

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

**«ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ПРИМЕНЕНИЯ ИТЕРАТИВНЫХ
МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ РАСЧЕТА
ДИФРАКЦИОННЫХ ОПТИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ (ДОЭ)»**

Выполнил студент
205м группы
Никольский Кирилл Сергеевич

подпись студента

Научный руководитель:
к. ф-м. н., с.н.с. Попов В. В.

подпись научного руководителя

Допущен к защите ___/___/_____

Зав. кафедрой _____

подпись зав. кафедрой

Москва

2017 год

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.....	5
1. ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР	6
1.1. Расчет фазовой функции.....	6
Зададим плоскости наблюдения ξ , η и плоскость дифракционного элемента (u , v), перпендикулярные направлению падающего излучения. (<i>Рисунок 1</i>)... 6	
1.2. Алгоритм Герчберга-Секстона.....	7
1.3. Оценка качества ДОЭ	11
2. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ	14
2.1. Начальные условия.....	14
2.2. Аналитический расчет ДОЭ.....	16
2.3. Метод симуляции киноформа	18
2.4. Метод фрагментации.....	20
3. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА ДОЭ РАЗЛИЧНЫМИ МЕТОДАМИ.....	23
ИТОГИ РАБОТЫ	39
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	41
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	42

ВВЕДЕНИЕ

В оптике существует задача преобразования падающего на плоскость пучка света, с известными параметрами, в заданное изображение. Для того, чтобы в плоскости наблюдения сформировалось требуемое изображение, необходимо преобразовать фазу падающего на нее пучка света. Такие преобразования могут быть осуществлены при помощи тонких фазовых структур, известных как дифракционные оптические элементы (ДОЭ).

Для получения ДОЭ, осуществляющего преобразование пучка в изображение, необходимо решить задачу расчета ДОЭ, в которой начальными условиями являются параметры пучка и параметры изображения, а решением фазовое распределение в плоскости ДОЭ. Обычно изображение задается как распределение интенсивности в плоскости, а фазовым распределением изображения пренебрегают. Расчеты производятся в дальней зоне дифракции.

Постановка задачи расчета ДОЭ некорректна из-за пренебрежения фазовым распределением в плоскости изображения, поэтому малое изменение входных параметров может вызвать существенные изменения в решении. Точного решения таких задач нет, однако существуют итеративные алгоритмы, которые позволяют приближенно решить поставленную задачу. Фазовые распределения, рассчитанные при помощи таких алгоритмов формируют изображение с некоторой ошибкой, которую невозможно уменьшить ниже определенного порога, в рамках итеративных методов.

В данной работе предпринимается попытка создания алгоритмов для решения задачи расчета ДОЭ, которые бы имели преимущество перед итеративными алгоритмами. Для того чтобы использовать определенные

подходы, при расчете ДОЭ, в работе использована модель изображения, состоящая из ограниченного числа точек. В силу особенностей Фурье преобразований, применяемых для расчета ДОЭ, итеративными методами, фазовое распределение для такого изображения, выглядит как набор периодических структур в виде чередующихся полос. Каждая такая структура с определенным направлением и периодом полос, входящая в ДОЭ, отвечает определенной точке изображения.

Имея ввиду эти особенности получаемого фазового элемента, в данной работе аналитически был рассчитан ДОЭ, имеющий подобное строение. Периодические структуры, входящие в состав ДОЭ и отвечающие заданным точкам, были рассчитаны с использованием формул для дифракционной решетки. Результаты аналитических расчетов ДОЭ сравнивались с традиционными итеративными методами.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Общая задача расчета оптических элементов заключается в получении изображения на плоскости при помощи оптического фазового элемента. Существующие итерационные алгоритмы расчета имеют достаточно большие ошибки и чувствительны к размерам пучка падающего света. Если фазовый элемент освещается пучком не полностью, возможны непредсказуемые изменения в формируемом изображении.

В простых случаях, задачу формирования изображения из нескольких точек можно решить с хорошей точностью, используя аналитический алгоритм расчета фазовых функций, когда фазовая функция рассчитывается индивидуально для каждой точки исходя из принципов дифракции и геометрической оптики.

Задача данной работы, экстраполировать такой подход на изображения, состоящие из нескольких точек, и сравнить результаты аналитического расчета с итеративными методами.

1. ЛИТЕРАТУРНЫЙ ОБЗОР

1.1. Расчет фазовой функции

Для описания задачи получения изображения при помощи ДОЭ, будем рассматривать распространение волн между плоскостью оптического элемента и плоскостью наблюдения, на которой мы хотим получить изображение.

Зададим плоскости наблюдения (ξ, η) и плоскость дифракционного элемента (u, v) , перпендикулярные направлению падающего излучения.

(Рисунок 1).

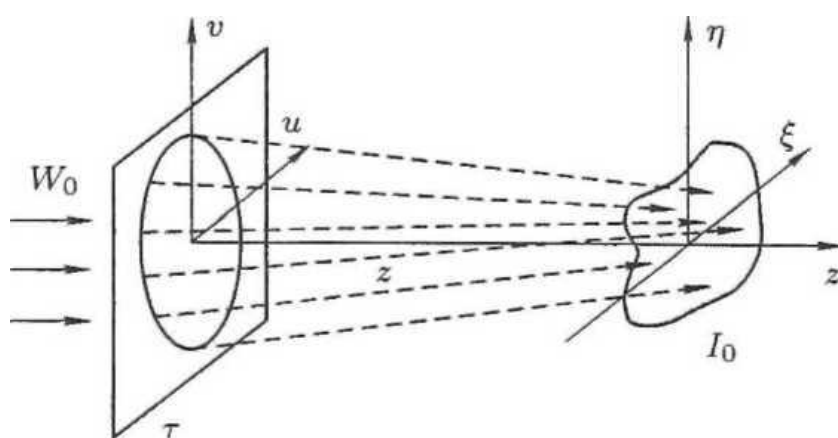


Рисунок 1. Схема формирования изображения при помощи ДОЭ

Исходными данными являются распределение интенсивности на плоскости наблюдения $I_0(\xi, \eta)$ и параметры падающего излучения, фаза $\varphi(u, v)$, длина волны λ . Распределение интенсивности задается вместо распределения амплитуды для удобства расчетов. Излучение в данной задаче принимается монохроматическим и полностью когерентным.

ДОО освещается пучком с комплексной амплитудой $W_0(u, v)$, тогда непосредственно за оптическим элементом образуется поле с амплитудой

$$W(u, v) = W_0 \exp[i\varphi(u, v)] \quad (1.1)$$

Комплексная амплитуда волны в плоскости наблюдения, в которой формируется требуемое распределение интенсивности $I_0(\xi, \eta)$

$$F(\xi, \eta) = B(\xi, \eta) \exp[i\psi(\xi, \eta)] \quad (1.2)$$

$$\text{где } B(\xi, \eta) = \sqrt{I_0(\xi, \eta)}$$

Распространение света в свободном пространстве описывается в приближении дифракции Фраунгофера, а прохождение света через дифракционные оптические элементы сводится к умножению комплексной амплитуды падающего света $W_0(u, v)$ на комплексную функцию пропускания оптического элемента $T(u, v)$. [2]

$$W(u, v) = W_0(u, v)T(u, v) \quad (1.3)$$

Так как в задаче рассматриваются только фазовые оптические элементы, функция пропускания ДОО не учитывает распределение амплитуды и выбрана в виде:

$$T(u, v) = \exp[ig(u, v)] \quad (1.4)$$

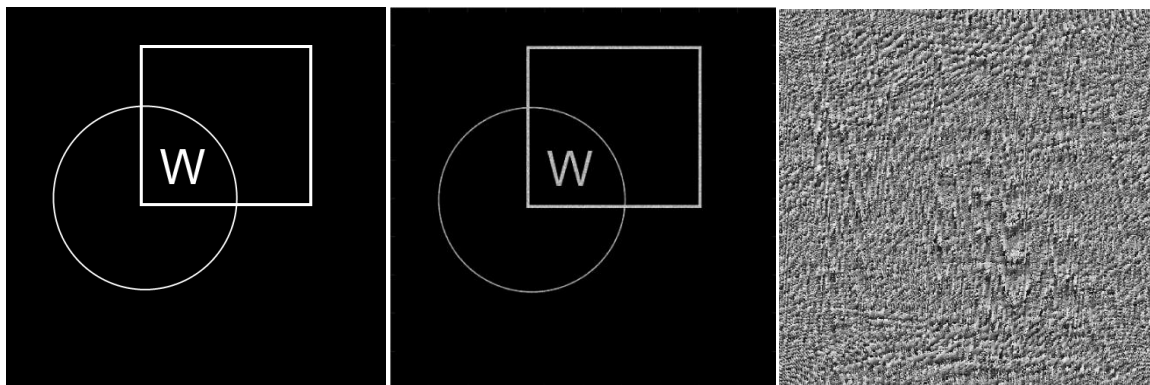
где $g(u, v)$ — фазовая функция ДОО

В поставленной задаче понятие “расчет ДОО” эквивалентно понятию “расчет фазовой функции ДОО” [3].

1.2. Алгоритм Герчберга-Секстона

Для расчета ДОО наиболее распространены итеративные методы. Самые известные из них алгоритм Герчберга-Секстона (Г-С), алгоритм Фьенапа, адаптивно-аддитивный алгоритм. На *Рисунке 2(в)* показан вид ДОО, его еще принято называть Киноформ, рассчитанного при помощи Г-С алгоритма. Эти алгоритмы хорошо зарекомендовали себя, однако, как и все итеративные методы, они дают решение с некоторой ошибкой порядка

5-10% [4].



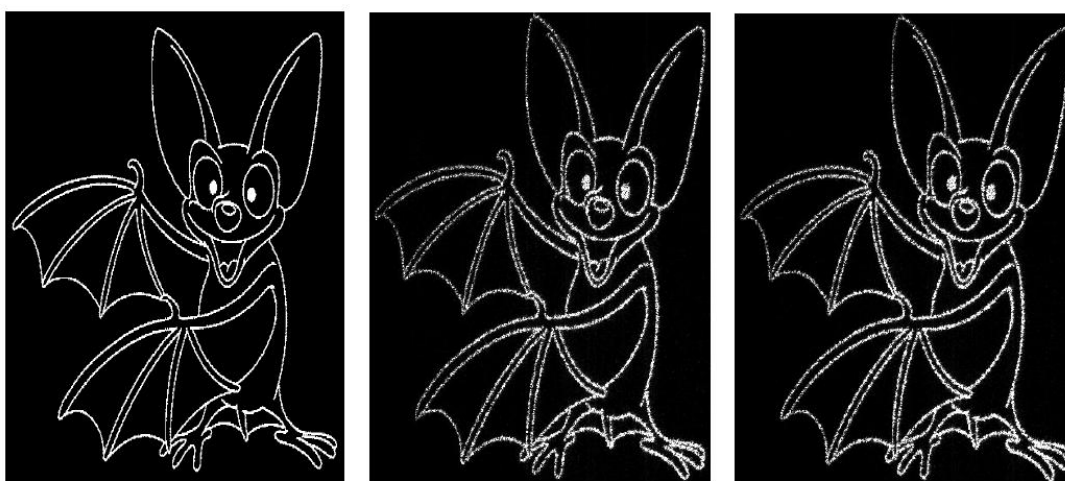
(a)

(б)

(в)

Рисунок 2. заданное изображение (а) изображение, полученное при помощи ДОЭ, рассчитанного алгоритмом Г-С (б) ДОЭ (в)

Это связано с особенностями методов, а именно с процессом, в ходе которого рассчитанная фазовая функция изменяется до тех пор, пока полученное изображение не перестанет значительно меняться с каждой следующей итерацией. На *Рисунке 3* видно, что изображения, полученные при помощи ДОЭ, рассчитанных разными итеративными методами, имеют отличия от исходного изображения.



(a)

(б)

(в)

Рисунок 3. заданное изображение (а) изображения, полученные при помощи ДОЭ, рассчитанного алгоритмом Г-С (б) Фьенупа (в)

В данной работе все предлагаемые методы расчета ДОЭ будут сравниваться с алгоритмом Г-С. Исходя из уравнений для амплитуды $W(u, v)$ (1.1-1.4), расчет фазы ДОЭ $\varphi(u, v)$ при помощи Г-С алгоритма, сводится к решению интегрального уравнения.

$$F(\xi, \eta) = \frac{ik}{2\pi z} \exp(ikz) \iint_{-\infty}^{\infty} W(u, v) H(u - \xi, v - \eta, z) du dv \quad (1.5)$$

$$\text{где } H(u - \xi, v - \eta, z) = \exp \left[\frac{ik}{2z} \{ (u - \xi)^2 + (v - \eta)^2 \} \right] \quad (1.6)$$

$F(\xi, \eta)$ - функция интенсивности в плоскости наблюдения в приближении Френеля, z — расстояние между ДОЭ и плоскостью наблюдения, волновое число $k = 2\pi/\lambda$.

Задачу расчета фазовой функции ДОЭ $\varphi(u, v)$ можно свести к решению нелинейного интегрального уравнения.

$$I_0(\xi, \eta) = |F(\xi, \eta)|^2 = \left| \frac{k}{2\pi z} \iint_{-\infty}^{\infty} A_0(u, v) e^{i\varphi(u, v)} H(u - \xi, v - \eta, z) du dv \right|^2 \quad (1.7)$$

где $I_0(\xi, \eta)$ — заданная интенсивность в области изображения, $A_0(u, v)$ — амплитуда освещающего пучка, $\varphi(u, v) = g(u, v) + g_0(u, v)$, где $g_0(u, v)$ — фаза освещающего пучка, $g(u, v)$ — фазовая функция ДОЭ.

Если задано амплитудное распределение $I_0(\xi, \eta)$, для расчета фазы $\varphi(u, v)$, а вместе с ней фазы $g(u, v)$ дифракционного элемента, для решения уравнения (1.7) применяется итеративный метод уменьшения ошибки, который включает в себя следующие шаги:

1. Выбирается начальная стохастическая или специально рассчитанная фаза $\varphi_0(u, v)$
2. Осуществляется интегральное преобразование функции $A_0(u, v) \exp [i\varphi_0(u, v)]$ при помощи уравнения (1.5).

3. Результирующая комплексная амплитуда $F(\xi, \eta)$ в плоскости формирования изображения заменяется на $\bar{F}(\xi, \eta)$ по правилу

$$\bar{F}(\xi, \eta) = B_0(\xi, \eta)F(\xi, \eta)|F(\xi, \eta)|^{-1} \quad (1.8)$$

$$B_0(\xi, \eta) = \sqrt{I_0(\xi, \eta)}$$

4. Вычисляется преобразование, обратное (3.1) относительно функции $\bar{F}(\xi, \eta)$

$$W(u, v) = \frac{ik}{2\pi z} \exp(-ikz) \iint_{-\infty}^{\infty} \bar{F}(\xi, \eta) H^*(\xi - u, \eta - v, z) d\xi d\eta \quad (1.9)$$

5. Полученная комплексная амплитуда $W(u, v)$ в плоскости ДОЭ заменяется на $\bar{W}(u, v)$ по правилу:

$$\bar{W}(u, v) = \begin{cases} A_0(u, v)W(u, v)|W(u, v)|^{-1}, & (u, v) \in Q \\ 0, & (u, v) \notin Q \end{cases} \quad (1.10)$$

Q – форма апертуры ДОЭ

6. Переход к шагу 2, до тех пор, пока ошибки δ_W, δ_F не перестанут значительно меняться.

$$\delta_F^2 = \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} [|F(\xi, \eta)| - B_0(\xi, \eta)]^2 d\xi d\eta}{\iint_{-\infty}^{\infty} B_0^2(\xi, \eta) d\xi d\eta} \quad (1.11)$$

$$\delta_W^2 = \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} [|W(u, v)| - A_0(u, v)]^2 du dv}{\iint_{-\infty}^{\infty} A_0^2(u, v) du dv} \quad (1.12)$$

Функционал среднеквадратичного отклонения амплитуды восстановленного изображения от заданного значения:

$$\varepsilon_0 = \iint_{-\infty}^{\infty} [|F(\xi, \eta)| - B_0(\xi, \eta)]^2 d\xi d\eta \quad (1.13)$$

Некорректность задачи расчета ДОЭ заключается в том, что ее точного решения не существует. Поэтому процедура регуляризации задачи расчета ДОЭ сводится к замене требуемого изображения на близкое к нему такое, чтобы решение задачи существовало и было устойчивым.

Алгоритм устроен таким образом, что ошибка быстро уменьшается с увеличением числа итераций, затем ее уменьшение замедляется, а после некоторого числа итераций наблюдается стагнация ошибки [4,6]. Для Г-С алгоритма средний уровень ошибки колеблется в пределах 0,1 (Рисунок 4).

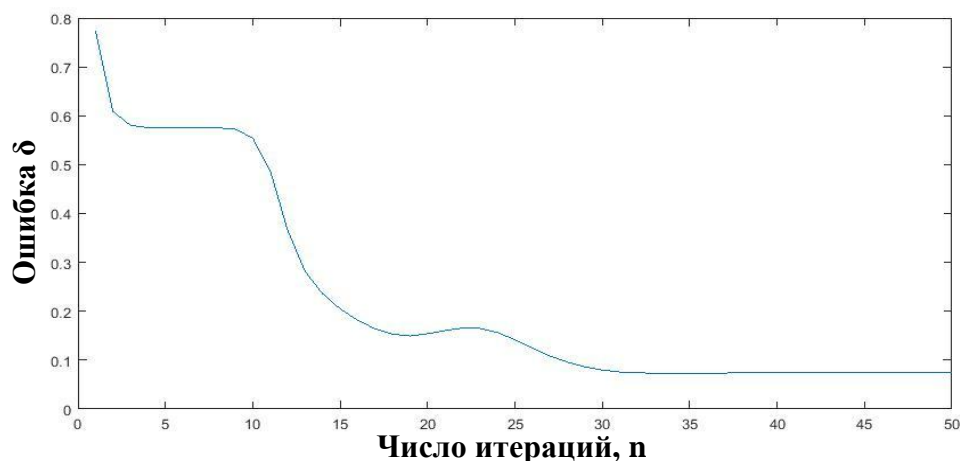


Рисунок 4. Уменьшение ошибки с ростом числа итераций Г-С алгоритма

Для преодоления этого барьера существуют улучшающие алгоритмы, которые, однако, не дают точного решения [6-8]

1.3. Оценка качества ДОЭ

Качество расчета фазовой функции ДОЭ характеризуется степенью отличия рассчитанного распределения интенсивности от заданного и определяется следующими характеристиками:

Дифракционная эффективность - это отношение световой энергии, попавшей в область задания изображения, к световой энергии, прошедшей через ДОЭ. Величина E характеризует долю энергии освещающего пучка, фокусируемую в требуемую область плоскости наблюдения.

$$E = \frac{\iint_S I(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\iint_D |W(u, v)|^2 du dv} \quad (1.14)$$

где $W(u, v)$ — амплитуда освещающего пучка, $I(\xi, \eta)$ — интенсивность в плоскости экрана, D - апертура ДОЭ, S - область фокусировки.

Среднее квадратичное отклонение δ (ошибка восстановления изображения)

$$\delta = \sqrt{1 - \frac{\sum \{I_0(\xi, \eta) I(\xi, \eta)\}^2}{\sum I_0^2(\xi, \eta) \sum I(\xi, \eta)}} \quad (1.15)$$

$I_0(\xi, \eta)$ — заданная интенсивность в плоскости экрана, $I(\xi, \eta)$ — рассчитанная интенсивность в плоскости экрана

Поэтому для анализа ДОЭ, полученных различными методами, необходимо сравнить их дифракционные эффективности и значения средних квадратичных отклонений получаемых изображений.

Рассчитанная фазовая функция оптического элемента $\varphi(u, v)$ описывает зависимость от пространственных координат величины набега фазы, создаваемой оптическим элементом в точке (u, v) .

Значения величины набега фазы лежат в интервале от 0 до нескольких тысяч 2π , а сама фазовая функция гладкая. Из практических соображений фаза ДОЭ обычно приводится к интервалу от 0 до 2π и имеет пилообразную структуру (Рисунок 5). Полученная фазовая функция квантуется по M уровням.

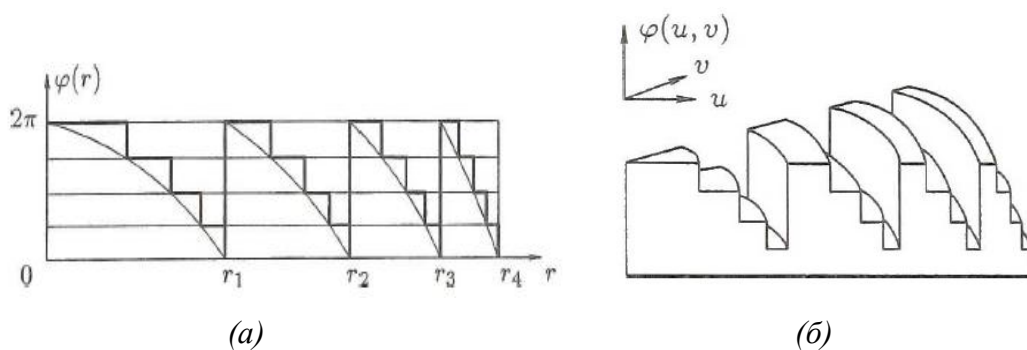


Рисунок 5. (а) Дискретизация (квантование) фазовой функции (б) ступенчатая аппроксимация фазовой функции линзы

Это связано с технологическими особенностями производства ДОЭ. Количество уровней квантования обычно не превышает 16 [16]. На *Рисунке 6* приведены изображения ДОЭ, изготовленных методом электронно-лучевой литографии.[8]

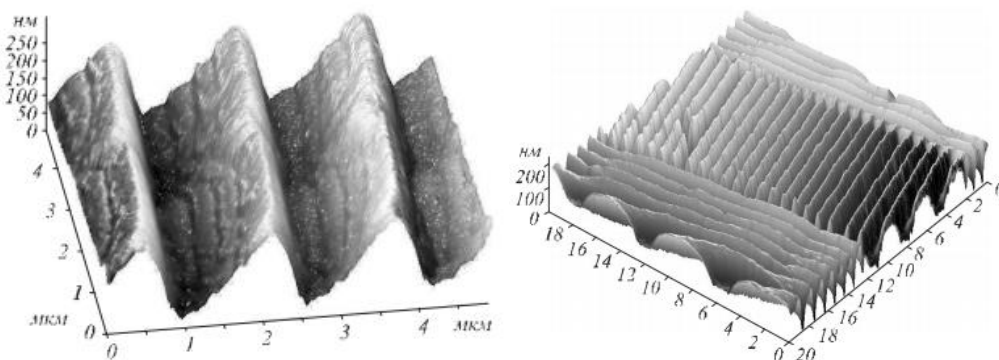


Рисунок 6. Рельеф ДОЭ, полученных методами литографии.

Получаемые ДОЭ находят применение в различных областях где необходимо управление пучками излучения и манипуляции с фазой и интенсивностью падающего излучения.

2. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

2.1. Начальные условия

В данной работе решается задача нахождения алгоритмов расчета ДОЭ, которые могут послужить альтернативой итеративным методам расчета ДОЭ, в частности Г-С алгоритму.

Поставленная задача расчета ДОЭ описывается законами для дальнейшей зоны дифракции, а следовательно можно сделать вывод, что падающий свет можно сфокусировать в нужной точке изображения при помощи пилообразной дифракционной решетки, параметры которой могут быть рассчитаны аналитически, исходя из законов геометрической оптики и закона дифракции. Важно, чтобы профиль решетки был именно пилообразным, поскольку синусоидальная или прямоугольная решетка будет отклонять пучок в пары точек, симметричных относительно центра изображения[2]

ДОЭ, рассчитываемые при помощи Г-С алгоритма, состоят из решеток, имеющих неправильную форму, в некоторых местах решетки накладываются друг на друга и могут быть расфазированы, что может негативно влиять на качество получаемого изображения.

Для расчета ДОЭ, лишенного этих недостатков, и имеющего структуру из правильных пилообразных дифракционных решеток, в работе предлагаются два различных метода:

1. Рассчитаем ДОЭ при помощи Г-С алгоритма и заполним его области аналитически рассчитанными дифракционными решетками, фокусирующими свет в заданные точки.
2. Разобьем плоскость ДОЭ на случайные площади и заполним аналитически

рассчитанными дифракционными решетками, фокусирующими свет в заданные точки.

Предлагаемые в данной работе алгоритмы расчета будут сравниваться с Г-С алгоритмом, поскольку он хорошо зарекомендовал себя для расчета ДОЭ.

В качестве модели, исследуем частный случай, на экране 1000×1000 пикселей зададим распределение интенсивности $I_0(\xi, \eta)$, которое имеет дискретный характер и состоит из 3-х узких максимумов, отстоящих друг от друга на некотором расстоянии (*Рисунок 7 (а)*). Такое приближение, благодаря большому расстоянию между максимумами, дает возможность не учитывать интерференционные эффекты между максимумами. Тогда Г-С алгоритм расчета ДОЭ дает фазовое распределение, показанное на *Рисунке 7(б)*.

Если анализировать структуру оптического элемента, рассчитанного при помощи Г-С алгоритма для заданного изображения, можно заметить, что фазовая функция является комбинацией отдельных участков дифракционных решеток с разными периодами и углами поворота. Цветами выделены три решетки с разными периодами и углами наклона. (*Рисунок 7(в)*).

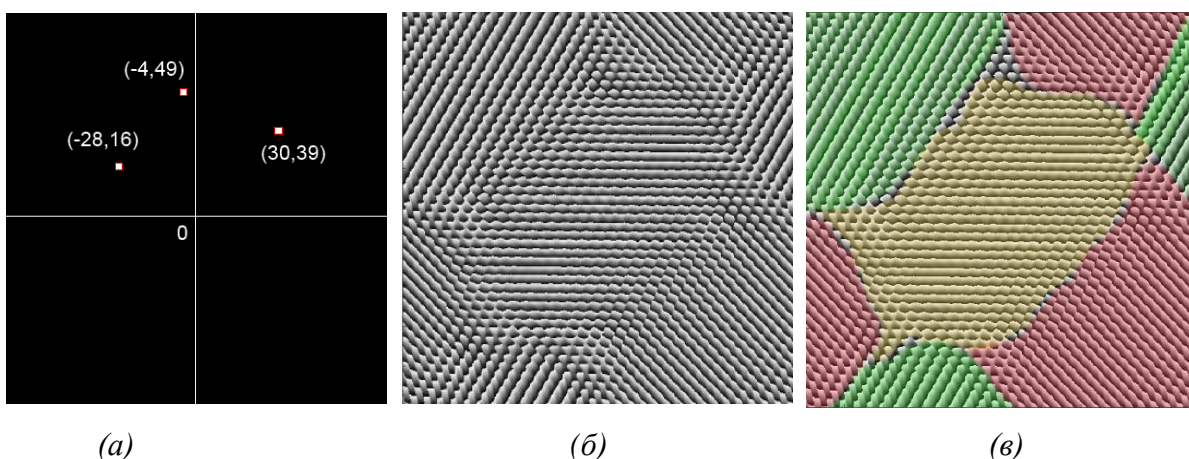


Рисунок 7. (а) Распределение нормированной на максимум интенсивности на экране (б) ДОЭ рассчитанный при помощи Г-С алгоритма (в) Условные границы областей ДОЭ, соответствующих разным решеткам

2.2. Аналитический расчет ДОЭ

Прежде чем задавать изображение, поясним, как производится аналитический расчет параметров решетки, отклоняющей пучок от координаты $(0,0)$ в точку с координатами (ξ, η) (Рисунок 8 (б)).

Рассмотрим случай падения плоской волны на оптический элемент со стороны плоскости $z = 0$. Для удобства расчетов размер обеих плоскостей определим как $N \times N$ пикселей. Оптический элемент отклоняет луч от оси в точку с координатами (ξ, η) . n - единичный вектор, направленный из начала координат плоскости ДОЭ в соответствующую точку плоскости фокусировки с координатами (ξ, η) . (Рисунок 8 (а)).

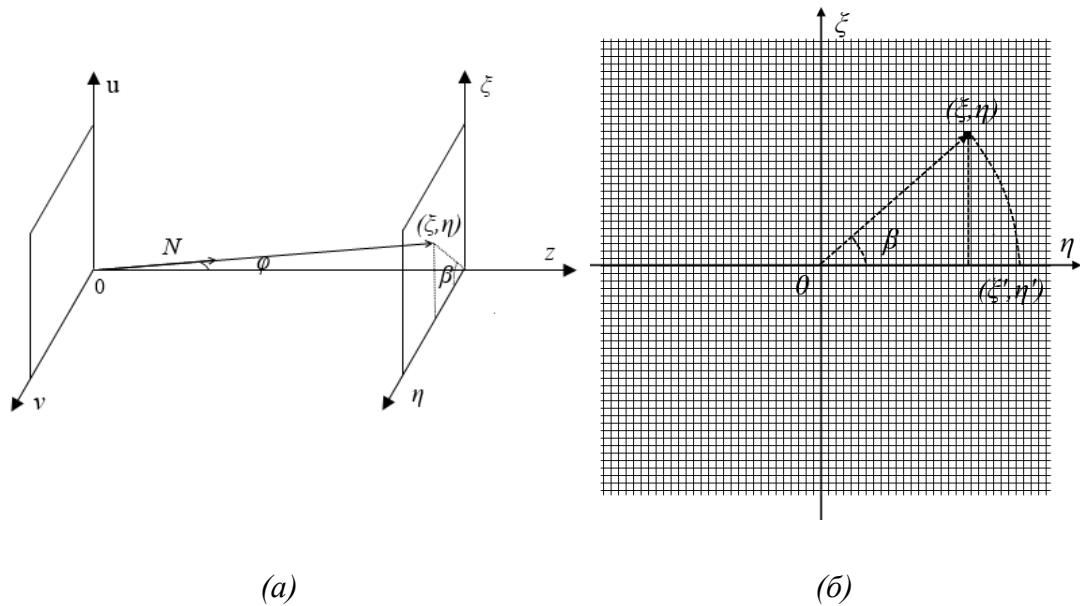


Рисунок 8. Оптическая схема хода лучей из плоскости (u, v) в плоскость (ξ, η)
(б) координаты точки в плоскости изображения

Так как мы рассматриваем распространение света, пользуясь декартовой системой координат, переход из $(0,0)$ в (ξ, η) математически осуществляется в два этапа.

На первом этапе координаты $(0,0)$ преобразуются в координаты (ξ', η') .
 Рассматриваемая задача описывается в приближении геометрической оптики.
 Сдвиг координат зависит от периода дифракционной решетки и выражается формулой 2.2

$$\begin{cases} d \sin \varphi = \lambda & (2.1) \\ \eta' = l \cdot \operatorname{tg} \varphi & (2.2) \end{cases}$$

$$\eta = \frac{l \frac{\lambda}{d}}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{d^2}}} \quad (2.3)$$

На втором этапе осуществляется поворот осей координат на угол β , в результате которого (ξ', η') переходят в (ξ, η) .

$$\beta = \operatorname{arctg} \left(\frac{\xi}{\eta} \right) \quad (2.4)$$

Период решетки из (2.3 и 2.4)

$$d = \frac{\lambda l}{\eta} \sqrt{\frac{\eta^2}{l^2} + 1} \quad (2.5)$$

Так как получаемые изображения строятся в пространстве проекций волнового вектора, каждой точке задаваемого изображения ставится в соответствие определенное направление вектора, а размер получаемого изображения связан с максимальным углом дифракции:

$$\sin \varphi_{\max} = \frac{\lambda}{2x} \quad (2.6)$$

тогда период решетки определяется как:

$$d = \frac{N}{x} \quad (2.7)$$

Где N - размер изображения в пикселях, x - координата точки по оси x , в пикселях.

Тогда в общем виде фазовое распределение, соответствующее такой решетке выглядит следующим образом:

$$g(u, v) = \frac{1}{4\pi} \text{mod}_{2\pi}(d(u \cos \beta - v \sin \beta + u \sin \beta + v \cos \beta)) \quad (2.8)$$

Для заданного изображения, каждой точке изображения соответствует решетка со следующими параметрами:

Координаты точки (ξ ; η) пикс.	Параметры решетки: период d пикс., угол β рад.
(-28;16)	30рх, $-\pi/3$
(-4;49)	20рх, $\pi/30$
(30;39)	20рх, $\pi/4$

Таблица 1. Координаты точек и соответствующие им параметры решеток

2.3. Метод симуляции киноформа

Первый метод расчета ДОЭ, предлагаемый в данной работе, состоит из следующих этапов

1. Получим по методу Г-С фазовое распределение $g(u, v)$.
2. Определим области ДОЭ, заполненные разными решетками
3. Заменяем части полученного в результате Г-С алгоритма фазового распределения на решетки, рассчитанные аналитически.

В результате расчета фазовой функции $g(u, v)$ при помощи Г-С алгоритма, мы получили фазовое распределение (Рисунок 7а) Для определения областей ДОЭ и автоматической замены решеток, в дипломе был разработан алгоритм распознавания областей ДОЭ. Площадь ДОЭ разбивается на элементы площади ΔS , над которыми производятся Фурье-

преобразования. Периодической картине, состоящей из чередующихся полос, соответствует Фурье - образ в виде единичного максимума, по координатам которого можно однозначно определить период и угол наклона решетки на участке ΔS , пользуясь формулами 2.4-2.5 (Рисунок 9)

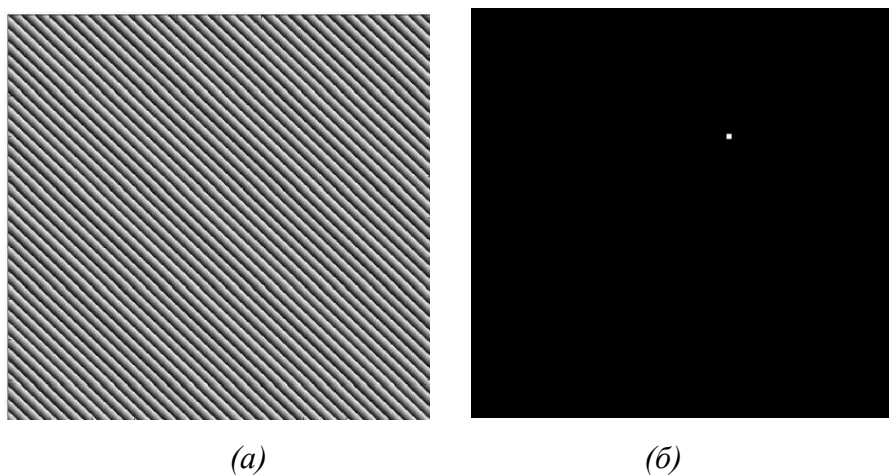


Рисунок 9. Дифракционная решетка и соответствующий ей Фурье-образ

Таким образом, методом k -средних [15], всю поверхность можно разбить на области, по типу решеток, заполняющих эти области. Так как изображение состоит из трех точек, различных типов решеток может быть три, а количество областей может варьироваться в зависимости от начальных условий Г-С алгоритма.

Выделенные области заполняются аналитически рассчитанными структурами. (Рисунок 10)

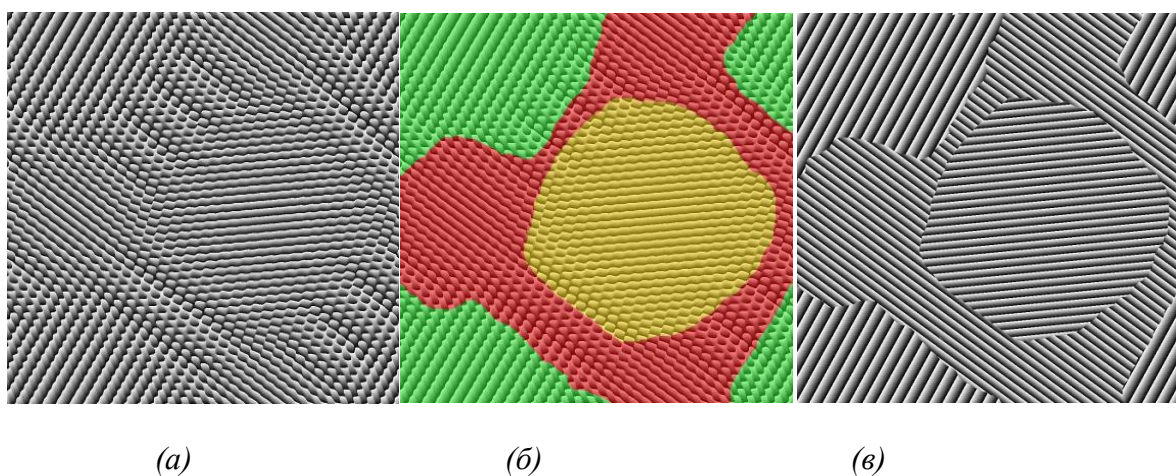


Рисунок 10. а) ДОЭ рассчитанный при помощи Г-С алгоритма б) выделенные области в) ДОЭ заполненный аналитически рассчитанными решеткам

2.4. Метод фрагментации

Интенсивность изображения в точке пропорциональна площади участка ДОЭ, заполненного решеткой, фокусирующей пучок в эту точку. [13] Во этом методе, из аналитически рассчитанных решеток, фокусирующих свет в заданные точки, составляется ДОЭ.

Поэтому для создания ДОЭ, реализующего заданное распределение интенсивности, необходимо разбить его поверхность на K равных площадей и заполнить их решетками с рассчитанными из формул 2.4, 2.7 параметрами. Разбиение площади ДОЭ производится при помощи диаграммы Вороного с использованием метода релаксации Ллойда [14] (*Рисунок 11*).

Диаграмма Вороного конечного множества точек K на плоскости представляет собой такое разбиение плоскости, при котором каждая область этого разбиения образует множество точек, более близких к одному из элементов множества K , чем к любому другому элементу множества. При этом каждая область такого разбиения называется ячейкой Вороного. Алгоритм начинается со случайного бросания точек на плоскость. Затем по этим точкам строится диаграмма Вороного.

Таким образом, мы можем разбить плоскость на K многоугольников, центры масс которых равномерно распределены по площади, а следовательно, такие многоугольники будут делить плоскость на K равных площадей.

Для регуляризации полученных многоугольников, применим к полученным полигонам релаксацию центров масс Ллойда. Полученная диаграмма называется центроидальной диаграммой Вороного. С увеличением числа итераций алгоритма релаксации, площади и форма

ячеек диаграммы становятся равными, с некоторой точностью. Результаты расчетов для 5, 10 и 100 итераций представлены на *Рисунке 11*.

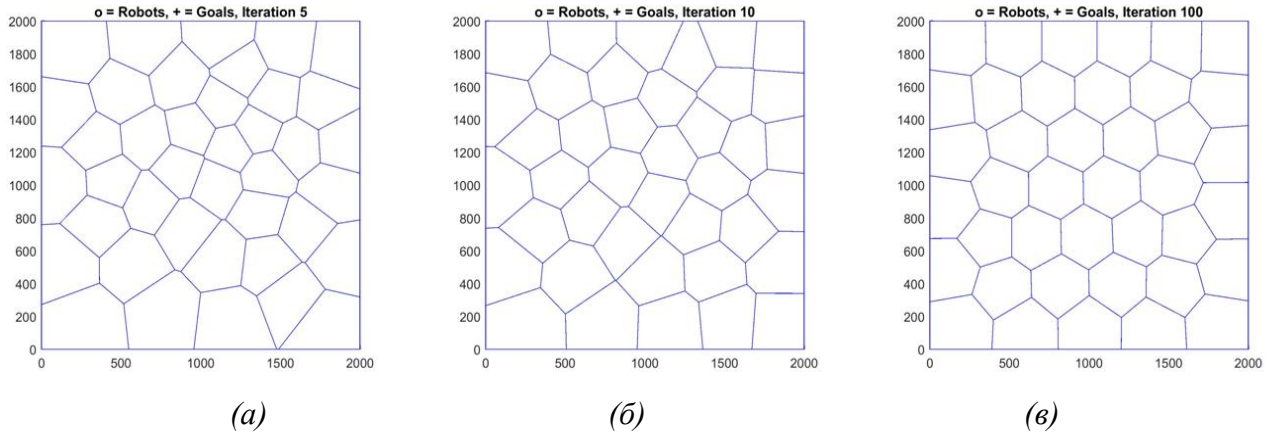


Рисунок 11. результаты разбиения площади диаграммой Вороного с релаксацией Ллойда после 5, 10, 100 итераций

Полученные в результате разбиения области в случайной последовательности заполняются дифракционными решетками, с учетом условия 2.7, согласно которому суммы площадей, заполненных разными решетками, должны быть равны. Интенсивность света в точке пропорциональна площади решетки.

$$\sum S_1 = \sum S_{12} = \sum S_3 = S/3 \quad (2.7)$$

где S площадь ДОЭ

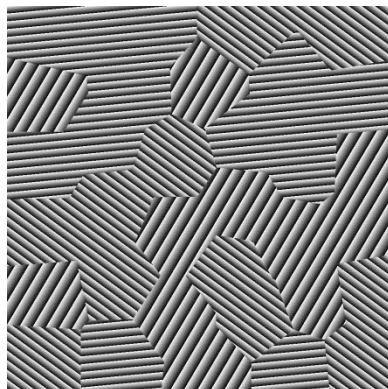


Рисунок 12. ДОЭ, рассчитанный Методом фрагментации.

Полученная в результате расчетов двумя предложенными в данной работе методами, фазовая поверхность $g(u,v)$ дискретизируется по M уровням в виде матрицы отсчетов (пикселей) и приводится к интервалу $[0,2\pi)$, в результате чего, формируется приведенная фаза $\Phi(u,v)$.

3. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА ДОО РАЗЛИЧНЫМИ МЕТОДАМИ

Для компьютерного моделирования ДОО в данной работе, была выбрана среда MatLab R2015b. В работе использовались наработки группы субволновой оптики и микролитографии Физического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, в частности программа для расчета ДОО методом Г-С. В зависимости от вида распределения интенсивности в точке, меняется фазовая функция. Примером этому служит *Рисунок 13*, на котором видно, как при изменении распределения интенсивности в точках, меняется форма ДОО, полученного при помощи Г-С алгоритма.

Для расчетов с помощью Г-С алгоритма, точки в изображении будем задавать не в виде единичных пикселей, а в виде гауссова распределения интенсивности, размером 4×4 пикселя. Такой профиль точек изображения дает возможность более точного анализа структуры ДОО и при этом не влияет значительным образом на формируемое при помощи ДОО изображение.

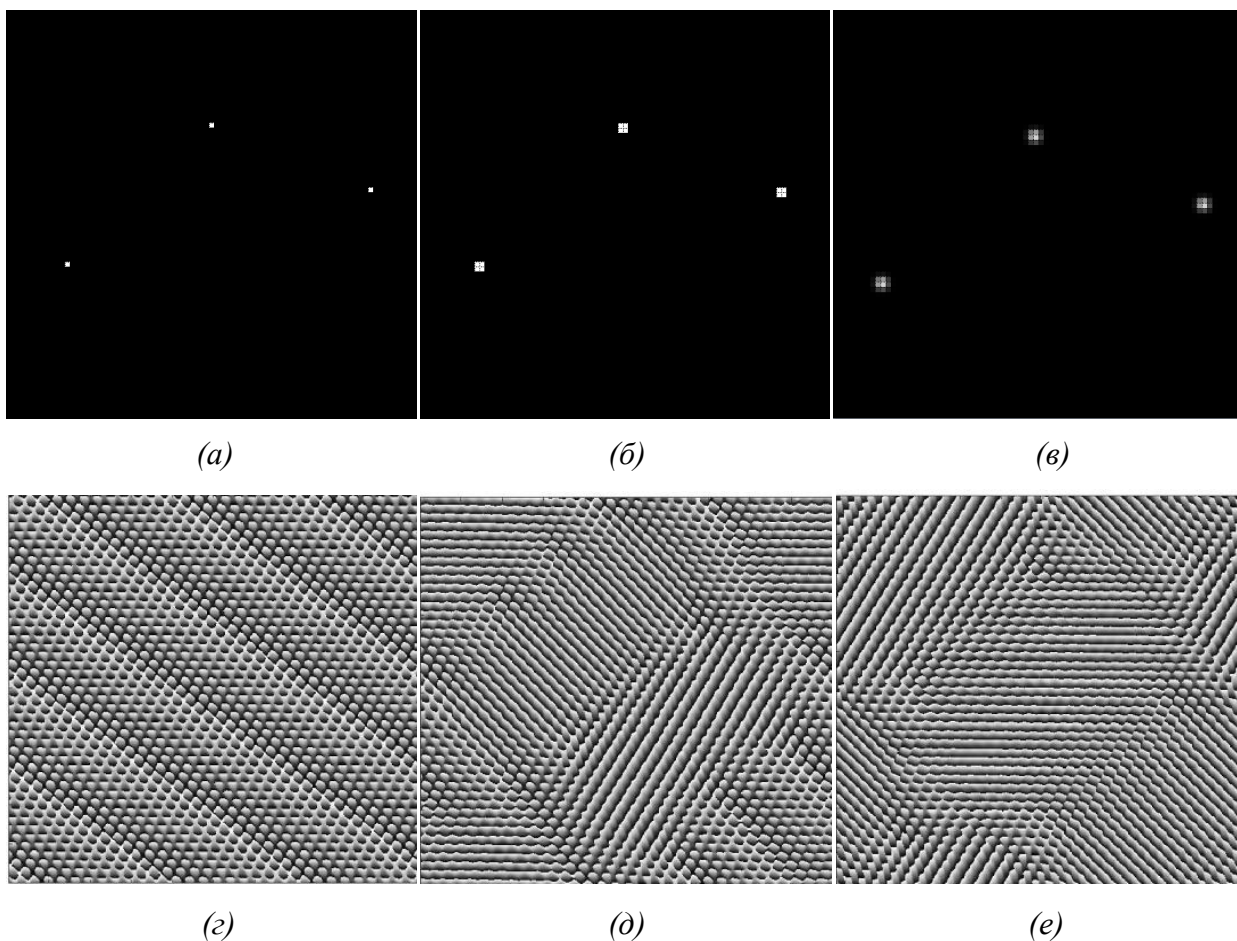


Рисунок 13. (а)-(в) вид точек в трех изображениях (г)-(е) ДОЭ рассчитанные Г-С алгоритмом для изображения 1000x1000 пикселей

Также, было изучено влияние количества точек в изображении на структуру ДОЭ. Изменение размера изображения, заметно не влияет на вид рассчитываемого ДОЭ. Примером этому служит *Рисунок 14*, на котором видно, что во всех трех случаях структура имеет характерные области, заполненные периодическими решетками.

Однако, чем больше точек в изображении, тем точнее можно контролировать профиль дифракционной решетки, из-за меньшего шага дискретизации функции. В дальнейших расчетах зафиксируем размеры изображения 1000x1000 пикселей. Такой размер изображения позволяет получить достаточно детализованный ДОЭ, и не требует больших вычислительных затрат.

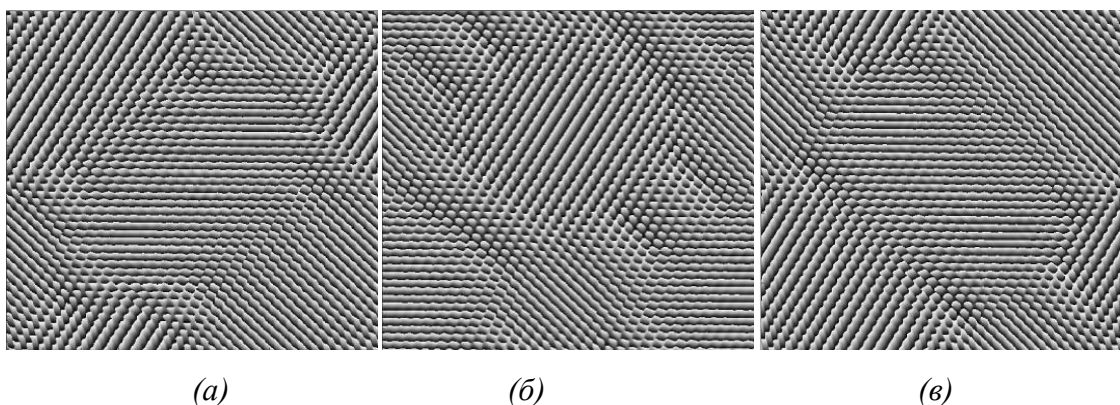


Рисунок 14. ДОЭ рассчитанные Г-С алгоритмом для изображения (а)500х500 пикс. (б)750х750 пикс.(в)1000х1000 пикс.

Значение фазы света в точках изображения, также влияет на вид рассчитываемого ДОЭ.

В зависимости от разности фазы в точках изображения, меняется вид рассчитываемой фазовой функции ДОЭ. Примером этому служит Рисунок 15, на котором видно, как меняется форма ДОЭ, рассчитываемого при помощи Г-С алгоритма, при изменении фазы в точках изображения.

Вид фазовой функции ДОЭ, принципиально не меняется, однако для дальнейших расчетов и сравнения результатов важно, чтобы вид ДОЭ был определенным и значения фазы в точках были зафиксированы. Поэтому в дальнейших расчетах зафиксируем фазу во всех точках изображения $\varphi=2\pi$.

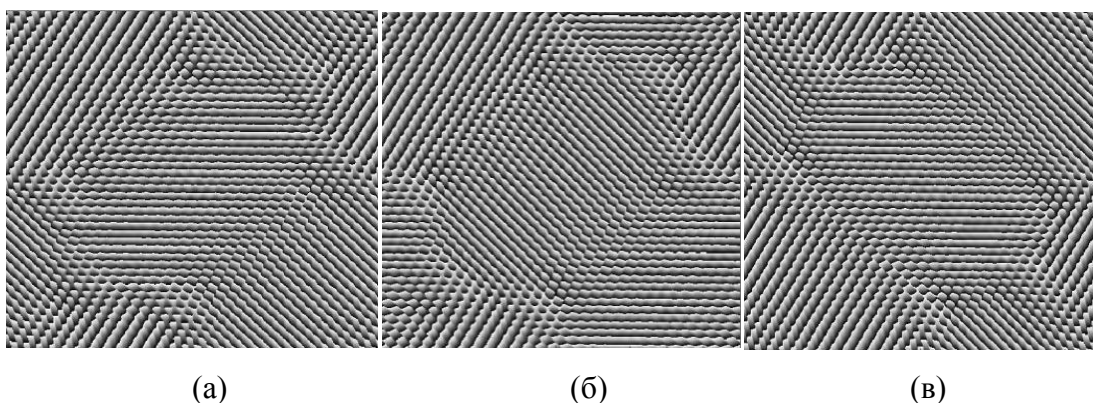
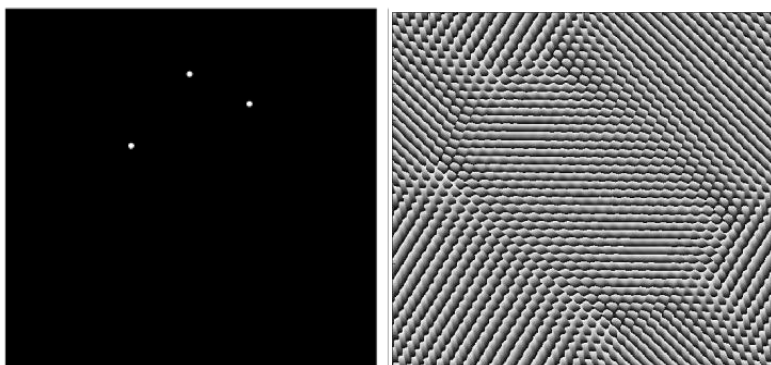


Рисунок 15 ДОЭ рассчитанные Г-С алгоритмом для изображения 1000х1000 пикселей с одинаковой фазой в точках, (а) с разностью фаз между точками $\pi/4$ (б) с разностью фаз между точками π (в)

Зададим изображение, состоящее из трех точек и рассчитаем ДОЭ методом Г-С (Рисунок 16).

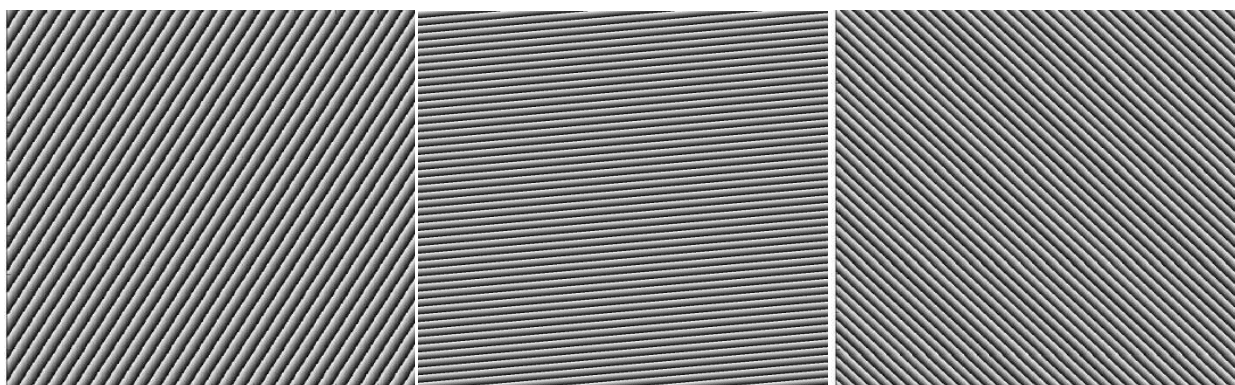


(a)

(б)

Рисунок 16. ДОЭ рассчитанные Г-С алгоритмом для изображения 1000x1000 пикс.

Среднеквадратичное отклонение интенсивности полученного изображения $\delta = 0.107$ Теперь рассчитаем ДОЭ для того же изображения Методом симуляции киноформа, заполнив области полученного при помощи Г-С алгоритма ДОЭ аналитически рассчитанными дифракционными решетками, фокусирующими свет в заданные точки. На Рисунке 17 показаны решетки, рассчитанные для трех точек по формулам 2.4 и 2.7.



(a)

(б)

(в)

Рисунок 17. ДОЭ рассчитанные аналитически для трех точек изображения.

Полученный этим методом ДОЭ имеет среднеквадратичное отклонение интенсивности $\delta = 0.075$

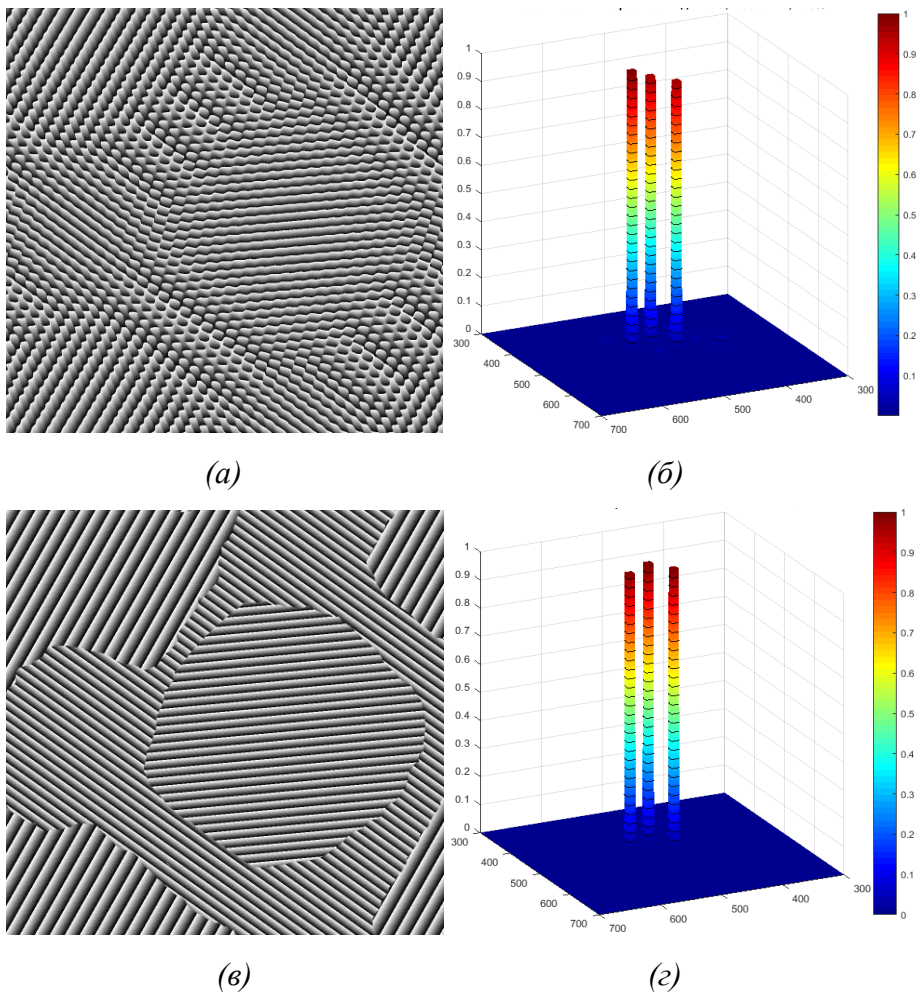
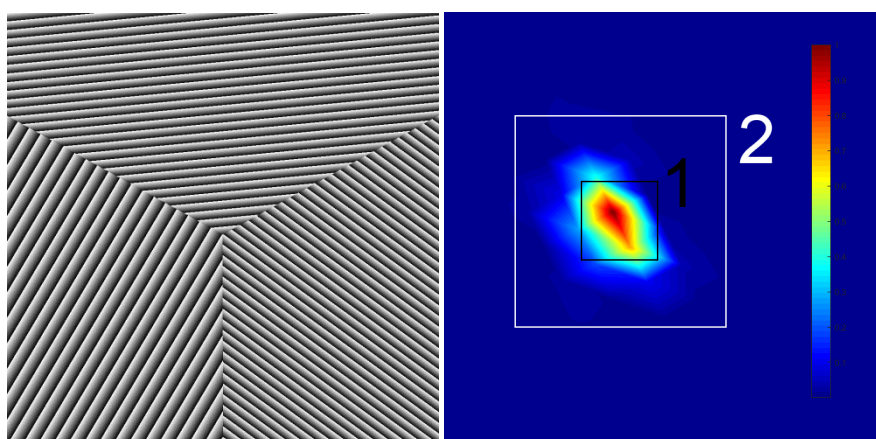


Рисунок 18. (а) ДОЭ рассчитанный методом ГС, (в) ДОЭ, рассчитанный Методом симуляции киноформа (б)(г) распределения интенсивности, полученные при помощи ДОЭ а)и в)

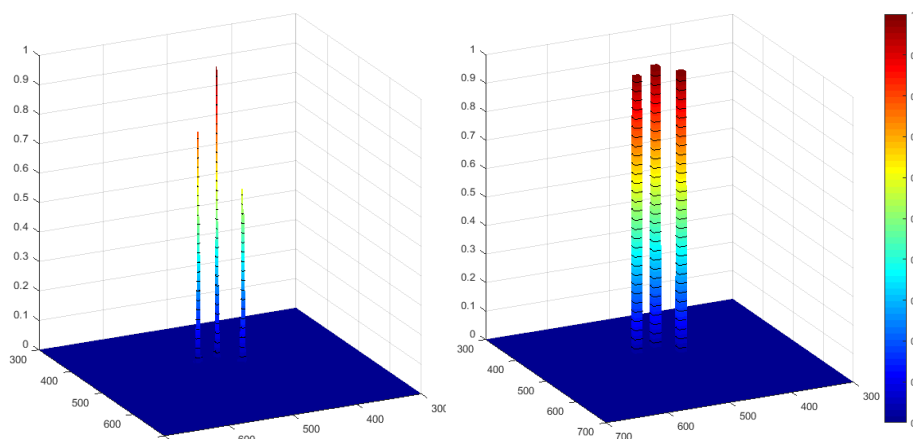
Теперь рассчитаем ДОЭ, пользуясь Методом фрагментации, разбив поверхность на K равных площадей и заполнив их решетками с рассчитанными по формулам 2.4, 2.7. Зададим $K=3$ и оценим качество полученного ДОЭ. На Рисунке 19(в) видно, что интенсивности в трех точках не равны. Среднеквадратичное отклонение интенсивности $\delta_1 = 0.47$. Такое значение значительно больше, чем для Г-С алгоритма. Полученный результат является следствием неправильной оценки интенсивности, поскольку сравнение интенсивностей производится только в заданных трех точках. Чтобы объективно оценить качество ДОЭ, рассчитаем интенсивность в точках с учетом их окрестности из нескольких пикселей, поскольку свет

фокусируется на плоскость с некоторым разбросом относительно координат заданных точек (Рисунок 19(б)).



(а)

(б)



(в)

(г)

Рисунок 19 (а)ДОЭ для 3 точек, $K=3$. (б) окрестность расчета интенсивности из 1 пикселя(1) и окрестность из 16 пикселей (2) для точки изображения. (в) график зависимости интенсивности от координаты для ДОЭ для окрестности 1.и (г) 2.

Рассчитаем интегральное распределение интенсивности в точках с учетом их окрестности размером 4×4 пикселей (Рисунок 19 (б)). При таком рассмотрении, интенсивности во всех трех точек оказываются практически одинаковыми. Тогда среднеквадратичное отклонение интенсивности для всего изображения $\delta_{\text{инт}} = 0.043$. На качество получаемого Методом фрагментации изображения влияет количество областей ДОЭ.

В работе производились расчеты с варьированием количества областей от 3 до 333 и оценивалась эффективность ДОЭ. С увеличением числа областей

ДОЭ, пики интенсивности становятся более узкими. Однако у их основания появляются шумы, которые размывают точки (Рисунок 20).

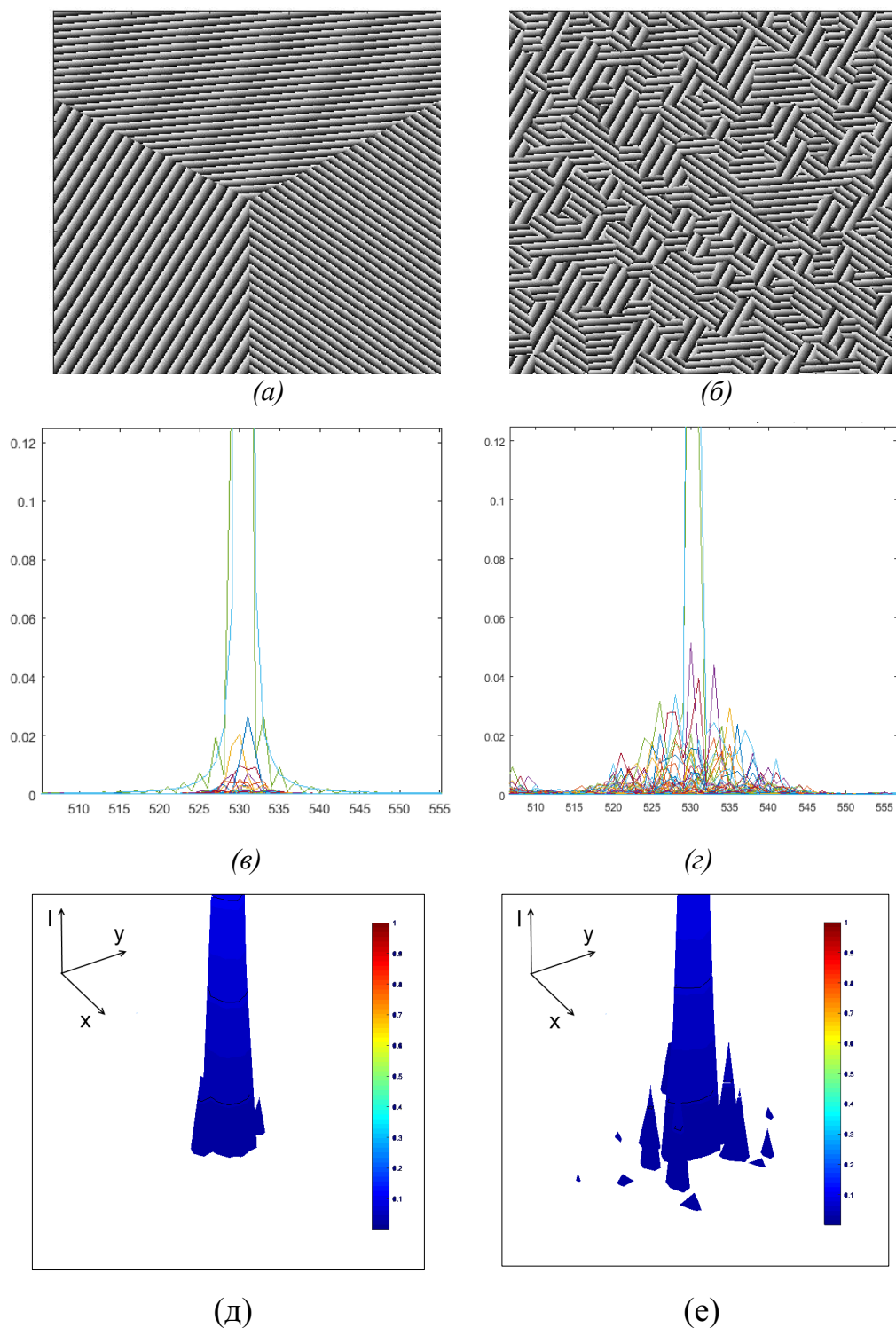


Рисунок 20. ДОЭ состоящий из а) 3 областей, б) 333 областей в) г) графики зависимости интенсивности от координаты для участка ДОЭ (а), (б) д) е) графики зависимости интенсивности от координаты

Для объективной оценки качества изображения можно либо пропорционально росту числа областей ДОЭ увеличивать окрестность, в которой оценивается среднеквадратичное отклонение ($\delta_{\text{раст.окр}}$), либо создать фильтр, отсеивающий шумы вокруг пиков интенсивности, составляющие до 3% от максимальной интенсивности в изображении ($\delta_{\text{фильтр}}$). На *Графике 1* приведены результаты расчета $\delta_{\text{окр}}$, $\delta_{\text{раст.окр}}$ и $\delta_{\text{фильтр}}$ для трех методов оценки среднеквадратичного отклонения интенсивности.

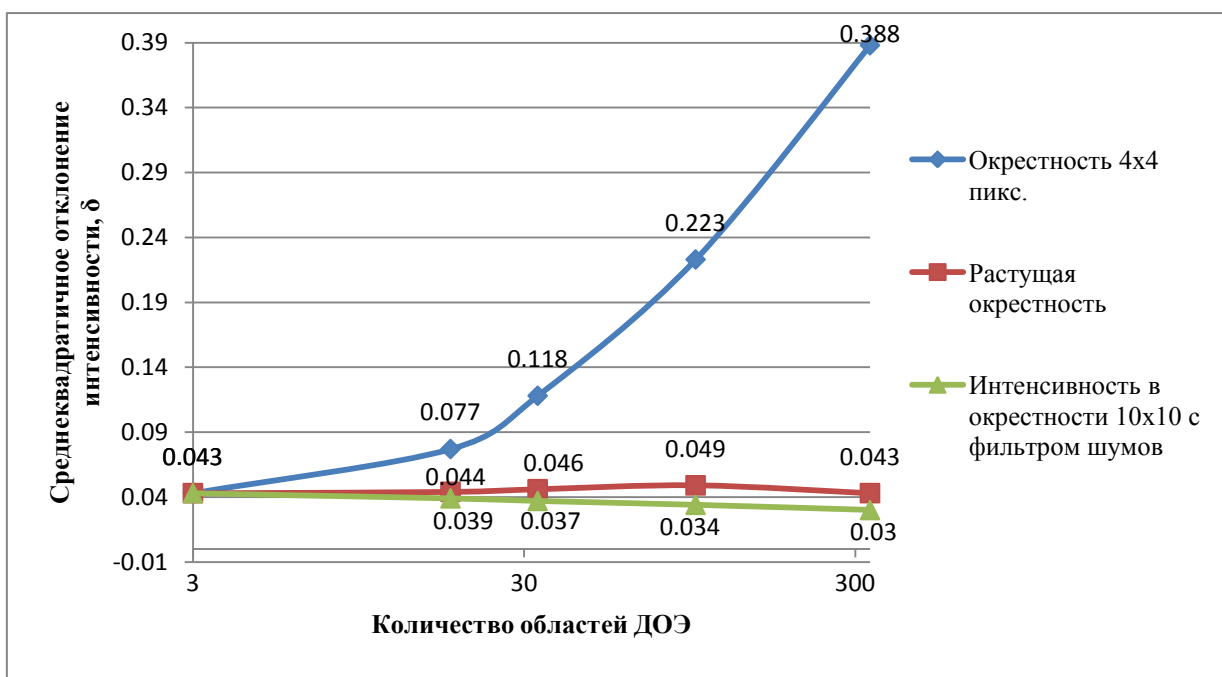


График 1 . Зависимость среднеквадратичных отклонений интенсивности изображения соответствующих ДОЭ, рассчитанных Методом фрагментации, состоящих из разного количества областей.

С увеличением числа областей ДОЭ, среднеквадратичное отклонение интенсивности δ формируемого изображения от заданного, уменьшается. Качество полученных распределений интенсивности можно оценить по еще одному параметру, среднеквадратичному отклонению интенсивности в точках изображения σ .

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_K (I_i - \bar{I})^2}{K}} \quad (2.8)$$

Этот параметр характеризует однородность интенсивности в точках получаемого изображения. Чем более однородна интенсивность в точках изображения, тем лучше получаемое изображение. Результаты расчета σ для различного количества областей ДОЭ приведены на *Графике 2*.

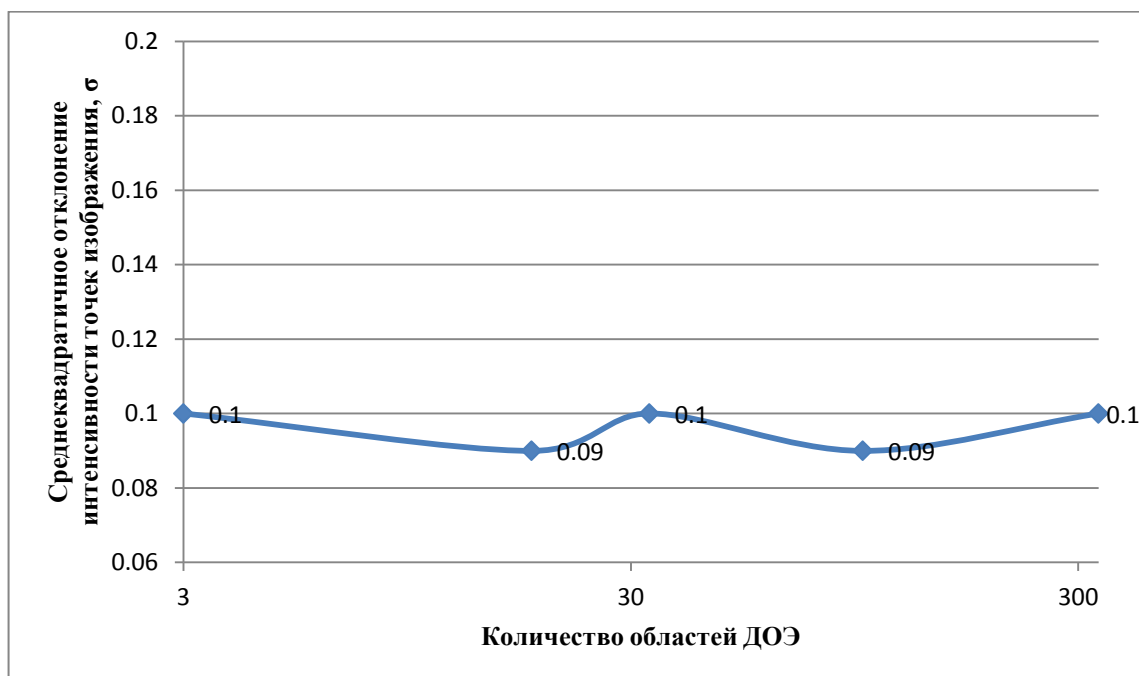


График 2. Зависимость среднеквадратичного отклонения интенсивности в точках для Метода фрагментации для расчета ДОЭ для разного количества областей ДОЭ.

Сравним результаты расчетов Г-С и аналитического алгоритма расчета ДОЭ. Качество аналитических методов расчета ДОЭ сопоставимо с качеством ДОЭ, рассчитанного Г-С методом.

Среднеквадр. Отклонение интенсивности изображения рассчитанного Г-С алгоритмом, $\delta_{гс}$	Среднеквадр. отклонение интенсивности изображения рассчитанного Методом симуляции киноформа, $\delta_{ан1}$	Среднеквадр. отклонение интенсивности изображения рассчитанного Методом фрагментации, $\delta_{ан2}$
0.107	0.075	0.043

Таблица 2. Среднеквадр. отклонения интенсивности для трех методов расчета ДОЭ

Рассчитанные при помощи Метода фрагментации ДОЭ, имеют одно преимущество перед ДОЭ, рассчитанными Г-С алгоритмом.

Если поверхность ДОЭ, рассчитанного при помощи Г-С алгоритма, освещена не полностью (*Рисунок 21*), качество формируемого изображения падает, поскольку в алгоритме Г-С, одно из граничных условий расчета- падение света на всю поверхность ДОЭ. Таким образом, если мы освещаем только часть ДОЭ, часть фазовой поверхности не участвует в фокусировке излучения в заданные точки, вследствие чего, интенсивность в точках на плоскости будет неодинакова.

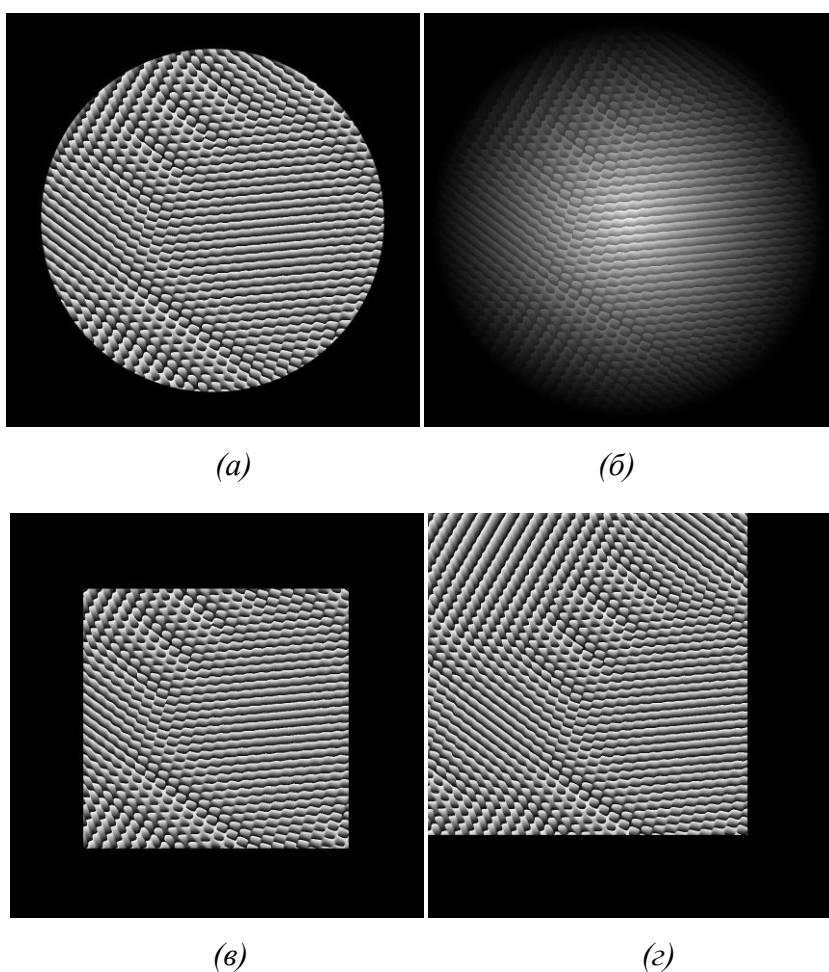


Рисунок 21. Область освещения поверхности ДОЭ. Черным цветом отмечена неосвещенная область.

Полученные Методом фрагментации ДОЭ менее восприимчивы к равномерности светового пучка, благодаря однородности структуры. Качество получаемого изображения не так сильно меняется при

неравномерном освещении фазовой поверхности. На *Графике 3* и *Графике 4* приведены результаты расчета среднеквадратичного отклонения интенсивности $\delta_{гс}$ и $\delta_{ан2}$ для методов Г-С и Метода фрагментации ДОЭ, при условии частичного освещения поверхности ДОЭ круглым пучком света. (*Рисунок 21(a)*).

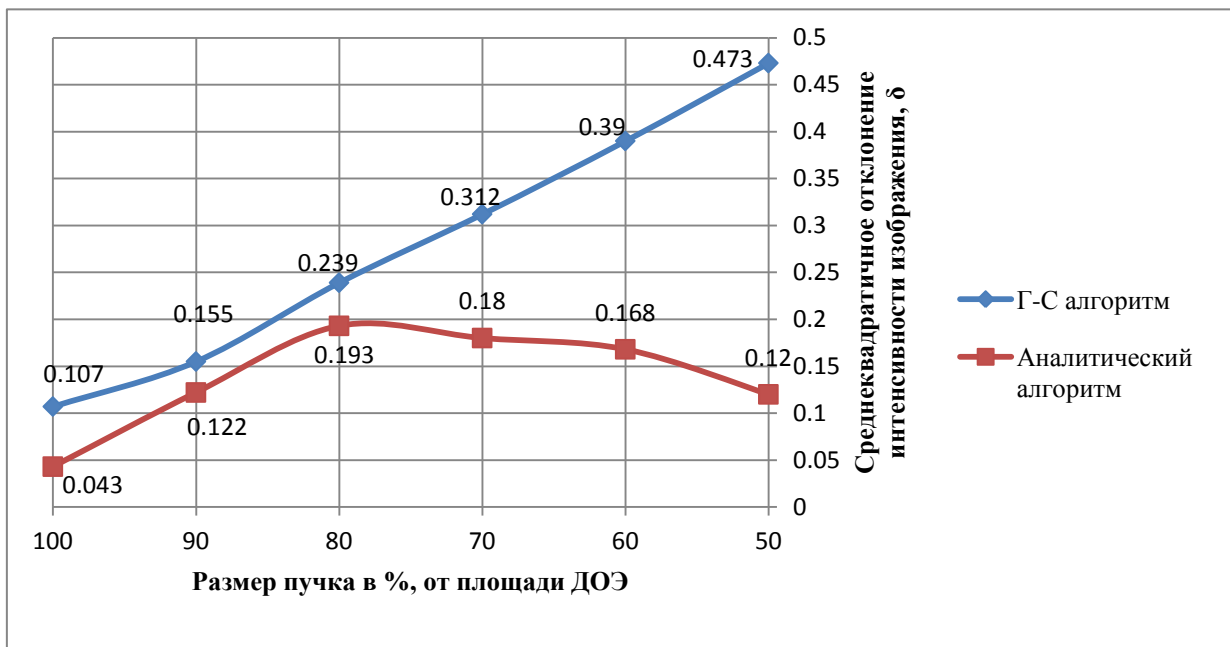


График 3. Зависимость среднеквадратичных отклонений интенсивности изображения для Г-С алгоритма и Метода фрагментации для расчета ДОЭ (круг)

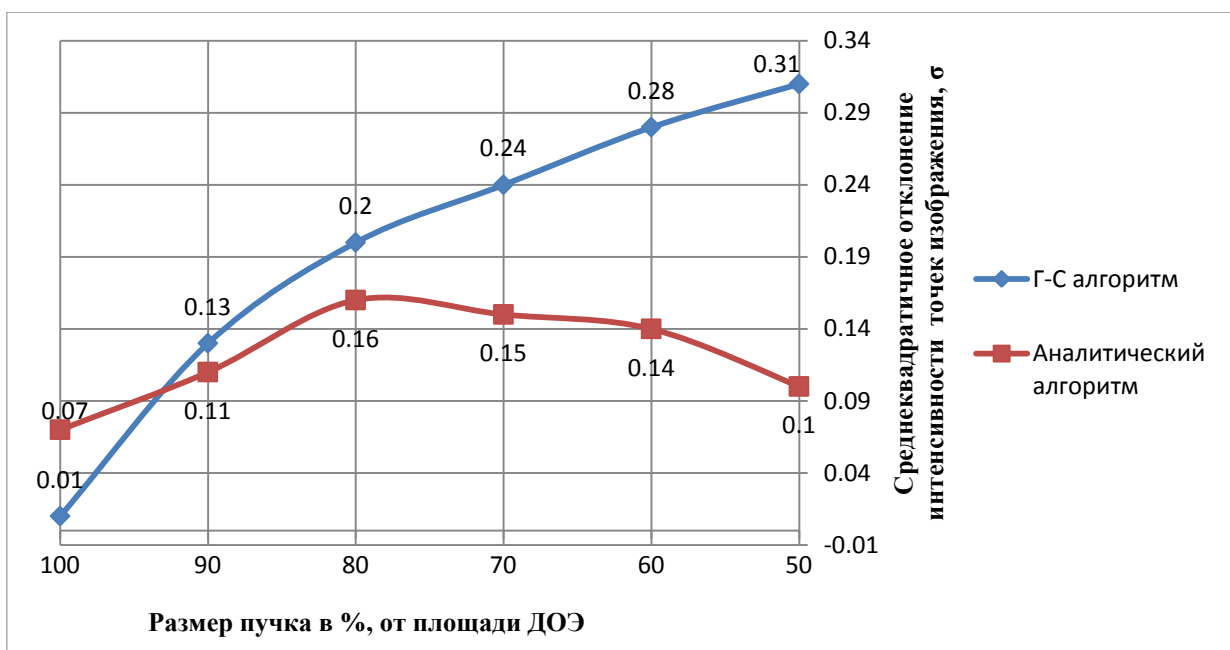


График 4. Зависимость среднеквадратичного отклонения интенсивности в точках для Г-С алгоритма и Метода фрагментации для расчета ДОЭ (круг)

Результаты моделирования говорят о том, что ДОЭ, рассчитанный при помощи Г-С алгоритма, восприимчив к изменению площади освещения. Изображение, получаемое при помощи ДОЭ, рассчитанного Методом фрагментации, также изменяется при изменении площади освещения, однако не так сильно, как для Г-С алгоритма.

Если освещать поверхность ДОЭ пучком, имеющим гауссово распределение интенсивности, покрывающим часть площади ДОЭ (Рисунок 21(б)), наблюдается такая же закономерность, как и в случае с круглым пучком. ДОЭ, рассчитанный Методом фрагментации, менее восприимчив к изменению площади освещения (График 5 и 6).

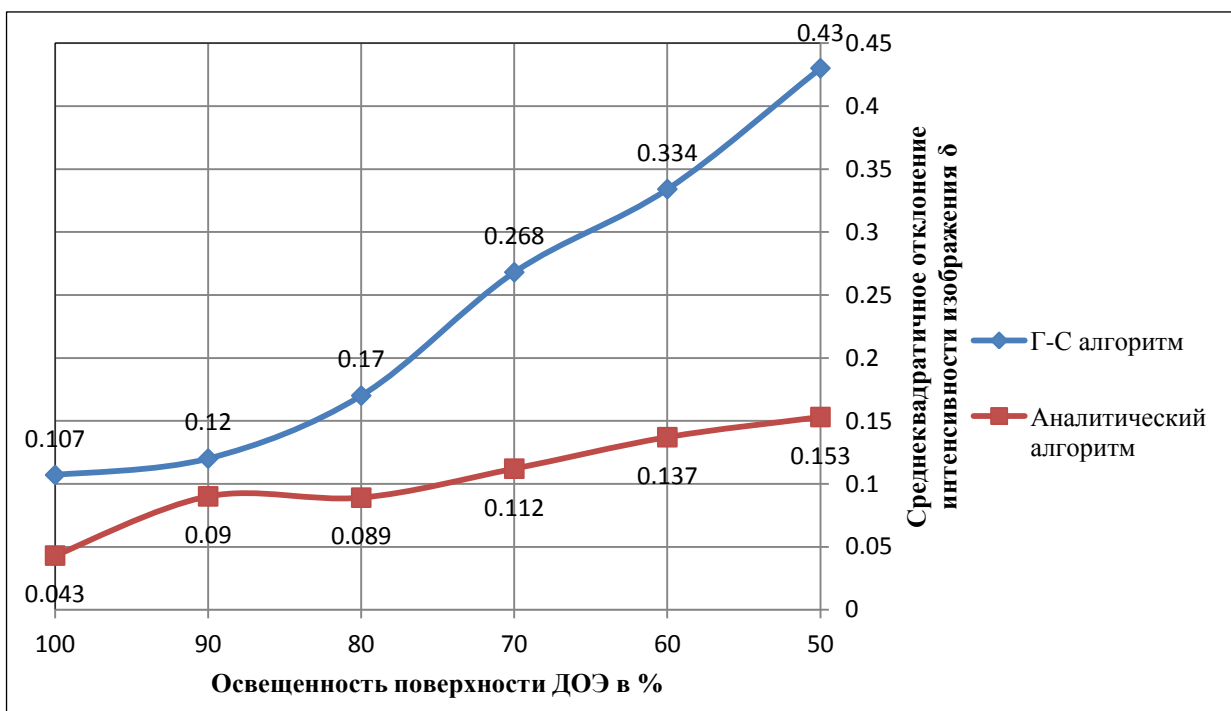


График 5. Зависимость среднеквадратичных отклонений интенсивности изображения для Г-С алгоритма и Метода фрагментации для расчета ДОЭ (гауссово распределение)

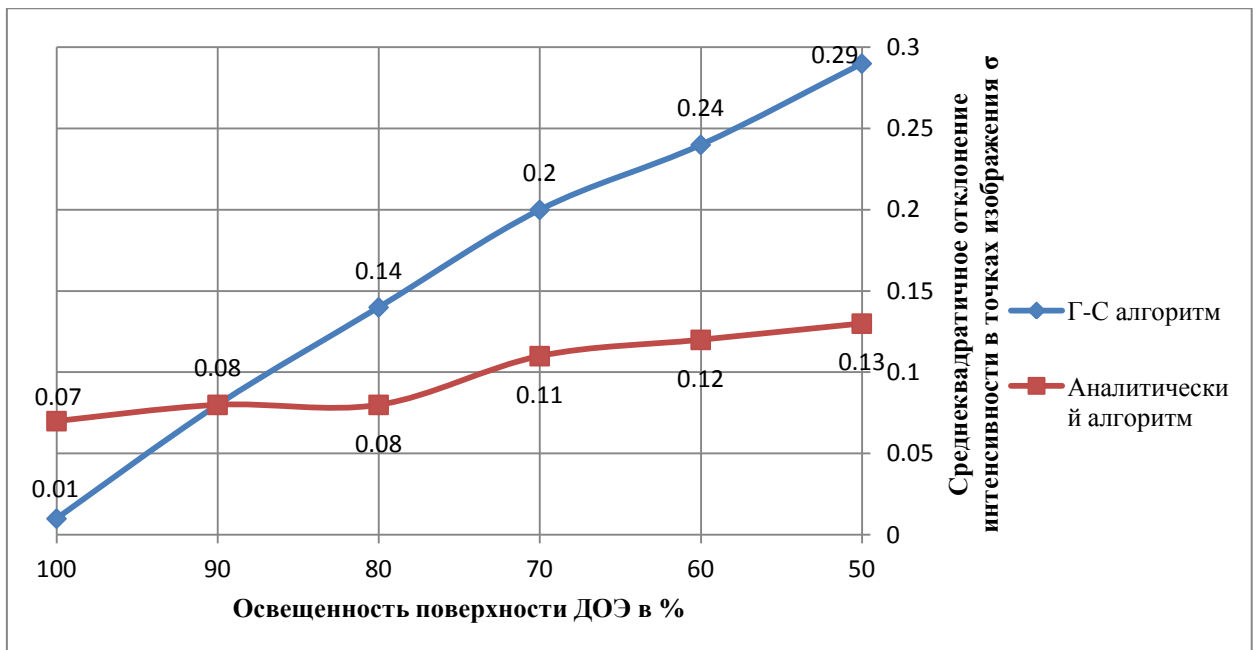


График 6. Зависимость среднеквадратичного отклонения интенсивности в точках для Г-С алгоритма и Метода фрагментации для расчета ДОЭ (гауссово распределение)

Аналогичные результаты получаются, если освещать поверхность ДОЭ квадратным пучком. На *Графиках 7и 8* показаны результаты для пучка, симметричного относительно центра ДОЭ (*Рисунок 21(в)*).

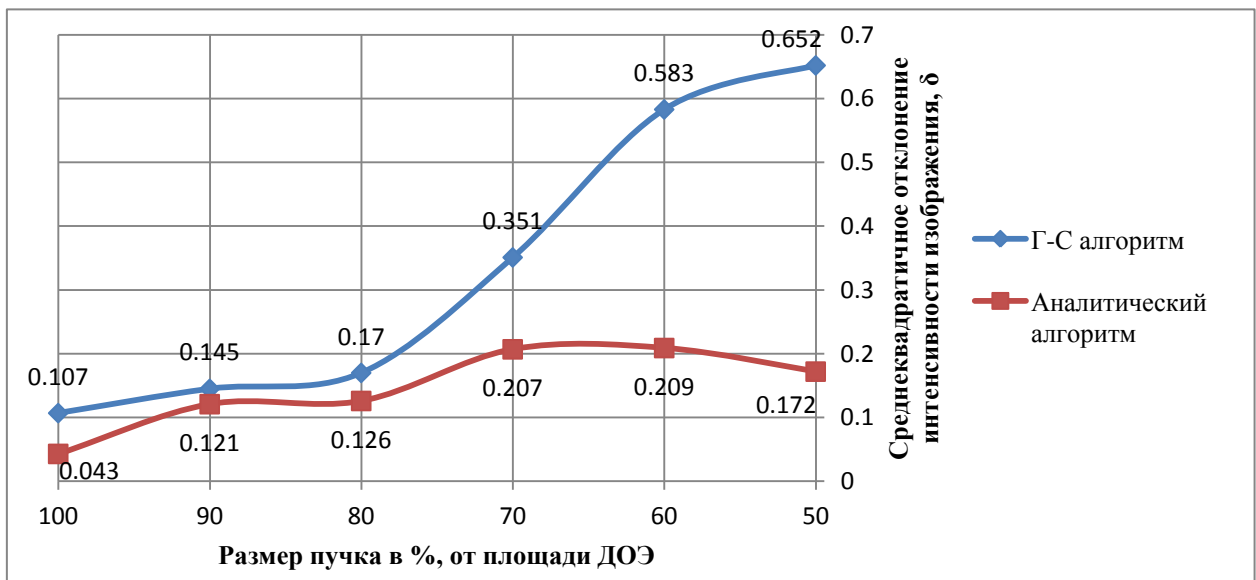


График 7. Зависимость среднеквадратичных отклонений интенсивности изображения для Г-С алгоритма и Метода фрагментации для расчета ДОЭ (квадрат по центру)

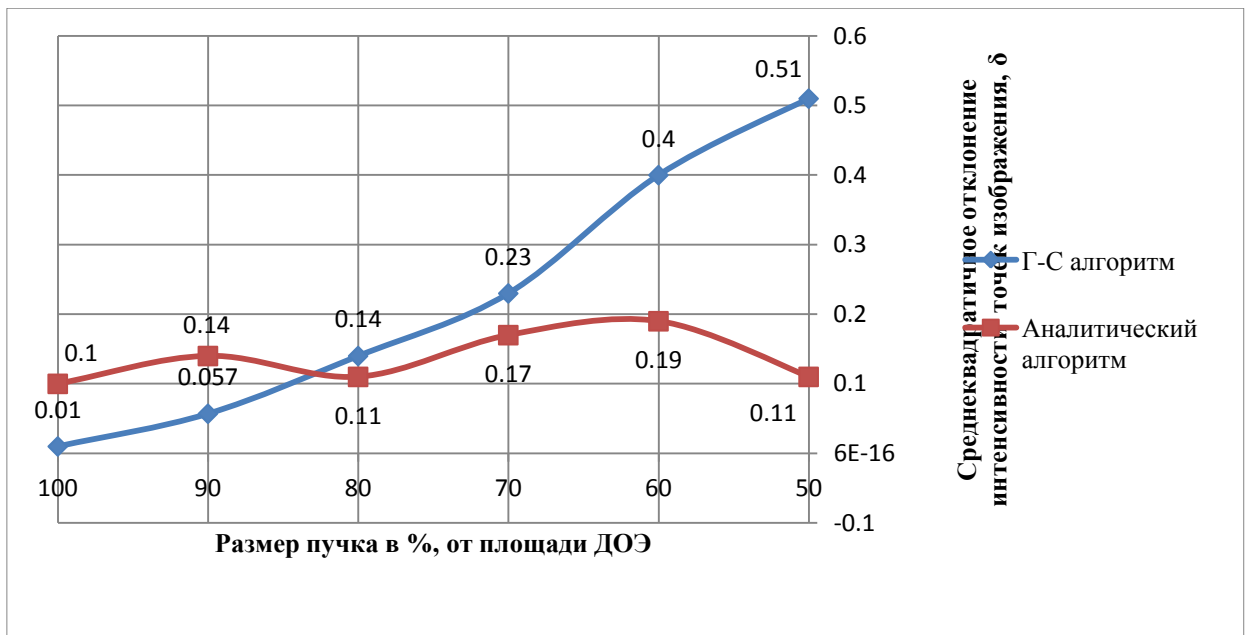


График 8. Зависимость среднеквадратичного отклонения интенсивности в точках для Г-С алгоритма и Метода фрагментации для расчета ДОЭ (квадрат по центру)

На Графиках 9 и 10 пучок смещен в угол ДОЭ (Рисунок 21(г)).

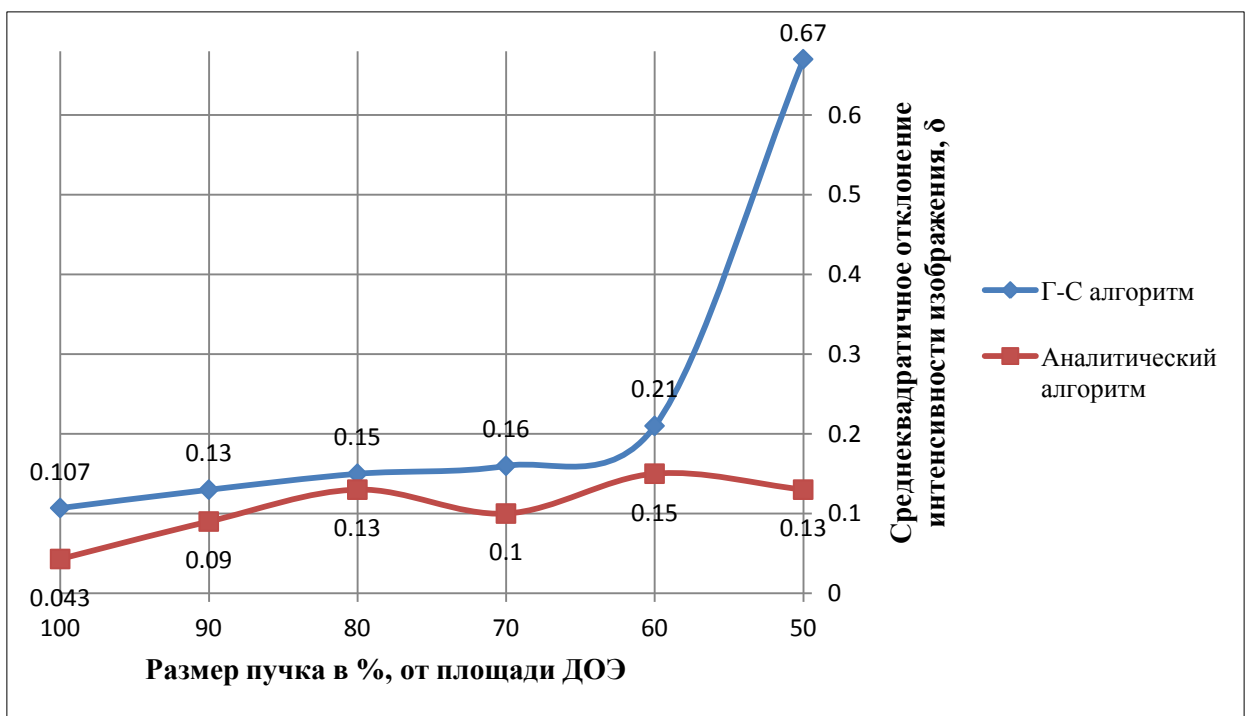


График 9. Зависимость среднеквадратичных отклонений интенсивности изображения для Г-С алгоритма и Метода фрагментации для расчета ДОЭ (квадрат смещен)

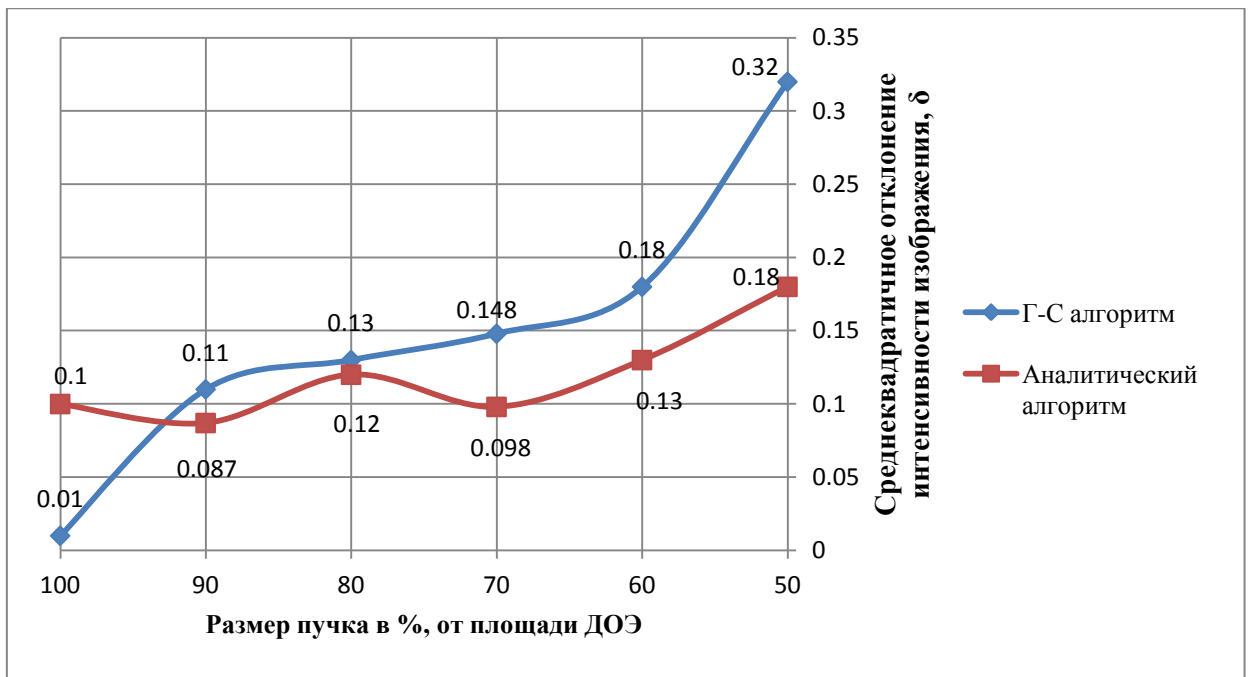
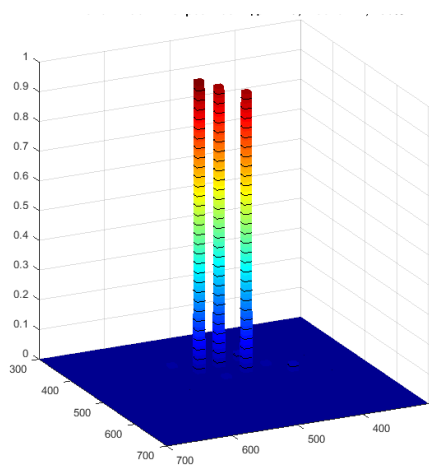


График 10. Зависимость среднеквадратичного отклонения интенсивности в точках для Г-С алгоритма и Метода фрагментации для расчета ДОЭ (квадрат смещен)

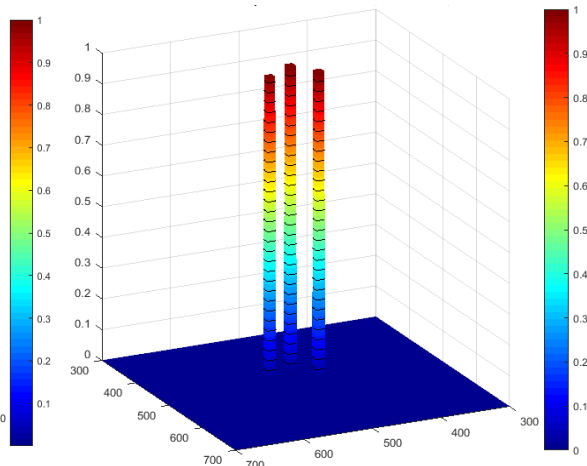
На Рисунке 22 показаны распределения интенсивности для случаев, когда поверхность ДОЭ освещена квадратным, симметричным относительно центра ДОЭ пучком, покрывающим 100% и 50 % поверхности.

На графиках хорошо видно, что относительная интенсивность для трех точек изображения остается более равномерной при расчете ДОЭ при помощи аналитического алгоритма.

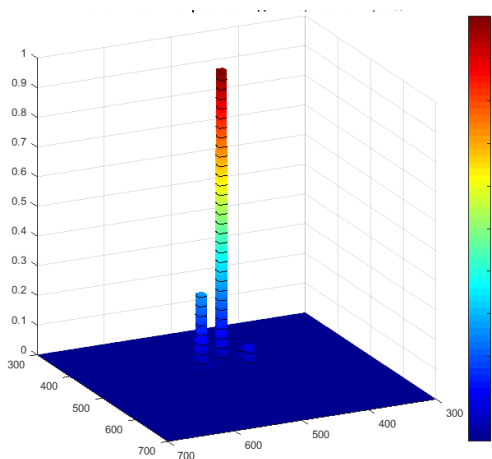
Ухудшение качества можно объяснить неабсолютной однородностью структуры ДОЭ, что влечет за собой изменение картины при изменении освещенности.



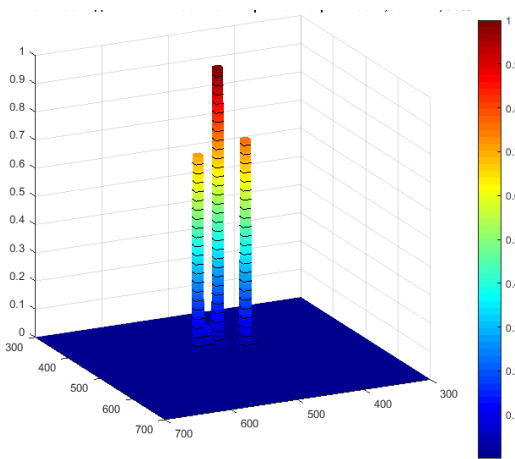
(a)



(б)



(в)



(г)

Рисунок 22 распределения интенсивности в точках для Г-С а) в) и аналитического б) г) методов расчета ДОЭ. Вверху пучок света покрывает 100% поверхности ДОЭ, внизу 50%.

ИТОГИ РАБОТЫ

В работе было предложено два аналитических метода расчета ДОЭ, основанных на принципах геометрической оптики и законе дифракции.

Метод симуляции киноформа основан на заполнении областей ДОЭ, рассчитанного при помощи Г-С алгоритма, аналитически рассчитанными дифракционными решетками, фокусирующими свет в заданные точки. Для реализации метода симуляции киноформа в работе был разработан алгоритм определения областей ДОЭ и автоматической замены дифракционных решеток внутри выделенных областей на аналитически рассчитанные.

Метод фрагментации основан на разбиении плоскости ДОЭ на случайные области и заполнении их аналитически рассчитанными дифракционными решетками, фокусирующими свет в заданные точки. Для разбиения плоскости, в ходе работы, был разработан алгоритм разбиения плоскости с использованием диаграммы Вороного

Расчеты ДОЭ с применением предложенных в данной работе методов показали, что аналитически рассчитанные ДОЭ не уступают, а в некоторых случаях и превосходят по качеству дифракционные элементы, рассчитанные при помощи итеративного метода Г-С.

Среднеквадратичные отклонения интенсивности, полученных при помощи Метода симуляции киноформа и Метода фрагментации ДОЭ, не превышают 0.1 для случая, когда ДОЭ полностью находится в пучке падающего излучения.

Метод фрагментации проявил себя лучше, чем Метод симуляции киноформа. Это связано с тем, что при расчете фазовой плоскости Г-С алгоритмом, получаемые области, заполненные различными решетками,

могут быть неравной площади. Следовательно, даже заменив решетки в таком ДОЭ на правильные аналитически рассчитанные, интенсивность в точках изображения будет неравной из-за неравенства площадей.

Дальнейшее изучение ДОЭ, рассчитанных Методом фрагментации, показало устойчивость формируемого изображения к неоднородности освещения поверхности ДОЭ и центрированию пучка падающего излучения. Такой результат можно объяснить однородностью структуры ДОЭ, полученного аналитическим методом. В таком ДОЭ пропорции между площадями освещаемых решеток сохраняются при уменьшении области освещения, в то время как ДОЭ, получаемые Г-С алгоритмом, имеют неоднородное распределение решеток по поверхности и дают точки с разной интенсивностью при частичном освещении.

Полученный результат дает основания рассматривать дальнейшее применение полученных Методом фрагментации ДОЭ в таких оптических приборах как, делителях пучка, ослабителях и фильтрах, где важно получить требуемое преобразование пучка независимо от точности его центрирования на поверхности ДОЭ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе были разработаны и применены аналитические методы для расчета ДОЭ. Фазовые элементы, рассчитанные при помощи предложенных методов, оказались сопоставимы по качеству, а в некоторых случаях превосходят ДОЭ, рассчитанные итеративными алгоритмами.

Полученные при помощи аналитических методов ДОЭ устойчивы к изменениям освещенности и точности позиционирования пучка, что позволяет рассматривать их дальнейшее применение в качестве оптических элементов для манипуляций с пучком падающего излучения.

Для улучшения качества расчета ДОЭ предложенными методами, в дальнейшем предстоит более тщательно выяснить, какие существуют недостатки у предложенных методов и как минимизировать негативный вклад в качество формируемого изображения, вызванный этими недостатками.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М. *Теория поля*. — Издание 7-е, исправленное. — М.: Наука, 1988. — 512 с
2. под ред. В.А. Сойфера *Методы компьютерной оптики* -М.: Физматлит, 2000.
3. Pavel A. Cheremkhin, Nikolay N. Evtikhiev, Vitaly V. Krasnov, *Comparison of kinoform synthesis methods for image reconstruction in Fourier plane*, Proc. of SPIE Vol. 9131, p. 2014
4. Kazanskiy N. L. *DOE-based lighting devices. the book" Methods for Computer Design of Diffractive Optical Elements* edited by Victor A. Soifer.—A Wiley Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc. – 2002. – С. 651-671.
5. N. Yoshikawa, M. Itoh, and T. Yatagai, *Quantized phase optimization of two-dimensional Fourier kinoforms by a genetic algorithm*, OPTICS LETTERS vol. 20, No. 7, 1995
6. O. Ripoll, V. Kettunen, and H. P. Herzig, “*Review of iterative Fourier-transform algorithms for beam shaping applications*,” Opt. Eng. 43, pp.2549–2556, 2004.
7. J. S. Liu and M. R. Taghizadeh, *Iterative algorithm for the design of diffractive phase elements for laser beam shaping*, Opt. Lett. 27, 1463–1465, 2002.
8. Каминская Т.П., Попов В.В., Салецкий А.М. *Исследование рельефа плёночных дифракционных оптических элемент*, Компьютерная оптика, №2 , том 40, сс. 215-224, 2016.
9. F. Wyrowski, *Diffractive optical elements: iterative calculation of quantized, blazed phase structures*, J. Opt. Soc. Am. A 7, 961–969, 1990.
10. R. W. Gerchberg, W. O. Saxton, *A practical algorithm for the determination of the phase from image and diffraction plane pictures*. Optik 35, 237–246, 1972.
11. Soifer V A., Golub M.A. *Diffractive micro-optical elements with non-point response* Proc. of SPIE vol.1751, p.140,1970

12. Pasienski M. DeMarco B., *A high-accuracy algorithm for designing arbitrary holographic atom traps*, Optical Society of America, 2008
13. Kotlyar V.V., Nikolski I.V., *Opt. & Las. In Engin.* 15(5) 323, 1991
14. Gorban A.N., Zinovyev A.Y. (2009). *Principal Graphs and Manifolds*, Ch. 2 in: *Handbook of Research on Machine Learning Applications and Trends: Algorithms, Methods, and Techniques*, Emilio Soria Olivias et al. (eds), IGI Global, Hershey, PA, USA, pp. 28-59.
15. Ф. Препарата, М. Шеймос. *Вычислительная геометрия: Введение.* — М.: Мир, 1989. Стр. 295
16. Дьяконов В.П. *MATLAB Полный самоучитель* — М.: ДМК Пресс 2017. - 768с
17. А.В.Волков *Оборудование и методы контроля микрорельефа дифракционных оптических элементов* — Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2007. — 80 с