C на графике соответствует моменту, когда второй автомобиль достиг моста. Значит, второй автомобиль, двигаясь со скоростью V_1, проехал 400 м за 20 с, то есть

$$V_1 = \frac{400\ \text{м}}{20\ \text{с}} = 20\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Первый автомобиль в момент времени, соответствующий точке C, находится на расстоянии 200 м от второго, то есть от начала моста, значит, первый автомобиль преодолел это расстояние за 10 с и

$$V_2 = \frac{200\ \text{м}}{20\ \text{с}} = 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Участок графика CD соответствует времени, когда оба автомобиля находились на мосту, а в момент времени, соответствующий точке D, первый автомобиль покидает мост. Значит, первый автомобиль двигался по мосту в течение 50 с и длинна моста

$$L = 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 50\ \text{с} = 500\ \text{м}.$$

Участок DE является симметричным участку BC и не даёт новой информации.

Для решения следующей задачи требуется провести дополнительное построение, а именно — провести касательную к графику в определённой точке.

Задача 12. В архивах экспериментатора Глюка нашли график (рис. 3.8) изменения со временем проекции на вертикальную ось скорости шарика, который был выпущен из пневматического пистолета вертикально вверх с балкона 17-го этажа. Масштаб на вертикальной оси (проекции скорости) выцвел, а на оси времени частично сохранился. Определите начальную скорость шарика и скорость, с которой шарик упал на землю. Ветра в день эксперимента не было. [33]

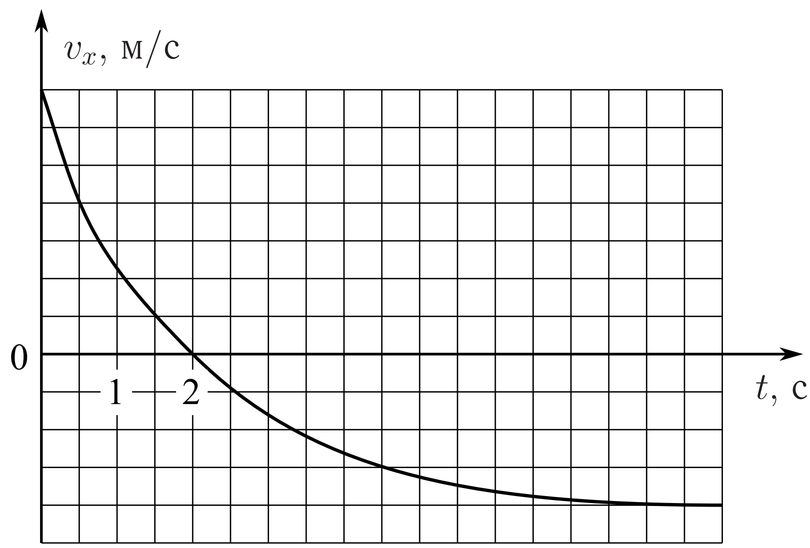

Рисунок 3.8 — к условию задачи.

<u>Решение.</u> Если бы шарик двигался только под действием силы тяжести, то его ускорение было бы постоянным и равным ускорению свободного падения, а проекция скорости на вертикальную ось менялась бы со временем линейно. Однако из графика видно, что это не так. Значит, на шарик действует ещё и сила сопротивления воздуха, явное выражение для которой неизвестно. Сила сопротивления воздуха является силой вязкого трения, а действие вязкого трения испытывают только движущиеся тела. Значит, можно явно указать момент, когда сила сопротивления воздуха равна нулю — это момент наивысшего подъёма шарика, когда его скорость обращается в ноль. Таким образом, в момент, когда проекция скорости на вертикальную ось равна нулю, модуль проекции ускорения на вертикальную ось равен модулю ускорения свободного падения $g \approx 10$ м/с^2.

Проекция ускорения на вертикальную ось — это угловой коэффициент касательной к графику проекции скорости. Построением находим (рис. 3.9) угловой коэффициент касательной, проведённой к графику в точке, где проекция скорости шарика обращается в ноль:

$$\frac{4\ \text{деления}}{2\ \text{с}} = 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

значит, одно деление вертикальной оси соответствует 5 м/с, модуль начальной скорости шарика $v_0 = 35$ м/с, а модуль скорости, с которой шарик упал на землю, равен $v = 20$ м/с.

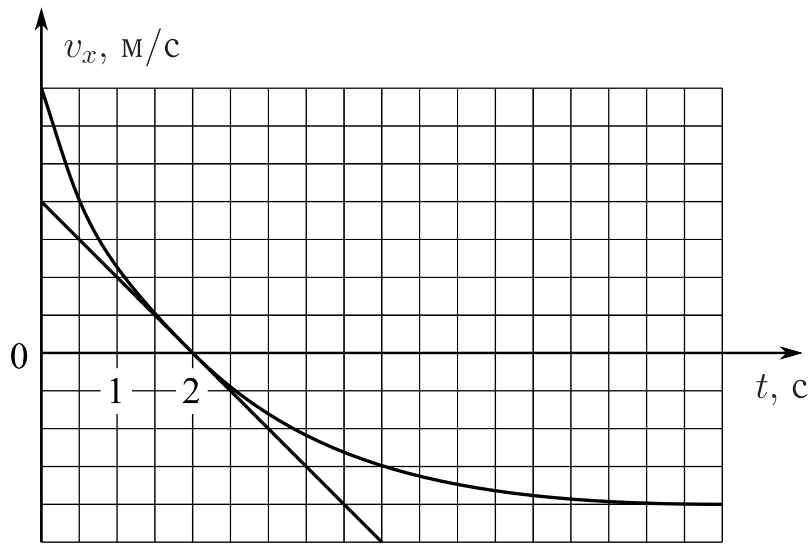

Рисунок 3.9 — к решению задачи.

Кинематические связи.

Кинематическими связями называют ограничения, накладываемые на возможные движения тел системы, а значит — и на кинематические величины (скорости, координаты, ускорения) тел системы. Эти ограничения появляются в силу свойств системы тел. В задачах школьного курса физики обычно встречаются следующие физические модели, каждая из которых подразумевает соответствующий вид кинематической связи:

1. Нерастяжимая нить.

2. Абсолютно твёрдое тело.

3. Движение без проскальзывания.

4. Скольжение по поверхности без отрыва.

Рассмотрим соответствующие этим моделям кинематические связи.

Нерастяжимая нить.

Для решения задач, в которых фигурируют нерастяжимые нити, зачастую нужно записать условие постоянства длины нити. Особенно часто это требуется при рассмотрении задач о движении блоков.

Задача 13. Скорость груза A равна v_A (рис. 3.10). Чему равна скорость груза B? [25]

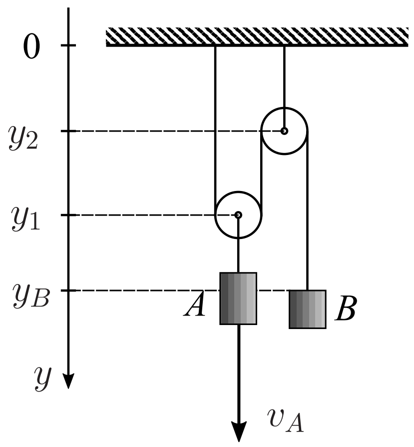

Рисунок 3.10 — к задаче о скорости груза.

Решение. Направим ось y вертикально вниз. В качестве нулевой координаты выберем уровень точек крепления нитей. Пусть y_1 — координата центра левого блока, y_2 — координата центра правого блока, а y_B — координата точки подвеса груза B. Выразим длину l нити, к которой прикреплён груз B:

$$l = y_1 + (y_1 - y_2) + (y_B - y_2) + \pi(r_1 + r_2),$$

где r_1, r_2 — радиусы блоков. Если нить нерастяжимая, то её длина не должна меняться:

$$\frac{dl}{dt} = 0 = 2\frac{dy_1}{dt} + \frac{dy_B}{dt}.$$

В записанном выражении учтёно, что радиусы блоков и координата центра правого (неподвижного) блока не меняются, следовательно производные этих величин по времени равны нулю. Остаётся учесть, что dy_1/dt — это скорость центра левого (подвижного) блока, которая равна скорости груза A уже в силу нерастяжимости нити, на которой подвешен груз A, а dy_B/dt — это скорость груза B. Окончательно:

$$v_B = -2v_A.$$

Решение этой несложной задачи хорошо иллюстрирует метод, позволяющий находить уравнение кинематической связи для скоростей в различных системах блоков при условии нерастяжимости нитей. Таким же методом можно при необходимости получить и уравнение кинематической связи для ускорений: достаточно второй раз продифференцировать полученное уравнение для скоростей. Также при рассмотрении систем с нерастяжимыми нитями следует помнить о том, что какая-либо нить в процессе движения тел может провиснуть. Все соотношения, полученные изложенным выше методом, справедливы до тех пор, пока натянуты все нити, условие постоянства длины которых используется при записи соответствующих уравнений.

Существуют задачи с нерастяжимыми нитями, в которых скорости концов нити не параллельны самой нити. Тогда удобно воспользоваться следующим соображением: производная от длины нити по времени есть разность проекций скоростей концов нити на направление нити. Поскольку длина нити не изменяется, то и вышеупомянутая разность должна быть равна нулю. То есть проекции скоростей концов нити на направление нити должны быть равны друг другу. Это утверждение справедливо, опять таки, до тех пор, пока нить остаётся натянутой.

Задача 14. Человек, стоящий на крутом берегу озера, тянет за веревку находящуюся на воде лодку. Скорость, с которой человек выбирает верёвку, постоянна и равна v_0. Какую скорость v будет иметь лодка в момент, когда угол между верёвкой и вертикалью равен α? [26]

Решение. Поскольку лодка плывёт по озеру, её скорость должна быть направлена горизонтально (рис. 3.11). Воспользуемся условием равенства проекций скоростей концов верёвки на направление верёвки:

$$v\cos\alpha = v_0, \quad \text{откуда} \quad v = \frac{v_0}{\cos\alpha}.$$

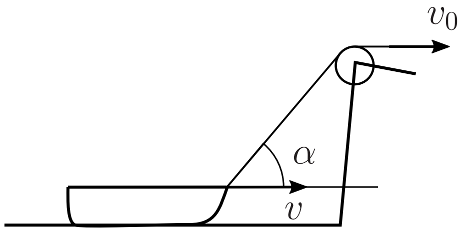

Рисунок 3.11 — к задаче о лодке.

Абсолютно твёрдое тело.

Тело называется абсолютно твёрдым, если расстояние между любыми двумя его точками не изменяется со временем. Значит, любые две точки такого тела не могут приближаться друг к другу или удаляться друг от друга. Скоростью сближения точек является разность проекций их скоростей на прямую, их соединяющую (рис. 3.12). Следовательно, в абсолютно твёрдом теле проекции скоростей любых двух точек на прямую, соединяющую эти точки, должны быть одинаковыми:

$$v_1\cos\alpha = v_2\cos\beta.$$

Ограничения, накладываемые на распределение скоростей в абсолютно твёрдом теле, можно сформулировать и иным образом: в любой момент времени абсолютно твёрдое тело либо движется поступательно (или покоится), либо совершает вращение относительно некоторой оси. Положение этой оси может меняться с течением времени (её называют мгновенной осью вращения), также могут меняться модуль и направление угловой скорости. Если речь идёт о плоскопараллельном движении тела, то иногда используется понятие «мгновенного центра вращения», под которым понимается

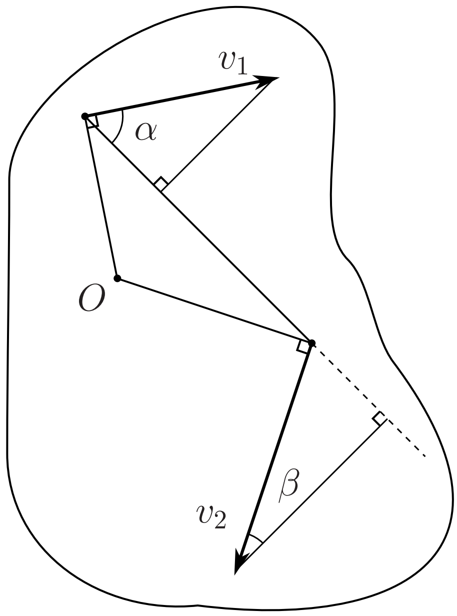

Рисунок 3.12 — скорости точек абсолютно твёрдого тела.

пересечение оси вращения с плоскостью, в которой движется тело. Положение мгновенного центра вращения можно найти как точку пересечения перпендикуляров, восстановленных к векторам скоростей двух каких либо точек абсолютно твёрдого тела (точка O на рисунке 3.12).

Задача 15. Нижний край опирающейся о стену лестницы скользит по полу со скоростью $v_B = 2$ м/с. Определите скорость верхнего края лестницы, когда она образует со стеной угол $\alpha = 60°$. [26]

Решение. Когда верхний край лестницы A образует со стеной угол $\alpha = 60°$, то нижний край лестницы B образует со стеной угол $\beta = 90° - \alpha = 30°$ (рис. 3.13). Так как проекции скоростей точек A и B на направление лестницы должны быть равными, то

$$v_A \cos\alpha = v_B \cos\beta,$$

откуда скорость верхнего края лестницы

$$v_A = v_B \frac{\cos 30°}{\cos 60°} \approx 3{,}5 \text{ м/с}.$$

Эту задачу можно решить и методом нахождения мгновенного центра вращения. В точках A и B восстановим перпендикуляры к векторам скоростей этих точек (модуль скорости верхнего края по условию неизвестен, но направлена эта скорость должна быть вертикально). Точка O пересечения перпендикуляров и есть мгновенный центр вращения. Пусть вращение в данный момент происходит с угловой скорость ω. Тогда $v_A = \omega \cdot OA$, $v_B = \omega \cdot OB$, откуда

$$v_A = v_B \frac{OA}{OB} = v_B \operatorname{ctg} \alpha \approx 3{,}5 \text{ м/с}.$$

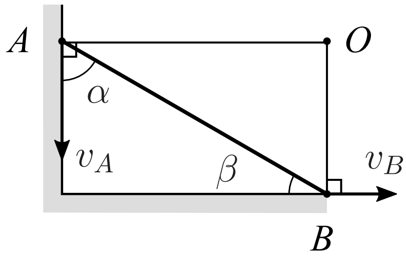

Рисунок 3.13 — к решению задачи о лестнице.

Движение без проскальзывания.

Отсутствие проскальзывания между двумя соприкасающимися поверхностями означает то, что скорости точек соприкосновение этих поверхностей должны быть одинаковыми. Обычно с условием отсутствия проскальзывания приходится сталкиваться при решении задач по теме «Вращательное движение».

Задача 16. Катушка с намотанной на ней нитью лежит на горизонтальном столе и может катиться по нему без скольжения. Внутренний радиус катушки равен r, внешний R. С какой скоростью u будет перемещаться ось катушки, если конец нити тянуть в горизонтальном направлении со скоростью v (рис. 3.14)? [26]

Решение. В этой задаче есть три кинематических связи. Во-первых, отсутствует проскальзывание катушки по столу, следовательно, скорость нижней точки катушки (точки C на рисунке 3.14) должна быть равна нулю. Во-вторых, нить предполагается нерастяжимой и считается, что намотанная на катушку часть нити не проскальзывает по катушке. Следовательно, проекция скорости точки B катушки на направление нити должна быть равна

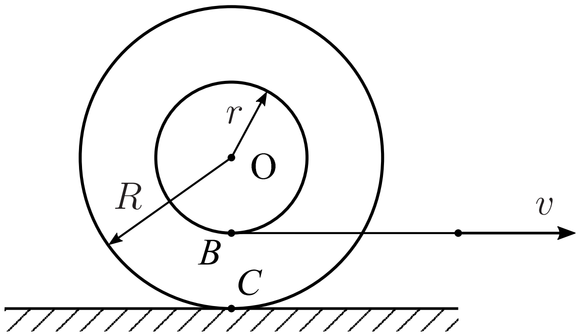

Рисунок 3.14 — к задаче о катушке.

скорости второго конца нити v. В-третьих, катушку следует считать абсолютно твёрдым телом, а это означает, что существует мгновенный центр вращения, которым является точка C — ведь её скорость равна нулю.

Поскольку точка C является мгновенным центром вращения, то скорость точки B катушки должна быть перпендикулярна отрезку BC, то есть направлена горизонтально. Следовательно, проекция скорости точки B равна модулю этой скорости, и, в силу нерастяжимости нити, равна v. Зная модуль скорости точки B можно рассчитать угловую скорость вращения катушки $\omega = v/|BC|$. Значит, скорость оси катушки

$$u = \omega R = \frac{R}{R - r} v,$$

и направлена в ту же сторону, в которую тянут нить.

Скольжение по поверхности без отрыва.

Если материальная точка движется по некоторой поверхности без отрыва от неё, то скорость этой материальной точки должна быть направлена по касательной к поверхности. Это означает, что должны быть равными проекции скоростей материальной точки и поверхности на перпендикуляр к поверхности, проведённый в точке, где в данный момент находится тело. Если поверхность плоская, должны быть равными и проекции ускорений материальной точки и поверхности. Для искривлённых поверхностей последнее утверждение не будет справедливым в силу наличия центростремительного ускорения.

Задача 17. Вектор скорости монеты, соскальзывающей с клина, изображен на рисунке 3.15. Клин движется по горизонтальному столу. Графическим построением найдите вектор скорости клина.

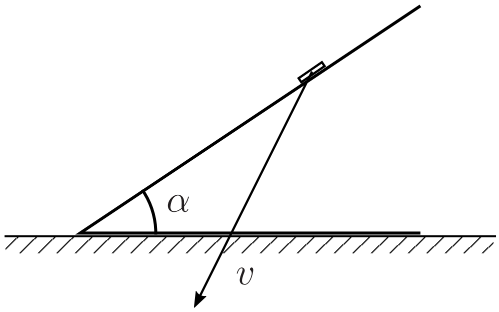

Рисунок 3.15 — к условию задачи о монете, соскальзывающей с клина.

Решение. Воспользуемся условием равенства проекций скоростей монеты и клина на перпендикуляр к поверхности клина. Перпендикуляр удобнее опустить из конца вектора скорости монеты $\vec{v}$ (рис. 3.16). Поскольку клин движется по горизонтальному столу, то скорость клина также должна быть направлена горизонтально. Значит, вектор скорости клина $\vec{u}$ нужно строить от конца вектора $\vec{v}$ до пересечения с продолжением плоскости клина, как показано на рисунке.

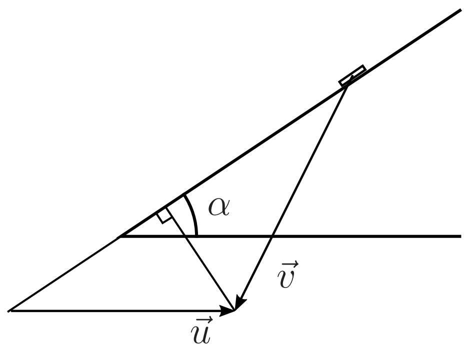

Рисунок 3.16 — к решению задачи о монете, соскальзывающей с клина.

Динамика.

Использование понятия импульса.

Как известно, изменение импульса механической системы за некоторый промежуток времени равно импульсу суммы внешних сил, действующих на данную систему. Если внешние силы в течение некоторого промежутка времени отсутствуют, или их суммарный импульс за данный промежуток времени равен нулю, то импульс механической системы в течение указанного промежутка сохраняется неизменным. При решении некоторых задач удобно находить изменение проекции вектора импульса на определённую ось. Отдельно следует отметить, что закон сохранения или изменения импульса справедлив только для инерциальных систем отсчёта.

Закон сохранения импульса в задачах о столкновении тел.

В задачах о столкновении тел обычно можно приравнять начальный импульс системы (до столкновения) к конечному импульсу системы (после столкновения), поскольку во время столкновения на тела не действуют внешние силы, либо импульсом внешних сил можно пренебречь в силу малости времени соударения.

Задача 18. Частица массой m_1, имеющая скорость v, налетела на покоящееся тело массой m_2 и отскочило от него со скоростью u под прямым углом к направлению первоначального движения. Какова скорость тела массой m_2? [25]

Решение. Пусть $\vec{v}$ — вектор начальной скорости частицы, $\vec{u}$ — вектор конечной скорости частицы, $\vec{w}$ — вектор конечной скорости тела. По закону сохранения импульса:

$$m_1\vec{v} = m_1\vec{u} + m_2\vec{w}, \quad \text{откуда} \quad \vec{w} = \frac{m_1}{m_2}\left(\vec{v} - \vec{u}\right).$$

По условию задачи конечная скорость частицы перпендикулярна начальной, следовательно, модуль разности $\vec{v} - \vec{u}$ можно найти при помощи теоремы Пифагора, и искомый модуль конечной скорости тела массой m_2 равен

$$w = \frac{m_1}{m_2}\sqrt{v^2 + u^2}.$$

Импульс силы.

Если на механическую систему действуют внешние силы, то её импульс будет изменяться. Это изменение равно импульсу суммы этих сил, то есть интегралу от равнодействующей силы по времени. При решении некоторых задач метод нахождения импульса силы оказывается весьма удобным.

Задача 19. Тело малых размеров массой m бросают с очень большой высоты с начальной скоростью v_0, направленной горизонтально. На каком расстоянии L по горизонтали от точки броска упадёт тело, если сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости тела $F_{\text{c}} = kv$?

Решение. Рассмотрим движение тела в проекции на горизонтальную ось X. Проекция начальной скорости $v_{0x} = v_0$, проекция силы тяжести равна нулю, проекция силы сопротивления воздуха равна $-kv_x$, где v_x — проекция скорости тела в данный момент времени. Поскольку бросок был произведён с очень большой высоты, проекцию конечной скорости тела на горизонтальную ось можно считать равной нулю.

Найдём проекцию импульса силы сопротивления за небольшой промежуток времени Δt:

$$\Delta p_{(F_x)} = F_x \Delta t = -kv_x \Delta t = -k\Delta x,$$

где Δx — смещение тела по горизонтали за время Δt. Получается, что полное смещение тела по горизонтали пропорционально проекции на горизонталь импульса силы сопротивления, которую можно найти, зная изменение импульса тела:

$$L = -\frac{\Delta p_{(F_x)}}{k} = -\frac{0 - mv_0}{k} = \frac{mv_0}{k}.$$

Задача 20. Ящик с песком общей массой M лежит на горизонтальной плоскости, коэффициент трения с которой равен μ. Под углом α к вертикали в ящик со скоростью v влетает пуля массой m и почти мгновенно застревает в песке. Найдите скорость ящика сразу после попадания в него пули. [25]

Решение. В данной задаче нельзя применять закон сохранения импульса для процесса застревания пули, поскольку на ящик действует сила реакции опоры (складывающаяся из нормальной силы реакции N и силы трения скольжения μN). И хотя в условии сказано, что пуля застревает почти мгновенно, модуль силы реакции в этом процессе может достигать больших значений, поэтому её импульсом пренебрегать нельзя.

Сила нормальной реакции «гасит» весь вертикальный импульс пули, значит, импульс этой силы $mv\cos\alpha$. Следовательно, импульс силы трения скольжения равен $\mu mv\cos\alpha$. Теперь можно найти горизонтальную скорость u ящика сразу после попадания в него пули (вертикальной составляющей у скорости ящика, естественно, не будет):

$$(M+m)u - mv\sin\alpha = -\mu mv\cos\alpha,$$

откуда

$$u = \frac{mv}{M+m}\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right).$$

Заметим, что при $\operatorname{tg}\alpha \leq \mu$ ящик вообще не сдвинется с места.

Использование понятия о центре масс.

Из определения центра масс системы материальных точек следует, что полный импульс механической системы равен произведению скорости её центра масс и суммарной массы всех материальных точек, входящих в систему. В частности, если суммарный импульс системы равен нулю, то центр масс системы должен оставаться неподвижным, в то время как отдельные части системы могут изменять своё положение. Использование этих свойств и лежит в основе метода решения соответствующих задач с использованием понятия центра масс.

Задача 21. На гладкой горизонтальной поверхности лежит обруч массой M и радиусом R. На обруче сиди жук массой m. По каким траекториям будут двигаться жук и центр обруча, если жук поползёт по обручу? [26]

Решение. Сумма всех внешних сил, действующих на обруч и на жука, равна нулю в любой момент времени. Значит, суммарный импульс обруча и жука должен оставаться постоянным (и равным нулю), следовательно, центр масс системы должен быть неподвижным. Центр масс находится на отрезке, соединяющем жука и центр обруча. Он находится на расстоянии $r_1 = MR/(M+m)$ от жука и $r_2 = mR/(M+m)$ от центра обруча. В процессе движения расстояние между жуком и центром обруча будет всегда равно R, следовательно, и жук и центр обруча будут двигаться по окружностям вокруг центра масс: жук будет описывать окружность радиусом r_1, а обруч — радиусом r_2.

Применение законов сохранения и изменения механической энергии.

В инерциальных системах отсчёта изменение механической энергии системы равно сумме работ внутренних неконсервативных сил и внешних сил. Если внутренние неконсервативные силы и внешние силы отсутствуют, или их суммарная работа равна нулю, то полная механическая энергия системы сохраняется.

Применение закона сохранения механической энергии является мощным методом решения задач. Но, используя его, важно помнить о том, что энергия системы может скачком изменяться при ударах, толчках и тому подобных быстро протекающих процессах.

Движение тел в поле силы тяжести.

В поле силы тяжести любое массивное тело обладает потенциальной энергией. Если ускорение свободного падения $\vec{g}$ во всех точках пространства можно считать одинаковым, то есть поле силы тяжести однородно, то выражение для изменения потенциальной энергии тела приобретает особенно простой вид: $\Delta U = mg\Delta h$, где m — масса тела, h — изменение высоты тела (вдоль направления действия силы тяжести).

Задача 22. В машине Атвуда (рис. 3.17) массы грузов равны m_1 и m_2, блок и нити невесомы, трение отсутствует. Вначале более тяжёлый груз m_1 удерживают на высоте h над горизонтальной плоскостью, а груз m_2 стоит на этой плоскости, причём отрезки нити, не лежащие на блоке, вертикальны. Затем грузы отпускают без начальной скорости. Найдите, на какую максимальную высоту поднимется груз m_1 после абсолютно неупругого удара о плоскость, если нить можно считать гибкой, неупругой и практически нерастяжимой. Ускорение свободного падения равно g, блок находится достаточно далеко от грузов.

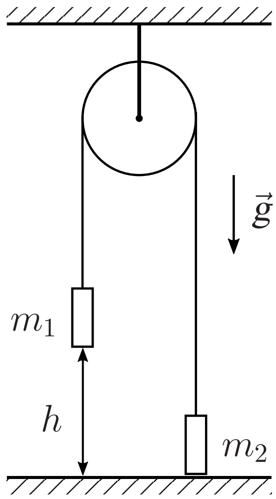

Рисунок 3.17 — машина Атвуда.

Решение. Поскольку грузы соединены практически нерастяжимой нитью, на первом этапе движения их скорости будут равными по модулю. Пусть непосредственно перед ударом модули скоростей грузов равны v. До удара полная механическая энергия системы не изменялась:

$$m_1gh = m_2gh + \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2}, \quad \text{откуда} \quad v = \sqrt{2\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}gh}.$$

После удара груз массой m_1 остановится, а второй груз будет двигаться как тело, брошенное со скоростью v вертикально вверх, нить при этом перестанет быть натянутой. Поднявшись до некоторой высоты, второй груз начнёт падать, и когда он вновь окажется на высоте h над горизонтальной плоскостью, модуль его скорости снова будет равен v. Нить натянется и произойдёт рывок, приводящий в движение груз m_1. К процессу рывка закон сохранения механической энергии не применим, но применим закон сохранения момента импульса. Причём, из условия нерастяжимости нити следует, что после рывка скорости грузов должны быть равными по модулю:

$$m_2 v = (m_1 + m_2) v_1,$$

где v_1 — модуль скоростей грузов после рывка. Высоту h_1, на которую поднимется более массивный груз, найдём из закона сохранения механической энергии:

$$m_2 g h + \frac{(m_1 + m_2) v_1^2}{2} = m_1 g h_1 + m_2 g (h - h_1).$$

Окончательно,

$$h_1 = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 h.$$

Движение тел при наличии пружин.

Если деформация пружины подчиняется закону Гука, то пружина обладает потенциальной энергией $U = kx^2/2$, где k — коэффициент жёсткости пружины, x — величина сжатия или растяжения пружины.

Рассмотрим класс задач, в которых массивный груз подвешен на лёгкой вертикальной пружине. В таких системах есть два вида потенциальной энергии: энергия упругой деформации пружины и энергия груза в поле силы тяжести. Обычно в качестве переменной в таких задач выбирают величину деформации пружины x, и тогда выражение для потенциальной энергии системы можно записать в виде:

$$U = \frac{kx^2}{2} - mgx.$$

В данном случае за ноль потенциальной энергии выбрано положение, при котором пружина не деформирована, а координатная ось X направлена вниз. Если же в качестве переменной величины принять отклонение груза от положения равновесия, то есть

$$y = x - \frac{mg}{k},$$

то выражение для потенциальной энергии примет более простой вид:

$$U = \frac{ky^2}{2}.$$

Здесь за уровень, от которого отсчитывается потенциальная энергия, принято уже положение равновесия тела. Часто такой выбор переменной оказывается более удобным.

Задача 23. Тело массой m, подвешенное на пружине жёсткостью k, лежит на горизонтальной доске таким образом, что пружина не деформирована. Доску начинают опускать с постоянным ускорением a. Чему равно удлинение пружины в момент отрыва тела от доски? Каково максимальное удлинение пружины? [25]

Решение. В момент отрыва тела от доски сила взаимодействия доски и тела обращается в ноль, а ускорение тела всё ещё равно ускорению доски. Пусть в этот момент удлинение пружины равно x_1. Запишем для тела второй закон Ньютона в проекции на ось, направленную вертикально вниз:

$$mg - kx_1 = ma, \quad \text{откуда} \quad x_1 = \frac{m}{k}(g - a).$$

До отрыва от доски тело, двигаясь с постоянным ускорением a без начальной скорости, прошло путь x_1. Пусть скорость тела в момент отрыва равна v_0, тогда

$$x_1 = \frac{v_0^2}{2a}, \quad \text{откуда} \quad v_0^2 = 2a(g - a)\frac{m}{k}.$$

В момент, когда удлинение пружины будет максимальным, скорость тела будет равна нулю. Запишем закон сохранения механической энергии, но в качестве переменной возьмём теперь отклонение тела от положения равновесия $y = x - (mg/k)$:

$$\frac{k}{2}\left(x_1 - \frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{mv_0^2}{2} = \frac{ky_{\max}^2}{2}, \quad \text{откуда} \quad y_{\max} = \frac{m}{k}\sqrt{(2g - a)a}.$$

Максимальное удлинение пружины в процессе движения:

$$x_{\max} = \frac{m}{k}\left(\sqrt{(2g-a)a}+g\right).$$

Учёт работы неконсервативных сил.

Если в системе действуют неконсервативные силы, то для того, чтобы находить изменение механической энергии системы, нужно вычислять работу этих сил. При решении задач, встречающихся при изучении школьного курса механики, чаще всего приходится находить работу силы трения. Приведём ряд методических рекомендаций по решению подобных задач. Во-первых, сила трения скольжения изменяет своё направление при изменении направления движения тела. Поэтому при нахождении работы силы трения нужно умножать модуль силы трения на путь, пройденный телом, а не на его перемещение. Во-вторых, для нахождении суммарной работы внутренних для системы сил трения нужно учитывать только относительное смещение двух трущихся поверхностей. Смысл последнего утверждения проще всего пояснить на примере следующей задачи.

Задача 24. На гладкой горизонтальной поверхности лежит доска длиной L и массой M. На краю доски покоится небольшой брусок. На брусок начинает действовать постоянная горизонтальная сила, так что он движется вдоль доски с ускорением, которое больше ускорения доски, и соскальзывает с неё. Найдите ускорение, с которым двигалась доска, если за время движения по ней бруска выделилось количество теплоты Q. [34]

Решение. В системе действуют две силы трения: одна сила действует на брусок, а другая — на доску. По третьему закону Ньютона эти силы равны по модулю и противоположны по направлению. Пусть ось x сонаправлена с силой, действующей на брусок, x_1 — координата бруска, x_2 — координата доски, F — модуль указанных сил трения. Сумма элементарных работ сил трения при малых смещениях доски и бруска равна

$$dA = dA_1 + dA_2 = -F dx_1 + F dx_2 = -F(dx_1 - dx_2) = -dQ,$$

где dQ — количество теплоты, выделившееся при соответствующих смещениях. Видно, что это количество теплоты зависит только от *относительного* смещения доски и бруска. А смещение бруска относительно доски за всё время движения равно длине доски L. Это означает, что $Q = FL$. Поскольку сила трения является единственной горизонтальной силой, действующей на доску, то модуль этой силы можно связать с модулем ускорения доски: $F = Ma$. Окончательно,

$$a = \frac{Q}{ML}.$$

В завершение отметим, что как количество теплоты, так и относительное смещение тел являются величинами, инвариантными относительно выбора инерциальной системы отсчёта. Это соображение также бывает полезным при решении задач.

Вращательное движение.

Если применение закона сохранения механической энергии требуется в случае, когда некоторое тело совершает вращательное движение, для расчёта кинетической энергии такого тела используется теорема Кёнига: кинетическая энергия механической системы есть сумма энергии центра масс (кинетической энергии, которой обладала бы система, если бы двигалась поступательно со скоростью центра масс) и энергии движения относительно центра масс (кинетической энергии в системе отсчёта, движущейся поступательно со скоростью центра масс).

Задача 25. На тонкостенный цилиндр намотана нить, конец которой закреплён на стойке так, что при соскальзывании цилиндра с наклонной плоскости нить остаётся параллельной этой наклонной плоскости (рис. 3.18). Какую скорость приобрёл изначально покоившийся цилиндр, если его ось прошла расстояние l? Угол наклона плоскости α, коэффициент трения между плоскостью и цилиндром μ. [25]

Решение. Поскольку конец нити неподвижно закреплён, то скорость всех точек прямого участка нити должна быть равна нулю. Следовательно, ско-

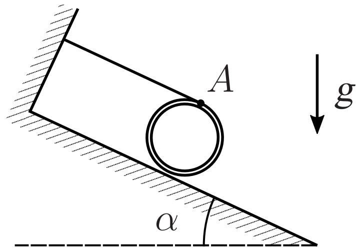

Рисунок 3.18 — тонкостенный цилиндр, скатывающийся по наклонной плоскости.

рость точки A цилиндра равна нулю, и эта точка является мгновенным центром вращения. Значит, скорость точки касания цилиндра и плоскости в любой момент времени в два раза больше скорости оси цилиндра. За время, пока ось цилиндра прошла расстояние l, сила трения совершила отрицательную работу, равную $-\mu mg\cos\alpha \cdot 2l$, сила тяжести совершила работу $mg\sin\alpha \cdot l$.

Пусть ось цилиндра приобрела скорость v, тогда энергия поступательного движения центра масс цилиндра равна $mv^2/2$, а энергия его вращательного движения (относительно центра масс) равна $mv^2/2$ — поскольку относительно центра скорость всех точек цилиндра одинакова и равна v. Значит, кинетическая энергия цилиндра равна mv^2, и по теореме о кинетической энергии:

$$mv^2 = mg\sin\alpha l - 2\mu mg\cos\alpha l, \quad \text{откуда} \quad v = \sqrt{gl(\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha)}.$$

Применение графиков для решения задач по теме «Закон сохранения механической энергии.

Часто применяемым методом решения задач, в которых требуется найти работу некоторой силы, является нахождение площади под графиком зависимости силы от перемещения точки приложения силы. Рассмотрим несколько примеров задач, при решении которых используется этот метод.

Задача 26. Если к пружине по очереди подвешивать грузы массами m_1 и m_2, то её длина в равновесном состоянии оказывается равной L_1 и L_2. Какую работу нужно совершить для того, чтобы растянуть пружину от длины L_1 до длины L_2?

Решение. При длине пружины L_1 сила упругости пружины равна m_1g, а при длине L_2 эта сила равна m_2g. Построим график зависимости силы упругости от дины пружины (рис. 3.19). Искомая работа равна площади закрашенной трапеции:

$$A = \frac{m_1g + m_2g}{2}(L_1 - L_2).$$

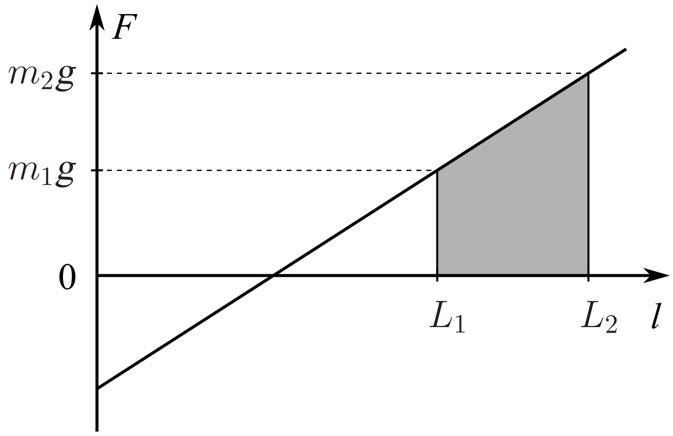

Рисунок 3.19 — к задаче о нахождении работы, требующейся для растяжения пружины.

Задача 27. Горизонтальная платформа массой $M = 300$ г подвешена на резиновом жгуте AB (рис. 3.20). Жгут проходит сквозь отверстие в грузе массой $m = 100$ г. Система находится в равновесии. Затем груз отпускают без начальной скорости с высоты h относительно платформы. Найдите, при каком минимальном значении h жгут порвётся, если его максимальное допустимое удлинение $x_{\text{к}} = 8$ см. Зависимость силы натяжения жгута от его удлинения $F(x)$ приведена на графике (рис. 3.21). Удар груза о платформу можно считать абсолютно неупругим. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2. [10]

Решение. До столкновения платформы с шариком жгут растянут на некоторую начальную величину, и сила натяжения жгута уравновешивает силу

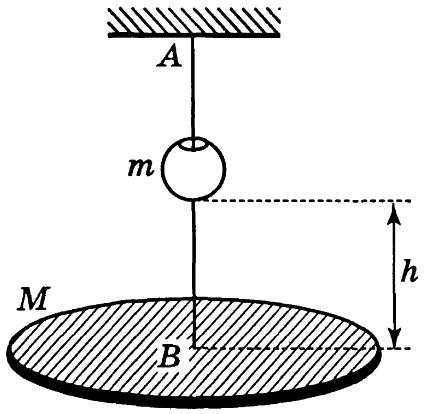

Рисунок 3.20 — платформа, подвешенная на жгуте.

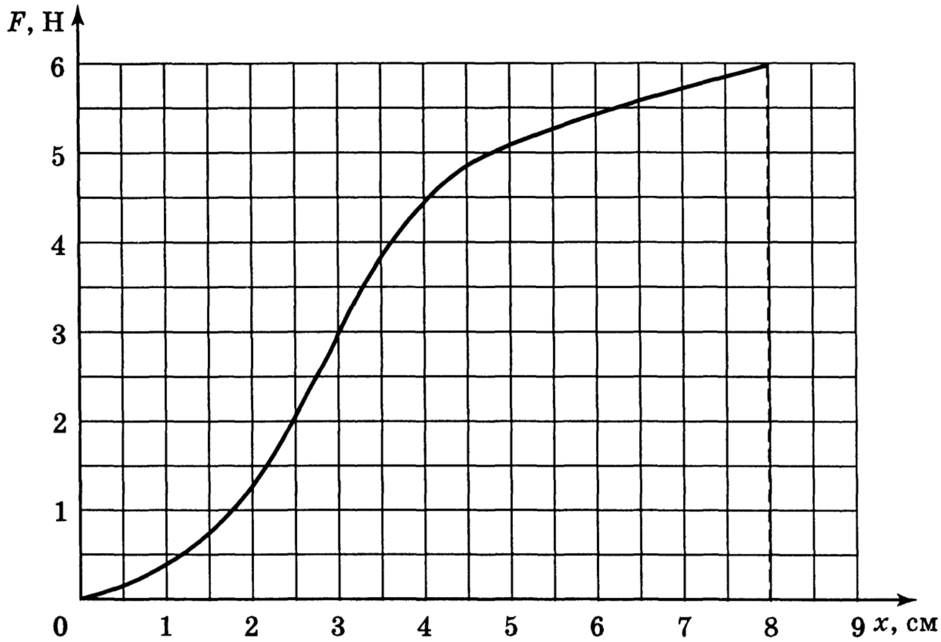

Рисунок 3.21 — график зависимости силы натяжения жгута от его удлинения.

тяжести, действующую на платформу: $F(x_н) = Mg = 3$ Н. Из графика находим, что $x_н = 3$ см.

Пусть E_1 — суммарная кинетическая энергия платформы и груза сразу после соударения, A — работа, которую нужно совершить для того, чтобы растянуть жгут от начального удлинения $x_н$ до конечного $x_к$. Минимальную высоту h найдём из условия равенства нулю скорости платформы и груза в момент, когда жгут порвётся. Запишем закон сохранения механической энергии:

$$E_1-(M+m)\boldsymbol{g}x_\text{н} = A-(M+m)\boldsymbol{g}x_\text{к}, \quad \text{откуда} \quad E_1 = A-(M+m)\boldsymbol{g}(x_\text{к}-x_\text{н}).$$

Работу A найдём, вычислив площадь под соответствующим участком графика: $A \approx 0{,}25$ Дж. Тогда $E_1 \approx 0{,}05$ Дж. Пусть u — скорость платформы и груза сразу после соударения, тогда $E_1 = (M+m)u^2/2$. Из закона сохранения импульса найдём скорость груза непосредственно перед ударом: $v = u(M+m)/m$, а высоту h найдём из закона сохранения энергии, записанного для груза в процессе его падения:

$$mgh = \frac{mv^2}{2}, \quad \text{откуда} \quad h = \frac{M+m}{m}\frac{E_1}{mg} \approx 20 \text{ см}.$$

Статика.

Гидростатика.

Нахождение уровня жидкости в сосуде путем определения силы давления на его дно.

Данный метод применяется для решения гидростатических задач, в которых требуется найти изменение уровня жидкости в сосуде при изменении состояния или глубины погружения плавающих в этом сосуде тел. Суть метода заключается в нахождении силы давления на дно сосуда двумя способами: как произведение гидростатического давления на площадь дна сосуда и из условия равенства нулю суммы всех сил, действующих на содержимое сосуда.

Рассмотрим применение этого метода для решения двух задач: одной классической и одной более сложной.

Задача 28. В стакане плавает кусок льда. Как изменится уровень воды, когда лёд растает? Изменится ли ответ, если во льду находится кусок пробки? Стальная гайка? [26]

Решение. После того, как лёд растает, масса содержимого стакана не изменится, следовательно, не изменится и сила давления жидкости на дно, значит, не изменится и уровень воды в стакане. Такие же рассуждения справедливы и для случая, когда во льду находится кусок пробки. В третьем случае до того, как лёд растаял, на дно действовала только сила давления жидкости, а после таяния действует ещё и сила давления утонувшей гайки. А поскольку масса содержимого не изменилась, то не должна была измениться суммарная сила давления. Значит, сила давления воды уменьшилась, следовательно, уровень воды в стакане понизился.

Задача 29. В цилиндрическом сосуде с водой находятся связанные нитью кусок льда и брусок массой $m = 2$ кг и объёмом $V = 3$ л. Нить перекинута через закреплённый над сосудом неподвижный блок. Как и насколько изменится уровень воды в сосуде, когда лёд растает, если сначала брусок погружен в воду наполовину? Площадь дна сосуда $S = 100$ см^2. Плотность воды $\rho = 1{,}00$ г/см^3, ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2. [30]

Решение. Рассмотрим систему «вода + льдинка + брусок». На эту систему действуют следующие внешние силы: сила натяжения нити T, действующая на льдинку; сила натяжения нити T, действующая на брусок; сила тяжести, действующая на льдинку; сила тяжести, действующая на брусок; сила тяжести, действующая на воду; и сила реакции дна N, действующая на воду (рис. 3.22). Сила реакции дна по модулю равна силе давления воды на дно:

$$N = \rho g h S,$$

где h — уровень воды в сосуде.

После того, как льдинка растает, изменятся только три внешние силы: пропадут обе силы натяжения нити и, следовательно, сила реакции дна увеличится на

$$\Delta N = 2T.$$

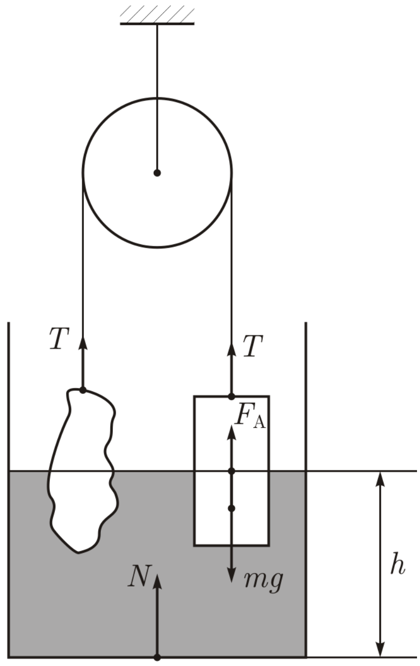

Рисунок 3.22 — внешние силы, действующие на содержимое сосуда до таяния льдинки.

Значит, изменение уровня воды

$$\Delta h = \frac{\Delta N}{\rho g S} = \frac{2T}{\rho g S}.$$

Силу натяжения T найдём из условия равновесия бруска:

$$T + F_A = mg, \quad \text{откуда} \quad T = mg - F_A.$$

Действующая на брусок сила Архимеда равна

$$F_A = \rho g \frac{V}{2}.$$

Окончательно,

$$\Delta h = \frac{2m - \rho V}{\rho S} = 10 \text{ см}.$$

Точка приложения силы Архимеда.

Для нахождения точки приложения силы Архимеда, действующей на некоторое тело, нужно мысленно заменить погруженную часть тела на жидкость и найти центр тяжести этого объёма жидкости. Нахождение точки приложения силы Архимеда требуется для решения некоторых задач гидростатики.

Задача 30. Школьники решили сконструировать модель корабля. Они разрезали цилиндрическую трубу радиусом R и длиной $L \gg R$ вдоль её оси по диаметру, а борта, корму и нос соорудили из подручных материалов. Масса получившейся модели равна M. Центр масс C корабля оказался расположенным на расстоянии H выше оси O трубы. Над местом соединения бортов с трубой школьники расположили иллюминаторы (рис. 3.23).

Школьникам известно, что для того, чтобы корабль устойчиво держался на воде плотностью ρ, у самого дна нужно закрепить тяжёлый груз (балласт). Помогите школьникам рассчитать возможную массу m балласта. Учтите, что иллюминаторы должны находиться выше уровня воды. [30]

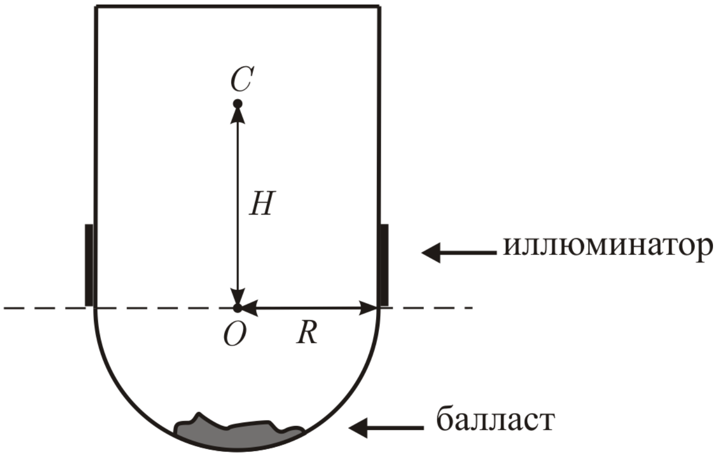

Рисунок 3.23 — модель корабля.

Решение. Пусть V_1 — объём погруженной в воду части корабля. Условие нахождения окон над уровнем воды записывается как

$$V_1 \leq \frac{\pi}{2} R^2 L,$$

где R — радиус трубы, а L — её длина. Условие плавания корабля записывается как

$$(m + M)g = \rho V_1 g.$$

Значит,

$$\frac{m+M}{\rho} \leq \frac{\pi}{2} R^2 L, \quad \text{откуда} \quad m \leq \frac{\pi}{2} R^2 L \rho - M.$$

Корабль должен находиться в устойчивом положении равновесия, то есть при отклонении на малый угол должен возникать возвращающий момент сил. Как нетрудно видеть из рисунка 3.24 это условие выполняется при нахождении центра масс корабля с грузом ниже оси трубы. Если отсчитывать координаты от точки O, то можно записать: $x_{\text{ц.м.}} \leq 0$. В соответствии с определением центра масс:

$$(m+M)x_{\text{ц.м.}} = MH - mR \leq 0, \quad \text{откуда} \quad m \geq M\frac{H}{R}.$$

В итоге получаем:

$$M\frac{H}{R} \leq m \leq \frac{\pi}{2}R^2L\rho - M.$$

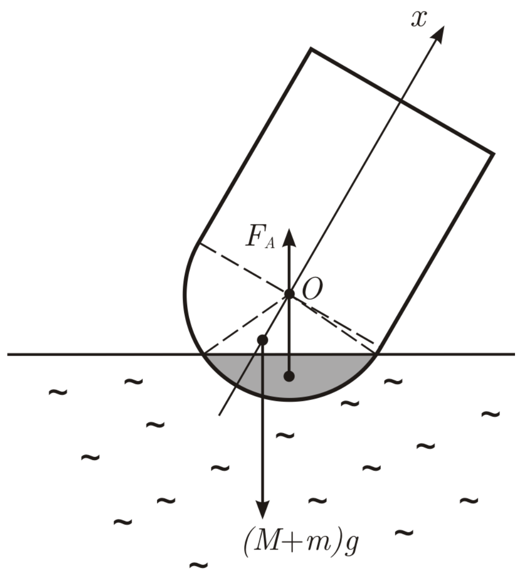

Рисунок 3.24 — модель корабля в наклонном положении.

Нахождение распределения давления в движущихся сосудах с жидкостью.

Для решения некоторых задач необходимо искать распределение давления в сосудах с жидкостью, движущихся с ускорением. Это можно сделать, выделяя некоторый объём жидкости и приравнивая сумму сил давления, действующих на этот объём, произведению массы жидкости на ускорение центра масс. Применим данный метод для решения следующей задачи.

Задача 31. Замкнутая стеклянная трубка с вертикальным отводом, погружённым в открытый сверху сосуд со ртутью, в своей верхней горизонтальной части содержит столбик воздуха. Его границы со ртутью находятся на одинаковых расстояниях R от оси симметрии системы, проходящей через отвод (рис. 3.25). Определите, с какой угловой скоростью нужно вращать систему вокруг этой оси для того, чтобы давление воздуха в столбике изменилось в n раз. Начальное давление воздуха p_0, температуру, плотность ртути ρ, её уровень в сосуде можно считать неизменным.

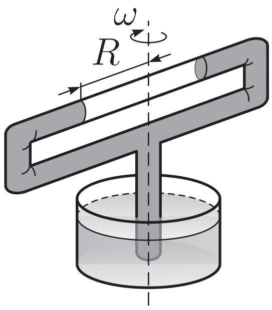

Рисунок 3.25 — трубка, частично заполненная ртутью.

Решение. Пусть во вращающейся трубке граница ртути и воздуха находится на расстоянии r от оси симметрии системы (рис. 3.26). Найдём изменение давления, вызванное вращением. Для этого рассмотрим отрезок AB нижней горизонтальной части трубки. Объём ртути в этом отрезке равен rS, где S — площадь поперечного сечения трубки. Центр масс рассматриваемого объёма ртути находится на расстоянии $r/2$ от оси вращения и движется с центростремительным ускорением $\omega^2 r/2$. Значит, на выделенный объём должна действовать сила $\rho S\omega^2 r^2/2$, направленная к оси вращения. Эта сила возникает из-за того, что давление в сечении A превышает давление в сечении B на величину

$$\Delta p = \frac{\rho\omega^2 r^2}{2}.$$

На столько же увеличится давление на расстоянии r от оси вращения в верхней части трубки. Это приведём к тому, что воздух в верхней части трубки сожмётся в n раз, а его давление, по закону Бойля-Мариотта, увеличится в

n раз. Получается, что $r = R/n$ и

$$\Delta p = (n-1)p_0 = \frac{\rho\omega^2 R^2}{2n^2}, \quad \text{откуда} \quad \omega = \frac{n}{R}\sqrt{\frac{2p_0(n-1)}{\rho}}.$$

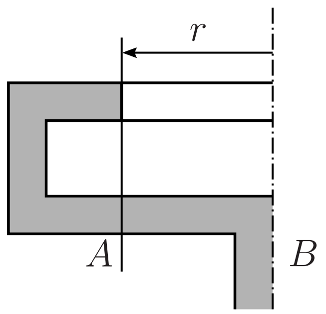

Рисунок 3.26 — к решению задачи о вращении трубки.

Теорема о трёх силах.

Согласно теореме о трёх силах, абсолютно твёрдое тело находится в равновесии под действием плоской системы трёх непараллельных сил только тогда, когда их линии действия пересекаются в одной точке. Применение теоремы о трёх силах делает решение задач статики проще и нагляднее.

Задача 32. Тонкий однородный стержень укреплён на шарнире в точке A и удерживается в равновесии горизонтальной нитью (рис. 3.27). Масса стержня $m = 1$ кг, угол его наклона к горизонту $\alpha = 45°$. Найдите модуль и направление силы N реакции шарнира.

Решение. На стержень действуют три силы: сила натяжения нити T, приложенная к точке крепления нити, сила тяжести mg, приложенная к центру масс стержня, и сила реакции шарнира N, приложенная к шарниру. По теореме о трёх силах линии действия этих сил пересекаются в одной точке. Условие равенства нулю суммы действующих на стержень сил изобразим графически в виде треугольника сил. Поскольку линия действия силы тяжести проходит через центр масс стержня вертикально, то

$$\operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{tg}\alpha = 2, \quad \text{следовательно} \quad \beta \approx 63{,}4°.$$

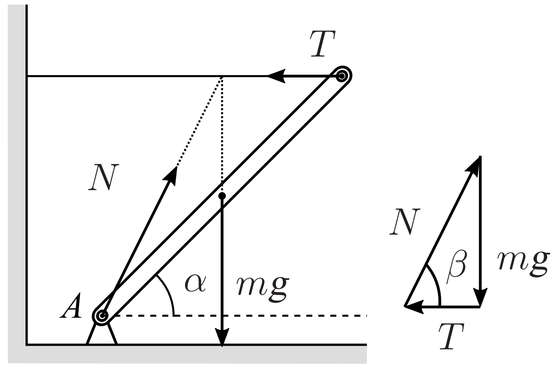

Рисунок 3.27 — применение теоремы о трёх силах для решения задачи о равновесии стержня.

Зная величину угла, который сила реакции составляет с горизонталью, можно рассчитать модуль силы реакции:

$$N = \frac{mg}{\sin\beta} = \frac{\sqrt{5}}{2}mg \approx 11 \text{ Н}.$$

Метод виртуальных перемещений.

Часто в задачах рассматриваются различные механические системы, на координаты и скорости точек которых наложены определённые ограничения, называемые связями. Положение системы, удовлетворяющее всем наложенным ограничениям, называется возможным. Малые перемещения из одного возможного в данный момент времени положения в другое возможное в тот же момент времени положение называются виртуальными перемещениями системы. Если суммарная работа всех сил реакции, возникающих из-за наличия связей, при любом возможном виртуальном перемещении равна нулю, то такие связи называются идеальными. В школьных задачах обычно рассматриваются системы именно с идеальными связями. Для таких систем справедливо следующее утверждение: система с идеальными связями находится в положении равновесия тогда и только тогда, когда суммарная работа внешних сил, действующих на систему, при любых виртуальных перемещениях равна нулю.

Метод виртуальны перемещений заключается в использовании данного утверждения для решения задач.

Задача 33. Найдите силу натяжения нити, связывающую оси шарниров верхнего ромба лёгкой шарнирной подвески (рис. 3.28). Масса груза m. [25]

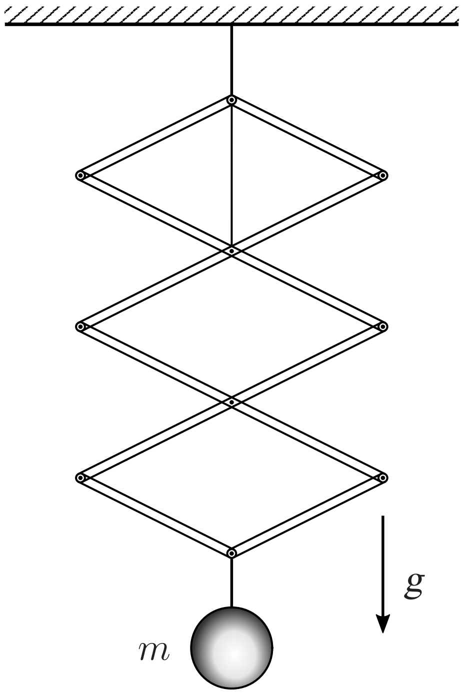

Рисунок 3.28 — нахождение силы натяжения нити методом виртуальных перемещений.

Решение. Будем рассматривать нить, связывающую оси шарниров верхнего ромба, не как связь, а как пару внешних сил, удерживающих систему в равновесии. Тогда существует следующее виртуальное перемещение системы: нижняя точка крепления нити опускается на Δx. Остальные оси шарниров также опускаются, а самая нижняя ось шарниров (точка, к которой подвешен груз) опускается при этом на $3\Delta x$. Сила натяжения нити T при таком перемещении совершает отрицательную работу $-T\Delta x$, а сила тяжести совершает положительную работу $3mg\Delta x$. Поскольку суммарная работа внешних сил должна быть равна нулю,

$$T = 3mg.$$

Статически неопределимые системы.

Встречаются задачи, в которых рассматриваются механические системы, силы реакции в которых невозможно однозначно определить, используя только лишь уравнения статики, и поэтому приходится использовать дополнительные предположения относительно характера имеющихся в системе связей. Обычно в условии задачи явно указывается, какие именно предположения должны использоваться.

Задача 34. Тело массой $m = 10$ кг подвешено в лифте при помощи трёх одинаковых лёгких верёвок, натянутых вертикально. Одна из них привязана к потолку лифта, две другие — к полу. Когда лифт неподвижен, модуль силы натяжения каждой из нижних верёвок составляет $F_0 = 5$ Н. Лифт начинает двигаться с постоянным ускорением, направленным вверх. Найдите установившуюся силу натяжения верхней верёвки при следующих значениях ускорения лифта: $a_1 = 1$ м/с^2; $a_2 = 2$ м/с^2. Ускорение свободного падения равно $g = 9{,}8$ м/с^2. Считайте, что сила натяжения верёвки пропорциональна её удлинению. [8]

Решение. Начальную силу натяжения T_0 верхней верёвки можно найти, записав второй закон Ньютона для тела в проекции на ось y, направленную вертикально вверх:

$$T_0 - mg - 2F_0 = 0, \quad \text{откуда} \quad T_0 = mg + 2F_0 = 108 \text{ Н}.$$

После того, как лифт придёт в движение, силы натяжения всех нитей изменятся. В результате появятся три новых неизвестных величины, и одного уравнения, следующего из второго закона Ньютона, для их определения будет явно недостаточно. Поэтому нужно использовать дополнительные предположения о свойствах верёвки, а именно пропорциональность её натяжения удлинению.

Итак, пусть удлинение верхней верёвки увеличилось на Δx (а оно, естественно, увеличилось, а не уменьшилось), тогда удлинение нижних верёвок уменьшится на Δx. Получается, что сила натяжения верхней верёвки увеличилась на некоторую величину ΔF, а сила натяжения каждой из нижних верёвок уменьшилась на ΔF.

Вновь запишем второй закон Ньютона для тела в проекции на ось y:

$$T_0 + \Delta F - 2(F_0 - \Delta F) - mg = ma_1, \quad \text{откуда} \quad \Delta F = \frac{ma_1}{3} \approx 3{,}3 \text{ Н}.$$

В первом случае установившаяся сила натяжения верхней верёвки равна

$$T_1 = T_0 + \frac{ma_1}{3} \approx 111{,}3 \text{ Н}.$$

Если, действуя аналогичным образом, рассчитать величину ΔF для второго значения ускорения, то получим $ma_2/3 \approx 6{,}7$ Н, что больше, чем сила начального натяжения нижних нитей. Значит, нижние нити провиснут и их сила натяжения будет равна нулю. Запишем второй закон Ньютона для тела в проекции на ось y для этого случая:

$$T_2 - mg = ma_2, \quad \text{значит,} \quad T_2 = m(g + a_2) = 118 \text{ Н}.$$

Выбор удобной системы отсчёта.

От того, относительно какой системы отсчёта рассматривается механическое движение, сильно зависит сложность уравнений, описывающих его. Поэтому выбор удобной системы отсчёта является мощным методом, позволяющим сделать решение многих задач механики более простым и наглядным. Однако, трудно сформулировать чёткий алгоритм, который позволял бы для решения каждой конкретной задачи выбрать наиболее удобную систему отсчёта. Поэтому в данном разделе рассмотрены несколько классов задач, для каждого из которых даны рекомендации относительно выбора удобной системы отсчёта.

Система отсчёта центра масс.

Задачи о столкновениях тел удобно рассматривать в системе отсчёта их центра масс, поскольку в этой системе отсчёта суммарный импульс сталкивающихся тел равен нулю.

Задача 35. Шар массой m_1 налетает на неподвижный шар массой m_2 со скоростью v_1. Удар абсолютно упругий. Найдите скорости шаров после удара.

Решение. Стандартное решение этой задачи предполагает решение системы уравнений, следующих из законов сохранения механической энергии и импульса, причём одно из этих уравнений является квадратным. Решение можно упростить при переходе в систему отсчёта, связанную с центром масс системы шаров. Скорость центра масс:

$$v_{\text{цм}} = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Тогда в данной системе отсчёта скорости шаров:

$$v_1' = v_1 - v_{\text{цм}} = \frac{m_2 v_1}{m_1 + m_2},$$

$$v_2' = -v_{\text{цм}} = -\frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

В системе центра масс обе частицы движутся навстречу друг другу с равными по модулю импульсами:

$$p = \frac{m_1 m_2 v_1}{m_1 + m_2}.$$

После удара скорости и импульсы частиц останутся неизменными по величине, но изменят своё направление на противоположное. Найдём скорости частиц после удара в лабораторной системе отсчёта.

$$u_1 = v_{\text{цм}} - v_1' = \frac{(m_1 - m_2) v_1}{m_1 + m_2},$$

$$u_2 = v_{\text{цм}} - v_2' = \frac{2 m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Задача 36. На сортировочной горке сталкиваются два медленно движущихся в одну сторону железнодорожных выгона. Пружины буферов смягчили удар, и потом «растолкали» вагоны, так что удар можно считать абсолютно упругим. Какова была максимальная энергия W упругой деформации пружин? Вагоны имеют массы m_1 и m_2, их скорости до столкновения равны v_1 и v_2. [26]

Решение. Перейдём в систему отсчёта, связанную с центром масс вагонов. Скорость такой системы отсчёта относительно Земли

$$v_{\text{цм}} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Скорости вагонов в этой системе отсчёта:

$$v_1' = v_1 - v_{\text{цм}} = \frac{m_2(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2},$$

$$v_2' = v_2 - v_{\text{цм}} = \frac{m_2(v_2 - v_1)}{m_1 + m_2}.$$

В системе центра масс суммарный импульс вагонов равен нулю. В момент максимального сжатия пружины скорости обоих вагонов в этой системе отсчёта также равны нулю, причём вся их начальная кинетическая энергия переходит в потенциальную энергию деформации пружин. Таким образом

$$W = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Система отсчёта, связанная с текущей жидкостью.

При решении задач, в которых рассматривается движение тел относительно текущей жидкости (например, лодки по реке) удобно использовать переход в систему отсчёта, связанную с жидкостью, поскольку в данной системе отсчёта скорость течения равна нулю.

Задача 37. Рыбак плыл на моторной лодке по реке, зацепился шляпой за мост, и она свалилась в воду. Рыбак поплыл дальше, но через полчаса солнце так нагрело ему голову, что ему пришлось повернуть обратно за шляпой. Лодка догнала её на 4 км ниже моста. Чему равна скорость течения реки? [26]

Решение. Для решения перейдём в систему отсчета, связанную с текущей водой реки. В этой системе отсчёта шляпа покоится. Так как в данной системе отсчёта лодка удаляется и приближается к шляпе с одной и той же скоростью, то время движения с момента, когда рыбак потерял шляпу до момента, когда повернул обратно за шляпой равно времени движения от поворота обратно до встречи шляпы, и равно 30 минут. Значит, общее время движения шляпы 1 час. Так как шляпа проплыла за 1 час 4 км, то скорость течения реки 4 км/ч.

Переход в неинерциальные системы отсчёта

В неинерциальных системах отсчёта второй закон Ньютона не применим. Однако, можно использовать аналог второго закона Ньютона, если к силам, действующим в системе, добавить силы инерции. Например, при переходе в систему отсчёта, движущуюся поступательно с постоянным ускорением $\vec{a}$ относительно некоторой инерциальной системы отсчёта, на каждую точечную массу m начинает действовать сила инерции $-m\vec{a}$. Удобно для каждой точечной массы сложить эту силу инерции с силой тяжести и сумму рассматривать как новую «эффективную» силу тяжести: $m\vec{g} - m\vec{a} = m\vec{g}_{\text{эф}}$.

При переходе в систему отсчёта, вращающуюся с постоянной угловой скоростью ω, для каждой точечной массы m нужно дополнительно ввести центробежную силу, направленную от оси вращения и равную $m\omega^2 r$, где r — расстояние до оси вращения.

Задача 38. Цилиндрический сосуд, частично заполненный водой, двигают горизонтально с постоянным ускорением a. Какую форму имеет поверхность воды в сосуде?

Решение. Перейдём в систему отсчёта, движущуюся вместе с сосудом. Поскольку эта система отсчёта неинерциальная, нужно ввести эффективное ускорение свободного падения $\vec{g}_{\text{эф}} = \vec{g} - \vec{a}$. В неподвижном сосуде поверхность жидкости всегда горизонтальна, значит, в движущемся сосуде поверхность жидкости будет представлять плоскость, перпендикулярную эффективному ускорению свободного падения, то есть составляющую угол

$\alpha = \mathrm{arctg}\,(a/g)$ с горизонтом.

ГЛАВА 4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ, ИХ АПРОБАЦИЯ И ВНЕДРЕНИЕ.

В ходе работы над данной магистерской диссертацией были проанализированы учебно-методические пособия, предназначенные для обучения школьников и студентов решению задач механики, а также учебники и сборники задач по общей физике, содержащие как классические задач, так и задачи повышенной сложности. В результате была выявлена научно-методическая проблема — дефицит специальных учебно-методических пособий, основанных на систематизации физических и математических идей, и предназначенных для обучения школьников и студентов решению задач по физике повышенной сложности. Была обоснована актуальность этой проблемы.

Для решения данной проблемы была поставлена задача: разработать учебно-методическое пособие, в основе структуры которого лежат методы решения задач повышенной сложности школьного курса механики.

На первом этапе выполнения работы были выявлены основные элементы знаний, которые обучающиеся должны усвоить в процессе изучения курса механики, и были отобраны задачи повышенной сложности по механике. На втором этапе были выявлены основные физические и математические идеи, лежащие в основе решения отобранных задач, и выделены общие методы решения задач. Отобранные задачи были классифицированы по методам их решения, а методы были выстроены в соответствии с наиболее часто реализуемым на практике порядком усвоения обучающимися элементов знаний. На третьем этапе выполнения работы было создано учебно-методическое пособие «Методы решения задач повышенной сложности школьного курса механики». Пособие состоит из пяти разделов, в которых рассмотрены 15 методов решения задач повышенной сложности. Эти методы проиллюстрированы при помощи 38-ит задач, которые снабжены решениями.

Элементы учебно-методического пособия по мере их разработки проходили апробацию на занятиях кружков и факультативов, проводившихся автором в 2015-м — 2017-м годах. Пособие также использовалось при проведении в 2017-м году выездной весенней физико-математической школы для одаренных детей и для подготовки обучающихся 9-х — 11–х классов, являющихся кандидатами в сборную школьников города Москвы по физике.

В результате выполнения работы получены следующие основные результаты.

1) Осуществлен анализ методов решения задач повышенной сложности по механике.

2) Создано учебно-методическое пособие «Методы решения задач повышенной сложности школьного курса механики», включающее в себя рассмотрение 15-ти методов, которые иллюстрируются при помощи 38-ми задач.

3) Проведены апробация и внедрение созданного учебно-методического пособия в учебный процесс, в ходе которых получены свидетельства его прикладной значимости и эффективности.

Внедрение учебно-методического пособия в учебный процесс подтверждено справками, выданными государственным бюджетным образовательным учреждением города Москвы «Школа №1329» и государственным автономным образовательным учреждением дополнительного профессионального образования города Москвы Центр педагогического мастерства (Приложение 1).

Научно-методическая ценность работы определяется тем, что она представляет собой авторскую разработку учебно-методического пособия нетрадиционного типа, являясь развитием опыта ведущих педагогов в области методики обучения старшеклассников и студентов младших курсов решению задач повышенной сложности.

Практическая значимость работы состоит в том, что применение разработанного и созданного учебно-методического пособия в педагогической практике позволяет повысить качество обучения старшеклассников и студентов младших курсов решению задач механики. Это может играть определенную роль как для повышения эффективности учебной деятельности по подготовке специалистов высшей квалификации в вузе, так и для решения некоторых частных задач — например, таких, как подготовка обучающихся к участию в теоретических турах физических олимпиад высокого уровня.

Концепция учебно-методического пособия, в основе которого лежат методы решения физических задач, основанные на различных нетривиальных физических и математических идеях, является в значительной степени новаторской. Структура и состав созданного учебно-методического пособия разработаны автором самостоятельно. Этим определяется новизна работы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Результаты работы могут применяться в общеобразовательных учреждениях и в учреждениях дополнительного и высшего образования, а также для проведения занятий по повышению квалификации учителей и школьниками для самостоятельной подготовки к участию в теоретических турах олимпиад по физике.

Существуют перспективы для продолжения работы: автору представляется целесообразным расширить созданное учебно-методическое пособие и создать аналогичные учебно-методические пособия, посвященные рассмотрению методов решения задач повышенной сложности, относящихся к другим разделам физики — входящим как в школьный курс, так и в курс общей физики.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю доценту кафедры общей физики физического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова Якуте Алексею Александровичу за интересную тему исследования и неоценимую помощь на всех этапах работы; заведующему кафедрой физики государственного бюджетного образовательного учреждения города Москвы «Школа №1329» Лукьянову Илье Владимировичу за организацию выездных олимпиадных физических школ, во время преподавания на которых автор апробировал методику обучения школьников применению методов решения задач, изложенных в данной работе; администрации упомянутой школы и государственного автономного образовательного учреждения дополнительного профессионального образования города Москвы Центр педагогического мастерства за предоставленную возможность апробации учебно-методического комплекта.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] Кодификатор элементов содержание и требований к уровню подготовки выпускников образовательных организаций для проведения единого государственного экзамена по физике // Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Федеральный институт педагогических измерений», 2017.

[2] Мясников С.П., Осанова Т.Н. Пособие по физике: Учеб. пособие для подгот. отделений вузов. — 5-е изд., испр. и перераб. — М.: Высш. шк. 1988. — 399 с.

[3] Физика. Задачник-практикум для поступающих в вузы: учебно-методическое пособие / В.А. Макаров, С.С. Чесноков. — М. : Лаборатория знаний, 2016. — 363 с. : ил. — (ВМК МГУ — школе).

[4] Бушина Т.А., Комарова М.А., Никанорова Е.А., Русаков В.С., Слепков А.И., Чистякова Н.И. Механика. Разработка семинарских занятий. (Университетский курс общей физики) / Уч. пособие. — М.: Физический факультет МГУ, 2014. — 764 с.

[5] Миронова Г.А., Брандт Н.Н., Васильева О.Н., Салецкий А.М. Молекулярная физика и термодинамика. Разработка семинарских занятий. (Университетский курс общей физики) / Уч. пособие. — М.: Физический факультет МГУ, 2014. — 752 с.

[6] Буханов В.М., Васильева О.Н., Жукарев А.С., Лукашева Е.В., Русаков В.С. Электричество и магнетизм. Разработка семинарских занятий. (Университетский курс общей физики) / Уч. пособие. — М.: Физический факультет МГУ, 2015. — 776 с.

[7] Митин И.В., Быков А.В., Салецкий А.М. Оптика. Разработка семинарских занятий. (Университетский курс общей физики) / Уч. пособие. — М.: Физический факультет МГУ, 2015. — 448 с.

[8] Задачи Московских городских олимпиад по физике. 1986–2005. Приложение: олимпиады 2006 и 2007: Под ред. М. В. Семёнова, А. А. Якуты — 2-е изд., испр. и доп. — М.: МЦНМО, 2007. — 696 с.

[9] Григорьев Ю.М., Муравьев В.М., Потапов В.Ф. Олимпиадные задачи по физике. Международная олимпиада «Туймаада»: Под ред. Селюка Б.В. — М.: Изд.-во МЦНМО, 2007. — 160 с.

[10] Всероссийские олимпиады по физике. 1992–2001: Под. ред. С.М. Козела, В.П. Слободянина. // М.: «Вербум–М», 2002.

[11] Бутиков Е.И., Быков А.А., Кондратьев А.С. Физика в примерах и задачах // М.: Наука, 1989. — 464 с.

[12] Жукарев А.С., Матвеев А.Н., Петерсон В.К. Задачи повышенной сложности в курсе общей физики: Учебное пособие. 2-е изд., испр. / Под общей ред. А.Н. Матвеева. — М.: Эдиториал УРСС, 2001. — 192 с.

[13] http://vos.olimpiada.ru (электронное средство массовой информации).

[14] Семенов М.В., Старокуров Ю.В., Якута А.А. Методические рекомендации по подготовке учащихся к участию в олимпиадах высокого уровня по физике. — М.: Физический ф-т МГУ, 2007. — 60 с.

[15] Вишнякова Е.А., Зинковский В.И., Макаров В.А., Семёнов М.В., Черепецкая Е.Б., Чесноков С.С., Якута А.А. Новые учебные пособия для подготовки школьников к олимпиадам по физике и дополнительным профильным вступительным испытаниям в МГУ имени М.В.Ломоносова. // Научная конференция «Ломоносовские чтения — 2011». Секция физики: Сб. тез. докл. — Москва, 2011. — С. 175–178.

[16] Балаш В.А. Задачи по физике и методы их решения. Изд. 3-е, перераб. и испр. Пособие для учителей. — М., «Просвещение», 1974.

[17] Практикум по методике решения физических задач: Учеб. пособие для физ.-мат. фак. пед. ин-тов/В.И. Богдан, В.А. Бондарь, Д.И. Кульбицкий, В.А. Яковенко. — Мн.: Выш. шк., 1983 — 272 с., ил.

[18] Каменецкий С.Е., Орехов В.П. Методика решения задач по физике в средней школе. Пособие для учителей. — М., «Просвещение», 1971.

[19] Беликов Б.С. Решение задач по физике. Общие методы: Учеб. пособие для студентов вузов. — М.: Высш. шк., 1986. — 256 с.: ил.

[20] Вишнякова Е.А., Макаров В.А., Семенов М.В., Черепецкая Е.Б., Чесноков С.С., Якута А.А. Отличник ЕГЭ. Физика. Решение сложных задач. / Под ред. В.А. Макарова, М.В. Семёнова, А.А. Якуты; ФИПИ. — М.: Интеллект–Центр, 2010. — 368 с.

[21] Вирачёв Б.П. Методические принципы организации и проведения физической олимпиады и подготовки к ней учащихся: диссертация на соискание ученой степени кандидата педагогических наук: 13.00.02. — Челябинск, 1998. — 168 с.

[22] Подлесный Д.В. Методика подготовки и проведения физических олимпиад в основной школе России: диссертация на соискание ученой степени кандидата педагогических наук: 13.00.02. — М., 2001. — 233 с.

[23] Е.И. Бутиков, А.С. Кондратьев. Физика для углублённого изучения. Кн. 1: Механика. М.: Физматлит, 2004. — 352 с.

[24] Грачев А.В., Погожев В.А., Боков П.Ю., Салецкий А.М.: Физика. 10 класс. Учебник. Базовый и профильный уровень. ФГОС. Вентана-Граф, 2017. — 464 с.

[25] Задачи по физике: Учебное пособие / И.И. Воробьёв, П.И. Зубков, Г.А. Кутузов и др.; Под. ред. О.Я. Савченко. 3-е изд., испр. и доп. — Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 1999. — 370 с., ил.

[26] И.М.Гельфгат, Л.Э.Генденштейн, Л.А.Кирик 1001 задача по физике с решениями // ИЛЕКСА, Москва, 2017.

[27] Н. В. Турчина, Л. И. Рудакова, О. И. Суров и др. Физика: 3800 задач для школьников и поступающих в вузы // М.: Дрофа, 2000.

[28] http://www.physolymp.ru/p (официальный Интернет-портал всероссийской олимпиады школьников).

[29] Зильберман А. Р. Школьные физические олимпиады. — М.: МЦНМО, 2009.

[30] Олимпиада по физике им. А.Г. Столетова для учащихся 7, 8 классов. — М.:, ЦПМ, 2015.

[31] Материалы второго (муниципального) этапа всероссийской олимпиады школьников по физике в г. Москва в 2015–16 учебном году. М.:, ЦПМ, 2015.

[32] Методическая комиссия по физике при центральном оргкомитете Всероссийских олимпиад школьников. L Всероссийская олимпиада школьников по физике. Заключительный этап. Теоретический тур. Методическое пособие. — Сочи, 2016.

[33] Методическая комиссия по физике при центральном оргкомитете Всероссийских олимпиад школьников. XLIII Всероссийская олимпиада школьников по физике. Региональный этап. Теоретический тур. Методическое пособие. — М.:, МФТИ, 2009.

[34] Методическая комиссия по физике при центральном оргкомитете Всероссийских олимпиад школьников. XLIX Всероссийская олимпиада школьников по физике. Региональный этап. Теоретический тур. Методическое пособие. — М.:, МФТИ, 2015.

Приложение 1.
Справки о внедрении разработки в учебный процесс.

ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ ГОРОДА МОСКВЫ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ГОРОДА МОСКВЫ «ШКОЛА № 1329»

Никулинская ул., д. 10, Москва, 119602

Телефон (495) 651-3598 Факс (495) 651-3397 E-mail 1329@edu.mos.ru http://sch1329.mskobr.ru

ОКПО 17943846 , ОГРН 1147746745596 , ИНН/КПП 7729775619/772901001

СПРАВКА О ВНЕДРЕНИИ

Государственное бюджетное общеобразовательное учреждение города Москвы «Школа № 1329» подтверждает, что авторская разработка Паринова Данилы Александровича «Учебно-методическое пособие “Методы решения задач повышенной сложности школьного курса механики”» внедрена в учебный процесс школы и применялась автором в 2016/2017 учебном году при проведении кружков и факультативов для подготовки обучающихся 9-х – 11-х классов к участию в олимпиадах по физике.

Директор **В.Ф.Бурмакина**

Департамент образования г. Москвы • Государственное автономное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования г. Москвы

ЦЕНТР ПЕДАГОГИЧЕСКОГО МАСТЕРСТВА

119270, Москва, Хамовнический вал, д.6 • Телефон/факс: (199) 242-27-82 • e-mail: info@cpm77.ru • http://cpm77.ru
ОКПО 82464605 • ОГРН 1077761137222 • ИНН 7725618950 • КПП 770401001

«23» 05 2017 года №517/1

На №______________ от ____________________

Справка о внедрении

Государственное автономное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования города Москвы «Центр педагогического мастерства» подтверждает, что авторская разработка Паринова Данилы Александровича «Учебно-методическое пособие “Методы решения задач повышенной сложности школьного курса механики”» внедрена в учебный процесс ГАОУ ДПО ЦПМ и применялась автором в 2016/2017-м учебном году при проведении учебно-тренировочных сборов для подготовки одаренных и высокомотивированных школьников, являющихся кандидатами в сборную города Москвы, к участию в теоретических турах олимпиад высокого уровня по физике.

Директор **И.В. Ященко**