

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

**«ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ МОЩНЫХ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ИМПУЛЬСОВ НА ПРОВОДЯЩИЕ
ЧАСТИЦЫ, ИНТЕГРИРОВАННЫЕ В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКУЮ СРЕДУ»**

Выполнил студент

405 группы:

ГЛАЗУНОВ ПАВЕЛ СЕРГЕЕВИЧ

Научный руководитель:

к.ф.-м.н., профессор

СЛЕПКОВ АЛЕКСАНДР ИВАНОВИЧ

Допущен к защите

Зав. кафедрой _____

Москва

2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. УРАВНЕНИЕ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ДЛЯ ПРОВОДЯЩИХ СРЕД.....	6
2. РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ О ПРОХОЖДЕНИИ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ВГЛУБЬ ПРОВОДНИКА.....	11
3. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ.....	14
4. АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНО- СТИ. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ.....	19
5. ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ПРОВОДЯЩЕМ ШАРЕ.....	23
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	32
ЛИТЕРАТУРА.....	35

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена теоретическому исследованию недавно предложенной технологии, в основе которой лежит взаимодействие электромагнитного излучения со средой: исследованию воздействия мощных электромагнитных импульсов (МЭМИ) на неоднородные среды, а именно на систему типа «проводящая частица - диэлектрик».

МЭМИ, как правило, воздействуют на твёрдые композитные среды с чёткими границами между веществами, имеющими разные физические свойства (диэлектрическую, магнитную проницаемости, проводимости, коэффициенты температурного расширения и др.), например, на диэлектрические среды, содержащие металлические вкрапления. Цель - добиться селективного эффекта: при воздействии МЭМИ возникают физические процессы, приводящие к разрушению материала диэлектрика преимущественно вокруг металлических вкраплений [1, 2]. Таким образом, использование этого явления может быть актуальным для широкого спектра прикладных задач в различных отраслях промышленности и медицине, среди которых: адресная доставка лекарств [1], дезинтеграция упорных минеральных руд [3], чистка поверхностей различных промышленных установок [4], разделение промышленных отходов для утилизации и переработки [4].

Детальное исследование разрушения композитных материалов, состоящих из веществ с различными электрофизическими свойствами, под воздействием МЭМИ является достаточно сложной задачей. Однако, во многих случаях для планирования и проведения экспериментальных исследований достаточно решения ряда идеализированных задач. К таким задачам, в частности, относится определение термических эффектов при воздействии МЭМИ на плоскую границу раздела сред системы «диэлектрик-проводящая частица».

Основные физические процессы, возникающие при воздействии МЭМИ можно условно разделить на две группы. Положительные процессы приводят

к растрескиванию материалов преимущественно вдоль границ раздела двух сред, тем самым, облегчая разделение композитных веществ на их составляющие после обработкой МЭМИ. Отрицательные процессы затрудняют или делают невозможным последующее разделение композита на его компоненты.

К положительным процессам, согласно [6], относятся:

- электрический пробой диэлектрика;
- эффект шнурование тока;
- испарение (или даже сублимация) вещества;
- повышение давления в локальных областях комплекса;
- магнитный пинч-эффект;
- образование каналов пробоя связывающих частицы;
- возникновение термомеханических напряжений;
- поглощение электромагнитной энергии за счет скин-эффекта;
- образование дендритов (при воздействии серии импульсов);
- воздействие пондеромоторных сил.

К отрицательным процессам относятся:

- перегрев комплекса: оплавление и спекание частиц и, как следствие, закрытие каналов пробоя;
- перегрев установки (электродов);
- искровой разряд в воздушном зазоре между электродами;
- чрезмерное разрушение комплекса;
- нежелательное повреждение диэлектрической среды.

Причина условного разделения на группы состоит в том, что большинство из вышеперечисленных процессов являются плохо изученными: для них не существует корректно работающих физических моделей и сложно сказать, какие из них являются превалирующими, а какими можно пренебречь. Поэтому ясно, что в первую очередь должны исследоваться хорошо изученные процессы, в существовании которых не приходится сомневаться. Таковым

является нагрев проводящих частиц из-за наведённых в них токов, создаваемых проникшими вглубь проводника электромагнитными волнами. Актуальность исследования этого эффекта обусловлена и тем, что он в зависимости от характеристик МЭМИ может являться как положительным, так и отрицательным. Причём достоверно известно [6], что среди отрицательных эффектов он занимает одну из главных ролей. Таким образом, возникают следующие ключевые вопросы.

- 1). Какой из физических процессов является превалирующим?
- 2). Как достичь наибольшего селективного эффекта?
- 3). Как избежать возникновения отрицательных эффектов?
- 4). Какие должны быть выбраны характеристики импульсов?

Поскольку любую череду импульсов можно представить в виде суммы гармоник, из вышеперечисленных вопросов вытекают следующие основные задачи исследования. Для гармонической зависимости электромагнитных полей от времени и следующих геометрий системы:

- двух бесконечных полупространств «металл-диэлектрик» (геометрия системы двух плоских электродов)

- металлического шара в диэлектрической среде (геометрия сферической металлической частицы)

- 1). Определить распределение электромагнитного поля в системе с учётом его проникновения в проводник.

- 2). Рассчитать объёмную плотность энергии, выделяемую в системе: джоулево тепло, обусловленное скин-эффектом.

3. Рассчитать температурное распределение в системе.

1. УРАВНЕНИЕ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ДЛЯ ПРОВОДЯЩИХ СРЕД

Методика решение задачи для одномерной модели состоит из следующих этапов.

1). Сведение системы исходных уравнений Максвелла к уравнениям Гельмгольца.

2). Решение задачи дифракции электромагнитных волн в исследуемой системе.

3). Решение краевой задачи теплопроводности в исследуемой системе.

Запишем систему уравнения Максвелла в СИ (1.1)-(1.2) и применим ко всем векторам \vec{X} и скалярам x из уравнений Максвелла преобразование Фурье (1.5)-(1.8).

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (1.2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \quad (1.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (1.4)$$

$$\vec{X}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{X}(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (1.5)$$

$$\vec{X}(\vec{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{X}(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt \quad (1.6)$$

$$x(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\vec{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (1.7)$$

$$x(\vec{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt \quad (1.8)$$

Тогда производная по времени заменится умножением на $-i\omega$ и уравнения Максвелла запишутся в следующем виде:

$$\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, \omega) = i\omega \vec{B}(\vec{r}, \omega) \quad (1.9)$$

$$\operatorname{div} \vec{D}(\vec{r}, \omega) = \rho(\vec{r}, \omega) \quad (1.10)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H}(\vec{r}, \omega) = -i\omega \vec{D}(\vec{r}, \omega) + \vec{j}(\vec{r}, \omega) \quad (1.11)$$

$$\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}, \omega) = 0 \quad (1.12)$$

Начиная с этого момента, под всеми величинами, входящими в уравнения Максвелла будем понимать выражения, зависящие от (\vec{r}, ω) , типа (1.6), (1.8).

Сделаем следующие допущения:

$$\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon \vec{E} \quad (1.13)$$

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H} = \mu \vec{H} \quad (1.14)$$

$$\varepsilon = \text{const} \quad (1.15)$$

$$\mu = \text{const} \quad (1.16)$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (1.17)$$

$$\sigma = \text{const} \quad (1.18)$$

Далее, если это не оговорено особо, мы будем работать в описанных выше допущениях. Причём величины ε и μ в общем случае комплексные, а также зависящие от частоты ω . Мы будем их обозначать так: $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$; $\mu = \mu_1 + i\mu_2$

Используя допущения (1.13)-(1.18), из уравнений (1.9)-(1.12) нетрудно вывести волновое уравнение Гельмгольца для вектора \vec{E} :

$$\begin{aligned} \text{rot}(1.9) &= \text{rot rot } \vec{E} = i\omega \text{rot } \vec{B} = |(1.14), (1.16)| = i\omega\mu \text{rot } \vec{H} = \\ &= |(1.11), (1.13), (1.17)| = \vec{E}(\omega^2\mu\varepsilon + i\omega\mu\sigma) \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\text{С другой стороны } \text{rot rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E} \quad (1.20)$$

Докажем, что $\text{div } \vec{E} = 0$:

$$\begin{aligned} \text{div (1.11)} &= \text{div rot } \vec{H} = |\text{т. к. div rot любого вектора равна 0}| = 0 = \\ &= \text{div}(-i\omega\vec{D} + \vec{j}) = |(1.13), (1.17)| = \text{div}(-i\omega\varepsilon\vec{E} + \sigma\vec{E}) = |(1.15)(1.18)| = \\ &= (-i\omega\varepsilon + \sigma) \text{div } \vec{E} \end{aligned} \quad (1.21)$$

Отсюда следует, что $\text{div } \vec{E} = 0$. Тогда выражение (1.19) принимает вид уравнения Гельмгольца:

$$\Delta \vec{E} + \vec{E}(\omega^2\mu\varepsilon + i\omega\mu\sigma) = 0 \quad (1.22)$$

или

$$\Delta \vec{E} + \kappa^2 \vec{E} = 0 \quad (1.23)$$

где:
$$\kappa^2 = \omega^2 \mu \varepsilon + i \omega \mu \sigma \quad (1.24)$$

комплексный коэффициент.

Из равенства нулю ротора вектора напряжённости электрического поля и допущения $\varepsilon = const$ следует, что и $div \vec{D} = 0 = \rho$. Поэтому далее будем считать, что в объёме всего исследуемого пространства нет скопившихся свободных зарядов. Это можно доказать и по-другому. Очевидно, что до воздействия электромагнитного излучения на систему в ней не было каких-либо скоплений свободных зарядов (просто из-за того, что нет причины, из-за которой они бы скапливались). При сделанных нами предположениях из уравнения непрерывности следует:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -div \vec{j} = -\sigma div \vec{E} = 0 \quad (1.25)$$

Так, что если в системе с самого начала не было скоплений свободных зарядов, они (при сделанных нами предположениях) и не появятся. Это также означает, что поле токов соленоидально, из чего следует, что линии тока замкнуты, нет источников и стоков зарядов, физически это вполне понятно.

При сделанных выше умозаключениях, можно ещё упростить систему уравнений Максвелла, исключив из неё вектора $\vec{j}, \vec{D}, \vec{B}$ и, в конечном счете, привести её к следующему виду:

$$rot \vec{E} = i \omega \mu \vec{H} = i \kappa_h \vec{H}, \kappa_h = \omega \mu \quad (1.26)$$

$$div \varepsilon \vec{E} = 0 \quad (1.27)$$

$$rot \vec{H} = (-i \omega \varepsilon + \sigma) \vec{E} = -i \kappa_e \vec{E}, \kappa_e = \omega \varepsilon + i \sigma \quad (1.28)$$

$$div \mu \vec{H} = 0 \quad (1.29)$$

Заметим также, что:
$$\kappa_h \kappa_e = \kappa^2 \quad (1.30)$$

При решении задач дифракции для сшивания полей на границах раздела двух сред будем пользоваться стандартными граничными условиями (1.31)-(1.34), вывод которых широко известен, поэтому здесь не приводится:

$$D_n^I|_s - D_n^{II}|_s = \rho_{нов} \quad (1.31)$$

$$B_n^I|_s - B_n^{II}|_s = 0 \quad (1.32)$$

$$(\vec{H}^{\text{II}} - \vec{H}^{\text{I}}, \vec{\tau}) = \vec{J}_{\text{пов}}, \vec{\nu} \quad (1.33)$$

$$(\vec{E}^{\text{II}} - \vec{E}^{\text{I}}, \vec{\tau}) = \vec{J}_{\text{пов}}, \vec{\nu} \quad (1.34)$$

где $(\vec{\nu}, \vec{\tau}, \vec{n})$ - правая тройка векторов, $(\vec{\nu}, \vec{\tau})$ – взаимно перпендикулярные тангенциальные векторы, а \vec{n} - нормаль, проведённая из II области в I (рис .1).

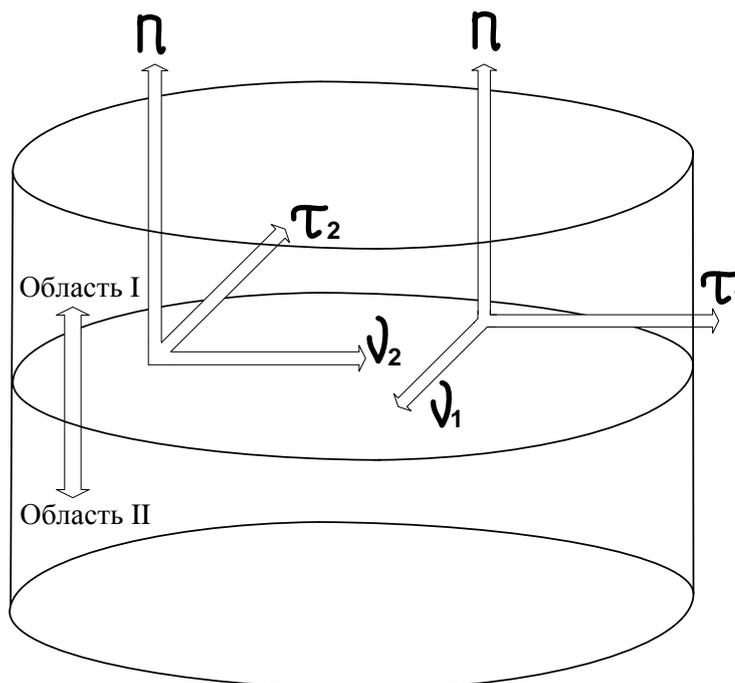


Рисунок 1 – Взаимно перпендикулярные тангенциальные векторы на границе двух областей

В последующем изложении во избежание путаницы индексы обозначающие принадлежность величины к той или иной области, обозначаются римскими цифрами. Сразу сделаем замечание, что перед нами на самом деле 6 уравнений: граничные условия (1.33) и (1.34) являются векторными « 2-D» уравнениями, поскольку к любой достаточно гладкой поверхности (разделу сред) в одной точке может быть проведено два тангенциальных вектора, перпендикулярных друг другу (рис.1). Неизвестных же величин в выражениях (1.31)-(1.34) 9: 6 компонент электромагнитных векторов, 2 тангенциальные компоненты поверхностного тока и 1 скаляр - поверхностный заряд (выве-

денное следствие $\rho = 0$, относилось лишь к объёмным зарядам и в общем случае $\rho_{нов} \neq 0$).

Таким образом, система для сшивания компонент поля, вообще говоря, является недоопределённой. Доопределить систему можно, только если как-то «руками» задать (феноменологически или же из каких-либо теоретических соображений) эти поверхностные величины. Очевидно, что при этом $\rho_{нов}$ и $\vec{j}_{нов}$ становятся функциями $\vec{E}, \vec{B}, \vec{D}, \vec{H}$.

Теории, позволяющей найти эту зависимость, пока не создано, но из эксперимента, известно, что влияние поверхностных явлений, как правило, достаточно мало. Поэтому будем полагать $\rho_{нов}$ и $\vec{j}_{нов}$ малыми, фактически равными нулю. Более того, $\rho_{нов}$ и $\vec{j}_{нов}$ не входят непосредственно в уравнение Гельмгольца и наличие поверхностных токов и зарядов не повлияет на общее решение (до сшивки), тем самым, кардинально не повлияет на точное решение. Поэтому, предполагая незначительность этих величин, мы относим влияние поверхностных эффектов к поправкам к точному решению, полученному при $\rho_{нов} = 0, \vec{j}_{нов} = 0$. Поэтому далее везде граничные условия (1.31)-(1.34) имеют вид:

$$D_n^I|_s = D_n^{II}|_s \quad (1.35)$$

$$B_n^I|_s = B_n^{II}|_s \quad (1.36)$$

$$(\vec{H}^{II} - \vec{H}^I, \vec{\tau}) = 0 \quad (1.37)$$

$$(\vec{E}^{II} - \vec{E}^I, \vec{\tau}) = 0 \quad (1.38)$$

2. РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ О ПРОХОЖДЕНИИ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ВГЛУБЬ ПОВОДНИКА.

Сформулируем следующую задачу одномерной дифракции. Рассмотрим дифракцию плоской электромагнитной волны, падающей нормально из диэлектрической среды I на проводящую среду II (рис.2).

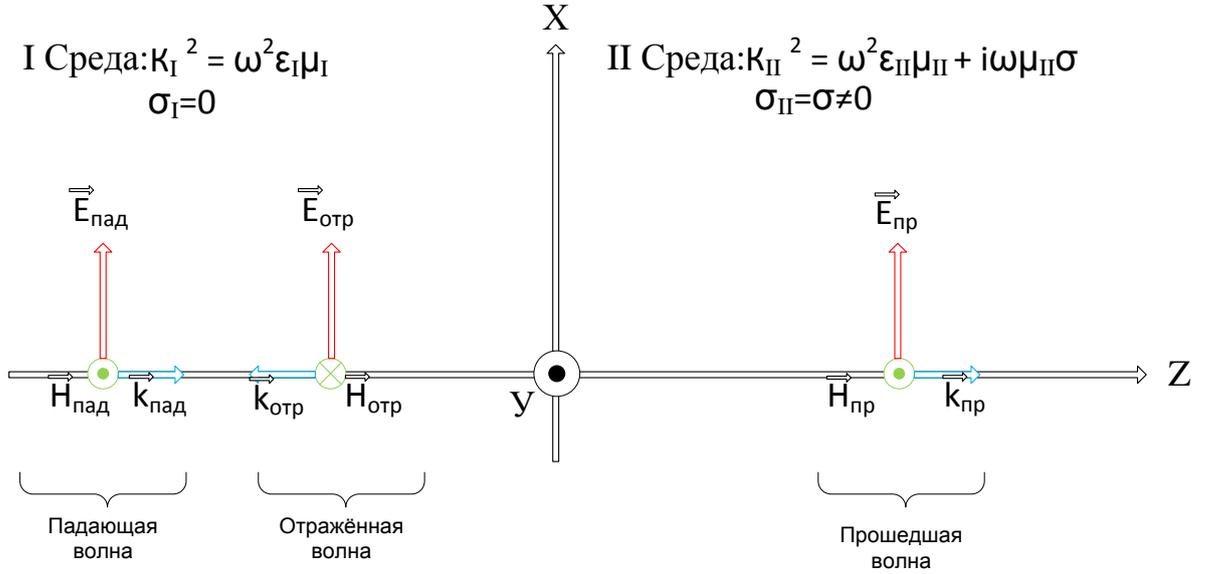


Рисунок 2 – К постановке задачи дифракции для одномерной модели

На язык математики данный рисунок переводится так:

$$\vec{E}_{nad} = \vec{e}_x E_{nad} e^{-i(\omega t - k_1 z)} \quad (2.1)$$

$$\vec{E}_{omp} = \vec{e}_x E_{omp} e^{-i(\omega t + k_1 z)} \quad (2.2)$$

$$\vec{E}_{np} = \vec{e}_x E_{np} e^{-i(\omega t - k_{II} z)} \quad (2.3)$$

В данном случае считается, что E_{nad} задано, а E_{omp} и E_{np} нужно найти. Так как в данной задаче отличны от 0 только тангенциальные компоненты векторов, логично использовать граничные условия (2.37), (2.38):

$$\vec{H}_{\tau}^{II}|_{z=0} = \vec{H}_{\tau}^I|_{z=0} \quad (2.4)$$

$$\vec{E}_{\tau}^{II}|_{z=0} = \vec{E}_{\tau}^I|_{z=0} \quad (2.5)$$

Из (2.1)-(2.3) и (2.5) сразу же следует:

$$E_{nad} + E_{omp} = E_{np} \quad (2.6)$$

(2.4) перепишем в следующем виде:

$$\vec{H} = \frac{\text{rot } \vec{E}}{i\omega\mu} \Rightarrow \frac{\text{rot } \vec{E}_I}{\mu_I} \Big|_{z=0} = \frac{\text{rot } \vec{E}_{II}}{\mu_{II}} \Big|_{z=0}$$

Так как (2.1)-(2.3) представляют собой плоские волны, то операция взятия ротора эквивалентна векторному произведению на $i\vec{k}$: $\text{rot } \vec{E} = [i\vec{k}, \vec{E}]$, так что в итоге получаем:

$$\frac{[\vec{k}_I, \vec{E}_I]}{\mu_I} \Big|_{z=0} = \frac{[\vec{k}_{II}, \vec{E}_{II}]}{\mu_{II}} \Big|_{z=0} \quad (2.7)$$

Расписывая (2.7) по компонентам с учётом (2.6) получаем систему уравнений для определения $E_{отр}$ и $E_{пр}$:

$$E_{пад} + E_{отр} = E_{пр} \quad (2.8)$$

$$\frac{k_I}{\mu_I} (E_{пад} - E_{отр}) = \frac{k_{II}}{\mu_{II}} E_{пр} \quad (2.9)$$

Решая эту систему, находим, что:

$$\frac{E_{отр}}{E_{пад}} = \frac{\frac{k_I}{\mu_I} - \frac{k_{II}}{\mu_{II}}}{\frac{k_I}{\mu_I} + \frac{k_{II}}{\mu_{II}}} = d \quad (2.10)$$

$$\frac{E_{пр}}{E_{пад}} = \frac{2\frac{k_I}{\mu_I}}{\frac{k_I}{\mu_I} + \frac{k_{II}}{\mu_{II}}} = \tau \quad (2.11)$$

k_I и k_{II} нам не известны, но их можно найти из следующих соображений: $\vec{E}_{пад/отр/пр}$ как плоские волны удовлетворяют волновому уравнению Гельмгольца. Поэтому, подставляя их в него, получаем:

$$\Delta \vec{E}_{пад/отр/пр} + \kappa^2 \vec{E}_{пад/отр/пр} = 0 \quad (2.12)$$

$$\vec{E}_{пад/отр/пр} (\kappa_{I,II}^2 - k_{I,II}^2) = 0 \quad (2.13)$$

Из этого следует:

$$\kappa_{I,II}^2 = k_{I,II}^2 \quad (2.14)$$

$$k_I^2 = \kappa_I^2 = \omega^2 \mu_I \varepsilon_I \quad (2.15)$$

$$k_{II}^2 = \kappa_{II}^2 = \omega^2 \mu_{II} \varepsilon_{II} + i\omega \mu_{II} \sigma \quad (2.16)$$

Отделим в k_{II} реальную и мнимую части:

$$k_{II} = k_{II1} + ik_{II2} \quad (2.17)$$

Подставим (2.17) в (2.16) и в полученном равенстве приравняем отдельно вещественную и мнимую части (для простоты положим диэлектрические и магнитные проницаемости обеих сред вещественными), тогда получится система для определения k_{II1} и k_{II2} :

$$k_{II1}^2 - k_{II2}^2 = \omega^2 \mu_{II} \varepsilon_{II} \quad (2.18)$$

$$2k_{II1}k_{II2} = \omega \mu_{II} \sigma \quad (2.19)$$

Решая эту систему, получаем квадратное уравнение относительно k_{II1} и k_{II2} и ответ:

$$k_{II1} = \sqrt{\frac{\omega^2 \mu_{II} \varepsilon_{II}}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon_{II}}\right)^2} + 1 \right]} \quad (2.20)$$

$$k_{II2} = \sqrt{\frac{\omega^2 \mu_{II} \varepsilon_{II}}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon_{II}}\right)^2} - 1 \right]} \quad (2.21)$$

С помощью этих двух выражений и ещё выражения (2.15) полностью определяются амплитуды $E_{над}$, $E_{отр}$, $E_{пр}$.

3. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Найдём теперь объёмную плотность тепла w , выделяющегося в проводнике:

$$w = \sigma \vec{E}^2 \quad (3.1)$$

w - величина вещественная, а у нас $\vec{E} \in C$, поэтому нужно сначала взять реальную часть от вектора электрической напряжённости поля, а только затем возводить её в квадрат, так что в нашем случае формула (3.1) приобретает вид:

$$w = \sigma (Re \vec{E}_{np})^2 \quad (3.2)$$

где \vec{E}_{np} берётся из (3.3). Для того чтобы было проще брать реальную часть, выделим из выражения (3.3) модуль и фазу:

$$\vec{E}_{np} = \vec{e}_x E_{np} e^{-i(\omega t - k_{II} z)} = |(2.11)| = \vec{e}_x E_{na\partial} \tau e^{-i(\omega t - k_{II} z)} \quad (3.3)$$

$E_{na\partial}$ задано по условию задачи, поэтому для простоты возьмем $E_{na\partial} \in R$ и, имея в виду, что $\tau = \tau_1 + i\tau_2$, $k_{II} = k_{II1} + ik_{II2}$ получим

$$\vec{E}_{np} = \vec{e}_x E_{np} e^{-i(\omega t - k_{II} z)} = \vec{e}_x E_{na\partial} \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2} e^{-k_{II2} z} e^{-i\left(\omega t - k_{II1} z - \arctg\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)\right)} \quad (3.4)$$

Тогда:

$$Re(\vec{E}_{np}) = \vec{e}_x E_{na\partial} \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2} e^{-k_{II2} z} \cos\left(\omega t - k_{II1} z - \arctg\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)\right) \quad (3.5)$$

$$w = \sigma E_{na\partial}^2 (\tau_1^2 + \tau_2^2) e^{-2k_{II2} z} \cos^2\left(\omega t - k_{II1} z - \arctg\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)\right) \quad (3.6)$$

Обобщение легко делается и для случая, когда плоская падающая волна не гармоническая (но плоская) и $\vec{E}_{na\partial} = \vec{e}_x E_{na\partial}(t) e^{ik_1 z}$. В этом случае, пользуясь формулами (2.5)-(2.8) и (3.2), получаем:

$$E_{na\partial}(\vec{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_{na\partial}(\vec{r}, t) e^{i\omega t} dt \quad (3.7)$$

$$\vec{E}_{np}(\vec{r}, t) = \vec{e}_x \int_{-\infty}^{+\infty} E_{na\partial}(\vec{r}, \omega) \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2} e^{-k_{II2} z} e^{-i\left(\omega t - k_{II1} z - \arctg\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)\right)} d\omega \quad (3.8)$$

$$w = \sigma (Re \vec{E}_{np})^2 \quad (3.9)$$

Сформулируем теперь задачу о нахождении тепла в нашей области (рис.3): так как лишь II среда является проводником, только в ней и происходит выделение тепла, причём функция объёмного выделения тепла $w(z, t)$ нами уже была найдена. В среде I нет источников тепла, но на границе $z=0$ существует постоянный поток тепла от среды II.

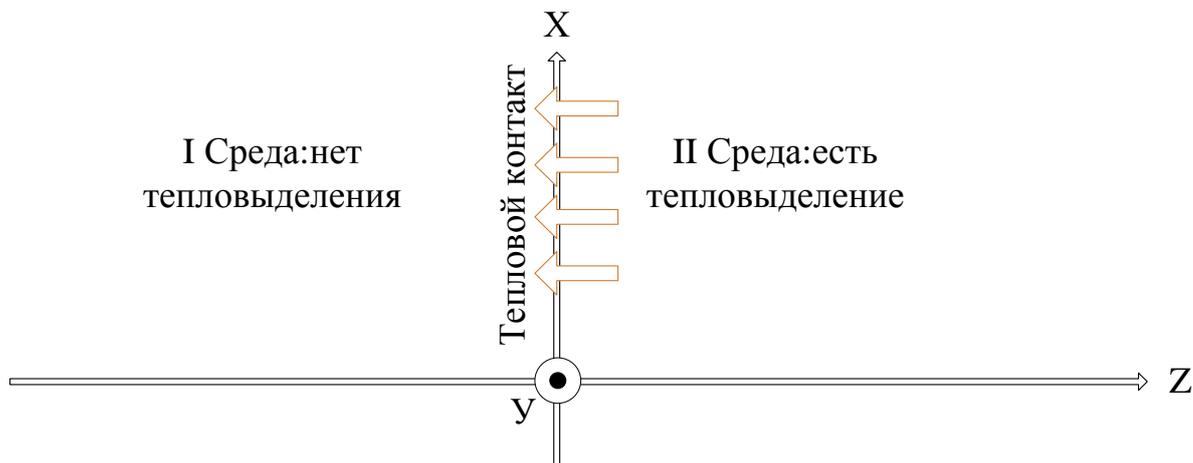


Рисунок 3 – К постановке задачи теплопроводности для одномерной модели

Математически всё это записывается как система двух уравнений в частных производных связанных условиями сопряжения при $z=0$, с заданными начальными условиями при $t=0$ и с естественными граничными условиями на бесконечности (u – температура):

$$u_{I t} - a_I^2 u_{I z z} = 0 \quad (3.10)$$

$$u_{II t} - a_{II}^2 u_{II z z} = f(z, t) = \frac{w(z, t)}{C_{II} \rho_{II}} =$$

$$= \frac{\sigma E_{nao}^2 (\tau_1^2 + \tau_2^2)}{C_{II} \rho_{II}} e^{-2qz} \cos^2(\omega t - bz - \arctg(\frac{\tau_2}{\tau_1})) \quad (3.1)$$

Обозначим для краткости $\frac{\sigma E_{nao}^2 (\tau_1^2 + \tau_2^2)}{C_{II} \rho_{II}} = M$ (3.12)

В данных обозначениях C – удельная теплоёмкость среды, ρ - плотность, K - коэффициент теплопроводности, $a^2 = \frac{K}{c\rho}$ – коэффициент температуропроводности, и, во избежание путаницы, реальная и мнимая части волновых векторов во II среде обозначены как:

$$k_{II1} = b \quad (3.13)$$

$$k_{II2} = q \quad (3.14)$$

Начальное условие:

$$u_I(z, 0) = u_{II}(z, 0) = u_0 = const \quad (3.15)$$

Условия сопряжения:

$$K_I u_{Iz}(0, t) = K_{II} u_{IIz}(0, t) \quad (3.16)$$

$$u_I(0, t) = u_{II}(0, t) \quad (3.17)$$

Естественные граничные условия:

$$u_I(z \rightarrow -\infty, t) = u_{II}(z \rightarrow \infty, t) = u_0 \quad (3.18)$$

Прежде чем приступить к решению системы (3.10)-(3.18), упростим выражение для $f(z, t)$. Так как для электромагнитного излучения, как правило, $\omega \gg 1$, а тепловой нагрев среды носит кумулятивный характер, то на достаточно больших временах наблюдения $t_{набл} \gg \frac{1}{\omega}$ нам уже будет не так важна зависимость $f(z, t)$ от времени. Чтобы избавиться от этой зависимости усредним $f(z, t)$ по периоду $T = \frac{2\pi}{2\omega}$ (периоду колебаний $\cos^2(\omega t)$). В таком случае:

$$\langle f(z, t) \rangle = \frac{\sigma E_{наод}^2 (\tau_1^2 + \tau_2^2)}{c_{II} \rho_{II}} e^{-2qz} \langle \cos^2 \left(\omega t - bz - \arctg \left(\frac{\tau_2}{\tau_1} \right) \right) \rangle = \frac{M}{2} e^{-2qz} \quad (3.19)$$

Далее будет получено аналитически решение как раз для случая $f(z, t) = \langle f(z, t) \rangle = \frac{M}{2} e^{-2qz}$.

Решать систему (3.10)-(3.18) будем при помощи преобразования Лапласа. Из-за громоздкости выкладок опишем решение лишь схематично. Во-первых, к системе (3.10)-(3.18) применяется преобразование Лапласа, с помощью которого от функций $u_{I,II}(z, t)$ мы переходим к их изображениям:

$$U_{I,II}(z, p) = \int_0^{+\infty} u_{I,II}(z, t) e^{-pt} dt \quad (3.20)$$

Делая преобразования с каждым из выражений (3.10)-(3.18) и, используя основные правила преобразования Лапласа [7], мы переходим от системы

уравнений в частных производных к системе обычных дифференциальных уравнений:

$$pU_I - u_0 - a_I^2 U_{Izz} = 0 \quad (3.21)$$

$$pU_{II} - u_0 - a_{II}^2 U_{IIzz} = \frac{M}{2} e^{-2qz} \quad (3.22)$$

$$U_I(0, p) = U_{II}(0, p) \quad (3.23)$$

$$K_I U_{Iz}(0, p) = K_{II} U_{IIz}(0, p) \quad (3.24)$$

$$U_I(z \rightarrow -\infty, p) = U_{II}(z \rightarrow \infty, p) = \frac{u_0}{p} \quad (3.25)$$

Решение этой системы находится тривиально [8]. Затем, беря от полученного решения системы (3.21)- (3.25) обратное преобразование Лапласа $u_{I,II}(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{A-i\infty}^{A+i\infty} U_{I,II}(z, p) e^{pt} dp$, получим ответ (промежуточные выкладки не указываются по причине их громоздкости):

$$u_I(z, t) = 2PP_0P_2 \left[e^{s^2t} e^{\frac{-sz}{a_I}} \frac{1}{s} f_{+s}^I + f_0^I \left[\frac{z}{a_I} - \frac{1}{s} \right] + 2 \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{\frac{-z^2}{4a_I^2t}} \right] + u_0 \quad (3.26)$$

$$u_{II}(z, t) = P e^{s^2t} \left[-\frac{1}{2} e^{\frac{-sz}{a_{II}}} f_{-s}^{II} + (\Gamma_2 - \Gamma_1) e^{\frac{sz}{a_{II}}} f_{+s}^{II} + e^{\frac{-sz}{a_{II}}} \right] + \\ + 2PP_0f_0^{II} \left[P_1 - \frac{zP_2}{a_{II}} \right] + 2 \frac{M\Gamma_2}{s} \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{\frac{-z^2}{4a_{II}^2t}} - P e^{-2qz} + u_0 \quad (3.27)$$

где: $P = \frac{M}{2s^2}$, $f_s^I = \operatorname{erfc} \left(\frac{-z}{2a_I\sqrt{t}} + s\sqrt{t} \right)$, $f_s^{II} = \operatorname{erfc} \left(\frac{z}{2a_{II}\sqrt{t}} + s\sqrt{t} \right)$, $s = 2a_{II}q$,

$$P_0 = \frac{1}{\frac{K_I}{a_I} + \frac{K_{II}}{a_{II}}}, \quad P_1 = \frac{1}{2} \frac{K_I}{a_I}, \quad P_2 = qK_{II}, \quad \Gamma_1 = \frac{1}{2} \frac{\frac{K_I}{a_I}}{\frac{K_I}{a_I} + \frac{K_{II}}{a_{II}}}, \quad \Gamma_2 = \frac{1}{2} \frac{\frac{K_{II}}{a_{II}}}{\frac{K_I}{a_I} + \frac{K_{II}}{a_{II}}}$$

Оценим характерное поведение температуры при $t \rightarrow \infty$. Для простоты рассмотрим $u(z = 0, t)$:

$$u(z = 0, t) = \frac{P}{4} \left\{ e^{s^2t} [2 - \operatorname{erfc}(-s\sqrt{t}) + (\Gamma_2 - \Gamma_1) \operatorname{erfc}(s\sqrt{t})] + \right. \\ \left. + 8P_0P_2 \sqrt{\frac{t}{\pi}} + 4P_0P_1 - 2 \right\} + u_0 \quad (3.28)$$

В данном выражении слагаемые можно разделить на 2 категории, которые при $t \rightarrow \infty$ затухают (а точнее даже при $t \gg s^{-2} = \frac{1}{(2a_{11}q)^2}$), и которые остаются. Тогда при $t \rightarrow \infty$ в точке соприкосновения двух сред получаем:

$$u(z = 0, t \rightarrow \infty) = 2P_0P_2\sqrt{\frac{t}{\pi}} + PP_0P_1 - \frac{P}{2} + u_0 \quad (3.29)$$

Таким образом, получен важный результат: $u(z = 0, t \rightarrow \infty) \sim \sqrt{t}$. Характерное поведение слагаемых в решении (3.28) изображено на рис. 4. Для простоты при построении графика все константы в выражении (3.28) не учитывались. График построен при следующих параметрах:

$$a_1=0,5; a_2=2; K_1=4; K_2=2; M=100; q=1.$$

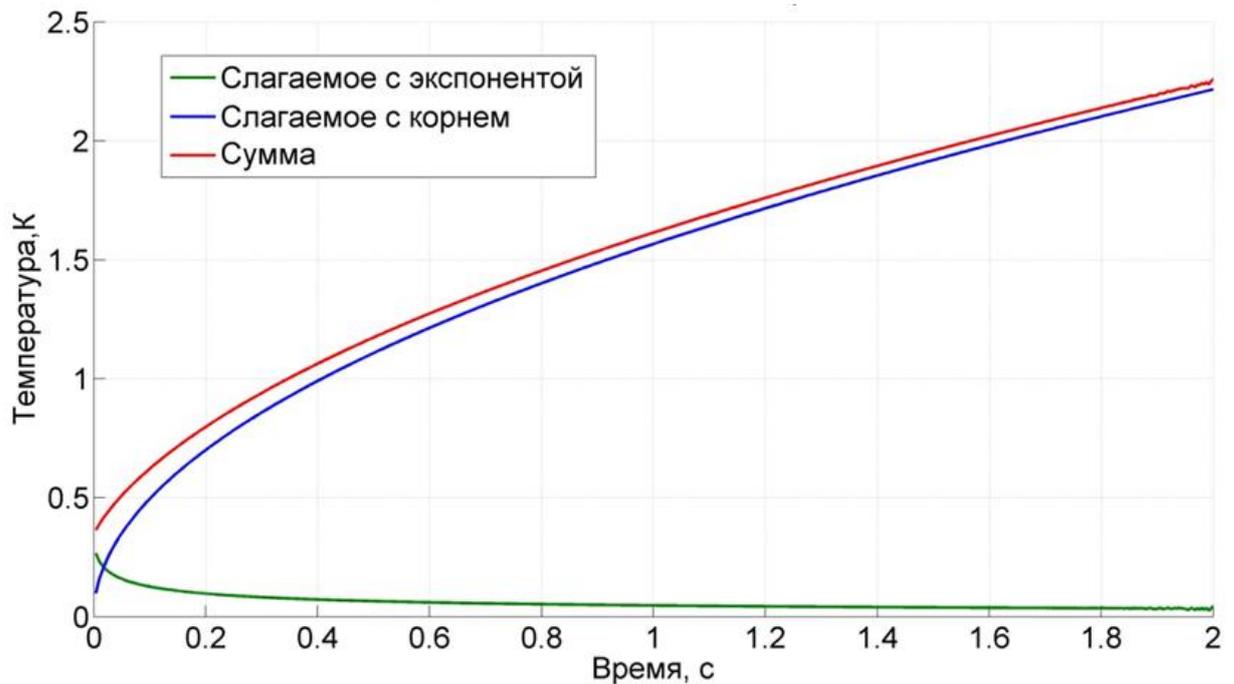


Рисунок 4 - Асимптотика температуры на границе областей при больших временах

4. АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ.

Понятно, что из-за громоздкости полученных формул при их получении была высока вероятность ошибки, поэтому формулы (3.26)-(3.27) были проверены с помощью компьютерного моделирования. При моделировании использовалась 6 точечная симметричная разностная схема (с безусловной сходимостью) с повышенной аппроксимацией порядка $O(h^2 + \tau^2)$ [9]. Бесконечное пространство заменялось конечным отрезком длины $2L$ (рис.5), на концах которого ставились условия Дирихле $u_I(z = -L, t) = u_{II}(z = +L, t) = u_0$, являющиеся аналогом естественных граничных условий (3.18).

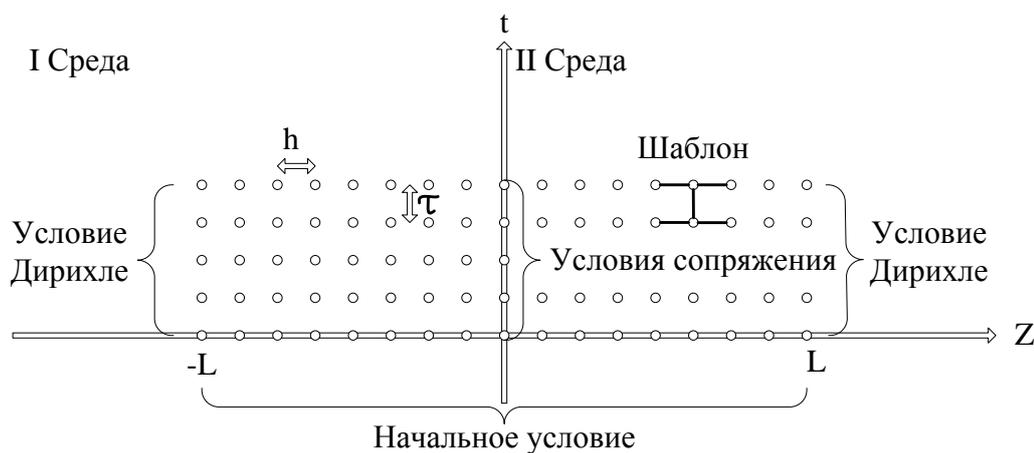


Рисунок 5 – К постановке численного решения задачи теплопроводности для одномерной модели

СЛАУ, получающаяся при разностной аппроксимации дифференциальных уравнений, решалась итерационным методом верхней релаксации. Результаты проверки показаны ниже на графиках (рис.7-9).

Приведём характерную зависимость модуля коэффициента прохождения τ от частоты ν для золота (жёлтый цвет), серебра (серый), меди (оранжевый) (рис б).

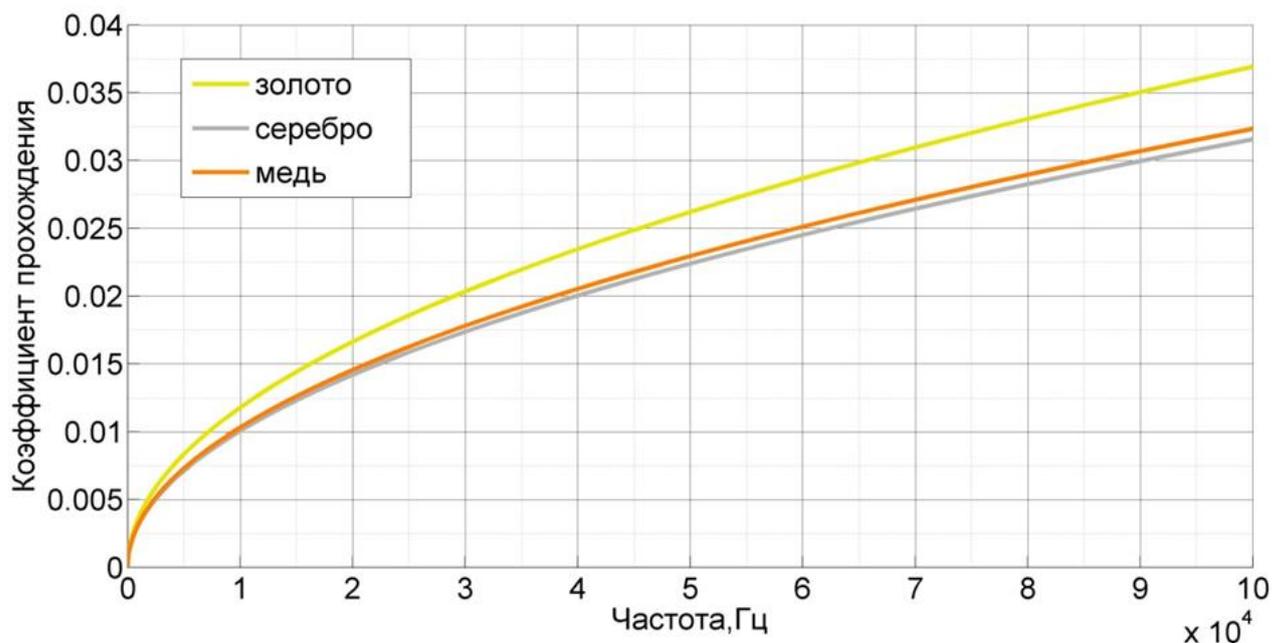


Рисунок 6 - График зависимости модуля коэффициента прохождения от частоты

Из рис. 6 видно, что с увеличением проводимости материала, график становится более пологим. Это можно обосновать тем, что увеличение проводимости фактически означает увеличение концентрации свободных электронов в металле. Поэтому электромагнитная волна сильнее взаимодействует со средой, затухает в ней быстрее и, как следствие, волне «труднее» проникнуть вглубь среды.

Далее приведено сравнение аналитических решений (4.26)-(4.27) с решениями, полученными численно. На рис.7-9 как раз и показано это сравнение, для обоих решений $f(z, t) = \frac{M}{2} e^{-2qz}$, температурный профиль изображён при времени 1 секунда и следующих параметрах задачи (красный цвет - численное решение, синий – аналитическое):

$$u_0=300; a_1=0,5; a_2=2; K_1=4; K_2=2; h=0,008; \tau =0,002; M=100; q=1.$$

Сделаем замечание, что такие параметры не отражают реальную физическую систему, но являются подходящими для проверки правильности аналитического решения (при этих параметрах система хорошо решается численно, т.к. является хорошо обусловленной).

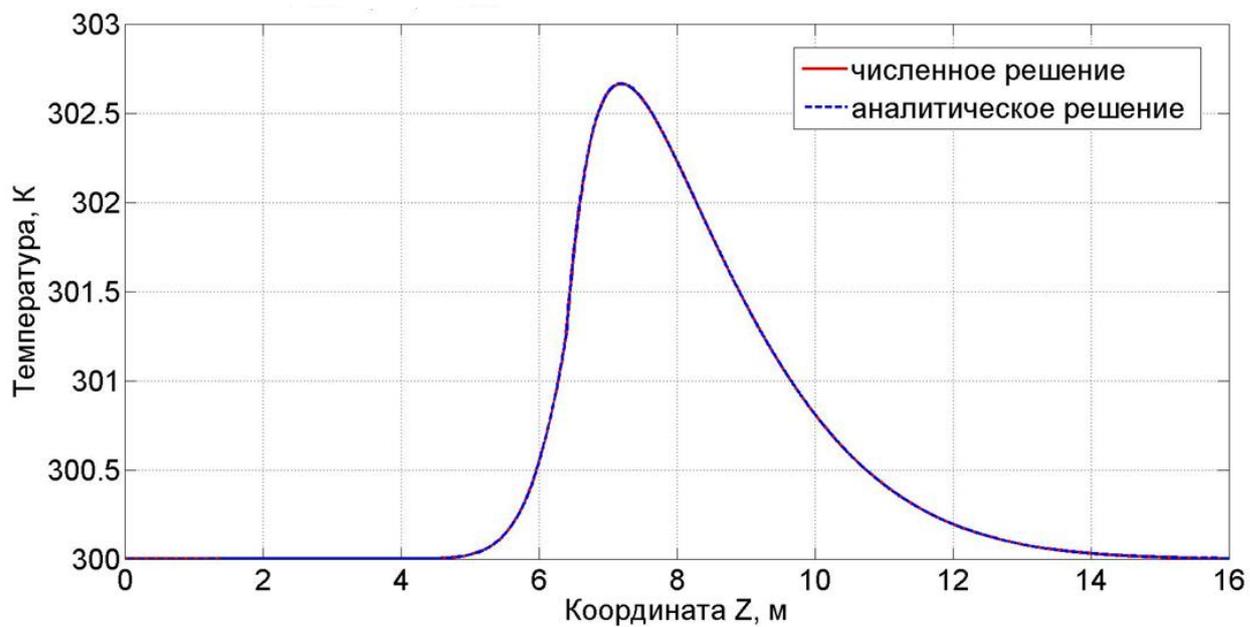


Рисунок 7 - Температурный портрет при времени 1 секунда

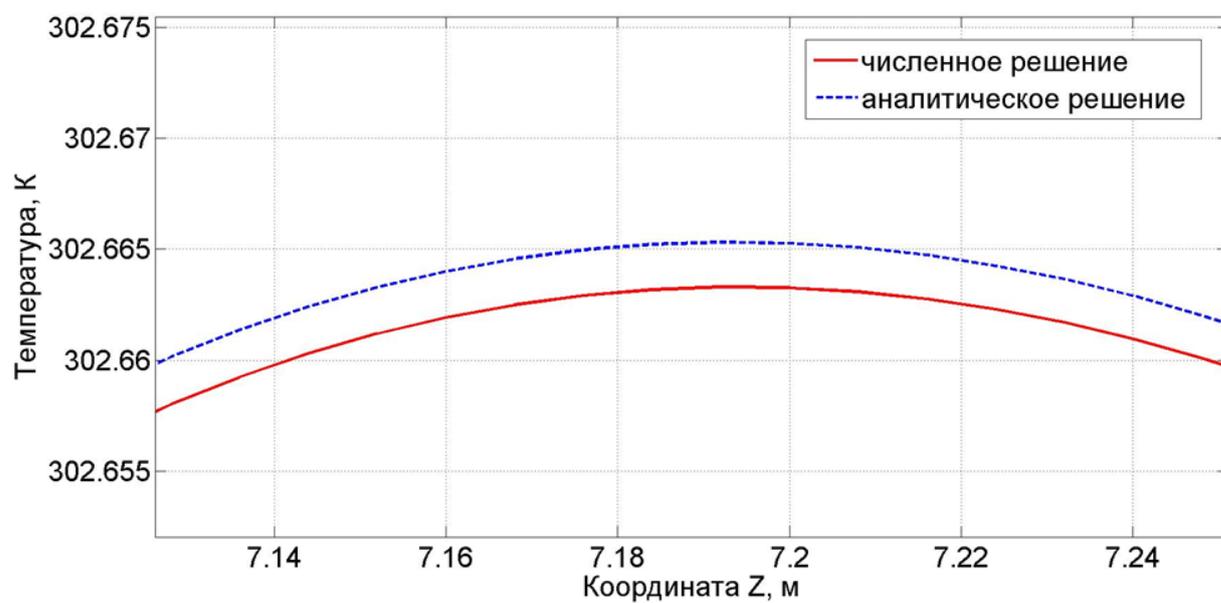


Рисунок 8 - Температурный портрет при времени 1 секунда в более крупном масштабе

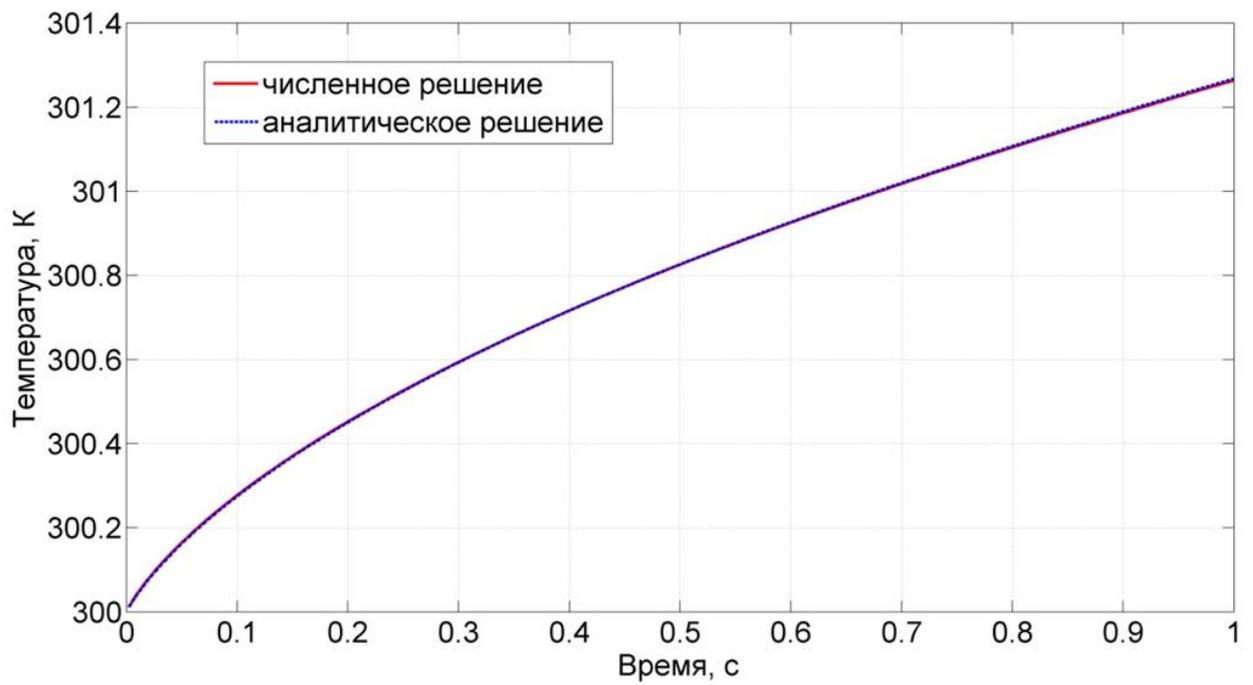


Рисунок 9 - График зависимости температуры от времени на границе раздела сред

Также из графиков видно, что различия между решениями малы и становятся заметны только при крупном увеличении (рис.8). Из рисунка 8 следует, что невязка температуры составляет порядка 10^{-3} К.

5. ДИФРАКЦИЯ НА ПРОВОДЯЩЕМ ШАРЕ

Вводя некоторые ограничения на исследуемую область пространства D , можно уменьшить число неизвестных величин в системе уравнений Максвелла до двух скалярных функций.

Введём следующие ограничения:

- пусть (x, y, z) – декартова система координат,
- (x_1, x_2, x_3) – некоторая новая ортогональная криволинейная система координат.

Пусть функциональная связь этих систем однозначна:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(x, y, z); \quad x_2 = x_2(x, y, z); \quad x_3 = x_3(x, y, z); \\ x &= x(x_1, x_2, x_3); \quad y = y(x_1, x_2, x_3); \quad z = z(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Коэффициенты Ламе $h_i^2 = (\partial x / \partial x_i)^2 + (\partial y / \partial x_i)^2 + (\partial z / \partial x_i)^2$, $i=1,2,3$

подчинены условию $h_3=1$, $\partial(h_1/h_2)/\partial x_3=0$ (т.е. отношение h_1/h_2 не является функцией x_3).

При вышеописанных ограничениях можно ввести две скалярные функции Борнуса электрического и магнитного типов, которые выводятся из уравнений Максвелла вида:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = i\kappa_h \vec{H} \quad (5.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = -i\kappa_h \vec{E} \quad (5.2)$$

Электрическая функция Борнуса вводится при $H_3=0$, тогда при ограничении $h_3=1$ общее выражение для ротора некоторого вектора \vec{F} в криволинейных координатах (x_1, x_2, x_3) :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F} &= \operatorname{rot}(\vec{e}_1 F_1 + \vec{e}_2 F_2 + \vec{e}_3 F_3) = \\ &= \frac{1}{h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial(h_3 F_3)}{\partial x_2} - \frac{\partial(h_2 F_2)}{\partial x_3} \right\} \vec{e}_1 + \frac{1}{h_3 h_1} \left\{ \frac{\partial(h_1 F_1)}{\partial x_3} - \frac{\partial(h_3 F_3)}{\partial x_1} \right\} \vec{e}_2 \\ &\quad + \frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial(h_2 F_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial(h_1 F_1)}{\partial x_2} \right\} \vec{e}_3 \end{aligned}$$

принимает вид:

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{F} = & \frac{1}{h_2} \left\{ \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial(h_2 F_2)}{\partial x_3} \right\} \vec{e}_1 + \frac{1}{h_1} \left\{ \frac{\partial(h_1 F_1)}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \right\} \vec{e}_2 + \\ & + \frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial(h_2 F_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial(h_1 F_1)}{\partial x_2} \right\} \vec{e}_3 \end{aligned}$$

Подставим в это выражение для ротора вместо вектора \vec{F} векторы \vec{E} и \vec{H} , а выражения для $\text{rot}\vec{E}$ и $\text{rot}\vec{H}$ подставим в уравнения Максвелла (5.1)-(5.2). Тогда, учитывая, что $H_3=0$, и приравняв соответствующие компоненты векторов, получим из уравнения (5.1):

$$\frac{1}{h_2} \left\{ \frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial(h_2 E_2)}{\partial x_3} \right\} = i\kappa_h H_1 \quad (5.3)$$

$$\frac{1}{h_1} \left\{ \frac{\partial(h_1 E_1)}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1} \right\} = i\kappa_h H_2 \quad (5.4)$$

$$\frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial(h_2 E_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial(h_1 E_1)}{\partial x_2} \right\} = 0 \quad (5.5)$$

Из уравнения (5.2) системы получаем:

$$\frac{1}{h_2} \left\{ \frac{\partial(h_2 H_2)}{\partial x_3} \right\} = i\kappa_e E_1 \quad (5.6)$$

$$\frac{1}{h_1} \left\{ \frac{\partial(h_1 H_1)}{\partial x_3} \right\} = -i\kappa_e E_2 \quad (5.7)$$

$$\frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial(h_2 H_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial(h_1 H_1)}{\partial x_2} \right\} = -i\kappa_e E_3 \quad (5.8)$$

Далее выразим $E_{1,2,3}$ и $H_{1,2}$ через некоторую скалярную функцию, такую, что при её подстановке вместо $E_{1,2,3}$ и $H_{1,2}$ уравнения (5.3)-(5.8) обращались бы в тождество.

Из уравнения (5.5) следует, что:

$$\frac{\partial(h_2 E_2)}{\partial x_1} = \frac{\partial(h_1 E_1)}{\partial x_2} \quad (5.9)$$

Уравнения (5.9) сведётся к тождеству типа $\partial^3 u / \partial x_1 \partial x_2 \partial x_3 = \partial^3 u / \partial x_2 \partial x_1 \partial x_3$, если положить:

$$E_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_3} \quad (5.10)$$

$$E_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3} \quad (5.11)$$

Далее подставим (5.10)-(5.11) в уравнения (5.6)-(5.7) соответственно и, используя ограничение $\partial(h_1/h_2)/\partial x_3=0$, получим:

$$\frac{1}{h_2} \left\{ \frac{\partial(h_2 H_2)}{\partial x_3} \right\} = i\kappa_e \frac{1}{h_1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial x_1}, \quad h_1 H_1 = i\kappa_e \frac{\partial u}{\partial x_1} \text{ и, следовательно}$$

$$H_2 = \frac{i\kappa_e}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} \quad (5.12)$$

$$\frac{1}{h_1} \left\{ \frac{\partial(h_1 H_1)}{\partial x_3} \right\} = -i\kappa_e \frac{1}{h_2} \frac{\partial \partial u}{\partial x_3 \partial x_2} \text{ и, следовательно}$$

$$H_1 = -\frac{i\kappa_e}{h_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} \quad (5.13)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что при такой замене уравнения (5.6)-(5.7) обращаются соответственно в тождества. Выражения (5.12)-(5.13) подставим в уравнение (5.8) и получим для E_3 :

$$E_3 = -\frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right] \right\} \quad (5.14)$$

Само уравнение для функции u получается подстановкой $H_{1,2}$ и $E_{1,2,3}$ в уравнение (5.3) или (5.4):

$$\frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right] \right\} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \kappa^2 u = 0 \quad (5.15)$$

Аналогичное уравнение можно получить, выполнив подстановку в уравнение (5.4). Если мы нашли u , удовлетворяющую уравнению (5.15), векторы $H_{1,2}$ и $E_{1,2,3}$ будут автоматически удовлетворять уравнению Максвелла. Заметим также, что $H_{1,2}$ и $E_{1,2,3}$ удовлетворяют второй паре уравнений Максвелла: $div \vec{E} = 0$, $div \vec{H} = 0$.

Аналогичным способом можно получить и магнитную функцию Борнгиса v . Пусть $E_3=0$, тогда:

$$\frac{1}{h_2} \left\{ \frac{\partial H_3}{\partial x_2} - \frac{\partial(h_2 H_2)}{\partial x_3} \right\} = -i\kappa_e E_1 \quad (5.16)$$

$$\frac{1}{h_1} \left\{ \frac{\partial(h_1 H_1)}{\partial x_3} - \frac{\partial H_3}{\partial x_1} \right\} = -i\kappa_e E_2 \quad (5.17)$$

$$\frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial(h_2 H_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial(h_1 H_1)}{\partial x_2} \right\} = 0 \quad (5.18)$$

$$-\frac{1}{h_2} \left\{ \frac{\partial(h_2 E_2)}{\partial x_3} \right\} = i\kappa_h H_1 \quad (5.19)$$

$$\frac{1}{h_1} \left\{ \frac{\partial(h_1 E_1)}{\partial x_3} \right\} = i\kappa_h H_2 \quad (5.20)$$

$$\frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial(h_2 E_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial(h_1 E_1)}{\partial x_2} \right\} = i\kappa_h H_3 \quad (5.21)$$

Уравнения (5.16)-(5.21) сводятся к уравнениям (5.3)-(5.8), если заменить $E_{1,2}$ на $H_{1,2}$, $H_{1,2,3}$ на $E_{1,2,3}$, κ_e на $-\kappa_h$, u на v . Поэтому ответ для $E_{1,2}$ и $H_{1,2,3}$ будет таким же как и для уравнений (5.3)-(5.8), но с соответствующими заменами:

$$H_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_3} \quad (5.22)$$

$$H_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2 \partial x_3} \quad (5.23)$$

$$H_3 = -\frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right] \right\} \quad (5.24)$$

$$E_1 = \frac{i\kappa_h}{h_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \quad (5.25)$$

$$E_2 = -\frac{i\kappa_h}{h_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} \quad (5.26)$$

$$\frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right] \right\} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} + \kappa^2 v = 0 \quad (5.27)$$

В дальнейшем электрические и магнитные компоненты векторов \vec{E} и \vec{H} будем обозначать дополнительными индексами «Э» и «М». Докажем теперь, что:

$$\{\vec{E}, \vec{H}\} = \{\vec{E}^{\text{Э}}, \vec{H}^{\text{Э}}\} + C_2 \{\vec{E}^{\text{М}}, \vec{H}^{\text{М}}\} \quad (5.28)$$

Если заведомо известно, что у искомого поля $H_3=0$, то такое поле можно найти, решив уравнение Борнуса с соответствующими граничными условиями. Очевидно, что искомое поле $\{\vec{E}, \vec{H}\}$ может являться суперпозицией полей электрического и магнитного типов. Решение будет иметь вид:

$$\{\vec{E}, \vec{H}\} = C_1 \{\vec{E}^{\text{Э}}(u), \vec{H}^{\text{Э}}(u)\} + C_2 \{\vec{E}^{\text{М}}(v), \vec{H}^{\text{М}}(v)\} \quad (5.29)$$

что вытекает из линейности уравнений Максвелла. Поскольку функции u и v независимы, так как при выводе ничем не были связаны между собой, то из (5.29) следует, что поля электрического и магнитного типов также независимы. Представление (5.29) единственно, поскольку $E_3=C_1 E_3^{\text{Э}}$, $H_3=C_2 H_3^{\text{М}}$. От кон-

стант C_1 и C_2 можно избавиться путём замен $C_1 u \rightarrow u$, $C_2 v \rightarrow v$. Иными словами для уравнений Максвелла вида (5.1)-(5.2) с граничными условиями доказаны теоремы существования и единственности решения. Поэтому решение можно искать любым способом. По схеме Боргниса поиск выглядит следующим образом: решаем уравнение Боргниса для u и v с соответствующими граничными условиями. Если решение для уравнения Боргниса существует, и мы нашли его, то это автоматически доказывает возможность представления искомого поля в виде (5.28) и тем самым мы получаем решение. В случае, если искомое поле не представлено в виде (5.28), уравнение Боргниса не будет иметь решений. По аналогии граничные условия для u и v выбираются таким образом, чтобы при их подстановке в уравнения Максвелла последние обращались бы в тождества.

Введём сферические координаты: $x_1 = \theta$, $x_2 = \varphi$, $x_3 = r$, тогда $h_1 = r$, $h_2 = r \sin \theta$, $h_3 = 1$. Уравнение Боргниса принимает следующий вид:

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right\} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \kappa^2 w = 0$$

роль w играет u или v . Заменой $w = rW$ уравнение сводится к уравнению Гельмгольца в сферических координатах:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rW)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \Delta_{\text{сф}} W + \kappa^2 W = 0 \quad (5.30)$$

Тогда для компонентов векторов \vec{E}, \vec{H} с учётом (5.28), (5.10)-(5.14) и (5.22)-(5.26) получаем:

$$E_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rU)}{\partial r \partial \theta} + \frac{i\kappa_h}{\sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \quad (5.31)$$

$$E_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 (rU)}{\partial r \partial \varphi} - i\kappa_h \frac{\partial V}{\partial \theta} \quad (5.32)$$

$$E_r = -\frac{1}{r} \Delta_{\text{сф}} U = \frac{\partial^2 (rU)}{\partial r^2} + \kappa^2 rU \quad (5.33)$$

$$H_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rV)}{\partial r \partial \theta} - \frac{i\kappa_e}{\sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \quad (5.34)$$

$$H_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 (rV)}{\partial r \partial \varphi} + i\kappa_e \frac{\partial U}{\partial \theta} \quad (5.35)$$

$$H_r = -\frac{1}{r} \Delta_{\text{сф}} V = \frac{\partial^2 (rV)}{\partial r^2} + \kappa^2 rV \quad (5.36)$$

Общее решение уравнения (5.30) записывается в виде ряда:

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\{ C_{nm}^{(1)} \xi_n^{(1)} + C_{nm}^{(2)} \xi_n^{(2)} \right\} Y_n^{(m)} \quad (5.37)$$

где $\xi_n^{(1)}$ и $\xi_n^{(2)}$ пара любых линейно независимых сферических функций Бесселя вида:

$$\xi_n^{(1,2)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\zeta_{n+1/2}^{(1,2)}(r)}{\sqrt{r}}; \quad Y_n^{(m)} = P_n^{(|m|)}(\cos\theta) \begin{cases} \sin(m\varphi), & m > 0 \\ 1, & m = 0 \\ \cos(m\varphi), & m < 0 \end{cases} - \text{сфериче-}$$

ская функция, $C_{nm}^{(1,2)}$ - константа.

Далее приведём некоторые математические выкладки, которые понадобятся в дальнейшем:

$$P_n^{(m)}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \quad (5.38)$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n \quad (5.39)$$

$$e^{i\vec{k}\vec{r}} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) j_n(kr) P_n(\cos\theta) \quad (7.40)$$

$$\Delta_{\text{сф}} Y_n^{(m)} = -n(n+1) Y_n^{(m)} \quad (5.41)$$

Для введённой нами функции:

$$Y_n^{(m)}: \left\| Y_n^{(m)} \right\|^2 = 2\pi \frac{2}{2n+1} \frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!} \varepsilon_m, \text{ где } \varepsilon_m = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 1/2, & m \neq 0 \end{cases} \quad (5.42)$$

$$\left\| Y_n^{(\pm 1)} \right\|^2 = \frac{2\pi(n+1)!}{(2n+1)(n-1)!} = 2\pi \frac{n(n+1)}{2n+1} \rightarrow \frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{2\pi}{\left\| Y_n^2 \right\|^2} \quad (5.43)$$

$$\frac{\partial Y^{(\pm 1)}}{\partial \theta} = \partial Y^{(\pm 1)} \left\{ \text{ctg}\theta - \frac{P_n^2(\cos\theta)}{P_n^1(\cos\theta)} \right\} \quad (5.44)$$

$$\frac{d\xi_n}{dx} = \xi_n'(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ x^{-1/2} \xi_{n+1/2}'(x) - \frac{1}{2} x^{-3/2} \xi_{n+1/2}'(x) \right\} \quad (5.45)$$

$$\left\{ \frac{d\xi(bx)}{dx} \right\}_{x=a} = b \left\{ \frac{d\xi(x)}{dx} \right\}_{x=ba} = b \xi'(ba) \quad (5.46)$$

$$\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta} = -P_n^{(1)}(\cos\theta) \quad (5.47)$$

Запишем постановку задачи дифракции. На проводящий шар радиусом $r=a$ (рис.10) падает плоская гармоническая электромагнитная волна:

$$\vec{E}_{\text{пад}} = \vec{e}_x E_{\text{пад},0} e^{-i(\omega t - \vec{k} \vec{r})} \text{ и } \vec{H}_{\text{пад}} = \vec{e}_y E_{\text{пад},0} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} e^{-i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}$$

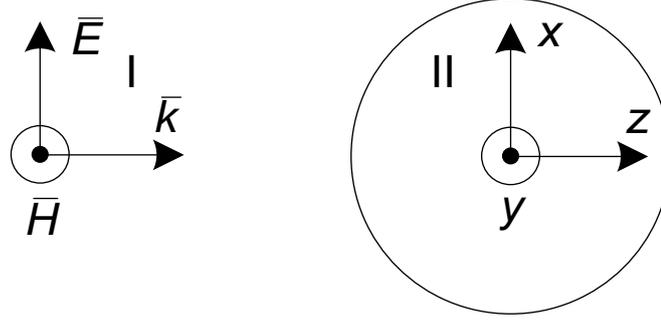


Рисунок 10 – К постановке задачи дифракции на проводящем шаре

Необходимо найти \vec{E}_{II} . Для этого нужно найти соответствующие V_{II} и U_{II} . Найдём сначала V_0 и U_0 , соответствующие $\vec{E}_{пад}$, $\vec{H}_{пад}$. Используем для этого радиальную компоненту $E_{пад,r}$ (в сферических координатах):

$$E_{пад,r} = E_{пад,0} \sin\theta \cos\varphi e^{ikr\cos\theta} = \frac{i E_{пад,0} \cos\varphi}{k_I r} \frac{\partial}{\partial\theta} e^{ik_I r \cos\theta} =$$

$$= |(5.40), (5.47)| = - \frac{i E_{пад,0}}{k_I r} \sum_{n=1}^{\infty} i^n (2n+1) j_n(k_I r) Y_n^{-1}$$

Найдём U_0 в виде ряда $U_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n j_n(k_I r) Y_n^{-1}$. Из соотношения $E_r = -\frac{1}{r} \Delta_{сф} U$ и свойства (5.41) и (5.42) получаем:

$$U_0 = \frac{E_{пад,0}}{k_I} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)} j_n(k_I r) Y_n^{-1} \quad (5.48)$$

По аналогии находим V_0 :

$$V_0 = \frac{E_{пад,0}}{k_I} \sqrt{\frac{\varepsilon_I}{\mu_I}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)} j_n(k_I r) Y_n^{-1} \quad (5.49)$$

Будем искать решение в виде $U_I = U_0 + U_s$, $U_{II} = U_{II}$ и $V_I = V_0 + V_s$, $V_{II} = V_{II}$. Используя равенство тангенциальных компонент \vec{E} , \vec{H} при $r = a$ и формулы (5.31), (5.32), (5.34), (5.35) можно получить и граничные условия для V, U :

$$\left\{ \frac{\partial(rU^I)}{\partial r} \right\}_{r=a} = \left\{ \frac{\partial(rU^{II})}{\partial r} \right\}_{r=a} \quad (5.50)$$

$$\left\{ \kappa_e^I U^I \right\}_{r=a} = \left\{ \kappa_e^{II} U^{II} \right\}_{r=a} \quad (5.51)$$

$$\left\{ \frac{\partial(rV^I)}{\partial r} \right\}_{r=a} = \left\{ \frac{\partial(rV^{II})}{\partial r} \right\}_{x=a} \quad (5.52)$$

$$\left\{ \kappa_h^I V^I \right\}_{r=a} = \left\{ \kappa_h^{II} V^{II} \right\}_{r=a} \quad (5.53)$$

Из граничных условий (5.50)-(5.53) и уравнения Гельмгольца следует, что $\kappa^I = k_I$, $\kappa^{II} = k_{II}$, поэтому в дальнейшем будем использовать $k_{I,II}$.

Из условий ограниченности V, U при $r = 0$ и условия Зоммерфельда при $r \rightarrow \infty$ следует искать U_S и U_{II} в виде:

$$\begin{aligned} U_S &= \sum_{n, |m| \leq n} C_{nm}^S h_n(k_I r) Y_n^m, \\ U_0 &= \frac{E_{\text{пад.0}}}{k_I} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)} j_n(k_I r) Y_n^{-1}, \\ U_{II} &= \sum_{n, |m| \leq n} C_{nm}^{II} j_n(k_{II} r) Y_n^m, \\ V_0 &= \frac{E_{\text{пад.0}}}{k_I} \sqrt{\frac{\varepsilon_I}{\mu_I}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)} j_n(k_I r) Y_n^1 \end{aligned}$$

Коэффициенты C_{nm}^S и C_{nm}^{II} находятся из (5.51) и (5.52). Введём следующие обозначения:

$$J_n(ka) = (x j_n(x))'_{x=ka}, \quad \mathbb{H}_n(ka) = (x h_n(x))'_{x=ka}$$

Решая систему уравнений, получающуюся из (5.50)-(5.53), находим, что $C_{nm} = 0$, если $m \neq -1$, поэтому в дальнейшем принимаем $C_{n,m=-1} = C_n$.

Тогда, решая уравнения (5.51) и (5.52), получим следующие решения:

$$\Delta = \kappa_e^{II} J_n(k_{II}a) \mathbb{H}_n(k_Ia) - \kappa_e^I j_n(k_{II}a) h_n(k_Ia) \quad (5.54)$$

$$\Delta_{II} = \frac{2\pi E_{\text{пад.0}} i^{n-1}}{\|Y_n'\|^2} \frac{\kappa_e^I}{k_I} \{ \mathbb{H}_n(k_Ia) J_n(k_Ia) - h_n(k_Ia) j_n(k_{II}a) \} \quad (5.55)$$

$$\Delta_S = \frac{2\pi E_{\text{пад.0}} i^{n-1}}{k_I \|Y_n'\|^2} \{ \kappa_e^I j_n(k_{II}a) J_n(k_Ia) - \kappa_e^{II} j_n(k_Ia) J_n(k_{II}a) \} \quad (5.56)$$

$$C_n^{II} = \frac{\Delta_{II}}{\Delta}, \quad C_n^S = \frac{\Delta_S}{\Delta}.$$

Коэффициенты для функции U могут быть получены из (5.54)-(5.56) заменой $\kappa_e^I \rightarrow -\kappa_h^I$, $\kappa_e^{II} \rightarrow -\kappa_h^{II}$, $E_{\text{пад.0}} \rightarrow E_{\text{пад.0}} \sqrt{\frac{\varepsilon_I}{\mu_I}}$.

Будем в дальнейшем обозначать их D_n^{II} и D_n^I . Зная функции V, U , найдём по формулам (5.31)-(5.33) вектор \vec{E} внутри шара. Индексы « r », « θ », « φ » у E означают компоненту, во всех остальных случаях - частную производную.

Из (5.33), учитывая (5.44), найдём E_r^{II} :

$$E_r^{II} = \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{II} n(n+1) J_n(k_{II}r) Y_n^{-1} \quad (5.57)$$

Учитывая, что:

$$U_{\theta}^{II} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{II} J_n(k_{II}r) Y_{\theta n}^{-1}, \quad Y_{\theta n}^{(\pm 1)} = \frac{\partial Y_n^{(\pm 1)}}{\partial \theta} = Y_n^{(\pm 1)} \left\{ \text{ctg} \theta - \frac{P_n^2(\cos \theta)}{P_n^1(\cos \theta)} \right\},$$

$$\frac{\partial(rU_{\theta}^{II})}{\partial r} = U_{\theta}^{II} + rU_{\theta r}^{II}, \quad U_{\theta r}^{II} = k_{II} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{II} J_n'(k_{II}r) Y_{\theta n}^{-1},$$

$$\frac{\partial^2(rU_{\theta}^{II})}{\partial r \partial \theta} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{II} j_n(k_{II}r) Y_{\theta n}^{-1},$$

$$U_{\varphi}^{II} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n^{II} J_n(k_{II}r) \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_n^1 = \sum_{n=1}^{\infty} D_n^{II} J_n(k_{II}r) Y_n^{-1}$$

из (5.31) найдём E_{θ}^{II} :

$$E_{\theta}^{II} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(rU_{\theta}^{II})}{\partial r \partial \theta} + \frac{i\kappa_h^{II}}{\sin \theta} \frac{\partial V^{II}}{\partial \varphi} =$$

$$= \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{II} j_n(k_{II}r) Y_{\theta n}^{-1} + \frac{i\kappa_h^{II}}{\sin \theta} \sum_{n=1}^{\infty} D_n^{II} J_n(k_{II}r) Y_n^{-1} \quad (5.58)$$

По аналогии из (5.32) найдём E_{φ}^{II} :

$$E_{\varphi}^{II} = -\frac{1}{r \sin \theta} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{II} j_n(k_{II}r) Y_n^1 - i\kappa_h \sum_{n=1}^{\infty} D_n^{II} J_n(k_{II}r) Y_{\theta n}^1 \quad (5.59)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе математического моделирования с использованием численных и аналитических методов проведено теоретическое исследование теплового воздействия мощных электромагнитных импульсов на комплекс «металл-диэлектрик».

Было рассмотрено две геометрии:

- система двух бесконечных полупространств, одно из которых является металлом, другое - диэлектриком;
- металлический шар, расположенный внутри диэлектрика.

Были получены следующие результаты и выводы:

1) В ходе выполнения работы была создана математическая модель, позволяющая определять коэффициент прохождения электромагнитной волны на границе раздела «металл-диэлектрик», а также определять временную зависимость температурного портрета вблизи границы раздела сред (с помощью решения уравнения теплопроводности).

Разработанная математическая модель позволяет:

- контролировать температуру электродов экспериментальной установки по дезинтеграции упорных минеральных руд и предотвращать их перегрев;
- проводить количественную оценку механических напряжений или плотности энергии на границе раздела двух сред, а также определять условия для эффективного раскрытия ценных компонентов при дезинтеграции упорных руд или разрыва капсул при направленном транспорте лекарственного вещества в заданную область организма;
- рассчитывать тепловыделение в системе при воздействии МЭМИ с произвольными параметрами (амплитудой, длительностью фронта, количеством импульсов).

2) Для одномерной модели типа двух полупространств, состоящих из проводника и диэлектрика, получены аналитические решения для компонент

электромагнитного поля. Получены выражения для коэффициентов отражения и прохождения плоской электромагнитной волны от границы раздела «металл-диэлектрик». Построены графики зависимостей коэффициента прохождения от частоты МЭМИ для золота, серебра и меди, граничащих с кварцем. Подтверждено, что с увеличением проводимости металла наблюдается уменьшение коэффициента прохождения.

Получены формула, описывающая температурный профиль одномерной системы, и её асимптотика при больших временах воздействия МЭМИ. Выведена формула для функции тепловых источников, усреднённой по периоду её колебаний.

Аналитическое решение было проверено с помощью численного моделирования и подтвердило его достоверность. Был сделан вывод о том, что усреднение функции тепловых источников по периоду её колебаний незначительно влияет на температурный профиль для частот более 1 кГц.

3) Получена зависимость температуры поверхности металла от времени при заданных параметрах системы (проводимости металла, диэлектрической и магнитной проницаемостей материалов системы, частоты излучения). Показано, что на больших временах температура ведёт себя пропорционально корню квадратному от времени.

4) Для трёхмерной системы типа проводящий шар в диэлектрике получено аналитическое решение задачи дифракции на проводящем шаре с учётом проникновения в него электромагнитного поля.

Разработана методика нахождения электромагнитного поля и распределения температуры в системе, которая состоит из следующих этапов:

- представление электромагнитного поля в системе через две скалярные функции Боргниса;
- сведение уравнения Боргниса к уравнению Гельмгольца;
- получение решения уравнения Гельмгольца для функции Боргниса;

- обратный переход от функций Борнуса к векторам электромагнитного поля;
- определение функции объёмных тепловых источников, действующих в проводнике, по найденным электромагнитным полям;
- решение краевой задачи теплопроводности, получение распределения температуры в системе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуляев Ю.В. и др. // Радиотехника и электроника, 2015, том 60, № 10, с. 1051-1063.
2. Чантурия В.А. и др. // Физико-технические проблемы обогащения полезных ископаемых, 2001, № 4, с. 95-106.
3. Чантурия В.А. //Горный журнал, 2005, № 12, с. 56-64.
4. Isao Yoshimi et al. // Int. J. Mater. Eng. Resour. Vol.10, No.1, (Mar.2002), p. 66–70.
5. Топтыгин И.Н. Современная электродинамика, часть 2. Теория электромагнитных явлений в веществе: Учебное пособие. - Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. - 848 с.
6. Бунин Игорь Жанович «Теоретические основы воздействия наносекундных электромагнитных импульсов на процессы дезинтеграции и вскрытия тонкодисперсных минеральных комплексов и извлечения благородных металлов из руд» Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. Москва, 2009. -347 с.
7. А.В. Лыков Теория теплопроводности: Учебное пособие для студентов теплотехнических специальностей высших учебных заведений.- Издательство «Высшая школа», Москва, 1967.
8. А.Ф. Филиппов Сборник задач по дифференциальным уравнениям: Учебное пособие.- Изд.5, книжный дом «Либроком», 2013.-240 с.
9. Н.Н. Калиткин, П.В. Корякин Численные методы: в 2 кн. Кн. Методы математической физики: учебник для студ. Учреждений высш. проф. образования. - М.: Издательский центр «Академия», 2013.- 304 с.