

Московский ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет имени М.В. Ломоносова

физический факультет,
кафедра общей физики

На правах рукописи
УДК 537.86

Методики определения гравитационной
постоянной по динамическому методу

дипломная работа
студента 605 группы
Овечкина Кирилла Андреевича

Научный руководитель
ведущий электроник,
кандидат физ.-мат. наук
В.М. Шахпаронов

Допущен к защите
25 декабря 2014 года

Заведующий кафедрой общей физики
профессор

А.М. Салецкий

Москва-2014 г.

Содержание

Перечень основных обозначений и символов	3
1. Введение, постановка задачи	4
2. Основные методы измерения гравитационной постоянной	5
3. Диссипативные процессы при колебаниях весов	6
4. Факторы, ограничивающие стабильность	7
5. Описание экспериментальной установки	8
6. Методики расчёта при сферической форме взаимодействующих тел	11
6.1. Методика 1	12
6.2. Методика 2	13
6.3. Проверка результатов расчёта	16
6.4. Погрешность расчёта моментов притяжения	17
6.5. Учёт нелинейности	18
7. Методы численного решения дифференциальных уравнений движения	24
7.1. Метод Рунге-Кутты	24
7.2. Метод Эйлера	28
7.3. Методы численного решения уравнений первого порядка	29
8. Результаты и выводы	32
9. Список литературы	33

Перечень основных обозначений и символов

c_4 – коэффициент, корректирующий период при изменении амплитуды;

d_1 – диаметр нити подвеса рабочего тела;

d_2 – диаметр вспомогательной нити подвеса;

d_3 – диаметр шаровых грузов на концах коромысла;

d_4 – диаметр коромысла;

G_{ij} – расчётное значение G при фиксации масс M на i -й и j -й позициях;

J – момент инерции тела относительно вертикальной оси;

l_1 – расстояние от точки крепления нити до центра масс рабочего тела;

l_2 – длина нити подвеса крутильных весов;

l_3 – расстояние между верхними точками крепления двух нитей;

l_4 – длина вспомогательной нити подвеса;

L_1 – расстояние от оси вращения до центра шара на первой позиции;

L_i – расстояния от оси вращения до центра шара на i -й позиции;

L_5 – расстояние от оси вращения до центра масс груза коромысла;

L_6 – длина плеча коромысла;

K_1 – момент сил притяжения грузов коромысла массами M ;

K_2 – момент сил притяжения коромысла массами M ;

M – разность масс притягивающего шара и вытесненного им воздуха;

m_1 – масса груза коромысла; m_2 – масса коромысла;

№ – номер варианта крутильных весов;

φ – угол отклонения коромысла от положения равновесия;

φ_0 – амплитуда колебаний весов;

010216 – шифр массива, содержащий дату начала измерений G_{ij} ;

ppm – безразмерная единица 10^{-6} .

1. Введение, постановка задачи

Основной задачей настоящей работы являлось исследование численных методов решения системы нелинейных дифференциальных уравнений колебаний второго порядка с целью сравнения эффективности известных методов. Использовалась программа для расчёта измерений гравитационной постоянной G [19]. Объектом исследований явились данные, полученные на установке с крутильными весами [21].

Предметом исследований были методы численного решения системы дифференциальных уравнений. В настоящей работе кроме метода Рунге-Кутты рассматривались другие методы. Имевшаяся в распоряжении программа для расчёта гравитационной постоянной содержит две независимые методики решения. Обычно считается, что заключительная стадия, связанная с расчётами, не имеет принципиального значения. Большинство авторов сосредоточивает внимание на погрешности измерений. Методикам расчёта внимания уделяется мало.

Решения системы нелинейных уравнений колебаний основано на использовании двух принципиально независимых методов: численном определении периода колебаний осциллятора интегрированием дифференциальных уравнений колебаний [1, 8, 18, 22, 24-26, 32, 38, 46, 47] и аналитическом вычислении периода, базирующемся на теории нелинейных колебаний [2, 7, 9-15]. Первый метод стал перспективным в связи с развитием вычислительной техники. Вторым методом обеспечивается значительно более быстрые расчёты и не требует информации о периоде колебаний при отсутствии притягивающих масс. При решении конкретных задач на базе этих методов разрабатываются различные методики, учитывающие специфику поставленных задач. Совпадение численных значений гравитационной постоянной по двум независимым методикам исключает ошибки при их разработке и повышает достоверность.

2. Основные методы измерения гравитационной постоянной

Известны два основных метода измерения гравитационной постоянной – статический [27, 36, 37, 49] и динамический [9, 17, 42, 43, 45, 48]. Статический метод значительно упрощает расчёты. Он не связан с решением дифференциальных уравнений движения, поскольку крутильные весы находятся в неподвижном состоянии. Однако даже в таком методе необходимо измерять период свободных колебаний, что позволяет определить жёсткость нити подвеса. Удерживать в течение длительного времени весы в неподвижном состоянии значительно сложнее, чем в режиме свободных колебаний. На коромысло с грузами оказывают влияние конвективные потоки газа, которые раскачивают весы. Даже в высоком вакууме весы подвержены влиянию неравновесных потоков разреженного газа. Кажущаяся простота измерения гравитационной постоянной привлекла внимание Д.Мичелла. Он изготовил установку, но не успел провести на ней измерения гравитационной постоянной. Его работу завершил Г.Кавендиш [27]. Он оставил подробные протоколы измерений. В установке использовались шаровые формы взаимодействующих тел. Статический метод до сих пор находит применение. При этом вместо шаровых тел используются тела более сложной формы, например, цилиндрической [49].

Динамический метод нашёл более широкое применение. Чем меньше амплитуда колебаний весов, тем меньше нелинейность системы, тем проще расчёты. Отклонение формы взаимодействующих тел от шаровой привела к большим проблемам при расчётах [17]. Исчезли аналитические формулы моментов притяжения. На их расчёты потребовалось огромное время. Имевшиеся в то время средства вычислений сильно ограничивали такие возможности. Но даже в настоящее время проведение расчётов при наличии протоколов измерений вызывает определённые проблемы [20]. Лишь при очень малых амплитудах расчёты упрощаются [42, 48].

3. Диссипативные процессы при колебаниях весов

В динамическом методе весы находятся в естественном режиме свободных колебаний. Притягивающие массы вносят в крутильную систему незначительную дополнительную жёсткость, которая уменьшает период колебаний. При этом появляется нелинейность, которая в дальнейшем существенно усложняет расчёты. Высокая добротность системы упрощает измерения в динамическом режиме. Амплитуда колебаний весов в вакууме практически не затухает. Единственный канал рассеяния запасённой упругой энергии системы связан только с несовершенством материала нити подвеса, в процессе непрерывной деформации которой возникают необратимые потери за счёт внутреннего трения. Они малы, поэтому добротность системы достаточно высока. Трение в нити связано только с гистерезисными потерями [5, 6, 9]. На некачественных металлических нитях добротность составляет величину порядка 500. На наиболее упругих нитях добротность может достигать 100000 [49] и даже более, на кварцевых нитях добротность превышает величину 500000. Бесконтактная термомеханическая обработка тугоплавких металлических нитей подвеса в вакууме под нагрузкой током высокой частоты порядка 5 МГц при температуре 700° С примерно на порядок повышает добротность [9].

Несмотря на очевидный частотно-независимый характер внутреннего трения существует и альтернативная точка зрения. Она всё же предполагает наличие вязкого трения, которое должно иметь частотно-зависимый характер [39, 40, 50]. В связи с этим была высказана рекомендация вносить в результаты расчёта гравитационной постоянной поправку, учитывающую реальную добротность системы. Этой рекомендацией воспользовались, например, авторы [23, 42, 48]. Введение такой поправки позволило компенсировать наличие имевшего место фактора, связанного с наличием неравновесных потоков [19].

4. Факторы, ограничивающие стабильность

Существуют различные дестабилизирующие факторы, вносящие погрешность в результаты измерения гравитационной постоянной. Вакуум надёжно защищает весы от основного из них, связанного с наличием неравновесных потоков разреженного газа [9]. Однако даже в этом случае такие потоки изменяют положение равновесия весов, что имеет особенно существенное значение при использовании статического метода. Потоки вносят в систему и дополнительную жёсткость, что увеличивает погрешность определения гравитационной постоянной в динамическом методе. При неудачной постановке эксперимента неравновесные потоки превращаются в основной дестабилизирующий фактор [19].

Микросейсмы действуют на точку подвеса крутильных весов. Их влияние на параметры движения демпфированных крутильных весов рассмотрено в [10]. Магнитный демпфер качаний быстро снижает амплитуду случайно возникших маятниковых качаний и существенно уменьшает влияние микросейсм. Но поскольку микросейсмы действуют на точку подвеса весов непрерывно, их влияние полностью устранить невозможно. Поэтому более качественные измерения удаётся осуществить лишь в ночное время. Измерения желательно проводить круглосуточно. Для этого предусмотрен автоматический режим без присутствия оператора. Процессом управляет компьютер с помощью специальной программы.

Существуют и другие дестабилизирующие факторы. Кроме гравитационного возможно также взаимодействие, обусловленное наличием электростатических зарядов. Его легко устранить заземлением всех взаимодействующих тел. Значительно сложнее надёжно устранить магнитное взаимодействие, поскольку все тела имеют парамагнитные или диамагнитные свойства. Магнитный экран в виде тонкого листа пермаллоя такое взаимодействие значительно ослабляет. Пренебрегать экраном не следует.

5. Описание экспериментальной установки

Схема установки для измерения G показана на рис.1 [9]. Её основу составляют крутильные весы, размещённые в вакуумной камере 1. Бесконтактный магнитный подшипник 2, укрепленный на конце вспомогательной нити, обеспечивает поворот коромысла 4 по азимуту. Магнитный демпфер 3 гасит качания системы относительно точки подвеса. Коромысло весов 4 диаметром d_2 , подвешенное на тонкой упругой нити, нагружено на концах шаровыми грузами диаметром d_1 . Расположенная под рабочим телом весов антенна 5 предназначена для термомеханической обработки нити подвеса в вакууме. Притягивающие массы 6 диаметром d располагаются на линии равновесия коромысла 4. Устройство 7 перемещает шаровые массы и фиксирует их на отверстиях 8. Экран 9 защищает рабочее тело весов от воздействия магнитных полей. Осветитель 10, зеркало весов 11 и фотоприёмники 12 формируют электрические импульсы, позволяющие определить амплитуду и период колебаний. В качестве фотоприёмников используются кремниевые фотодиоды ФД-8К, работающие в режиме генератора напряжения. В процессе проведения измерений использовались различные варианты крутильных весов. Их основные и дополнительные технические характеристики представлены в табл. 1. и 2. Изменялся диаметр нити подвеса, период колебаний, масса грузов на концах коромысла. Проводился поиск оптимальной геометрии крутильных весов.

Определение G осуществлялось по величине периода крутильных колебаний весов. Специальная система подавляет колебания, отличные от крутильных. Шары перемещаются электроприводом по заданной программе и фиксируются в определенных положениях с погрешностью около 1 мкм. Для снижения возможных ошибок, связанных с магнитным полем, установка изготовлена из немагнитных материалов (бериллиевая бронза, алюминий, нержавеющая сталь, медь).

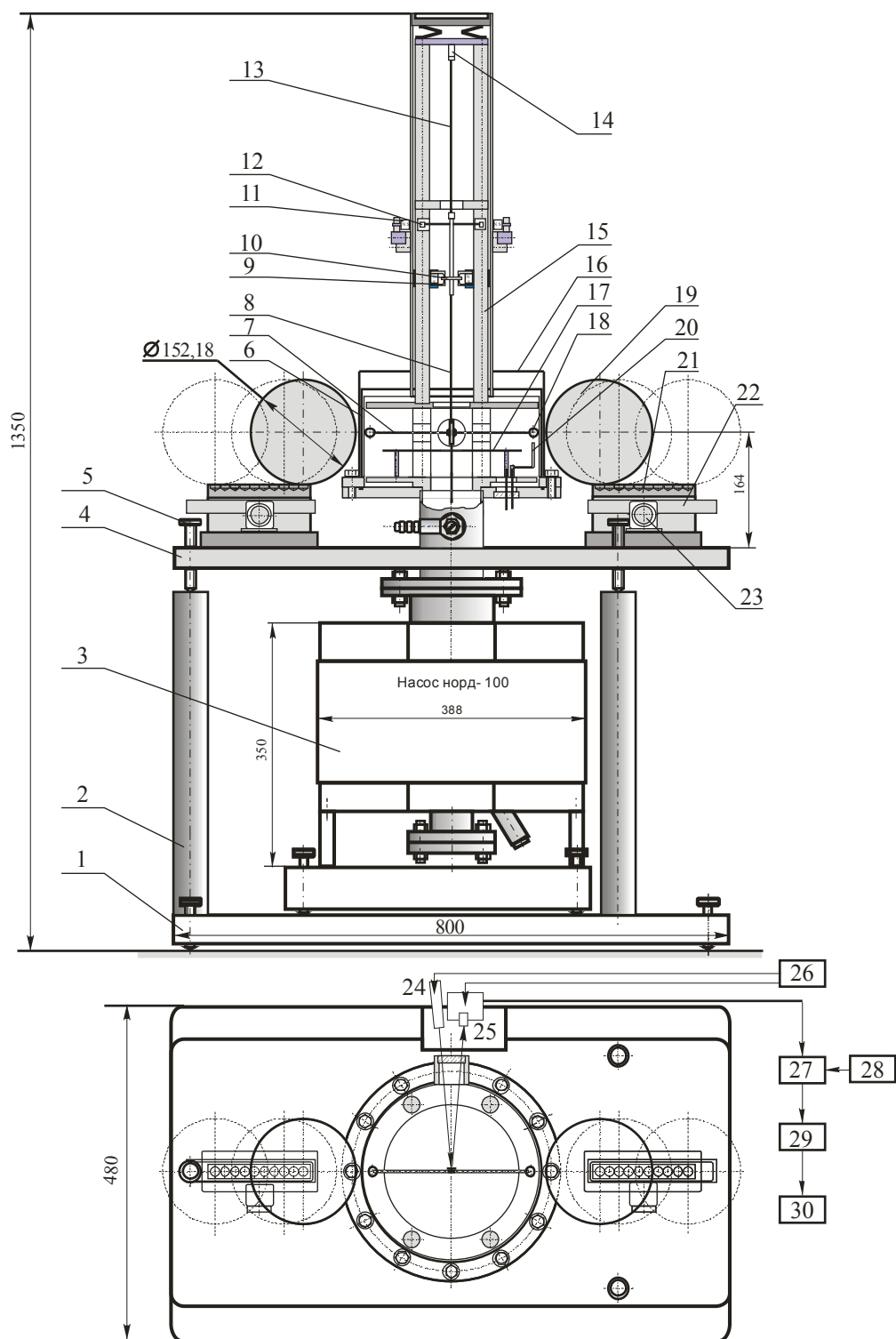


Рис.1. Схема установки для измерения гравитационной постоянной:

- | | | |
|--------------------------|-----------------------------|-------------------------------|
| 1—основание; | 11—магнит поворота; | 21—основная линейка; |
| 2—стойка; | 12—коромысло поворота; | 22—разрезная линейка; |
| 3—вакуумный насос; | 13—вспомогательная нить; | 23—привод перемещения масс; |
| 4—плита; | 14—верхний зажим; | 24—осветитель; |
| 5—установочный винт; | 15—стойка камеры; | 25—фотоусилитель; |
| 6—вакуумная камера; | 16—магнитный экран; | 26—блок питания; |
| 7—рабочее тело весов; | 17—антенна для отжига нити; | 27—ЭВМ; |
| 8—основная нить подвеса; | 18—пробная масса; | 28—кварцевый генератор; |
| 9—магнитная система; | 19—притягивающая масса; | 29—носитель информации; |
| 10—диск демпфера; | 20—электрод управления; | 30—банк измеренных значений G |

Таблица 1. Основные технические параметры крутильных весов

№	d_1 , МКМ	d_2 , МКМ	m_1 , Г	m_2 , Г	m_3 , МГ	L_5 , СМ	L_6 , СМ	J , Г·СМ ²	c_4 , с/рад ²
1	6	25	0.9155	0.1246	230	11.834	11.660	261.639	34
2	8	25	0.9420	1.6575	230	11.8514	11.5500	338.397	790
3	6	15	0.9420	1.6575	171	11.8514	11.5500	338.397	100
4	10	25	1.59163	1.6575	171	11.9102	11.5500	525.429	12
5	15	25	9.7192	1.8031	171	11.8016	11.1636	2785.431	10
6	15	50	9.7192	2.9677	2768	11.8016	11.1636	2833.811	10

Обозначения: № – номер варианта крутильных весов; d_1 – диаметр нити подвеса; d_2 – диаметр вспомогательной нити подвеса; m_1 – масса груза коромысла; m_2 – масса коромысла; m_3 – масса стержня; L_5 – расстояние от оси вращения до центра масс груза коромысла; L_6 – длина плеча коромысла; J – момент инерции рабочего тела; c_4 – коэффициент, корректирующий период при изменении амплитуды колебаний весов (вследствие наличия градиентов гравитационного поля).

Таблица 2. Дополнительные параметры крутильных весов

№	T_0 , с	m , МГ	m , МГ	l_1 , ММ	l_2 , ММ	l_3 , ММ	l_4 , ММ	l_5 , ММ	l_6 , ММ	d_3 , ММ	d_4 , ММ
1	2544	2440	996.05	23	221	296	262	537	150	6.000	0.500
2	2077	3999	996.05	23	221	296	262	537	150	6.017	1.800
3	3731	3973	996.05	21	227	295	261	542	108	6.017	1.800
4	1783	5254	959.25	21	227	295	261	542	108	7.165	1.800
5	1700	21689	959.25	21	218	295	264	542	108	12.76	1.976
6	1723	25447	4193.80	33	218	295	264	536	210	12.76	2.468

Обозначения: T_0 – период свободных колебаний весов; m – масса рабочего тела; m – масса тела, подвешенного на вспомогательной нити; l_1 – расстояние от нижней точки подвеса до центра масс рабочего тела; l_2 – длина нити подвеса; l_3 – расстояние между верхними точками крепления основной и вспомогательной нитей; l_4 – длина вспомогательной нити подвеса; l_5 – расстояние от верхней точки крепления вспомогательной нити до оси коромысла; l_6 – длина стержня, понижающего частоту качаний; d_3 – диаметр грузов коромысла; d_4 – диаметр коромысла.

6. Методики расчёта при сферической форме взаимодействующих тел

Определение гравитационной постоянной G связано с проведением трудоёмких расчётов. Шаровая форма взаимодействующих тел позволяет значительно упростить вычисления, но даже в таком варианте они остаются достаточно сложными [7, 9]. В ранних работах использовался более удобный для расчётов статический метод, в котором измеряемой величиной является смещение положения равновесия крутильных весов. Ф.Райх [45] сделал первую попытку по применению динамического метода. Известен также резонансный метод, значительно усложняющий расчёты [33, 35, 44].

В данной работе использовался динамический метод. Измерялись периоды колебаний весов при всех положениях притягивающих масс, которые фиксировались на линии равновесия коромысла. Весы расположены в камере с высоким вакуумом. Магнитный демпфер гасит качания. После сборки крутильной системы и получения высокого вакуума нить подвеса подвергнута термомеханической обработке.

Момент сил притяжения между шаровыми грузами массой m_1 , укреплёнными на концах коромысла, и двумя притягивающими массами M

$$K_{1i} = 2GMm_1L_i(b_{1ai} + b_{1bi})\sin\varphi_i, \quad (1)$$

где

$$b_{1ai} = L_5 / (L_5^2 + L_i^2 - 2L_5L_i\cos\varphi_i)^{3/2},$$

$$b_{1bi} = -L_5 / (L_5^2 + L_i^2 + 2L_5L_i\cos\varphi_i)^{3/2},$$

L_5, L_i – расстояния от оси вращения до центра масс шарового груза и притягивающего шара; индекс i указывает позицию шара; M – разность масс притягивающего шара и вытесненного им воздуха; φ_i – угол отклонения коромысла от положения равновесия.

Момент силы притяжения коромысла двумя массами M [21]

$$K_{2i} = GMm_2(b_{2ai} + b_{2bi})/\sin\varphi_i, \quad (2)$$

где

$$b_{2ai} = (L_i + L_6 \cos\varphi_i) / [L_6(L_6^2 + L_i^2 + 2L_6L_i \cos\varphi_i)^{1/2}],$$

$$b_{2bi} = (L_i - L_6 \cos\varphi_i) / [-L_6(L_6^2 + L_i^2 - 2L_6L_i \cos\varphi_i)^{1/2}],$$

m_2 – масса коромысла, L_6 – длина плеча коромысла. Момент K_{2i} получен интегрированием (1) по длине коромысла. При этом предполагалось, что диаметр коромысла пренебрежимо мал. Коромысло рассматривается как совокупность материальных точек – материальный отрезок. Отметим, что формула (2) завышает истинное значение K_{2i} , что может привести к занижению расчётных значений G . Однако возникающая погрешность имеет незначительную величину, поскольку $K_{2i} \ll K_{1i}$, а диаметр коромысла мал по сравнению с расстояниями между взаимодействующими массами. По своей структуре момент K_{2i} существенно отличается от момента притяжения грузов коромысла K_{1i} . Он состоит из членов K_{2ai} и K_{2bi} , отличающихся знаком перед L_6 . Первый из них содержит множитель b_{2ai} , а второй – b_{2bi} . При стремлении к нулю φ момент K_{2i} также приближается к нулю, но это можно наглядно показать только после представления K_{2i} в виде ряда, содержащего нечётные степени угла отклонения коромысла.

6.1. Методика 1

В методике 1 методом Рунге-Кутты [8] определяют величину половины периода нелинейных колебаний весов в позициях i и j интегрированием двух дифференциальных уравнений движения:

$$d^2\varphi_i/dt^2 + \omega_0^2\varphi_i + (K_{ig} + K_{ik})/J = 0,$$

$$d^2\varphi_j/dt^2 + \omega_0^2\varphi_j + (K_{jg} + K_{jk})/J = 0,$$

где J – момент инерции рабочего тела, $\omega_0 = 2\pi/T_0$ – частота колебаний при отсутствии притягивающих масс, φ_i и φ_j – углы отклонения весов от поло-

жения равновесия. Численные интегрирования проводят при двух значениях $G=G_0(1\pm k)$, где G_0 – стандартное значение G . При положительном и отрицательном значениях k в позициях i и j вычисляют разность обратных квадратов половин периодов колебаний τ_1 и τ_2 . С учётом экспериментальной разности обратных квадратов периодов колебаний τ_{exp} гравитационную постоянную G определяют либо по формуле [20]:

$$G=G_0(1-k)+2G_0k(4\tau_{\text{exp}}-\tau_2)/(\tau_1-\tau_2),$$

либо по формуле:

$$G=G_0(1+k)+2G_0k(4\tau_{\text{exp}}-\tau_1)/(\tau_1-\tau_2).$$

6.2. Методика 2

Методика 2 предусматривает расчёты по аналитическим формулам. Моменты сил притяжения раскладывают в ряд по степеням угла отклонения весов φ [21]. Момент K_{li} состоит из суммы двух моментов, учитывающих взаимодействие притягивающих масс как с ближним, так и дальним грузом коромысла:

$$K_{li}=K_{lai}+K_{lbi},$$

где

$$K_{lai}=2GMm_1L_i b_{lai} \sin\varphi_i,$$

$$K_{lbi}=2GMm_1L_i b_{lbi} \sin\varphi_i.$$

Преобразуем знаменатель члена b_{lai} .

$$(L_5^2+L_i^2-2L_5L_i\cos\varphi_i)^{-3/2}=[(L_5^2+L_i^2-2L_5L_i)(1+b_{3ai}y_i)]^{-3/2},$$

где

$$b_{3ai}=-2L_5L_i/(L_i-L_5)^2,$$

$$y_i=-\varphi_i^2/2+\varphi_i^4/24-\varphi_i^6/720.$$

Вычислим член $(1+b_{3ai}y_i)^{-3/2}$. Поскольку $b_{3ai}y_i \ll 1$ воспользуемся биномом Ньютона, учитывая члены до z^3 включительно в следующей формуле:

$$(1+z)^n = 1 + nz + n(n-1)z^2/2 + n(n-1)(n-2)z^3/6.$$

В нашем случае

$$z = b_{3ai}y_i, \quad n = -1.5, \quad n(n-1)/2 = 1.875, \quad n(n-1)(n-2)/6 = -2.1875.$$

Введём обозначения:

$$b_{4ai} = 2Mm_1L_5L_i/(L_i - L_5)^3,$$

$$b_{5ai} = -1.5b_{3ai}, \quad b_{6ai} = 1.875b_{3ai}^2, \quad b_{7ai} = -2.1875b_{3ai}^3,$$

$$b_{3bi} = 2L_5L_i/(L_i + L_5)^2,$$

$$b_{4bi} = -2Mm_1L_5L_i/(L_i + L_5)^3,$$

$$b_{5bi} = -1.5b_{3bi}, \quad b_{6bi} = 1.875b_{3bi}^2, \quad b_{7bi} = -2.1875b_{3bi}^3.$$

При проведении дальнейших расчётов учтём, что с учётом членов при седьмой степени угла отклонения весов φ

$$\sin\varphi_i = \varphi_i - \varphi_i^3/6 + \varphi_i^5/120 - \varphi_i^7/5040,$$

$$y_i^2 = \varphi_i^4/4 - \varphi_i^6/24,$$

$$y_i \sin\varphi_i = -\varphi_i^3/2 + \varphi_i^5/8 - \varphi_i^7/80.$$

Преобразуем следующие члены:

$$(1 + b_{5ai}y_i) \sin\varphi_i = \varphi_i - \varphi_i^3(1/6 + b_{5ai}/2)$$

$$+ \varphi_i^5(1/120 + b_{5ai}/8) - \varphi_i^7(1/5040 + b_{5ai}/80),$$

$$y_i^2 \sin\varphi_i = \varphi_i^5/4 - \varphi_i^7/12,$$

$$y_i^3 = -\varphi_i^6/8, \quad y_i^3 \sin\varphi_i = -\varphi_i^7/8.$$

Используя приведенные выражения, представим момент K_{1ai} в виде ряда:

$$K_{1ai} = Gb_{4ai}[\varphi_i - \varphi_i^3/6 + \varphi_i^5/120 - \varphi_i^7/5040 + b_{5ai}(-\varphi_i^3/2 + \varphi_i^5/8 - \varphi_i^7/80) + b_{6ai}(\varphi_i^5/4 - \varphi_i^7/12) - b_{7ai}\varphi_i^7/8].$$

После преобразований найдём, что

$$K_{1ai} = Gb_{4ai}[\varphi_i - \varphi_i^3(1/6 + b_{5ai}/2) + \varphi_i^5(1/120 + b_{5ai}/8 + b_{6ai}/4) - \varphi_i^7(1/5040 + b_{5ai}/80 + b_{6ai}/12 + b_{7ai}/8)].$$

В члене K_{1bi} изменяется знак перед L_5 . При использовании двух равных по величине притягивающих масс момент

$$K_{1i} = (b_{4ai} + b_{4bi})G\varphi_i - [b_{4ai}(b_{5ai}/2 + 1/6) + b_{4bi}(b_{5bi}/2 + 1/6)]G\varphi_i^3 + [b_{4ai}(1/120 + b_{5ai}/8 + b_{6ai}/4) + b_{4bi}(1/120 + b_{5bi}/8 + b_{6bi}/4)]G\varphi_i^5 + [b_{4ai}(1/5040 - b_{5ai}/80 - b_{6ai}/12 - b_{7ai}/8) + b_{4bi}(1/5040 - b_{5bi}/80 - b_{6bi}/12 - b_{7bi}/8)]G\varphi_i^7.$$

Гравитационная постоянная в этом случае выражается соотношением:

$$G_{ij} = 4\pi^2 J(T_i^{-2} - T_j^{-2}) / (b_{1i} + b_{2i} - b_{1j} - b_{2j}),$$

где

$$b_{1i} = b_{4ai} + b_{4bi} + 3e_{1i}\varphi_{0i}^2/4 + \varphi_{0i}^4(3Ge_{1i}^2\omega_0^{-2}/128 + 5e_{2i}/8) + \varphi_{0i}^6(35e_3/64 + 5e_{1i}e_{2i}\omega_{0i}^{-2}/64 - 57e_{1i}^3\omega_{0i}^{-4}/4096),$$

$$\omega_{0i}^2 = 4\pi^2/T_{0i}^2 + Gb_{4ai}/J,$$

$$e_{1i} = -b_{4ai}(b_{5ai}/2 + 1/6) - b_{4bi}(b_{5bi}/2 + 1/6),$$

$$e_{2i} = b_{4ai}(1/120 + b_{5ai}/8 + b_{6ai}/4) + b_{4bi}(1/120 + b_{5bi}/8 + b_{6bi}/4),$$

$$e_{3i} = -b_{4ai}(1/5040 + b_{5ai}/80 + b_{6ai}/12 + b_{7ai}/8) - b_{4bi}(1/5040 + b_{5bi}/80 + b_{6bi}/12 + b_{7bi}/8),$$

а член b_{2i} учитывает вклад всех участков коромысла, каждое плечо которого условно разделено на n равных отрезков массой $m_2/2n$. Отрезки коромысла рассматриваются как точечные массы. Они расположены на расстояниях $L_6(k-0.5)/n$ от оси вращения, k изменяется в пределах от 1 до n . Методика 2 не использует формулу (2), а предпочитает ценой увеличения времени вычислений рассматривать коромысло как цепочку точечных масс. Длина отрезков коромысла примерно равна его диаметру. При рас-

чѐтах по методике 1 предпочтение всё же отдаѐтся формуле (2), что позволяет сократить время вычислений примерно в 50 раз. В члены с индексом j вместо L_i подставляется L_j .

6.3. Проверка результатов расчѐта

Проверку полученных результатов осуществим на примере данных массива 010216 [21]. Он имел параметры: $T_0=1721.990$ с, $M=14083.566$ г, $m_1=9.7192$ г, $m_2=2.9673$ г, $L_5=11.8016$ см, $L_6=11.1636$ см, $L_1=21.1160$ см, $L_2=23.9131$ см, $L_3=33.7117$ см. Притягивающие стальные массы диаметром 152.4 мм фиксировались в трёх позициях. Усреднённые периоды колебаний весов составляли, соответственно, величины 1606.646, 1660.246 и 1707.673 с. Разность периодов колебаний составила 53.600 и 47.427 с, а время измерения на каждой позиции – 0.893, 0.922 и 0.949 ч. В протоколе массива выбираем те строки, которые удобны для проведения анализа в широком диапазоне φ_{0i} . Номера строк сохраняем. Строки выбраны таким образом, что амплитуда колебаний постепенно возрастает. В основном представлены прямые циклы, когда измерения начинаются с ближней к весам позиции 1. В порядке исключения в строках 441-446 кроме прямых приведены и обратные циклы. Это позволяет увидеть рост амплитуды колебаний по ходу процесса измерений в автоматическом режиме. Данный эффект не отражается на точности расчѐтов, поскольку каждая строка протокола содержит две амплитуды колебаний. Он обусловлен тем, что перемещение притягивающих масс ведѐт к параметрической накачке энергии в крутильную систему. Чем выше добротность системы, больше момент притяжения и амплитуда колебаний, тем сильнее проявляется такой эффект. При введении задержки в начало перемещения притягивающих масс на очередную позицию можно исключить эффект изменения амплитуды колебаний весов.

В данном эксперименте использовалась нить подвеса диаметром 15 мкм из сплава молибдена и рения МР-50. Он обладает повышенной прочностью на разрыв, что позволило увеличить период колебаний весов, однако имеет большие гистерезисные потери по сравнению с вольфрамовыми нитями. После осуществления термомеханической обработки нити подвеса в вакууме под нагрузкой добротность достигла величины порядка 5000, на вольфрамовых нитях она возрастала до 20000.

6.4. Погрешность расчёта моментов притяжения

Погрешность расчёта моментов притяжения тела весов в позиции 1, когда расстояние от оси вращения весов до центра каждого из притягивающих шаров диаметром 152.4 мм составляет 21.1160 см, приведена в табл. 3. Во всём диапазоне углов отклонения весов φ учёт седьмой степени ведёт к существенному снижению погрешности. На амплитуде 80 мрад при учёте пятой степени погрешность вычисления момента притяжения тела весов составляет $-1.48 \cdot 10^{-5}$. При учёте седьмой степени погрешность составляет всего $3.15 \cdot 10^{-7}$. На второй позиции шаровые массы удаляются от весов, что ведёт к уменьшению значения момента притяжения и снижению погрешности вычислений (табл.4). На третьей позиции расстояние до притягивающих масс возрастает значительно, что существенно снижает моменты притяжения (табл.5).

Погрешности вычисления моментов в трёх позициях в диапазоне от 50 до 100 мрад показаны на рис. 2. Они определяют в конечном итоге погрешность вычислений G_{ij} . В табл. 6 приведены периоды и амплитуды колебаний в каждой позиции, значения гравитационной постоянной при расчётах по методике 1 (столбец 8) и методике 2 (столбцы 9 и 10) с учётом пятой и седьмой степеней. Погрешность методики 1 в табл.6 обозначена σ_1 , а методики 2 с учётом пятой степени – σ_2 . Погрешность методики 2 в

столбце 10 можно оценить приближённо по погрешности вычисления момента притяжения, который значительно ниже погрешности при учёте только пятой степени. Столбец 10 можно использовать для оценки погрешности расчётов в столбцах 8 и 9. В диапазоне φ_0 до 100 мрад $\sigma_2 < \sigma_1$, при дальнейшем росте φ_0 погрешность $\sigma_1 < \sigma_2$. Погрешность G_{12} превышает погрешность G_{13} . Из трёх имеющихся комбинаций самую низкую погрешность имеет комбинация G_{23} .

Отметим, что погрешности вычисления моментов притяжения превышают погрешности вычислений гравитационной постоянной. Например, в позиции 1 погрешность вычисления момента притяжения при $\varphi=71.98$ и 89.82 мрад составляет, соответственно, $7.85 \cdot 10^{-6}$ и $2.98 \cdot 10^{-5}$, в позиции 2 – $2.50 \cdot 10^{-6}$ и $9.46 \cdot 10^{-6}$, в позиции 3 – $2.55 \cdot 10^{-7}$ и $9.65 \cdot 10^{-7}$. При тех же амплитудах колебаний погрешность G_{12} составляет $7.63 \cdot 10^{-6}$ и $2.91 \cdot 10^{-5}$, погрешность G_{13} – $5.09 \cdot 10^{-6}$ и $1.95 \cdot 10^{-5}$, погрешность G_{23} – $1.99 \cdot 10^{-6}$ и $7.63 \cdot 10^{-6}$. Погрешность определения G_{12} в диапазоне φ_0 от 20 до 140 мрад иллюстрирует рис.3.

6.5. Учёт нелинейности

Учёт нелинейности представляет одну из основных проблем при расчёте гравитационной постоянной [21]. В позиции 1 при $\varphi=20$ мрад отклонение от линейного закона в моменте притяжения достигает 1786 ppm. С ростом φ нелинейность быстро нарастает. Так при $\varphi=50$ мрад отклонение достигает 11205 ppm, а при $\varphi=100$ мрад – уже 45096 ppm. В позиции 2 при тех же значениях φ отклонение составляет, соответственно, 1218, 7638 и 30687 ppm. В позиции 3 при тех же φ отклонение составит 563, 3526 и 14135 ppm.

Таблица 3. Точные (K) и приближённые значения моментов притяжения тела весов с учётом пятой (K_5) и седьмой (K_7) степени φ в позиции 1 массива 010216 при $M=14083.566$ г, $m_1=9.7192$ г, $L=21.1160$ см, $L_5=11.8016$ см и погрешности их определения σ_{1k} и σ_{2k}

1	2	3	4	6	7	8
φ , мрад	$10^{11}K$, Нм	$10^{11}K_5$, Нм	$10^{11}K_7$, Нм	$\sigma_{1k}=\frac{(K_5-K)}{K}$	$\sigma_{2k}=\frac{(K-K_7)}{K}$	$\frac{\sigma_{1k}}{\sigma_{2k}}$
20.00	1.155971959330	1.155971963482	1.155971959322	3.59E-09	6.76E-12	532
30.00	1.730085698282	1.730085769147	1.730085698063	4.10E-08	1.27E-10	323
40.00	2.299584276962	2.299584806660	2.299584274135	2.303E-7	1.23E-09	187
50.00	2.862981373499	2.862983891872	2.862981352595	8.80E-07	7.30E-09	120
52.22	2.987081996500	2.987085407369	2.987081965629	1.14E-06	1.03E-08	110
60.00	3.418834339504	3.418843330833	3.418834232145	2.63E-06	3.14E-08	83.8
70.00	3.965753952895	3.965780292346	3.965753524937	6.64E-06	1.08E-07	61.5
71.98	4.072868049376	4.072900038716	4.072867499810	7.85E-06	1.35E-07	58.2
78.02	4.397030468740	4.397086532648	4.397029337172	1.28E-05	2.57E-07	49.5
80.00	4.502413433750	4.502480180511	4.502412017312	1.48E-05	3.15E-07	47.1
89.82	5.018212819539	5.018362121586	5.018208825379	2.98E-05	7.96E-07	37.4
90.00	5.027556614017	5.027708007283	5.027552547656	3.01E-05	8.09E-07	37.2
100.0	5.540005170583	5.540319765014	5.539994737554	5.68E-05	1.88E-06	30.1
120.0	6.522530644243	6.523642180082	6.522477547927	1.70E-04	8.14E-06	20.9
140.0	7.442330133936	7.445547129473	7.442120901126	4.32E-04	2.81E-05	15.4

Таблица 4. Точные (K) и приближённые значения моментов притяжения тела весов с учётом пятой (K_5) и седьмой (K_7) степени φ в позиции 2 массива 010216 при $M=14083.566$ г, $m_1=9.7192$ г, $L=23.9131$ см, $L_5=11.8016$ см и погрешности их определения σ_{1k} и σ_{2k}

1	2	3	4	6	7	8
φ , мрад	$10^{12}K$, Нм	$10^{12}K_5$, Нм	$10^{12}K_7$, Нм	$\sigma_{1k}=\frac{(K_5-K)}{K}$	$\sigma_{2k}=\frac{(K-K_7)}{K}$	$\frac{\sigma_{1k}}{\sigma_{2k}}$
20.00	5.902375180495	5.902375187254	5.902375180488	1.15E-9	1.03E-12	1112
30.00	8.839824869502	8.839824984864	8.839824869269	1.31E-8	2.64E-11	494
40.00	11.76086492408	11.76086578697	11.76086492098	7.34E-8	2.64E-10	278
50.00	14.66015108831	14.66015519458	14.66015106523	2.80E-7	1.57E-9	178
52.22	15.30031323510	15.30031879771	15.30031320079	3.64E-7	2.24E-9	162
60.00	17.53244521663	17.53245989372	1.753244509752	8.37E-7	6.79E-9	1232
70.00	20.37263987370	20.37268292777	2.037263939887	2.11E-6	2.33E-8	90.7
71.98	20.93075799428	20.93081029889	20.93075738443	2.50E-6	2.91E-8	85.8
78.02	22.62393205764	22.62402381185	2.262393080113	4.06E-6	5.55E-8	73.0
80.00	23.17578169436	23.17589096746	23.17578012113	4.71E-6	6.79E-8	69.5
89.82	25.88778644352	25.88803128941	2.588778200061	9.46E-6	1.72E-7	55.1
90.00	25.93709329940	25.93734158298	25.93708877604	9.57E-6	1.74E-7	54.9
100.0	28.65199358512	28.65251051511	28.65198195860	1.80E-5	4.06E-7	44.5
120.0	33.92532628169	33.92716077339	3.392526685986	5.41E-5	1.75E-6	30.9
140.0	38.96371101277	38.96904739120	3.896347569185	1.37E-4	6.04E-6	22.7

Таблица 5. Точные (K) и приближённые значения моментов притяжения тела весов с учётом пятой (K_5) и седьмой (K_7) степени φ в позиции 3 массива 010216 при $M=14083.566$ г, $m_1=9.7192$ г, $L=33.7117$ см, $L_5=11.8016$ см и погрешности их определения σ_{1k} и σ_{2k}

1	2	3	4	6	7	8
φ , мрад	$10^{12}K$, Нм	$10^{12}K_5$, Нм	$10^{12}K_7$, Нм	$\sigma_{1k}=\frac{(K_5-K)}{K}$	$\sigma_{2k}=\frac{(K-K_7)}{K}$	$\frac{\sigma_{1k}}{\sigma_{2k}}$
20.00	1.318533207206	1.318533207361	1.318533207206	1.17E-10	4.79E-14	2444
30.00	1.976248249024	1.976248251662	1.976248249022	1.33E-9	1.22E-12	1093
40.00	2.632105263849	2.632105283597	2.632105263817	7.50E-9	1.22E-11	615
50.00	3.285491303107	3.285491397188	3.285491302868	2.86E-8	7.28E-11	394
52.22	3.430146679462	3.430146806950	3.430146679108	3.72E-8	1.03E-10	361
60.00	3.935798862421	3.935799199156	3.935798861189	8.56E-8	3.13E-10	273
70.00	4.582427197754	4.582428186979	4.582427192715	2.16E-7	1.10E-9	196
71.98	4.709971587710	4.709972789900	4.709971581257	2.55E-7	1.37E-9	186
78.02	5.097964189956	5.097966301239	5.097964176738	4.14E-7	2.59E-9	160
80.00	5.224783612098	5.224786127460	5.224783595568	4.81E-7	3.16E-9	152
89.82	5.850855960631	5.850861608202	5.850855914083	9.65E-7	7.96E-9	121
90.00	5.862284707292	5.862290434381	5.862284659902	9.77E-7	8.08E-9	121
100.0	6.494357595791	6.494369546986	6.494357473986	1.84E-6	1.88E-8	98.1
120.0	7.739986707149	7.740029342237	7.739986082493	5.51E-6	8.07E-8	68.3
140.0	8.957341127132	8.957465905639	8.957338639909	1.39E-5	2.78E-7	50.2

Таблица 6. Значения гравитационной постоянной в массиве 010216 при расчёте по методике 1 методом Рунге-Кутты (столбец 8) и методике 2 с учётом членов при φ_0^4 (столбец 9) и φ_0^6 (столбец 10), погрешность расчётов по методике 1 даётся величиной σ_1 , методики 2 по столбцу 9 – σ_2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	n_i	n_j	$T_i, \text{с}$	$T_j, \text{с}$	$\varphi_{0i},$ мрад	$\varphi_{0j},$ мрад	$10^{11} G_{ij} \cdot \text{Нм}^2/\text{кг}^2$			10^6 $\cdot \sigma_1$	10^6 $\cdot \sigma_2$
0441	1	2	1607.347	1660.962	46.98	47.78	6.6747326	6.6747468	6.6747506	2.70	0.569
0442	2	3	1660.962	1708.410	47.78	48.19	6.6726179	6.6726255	6.6726265	1.29	0.150
0443	1	3	1607.347	1708.410	46.98	48.19	6.6737890	6.6737995	6.6738022	1.98	0.405
0444	3	2	1708.410	1660.953	48.19	47.95	6.6742030	6.6742102	6.6742113	1.24	0.165
0445	2	1	1660.953	1607.327	47.95	47.11	6.6766578	6.6766706	6.6766746	2.52	0.599
0446	3	1	1708.410	1607.327	48.19	47.11	6.6755616	6.6755725	6.6755751	2.02	0.389
0674	1	2	1607.611	1661.108	52.22	53.12	6.6726337	6.6726533	6.6726606	4.03	1.09
0675	2	3	1661.108	1708.490	53.12	53.58	6.6715742	6.6715829	6.6715848	1.59	0.285
0676	1	3	1607.611	1708.490	52.22	53.58	6.6721607	6.6721756	6.6721805	2.97	0.734
2836	1	2	1608.279	1661.267	71.98	73.27	6.6745053	6.6745611	6.6746120	16.0	7.63
2837	2	3	1661.267	1708.351	73.27	73.94	6.6744077	6.6744203	6.6744336	3.88	1.99
2838	1	3	1608.279	1708.351	71.98	73.94	6.6744630	6.6744997	6.6745337	10.6	5.09
2956	1	2	1608.565	1661.372	78.02	79.41	6.6752060	6.6752867	6.6753706	24.7	12.6
2957	2	3	1661.372	1708.340	79.41	80.14	6.6740354	6.6740537	6.6740753	5.98	3.24
2958	1	3	1608.565	1708.340	78.02	80.14	6.6746839	6.6747357	6.6747917	16.2	8.39
3121	1	2	1609.285	1661.679	89.82	91.50	6.6728554	6.6729201	6.6731144	38.8	29.1
3122	2	3	1661.679	1708.409	91.50	92.39	6.6742756	6.6742820	6.6743329	8.59	7.63
3123	1	3	1609.285	1708.409	89.82	92.39	6.6734939	6.6735344	6.6736643	25.5	19.5
3221	1	2	1609.718	1661.732	99.76	101.60	6.6746631	6.6746968	6.6750647	60.2	55.1
3222	2	3	1661.732	1708.228	101.60	102.57	6.6759000	6.6758918	6.6759877	13.1	14.4
3223	1	3	1609.718	1708.228	99.76	102.57	6.6752222	6.6752377	6.6754832	39.1	36.8
3427	1	2	1611.562	1662.558	123.32	125.56	6.6740600	6.6736591	6.6750021	141	201
3428	2	3	1662.558	1708.422	125.56	126.74	6.6735300	6.6733883	6.6737345	30.6	51.9
3429	1	3	1611.562	1708.422	123.32	126.74	6.6738264	6.6735418	6.6744344	91.1	134

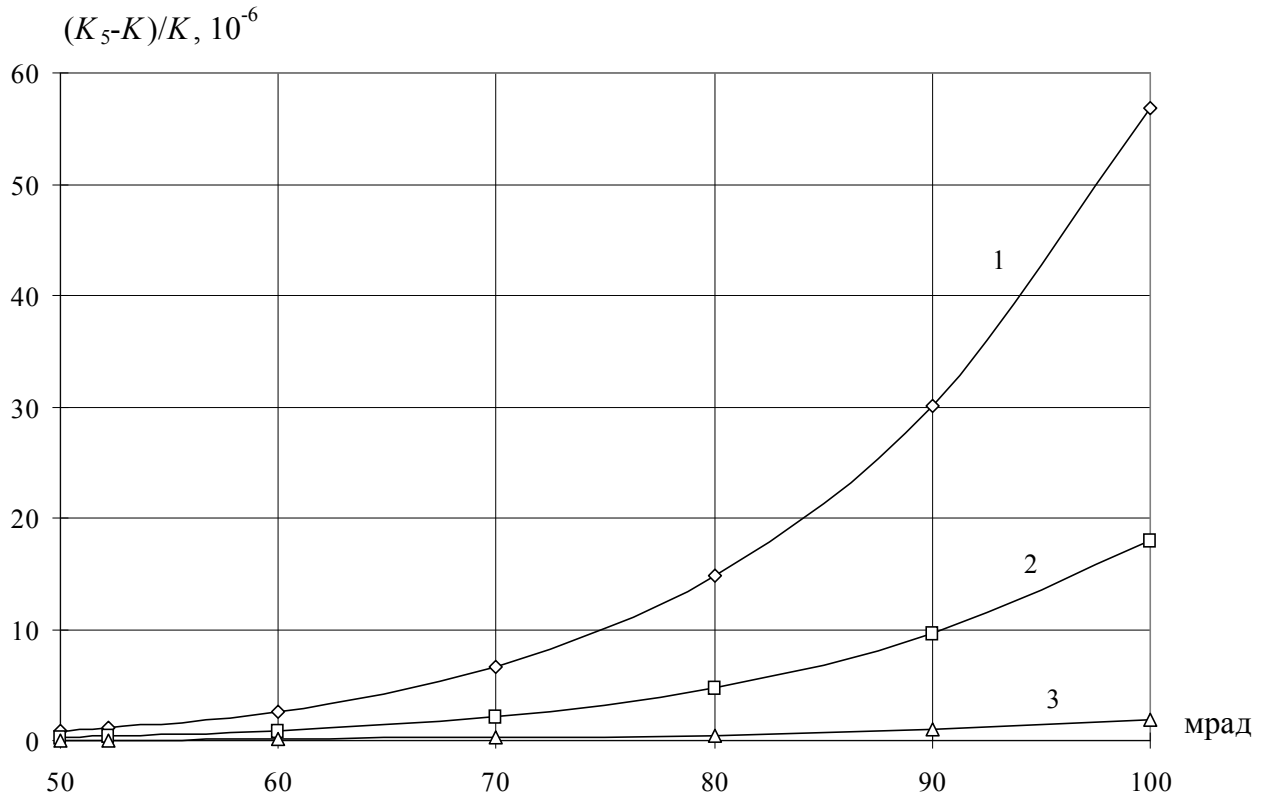


Рис.2. Погрешность расчёта момента притяжения $(K_5 - K)/K$ при учёте пятой степени угла отклонения весов φ в позициях 1, 2 и 3 (кривая 3)

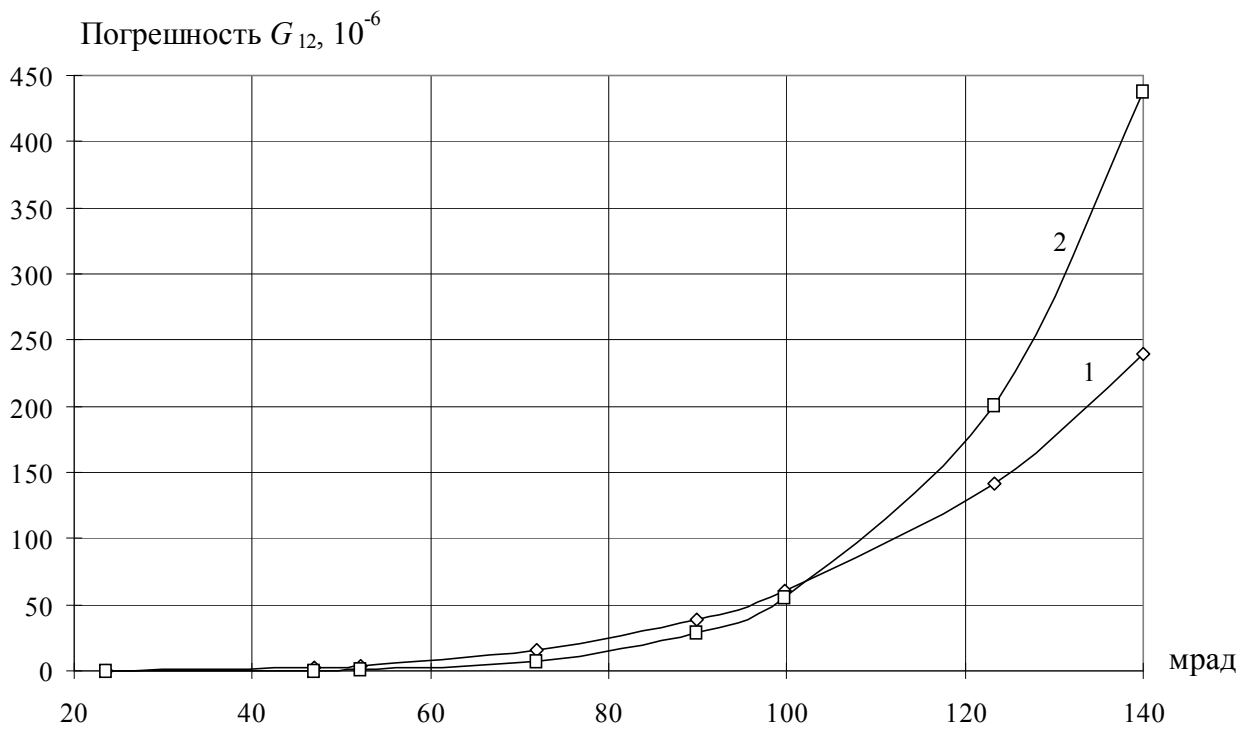


Рис. 3. Погрешность определения гравитационной постоянной G_{12} по методикам 1 (методом Рунге-Кутты) и 2 (кривая 2) при учёте φ_{01}^4 и φ_{02}^4

7. Методы численного решения дифференциальных уравнений движения

Методы численного решения уравнений движения весов при определении гравитационной постоянной сводятся к вычислению половины периода нелинейных колебаний [8, 20]. Задаются периоды и амплитуды колебаний весов. По ним определяется скорость в момент прохождения фазы $\varphi=0$. Кроме того, необходимо знать период собственных колебаний крутильных весов при отсутствии притягивающих масс. Такой период вносится в файл констант. Он обеспечивает упрощённый вариант расчёта. Но значительно меньшая погрешность вычислений достигается в том случае, если в каждой строке протокола такой период предварительно вычисляется по стандартному значению гравитационной постоянной и периоду колебаний в одной из имеющихся позиций. На это затрачивается значительное время, но такая процедура, несмотря на существенное усложнение программы, полностью оправдывается. В процессе проведения длительных непрерывных измерений период собственных колебаний испытывает вариации в связи с воздействием микросейсм и неравновесных потоков разреженного газа. Далее требуется вычислить время между двумя соседними нулевыми фазами угла отклонения, которое равно половине периода колебаний. Удвоенное значение времени между нулевыми фазами равно периоду колебаний. С этой целью используются различные методы численного решения. В нашей работе использовался метод Рунге-Кутты. Другие методы до сих пор не рассматривались.

7.1. Метод Рунге-Кутты

Метод Рунге-Кутты [8, 18, 38, 46] можно рассматривать как один из наиболее известных. Алгоритм метода сводится к выполнению ряда последовательных операций. Они циклически выполняются до тех пор, пока

угол отклонения весов φ не изменит знак. После этого граница нуля несколько раз пересекается в обратных направлениях с уменьшением шага и изменением его знака. Количество пересечений нуля задаётся в файле констант. Основная часть программы управляет вспомогательными, которые вычисляют величины скорости k_1, k_2, k_3 при разных углах отклонения рабочего тела весов от положения равновесия, фиксированных значениях L_5 или L_6 , заданном значении гравитационной постоянной $G=G_0(1\pm k)$. При $\varphi=0$ задаётся начальная скорость $v=v_0$, которая вычисляется по периоду и амплитуде колебаний.

При учёте грузов коромысла

$$k_1=f(\varphi, L_5, G),$$

$$k_2=f(\varphi+\Delta t \cdot v/2+\Delta t \cdot k_1/8, L_5, G)\Delta t,$$

$$k_3=f(\varphi+\Delta t \cdot v +\Delta t \cdot k_2/2, L_5, G)\Delta t,$$

$$k_4=v+(k_1+2k_2)/6,$$

$$\varphi=\varphi+\Delta t \cdot k_4,$$

$$v=k_4+(2k_2+k_3)/6, x=x+\Delta t.$$

При учёте коромысла вместо L_5 берётся длина его плеч L_6 .

В табл.7 приведены значения гравитационной постоянной в массиве 010216 при расчёте методом Рунге-Кутты при различных шагах интегрирования Δt . При шаге 10 с погрешность расчёта составляет 0.045 ppm, при шаге 20 с – 0.73 ppm, при шаге 30 с – 2.25 ppm, при шаге 40 с – -17 ppm, при шаге 50 с – -189 ppm. При дальнейшем росте шага интегрирования расчёты срываются. Более наглядно погрешности расчётов на амплитудах 46.98, 79.41 и 123.32 мрад при разных шагах интегрирования в диапазоне шагов от 5 до 10 с проиллюстрированы на рис. 4, 5 и 6. Гравитационная постоянная вычислялась с десятью значащими цифрами. В файле констант задавалось десятикратное пересечение значения $\varphi=0$.

Таблица 7. Значения гравитационной постоянной в массиве 010216 при расчёте методом Рунге-Кутты при различных шагах интегрирования

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
–	–	–	φ_{0i} ,	φ_{0j} ,	$\Delta t=5.0$ с	$\Delta t=10$ с	$\Delta t=20$ с	$\Delta t=30$ с	$\Delta t=50$ с
N	n_i	n_j	мрад	мрад	$10^{11} G_{ij} \cdot \text{Нм}^2/\text{кг}^2$				
0441	1	2	46.98	47.78	6.6747328	6.6747331	6.6747377	6.6747478	6.6734697
0442	2	3	47.78	48.19	6.6726164	6.6726166	6.6726204	6.6726049	6.6723192
0443	1	3	46.98	48.19	6.6737880	6.6737883	6.6737928	6.6737984	6.6736794
0444	3	2	48.19	47.95	6.6742014	6.6742016	6.6742055	6.6742293	6.6794948
0445	2	1	47.95	47.11	6.6766561	6.6766564	6.6766609	6.6766906	6.6905392
0446	3	1	48.19	47.11	6.6755601	6.6755604	6.6755648	6.6755833	6.6812822
0674	1	2	52.22	53.12	6.6726319	6.6726321	6.6726367	6.6726257	6.6757921
0675	2	3	53.12	53.58	6.6715725	6.6715727	6.6715771	6.6715895	6.6705544
0676	1	3	52.22	53.58	6.6721600	6.6721602	6.6721641	6.6721785	6.6672766
2836	1	2	71.98	73.27	6.6745032	6.6745034	6.6745081	6.6745290	6.6747101
2837	2	3	73.27	73.94	6.6744062	6.6744064	6.6744102	6.6744209	6.6690422
2838	1	3	71.98	73.94	6.6744610	6.6744612	6.6744656	6.6744837	6.6721403
2956	1	2	78.02	79.41	6.6752046	6.6752049	6.6752095	6.6752372	6.6774425
2957	2	3	79.41	80.14	6.6740350	6.6740352	6.6740390	6.6740465	6.6726466
2958	1	3	78.02	80.14	6.6746840	6.6746843	6.6746886	6.6747073	6.6775199
3121	1	2	89.82	91.50	6.6728539	6.6728541	6.6728585	6.6728671	6.6733081
3122	2	3	91.50	92.39	6.6742739	6.6742741	6.6742779	6.6742621	6.6733225
3123	1	3	89.82	92.39	6.6734922	6.6734924	6.6734966	6.6735128	6.6783368
3221	1	2	99.76	101.60	6.6746617	6.6746620	6.6746664	6.6746831	6.6749460
3222	2	3	101.60	102.57	6.6758993	6.6758995	6.6759034	6.6759044	6.6812469
3223	1	3	99.76	102.57	6.6752208	6.6752211	6.6752254	6.6752284	6.6746019
3427	1	2	123.32	125.56	6.6740491	6.6740493	6.6740536	6.6740897	6.6701009
3428	2	3	125.56	126.74	6.6735287	6.6735289	6.6735328	6.6735444	6.6748311
3429	1	3	123.32	126.74	6.6738212	6.6738214	6.6738255	6.6738589	6.6716640

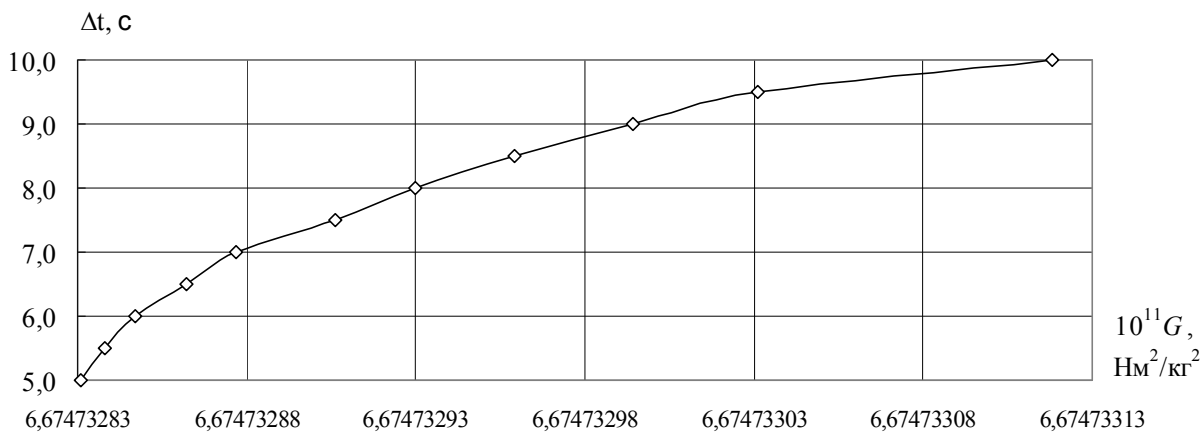


Рис.4. Значения G_{12} в строке 441 массива 010216 при использовании метода Рунге-Кутты, различных шагах интегрирования Δt , $\varphi_{01}=46.98$ мрад

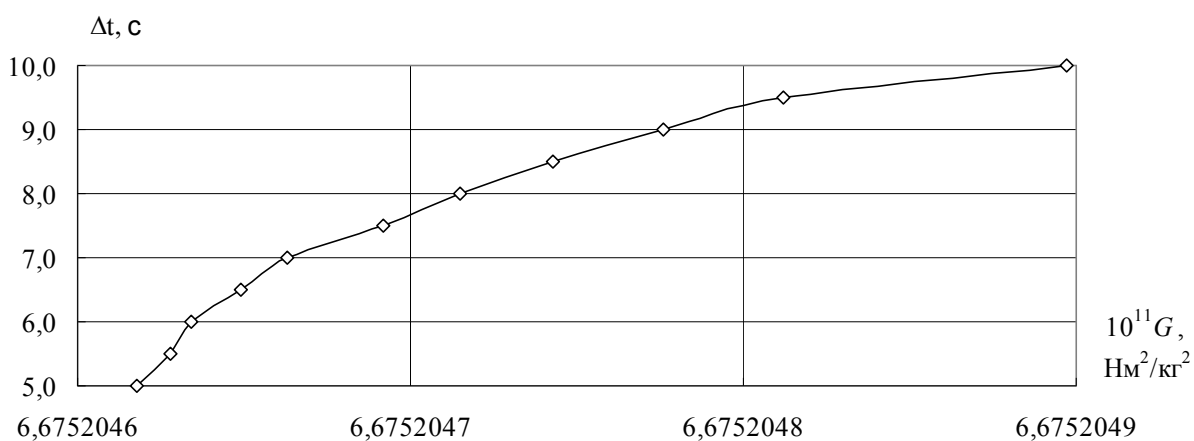


Рис.5. Значения G_{12} в строке 2956 массива 010216 при использовании метода Рунге-Кутты, различных шагах интегрирования Δt , $\varphi_{01}=79.41$ мрад

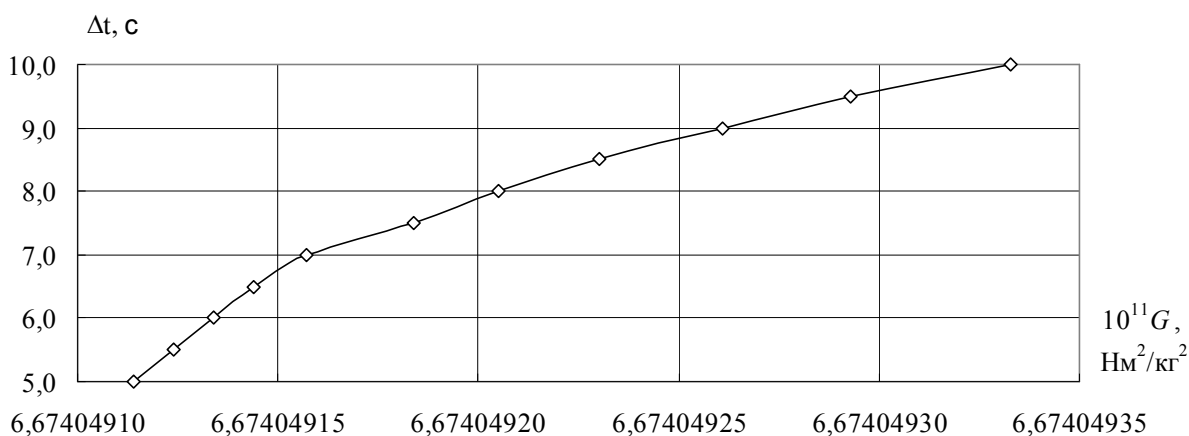


Рис.6. Значения G_{12} в строке 3427 массива 010216 при использовании метода Рунге-Кутты, различных шагах интегрирования Δt , $\varphi_{01}=123.32$ мрад

7.2. Метод Эйлера

Метод Эйлера [1, 8] при учёте грузов коромысла сводится к следующим операциям:

$$k_1=f(\varphi, L_5, G),$$

$$k_2=f(\varphi+\Delta t \ v/2+\Delta t \cdot k_1/8, L_5, G)\Delta t,$$

$$k_4=v+(k_1+2k_2)/6,$$

$$\varphi=\varphi+\Delta t \cdot k_4,$$

$$v=k_4+k_2/2,$$

$$x=x+\Delta t.$$

Алгоритм Эйлера проще алгоритма Рунге-Кутты. Отличие заключается, прежде всего, в отсутствии функции k_3 . Обращение к подпрограммам проводится только два раза при вычислении функций k_1 и k_2 . При этом величина v вычисляется с большей погрешностью. В табл.8 приведены значения гравитационной постоянной в массиве 010216 при расчёте методом Эйлера при различных шагах интегрирования Δt . В строке 441 массива 010216 при шаге интегрирования 0.01 с погрешность расчёта составляет 0.045 ppm, при шаге 0.1 с – 0.5 ppm, при шаге 1 с – 5.5 ppm, при шаге 5 с – 43 ppm, при шаге 10 с – 146 ppm, при шаге 20 с – 562 ppm, при шаге 30 с – 686 ppm, при шаге 40 с – 3919 ppm, при шаге 50 с – 6966 ppm. В строке 3427 при шаге интегрирования 0.01 с погрешность расчёта составляет 0.33 ppm, при шаге 0.1 с – 3.3 ppm, при шаге 1 с – 33 ppm, при шаге 5 с – 173 ppm, при шаге 10 с – 365 ppm, при шаге 20 с – 1059 ppm, при шаге 30 с – 1419 ppm, при шаге 40 с – 4955 ppm, при шаге 50 с – 6560 ppm. При дальнейшем росте шага интегрирования расчёты срываются. Более наглядно погрешности расчётов на амплитудах 46.98, 79.41 и 123.32 мрад проиллюстрированы на рис. 7, 8 и 9. По скорости расчётов гравитационной постоянной данный метод превосходит метод Рунге-Кутты в полтора раза.

Таблица 8. Значения гравитационной постоянной в массиве 010216 при расчёте методом Эйлера при различных шагах интегрирования Δt

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
–	–	–	φ_{0i} ,	φ_{0j} ,	$\Delta t=0.01$ с	$\Delta t=0.1$ с	$\Delta t=1.0$ с	$\Delta t=5.0$ с	$\Delta t=10$ с
N	n_i	n_j	мрад	мрад	$10^{11} G_{ij} \cdot \text{Нм}^2/\text{кг}^2$				
0441	1	2	46.98	47.78	6.6747331	6.6747362	6.6747698	6.6750200	6.6757115
0442	2	3	47.78	48.19	6.6726166	6.6726185	6.6726406	6.6728135	6.6730611
0443	1	3	46.98	48.19	6.6737883	6.6737908	6.6738196	6.6740348	6.6745273
0444	3	2	48.19	47.95	6.6742015	6.6742034	6.6742257	6.6743998	6.6746479
0445	2	1	47.95	47.11	6.6766564	6.6766595	6.6766938	6.6769448	6.6776376
0446	3	1	48.19	47.11	6.6755604	6.6755629	6.6755919	6.6758083	6.6763025
0674	1	2	52.22	53.12	6.6726322	6.6726360	6.6726771	6.6729571	6.6736824
0675	2	3	53.12	53.58	6.6715728	6.6715750	6.6716014	6.6717929	6.6720634
0676	1	3	52.22	53.58	6.6721603	6.6721627	6.6721972	6.6724377	6.6729589
2836	1	2	71.98	73.27	6.6745039	6.6745109	6.6745848	6.6750056	6.6758957
2837	2	3	73.27	73.94	6.6744066	6.6744109	6.6744572	6.6747359	6.6751105
2838	1	3	71.98	73.94	6.6744616	6.6744674	6.6745289	6.6748849	6.6755445
2956	1	2	78.02	79.41	6.6752055	6.6752137	6.6752977	6.6757700	6.6767216
2957	2	3	79.41	80.14	6.6740355	6.6740405	6.6740941	6.6744046	6.6748186
2958	1	3	78.02	80.14	6.6746847	6.6746915	6.6747614	6.6751612	6.6758680
3121	1	2	89.82	91.50	6.6728550	6.6728658	6.6729769	6.6735575	6.6746344
3122	2	3	91.50	92.39	6.6742746	6.6742812	6.6743507	6.6747312	6.6752271
3123	1	3	89.82	92.39	6.6734932	6.6735020	6.6735945	6.6740847	6.6749004
3221	1	2	99.76	101.60	6.6746631	6.6746763	6.6748115	6.6754967	6.6766999
3222	2	3	101.60	102.57	6.6759002	6.6759083	6.6759928	6.6764386	6.6770135
3223	1	3	99.76	102.57	6.6752220	6.6752329	6.6753454	6.6759223	6.6768402
3427	1	2	123.32	125.56	6.6740513	6.6740710	6.6742716	6.6752090	6.6764857
3428	2	3	125.56	126.74	6.6735300	6.6735422	6.6736681	6.6743372	6.6754521
3429	1	3	123.32	126.74	6.6738230	6.6738393	6.6740063	6.6748229	6.6760245

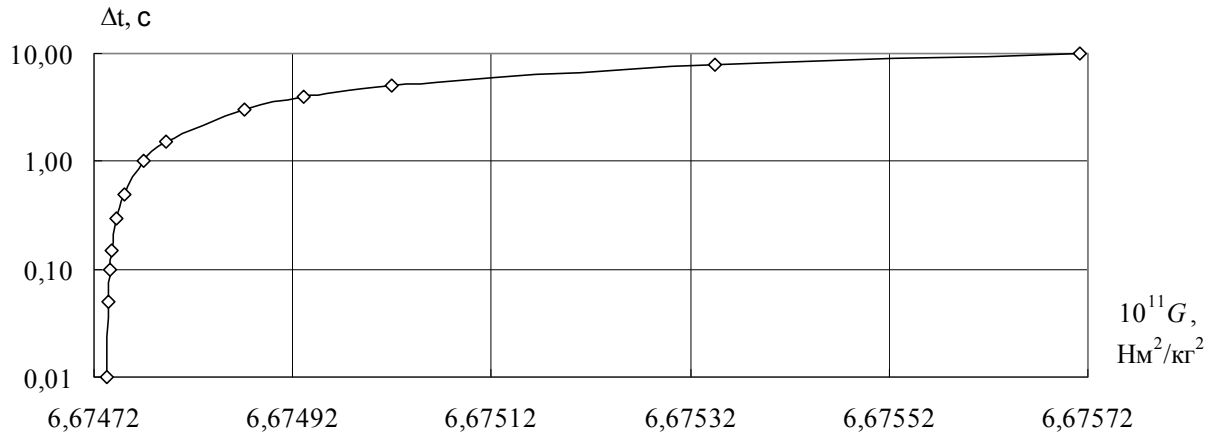


Рис.7. Значения G_{12} в строке 441 массива 010216 при использовании метода Эйлера, различных шагах интегрирования Δt , $\varphi_{01}=46.98$ мрад

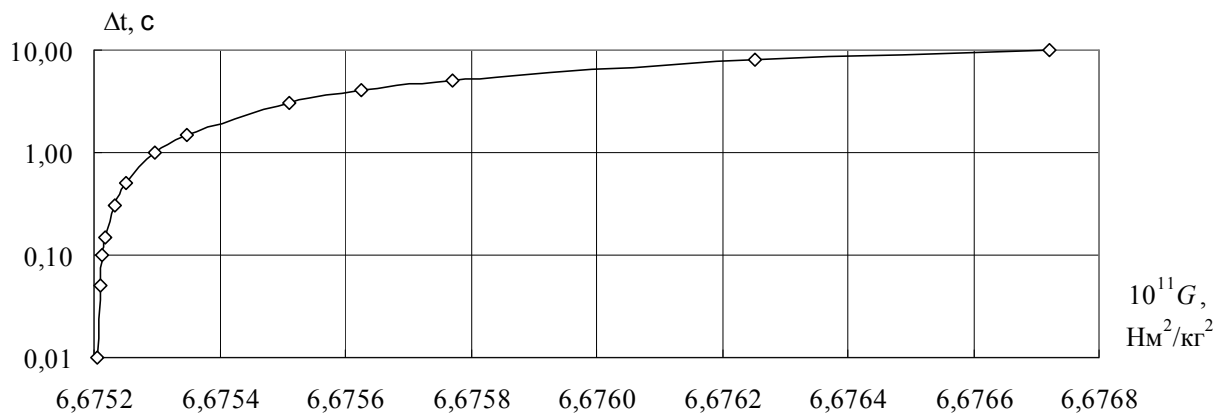


Рис.8. Значения G_{12} в строке 2956 массива 010216 при использовании метода Эйлера, различных шагах интегрирования Δt , $\varphi_{01}=79.41$ мрад

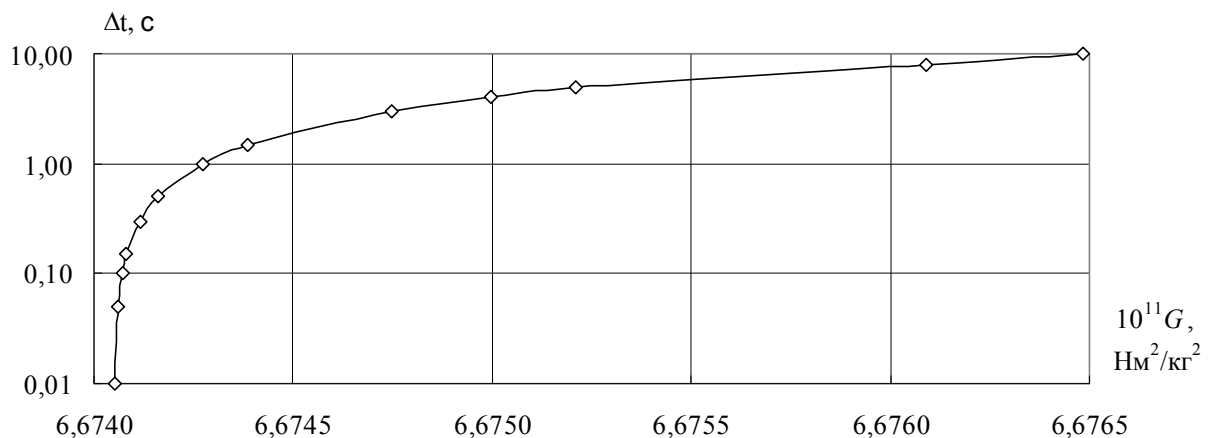


Рис.9. Значения G_{12} в строке 3427 массива 010216 при использовании метода Эйлера, различных шагах интегрирования Δt , $\varphi_{01}=123.32$ мрад

7.3. Методы численного решения уравнений первого порядка

В данной работе рассмотрены алгоритмы решения дифференциальных уравнений второго порядка, которые используются при описании движения крутильных весов. В большинстве практических случаев решаются другие задачи, которые описываются дифференциальными уравнениями первого порядка. Алгоритмы Эйлера и Рунге-Кутты также имеют варианты, предусматривающие решение уравнений движения первого порядка [1, 8].

Алгоритмы, предназначенные для решения уравнений первого и второго порядков, не имеют ничего общего. При решении уравнений первого порядка обращение к подпрограммам обычно заметно превосходит аналогичные операции при решении уравнений колебаний. Это связано с тем, что при решении уравнений колебаний задача решается на ограниченном участке функции, ограниченном половиной периода колебаний. Увеличение продолжительности расчётов не снижает погрешность и поэтому не имеет смысла. В настоящее время метод Рунге-Кутты при решении астрономических задач практически вытеснил все другие известные алгоритмы. Широко известен алгоритм Кутты-Мерсона [28, 41], предусматривающий пятикратное обращение к подпрограммам. Дальнейшее развитие метод Рунге-Кутты получил в работах [29-31].

Среди других известных методов следует отметить метод Булирша-Штёра [25, 26]. Иногда метод называют алгоритмом Грэгга-Булирша-Штёра [34], так как важный результат относительно функции ошибки метода принадлежит Уильяму Б. Грэггу. Ещё более современный метод разработан Эверхартом [32]. Он также широко использовался при решении астрономических задач [3, 4, 16].

8. Результаты и выводы

В работе рассмотрен алгоритм Эйлера, разработанный раньше метода Рунге-Кутты. Других методов в литературе не обнаружено. Имеющаяся в распоряжении программа для расчёта гравитационной постоянной позволила оперативно осуществить операции по замене имевшегося в ней алгоритма на другой и осуществлять качественный анализ. Оказалось, что с точки зрения расчёта гравитационной постоянной метод Рунге-Кутты не имеет конкурентов. При заданном шаге интегрирования он примерно в полтора раза дольше проводит вычисления, чем метод Эйлера. Однако его точность несопоставимо выше. Поскольку методика 1, базирующаяся на методе Рунге-Кутты, примерно на два порядка работает медленнее методики 2, скорость расчёта имеет первостепенное значение. Ценность может представить только тот метод, который при одинаковом уровне погрешности обеспечит большее быстроедействие, чем метод Рунге-Кутты. Проведенные исследования показали, что на базе программы для расчёта гравитационной постоянной можно осуществлять оперативный и строгий анализ любого метода, предназначенного для решения уравнений колебаний.

При малых шагах интегрирования рассмотренные методы дают строго идентичные результаты. Однако по мере увеличения шага погрешность метода Эйлера заметно возрастает. Совпадение результатов расчётов при малых шагах достаточно убедительно свидетельствует об отсутствии ошибок при реализации методов. Полный срыв расчётов по двум методам происходит примерно при одинаковых шагах порядка 50 с. Из проведенного анализа следует, что в настоящее время только метод Рунге-Кутты позволяет практически реализовать методику 1. Это обеспечивает реализацию двух совершенно независимых методик расчёта.

Список литературы

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы / Под ред. Н.И. Тихонова. – М.: Физматлит. – 2002. – 630 с.
2. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний // Собрание научных трудов. – Том. 3. – М.: Математика и нелинейная механика. – 2005. – 605 с.
3. Бордовицына Т.В. Современные численные методы в задачах небесной механики. – М.: Наука. – 1984. – 136 с.
4. Бордовицына Т.В. Алгоритмы численного моделирования движения малых тел Солнечной системы // Тр. ИПА РАН. – 2001. – 6. – 208–211.
5. Боуден Ф.П., Тейбор Д. Трение и смазка твёрдых тел. – М., Машиностроение. – 1968. – 544 с.
6. Брагинский В.Б., Митрофанов В.П., Охрименко О.А. Осцилляторы для гравитационных антенн на свободных массах. // Письма в ЖЭТФ. – 1992. – 55. – 8. – 424-426.
7. Измайлов В.П., Карагиоз О.В., Шахпаронов В.М. Расчёт гравитационной постоянной при фиксации притягивающих масс на линии равновесия весов. // Измерительная техника. – 2004. – 10. – 7–9.
8. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. // Наука. – 1976. – 576 с.
9. Карагиоз О.В., Измайлов В.П. Измерение гравитационной постоянной крутильными весами // Измерительная техника. – 1996. – 10. – 3–9.
10. Карагиоз О.В., Кузнецов А.И., Измайлов В.П. Влияние вибраций на крутильные весы. – Измерительная техника. – 1998. – 7. – 12–17.
11. Колосницын Н.И. Изохронные колебания нелинейного осциллятора. 1. Условие изохронности. Метрология. – 1990. – 11. – 3–12.

12. Кузнецов А.И., Карагиоз О.В., Измайлов В.П. Частота ангармонических колебаний осциллятора при учёте нелинейных членов пятого порядка. // Измерительная техника. – 2004. – 6. – 6–9.
13. Кузнецов А.И., Карагиоз О.В., Измайлов В.П. Частота ангармонических колебаний осциллятора при учёте нелинейных членов седьмого порядка. // Измерительная техника. – 2005. – 9. – 11–13.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. – М.: Наука. – 1965. – 204 с.
15. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. – М.: Наука. – 1981. – 400 с.
16. Мудров А.Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль.// Научное издание. Томск: МП «Раско». – 1991. – 272 с.
17. Сагитов М.У., Милюков В.К., Монахов Е.А., Назаренко В.С., Таджитдинов К.Г. Новое определение кавендишевой гравитационной постоянной // ДАН СССР. – 1979. – 245. – 3. – 567–569.
18. Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежёсткие задачи. – М.: Мир. – 1990. – 512 с.
19. Шахпаронов В.М. Определение численного значения гравитационной постоянной при сложной форме взаимодействующих тел. // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика, астрономия. – 2014. – 1. – 44–50.
20. Шахпаронов В.М. Методики решения системы нелинейных уравнений колебаний для определения гравитационной постоянной // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. астрономия. – 2014. – 2. – 60–66.
21. Шахпаронов В.М. Уравнения колебаний с учётом нелинейности до седьмой степени при расположении притягивающих масс на линии равновесия весов // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. астрономия. – 2014. – 4. – 27–33.

22. Adams J.C. On certain approximate formulae for calculating the trajectories of shot.- "Nature". – 1890. – 41. – 258–262.
23. Bagley C.H., Luther G.G. Preliminary Results of a Determination of the Newtonian Constant of Gravitation: A Test of the Kuroda Hypothesis // Phys. Rev. Lett. – 1997. – 78(16) . – 3047–3050.
24. Bashforth F., Adams J.C. An Attempt to Test the Theories of Capillary action by Comparing the Theoretical and Measured Forms of Drops of Fluid.- Cambridge. at the University Press. – 1883. –136.
25. Bulirsch R., Stoer J. Fehlerabschätzungen und Extrapolation mit rationalen Funktionen bei Verfahren vom Richardson-Typus // Num. Math. – 1964. – 6. – 413–427.
26. Bulirsch R., Stoer J. Numerical treatment of ordinary differential equations by extrapolation methods // Num. Math. – 1966. –8. –1–13.
27. Cavendish H. Experiments to determine the density of the Earth // Philos. Trans. R. Soc. London. – 1798. – 88. – 469–526.
28. Christiansen J. Numerical solution of ordinary simultaneous differential equations of the 1st order using a method for automatic step change. // Numer. Math. – 1970. – 14. – 317–324.
29. Dormand J.R., Prince P.J. New Runge Kutta algorithms for numerical simulation in dynamical astronomy // Celestial Mechanics.– 1978. – 18. –223–232.
30. Dormand J.R., Prince P.J. A family of embedded Runge Kutta formulae // J. Comput. Appl Math. – 1980. – 6. – 19–26.
31. Dormand J. R., El-Mikkawy M.E.A., Prince P.J. Families of Runge -Kutta Nystrom formulae // Journal of Numerical Analysis. –1987.– 7. – 235–250.
32. Everhart E. Implicit single methods for integrating orbits //Celest. Mech. –1974. – 10. – 35–55.

33. Facy L., Pontikis C. Determination de la constante de gravitation par la methode de resonance // C.R. Acad. Sci. – 1971. – 272. – 1397–1398.
34. Gragg W.B. On Extrapolation Algorithms of Ordinary Initial Value Problems // J. SJAM. Numer. Anal. – 1965. – 2. – 384–403.
35. Gundlach J. H., Merkowitz S. M. Measurement of Newton's constant using a torsion balance with angular acceleration feedback // Phys. Rev. Lett. – 2000. – 85. – 14. – 2869–2872.
36. Heyl P.R. A determination of the constant of gravitation // Nat. Bur. Stand. (U.S.) J. of Res. – 1930. – 5. – 1243–1290.
37. Heyl P.R., Chrzanowski P. A new redetermination of the constant G of gravitation // Nat. Bur. Stand. (U.S.) J. of Res. – 1942. – 29. – 1–31.
38. Kutta Wilhelm. Beitrag zur naherungsweise Integration totaler Differentialgleichungen // Zeitschrift fur Mathematik und Physik. – 1901. – 46. – 435–453.
39. Kuroda K. Does the Time-of-Swing Method Give a Correct Value of the Newtonian Gravitational Constant? // Phys. Rev. Lett. – 1995. – 75. – 15. – 2796–2798.
40. Kuroda K. Anelasticity in G experiments. // Meas. Sci. Technol. – 1999. – 10(6). – 435-438.
41. Lukehart P.M. Algorithm 218. Kutta Merson. // Comm. Assoc. Comput. Mach. – 1963. – 6. – 12. – 737-738.
42. Luo Jun, Liu Qi, Tu Liang-Cheng, Shao Cheng-Gang, Liu Lin-Xia, Yang Shan-Qing, Zhang Ya-Ting. Determination of the Newtonian Gravitational Constant G with Time-of-Swing Method // Phys. Rev. Lett. – 2009. – PRL 102. – 240801-4.
43. Luther G.G., Towler W.R. Redetermination of the Newtonian gravitational constant G // Phys. Rev. Lett. – 1982. – 48. – 121–123.

44. Pontikis C. Determination de la constante de gravitation par la methode de resonance // C.R. Acad. Sci. – 1972. – 274. –437–440.
45. Reich F. On the repetition of the Cavendish experiment for determining the mean density of the Earth // Philos. Mag. – 1838. –12. – 283–284.
46. Runge Carl. Über die numerische Auflösung von Differentialgleichungen. // Math. Ann., 1895. – 46. – 167–178.
47. Stoer J. Über zwei Algorithmen zur Interpolation mit rationalen Funktionen //Num. Math. – 1961. – 3. – 285–304.
48. Tu L.C., Li Q., Wang Q.L., et al. New determination of the gravitational constant G with time-of-swing method. //Physical Review D. – 2010. – 82. – 2. – P. 022001-36.
49. Quinn T.J., Parks H.V., Speake C.C., Davis R.S., Improved Determination of G Using Two Methods // Phys. Rev. Lett. – 2013. – 111. – 10. – P. 101102-5.
50. Yang S-Q., Tu L-C., Shao C-G., Li Q., Wang Q-L., Zhou Z-B., and Luo J. Direct measurement of the anelasticity of a tungsten fiber. // Phys.Rev. D. – 2009. – 80. – 12. – 122005(1-12).