



Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова»

Физический факультет

Кафедра общей физики

Численное моделирование релятивистского многоволнового генератора

Дипломная работа

студент 6 курса

Демидов Александр Андреевич

Научный руководитель:

д. ф.- м. н. Слепков А. И.

Допущен к защите:

___ декабря 2014 г.

Заведующий кафедрой:

д. ф.- м. н. Салецкий А. М.

Москва 2014 г.

Оглавление

Введение	2
1 Обзор литературы	3
1.1 Классификация излучений и приборов СВЧ	3
1.2 Релятивистские генераторы на сверхразмерных периодических волноводах . .	5
1.2.1 Многоволновой черенковский генератор	5
1.2.2 Релятивистский дифракционный генератор	5
1.3 Эксперимент по возбуждению несимметричных мод поля	7
2 Основные уравнения теории	8
2.1 Вывод основных соотношений для вычисления электромагнитного поля	8
2.1.1 Основные соотношения многомодовой методики	8
2.1.2 Возбуждение полей на участке гладкого волновода	16
2.1.3 Сшивание поля на скачках радиуса волновода	20
2.2 Уравнения движения электронного пучка	20
2.3 Особенности моделирования	21
2.3.1 Алгоритм решения	21
2.3.2 Используемые численные методы	21
3 Многоволновой релятивистский генератор с выходной дифракционной секцией. Результаты моделирования	24
3.1 Постановка задачи	24
3.2 Геометрия системы и выбор основных параметров	25
3.2.1 Резонансные свойства отдельных секций	25
3.2.2 Стартовые условия самовозбуждения отдельных секций	25
3.2.3 Выбор геометрии электродинамической системы многоволнового генератора с выходной дифракционной секцией	26
3.3 Взаимодействие потока и поля в релятивистском многоволновом генераторе комбинированного типа	28
3.3.1 Особенности самовозбуждения генератора	28
3.3.2 Структура электромагнитных полей	28
3.4 Особенности возбуждения несимметричных мод	28
3.4.1 Исследование зависимости АЧХ от номера возбуждаемой моды	28
3.4.2 Исследование системы в режиме заданного тока	31
Заключение	32
Список литературы	33

Введение

Во множестве различных областей науки и техники возникает необходимость использовать мощные источники когерентного электромагнитного излучения сантиметрового и миллиметрового диапазонов длин волн. В качестве примера можно назвать задачи СВЧ-энергетики, системы дальней связи, исследование свойств материалов, нетепловое воздействие на биологические объекты, естественные и искусственные среды различной природы. Один из перспективных подходов к получению мощного микроволнового излучения состоит в использовании энергетических возможностей трубчатого релятивистского электронного потока (РЭП), формируемого взрывоэмиссионными катодами. При генерации мощного микроволнового излучения возникают специфические ограничения, связанные с повышением напряжённости электрического поля вблизи металлической поверхности электродинамической структуры и увеличением вероятности высокочастотных пробоев, а также проблема сгущения спектра собственных мод. Эти трудности могут быть устранены благодаря использованию многоволновых механизмов взаимодействия электронного потока и переходы к сверхразмерным периодическим волноводам, поперечные размеры которых на порядок и более могут превосходить длину волны генерируемого излучения. Как показывают проведённые экспериментальные исследования, наиболее удачными оказались генераторы, основанные на черенковском или дифракционном излучении электронных потоков, пролетающих вблизи периодической поверхности цилиндрического сверхразмерного волновода [1]. Для селекции колебаний в таких системах эффективным оказался механизм взаимодействия электронного потока и поля на частотах вблизи границ полос прозрачности системы [2]. Такой подход часто используется в классической электронике СВЧ при создании мощных ЛБВ на связанных резонаторах.

Дипломная работа посвящена разработке методики численного моделирования взаимодействия кольцевого релятивистского электронного потока с полем аксиально-симметричного нерегулярного волновода, учитывающей возбуждение не только симметричных, но и несимметричных мод (полей), а также исследованию особенностей генерации многоволнового генератора с выходной дифракционной секцией. Генератор состоит из двух секций: в первой реализовано черенковское взаимодействие потока и поля, во второй секции реализовано дифракционное излучение сгруппированного электронного потока.

Глава 1

Обзор литературы

1.1 Классификация излучений и приборов СВЧ

Многоволновые СВЧ-генераторы содержат одну или несколько секций сверхразмерного гладкого и периодического волноводов, возбуждаемых релятивистским трубчатым потоком электронов. Классификация многоволновых генераторов, как и генераторов других типов, проводится при анализе условий синхронизма электронного потока и э/м поля. Оценивается прежде всего число излучаемых волн вихревого э/м поля волновода.

Классификацию режимов генераторов на односекционных периодических волноводах можно провести [4, 12] с использованием дисперсионных характеристик (рис. 1.1). Одноволновые режимы излучения реализуются при синхронизме электронного потока с отдельно взятыми попутной и обратной волнами: в первом случае – режим генератора ЛБВ с обратной связью (резонансная ЛБВ), во втором – режим ЛОВ-генератора на поверхностной волне или на объёмных волнах.

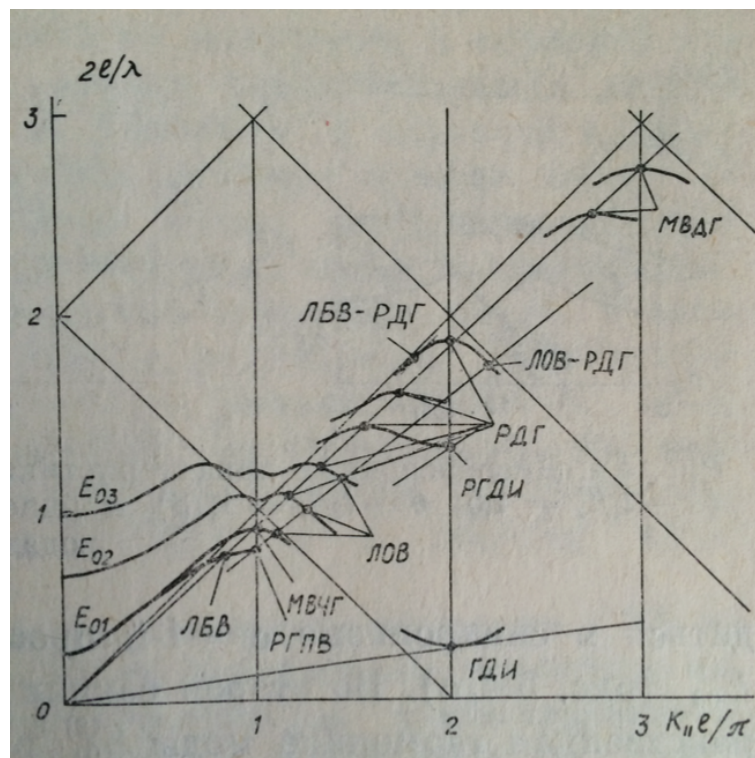


Рис. 1.1: Дисперсионные характеристики мод и пучка в аксиально-симметричном периодическом волноводе

Если пучок находится в синхронизме с прямой и обратной волнами одной моды длинной системы, то возникает двухволновой режим излучения (двух поверхностных волн или

поверхностной и объёмной волн) типа ЛОВ-ЛБВ. Излучение поверхностных волн в области частоты π -вида реализуется в релятивистском генераторе поверхностной волны (РГПВ). В конце замедляющего волновода РГПВ поверхностная волна переизлучается в объёмные волны различных мод. В области частоты 2π -вида в длинной системе излучаются две объёмные волны, направленные почти нормально к поверхности. Такой режим излучения в нерелятивистской электронике называют режимом генератора дифракционного излучения (ГДИ), а в релятивистском случае – режимом РГДИ. Одновременное излучение нескольких объёмных волн характерно для многоволнового дифракционного генератора (МВДГ).

При синхронизме пучка с полем короткой секции сверхразмерного волновода на частоте π -вида структуры полей двух поверхностных волн не устанавливаются и зависят от электронного потока. Двухволновое излучение в режиме ЛОВ-ЛБВ дополняется возбуждением объёмных волн волновода. Возникает многоволновое излучение, а само устройство получило название многоволнового черенковского генератора (МВЧГ) (см рис. 1.1). Аналогично, в области частот 2π , 3π и других видов в коротких секциях возбуждаются многоволновые поля дифракционного излучения.

Если в длинных секциях реализуется одно- или двухволновое излучение, то комбинация двух таких секций позволяет создавать устройства, в которых могут осуществляться комбинированные режимы взаимодействия, например ЛОВ-ЛОВ, ЛОВ-ЛБВ, ЛОВ-РДГ, ЛБВ-РДГ и т. д. Для возбуждения таких систем необходим одновременный синхронизм электронного пучка с полями двух секций. В режиме ЛОВ-ЛБВ в первой секции поток может находиться в синхронизме с 1-ой пространственной гармоникой моды $E_{03}^{(1)}$. Во второй секции может возбуждаться 0-ая пространственная гармоника моды $E_{01}^{(2)}$ в основной или высших полосах прозрачности. Осуществляется также синхронизм для режима ЛОВ-ЛОВ с возбуждением моды $E_{14}^{(1)}$ в первой секции и моды $E_{11}^{(2)}$ во второй.

В режиме ЛБВ-РДГ поток возбуждает в первой секции прямую волну моды $E_{01}^{(1)}$, а во второй секции – поле моды $E_{04}^{(2)}$ вблизи частоты 2π -вида. В режиме ЛОВ-РДГ в первой секции возможен синхронизм с модой $E_{03}^{(1)}$, а во второй секции – возбуждение поверхностной волны, соответствующей моде $E_{06}^{(2)}$.

Указанные режимы взаимодействия в двухсекционной системе имеют аналоги двухволнового взаимодействия в одной длинной секции. Примером служит режим ЛОВ-ЛБВ при синхронизме пучка и поля на частоте π -вида. В области частот между видами π и 2π возможны гибридные моды электродинамической системы, образованные связью прямой волны моды E_{01} и обратных волн мод E_{02} , E_{03} и т. д.

При приближении к частоте 2π -вида взаимодействие потока с гибридными модами длинной односекционной системы позволяет реализовать аналоги двухсекционных режимов ЛБВ-РДГ, ЛОВ-РДГ. Переход между режимами осуществляется изменением энергии электронного пучка. Односекционные гибридные аналоги могут возбуждаться на частотах 3π , 4π ,...

Число секций с различными волнами можно увеличить, переходя к 3-, 4- и т. д.-секционным системам. Ряд возникающих сложных режимов имеет аналоги в длинной односекционной системе. Например, при достаточно глубокой гофрировке периодического волновода возможна связь прямой и обратной волн моды E_{01} с рядом объёмных волн (E_{02} , E_{03} ,...). Если поток, нагружая волновод в области непрозрачности, связывает несколько мод, то возникает многоволновой режим взаимодействия и излучения. Он отличается от многоволнового режима излучения в одной короткой секции, который обусловлен синхронизмом потока с полем неустановившейся волны одной моды E_{01} .

Многоволновые гибридные режимы излучения в коротких секциях на частотах 2π , 3π ,...-видов характеризуются возбуждением многих объёмных волн. В частности, в короткой односекционной структуре вблизи 2π -вида связаны между собой две поверхностные волны, две объёмные волны, направленные почти нормально к поверхности, и ряд объёмных волн, появляющихся из-за переменной, зависящей от потока структуры полей. В зависимости от ускоряющего напряжения реализуются усложнённые дополнительным объёмным излучением режимы ЛБВ-РДГ, ЛОВ-РДГ или ЛОВ-ЛБВ-РДГ. За гибридными режимами в области

2 π -вида оставлено название – режим релятивистского дифракционного генератора (РДГ), а в области 3 π -, 4 π -,...-видов – режим МВДГ.

1.2 Релятивистские генераторы на сверхразмерных периодических волноводах

1.2.1 Многоволновой черенковский генератор

Известно [1], что с увеличением электронов пучка возрастает оптимальная длина однородной замедляющей структуры, $L_{opt} = \lambda\gamma^2$. При этом возрастают синхронное поле и характерный размер его спада по радиусу. Всё это приводит к уменьшению стартового тока СВЧ-генератора и соответственно к ограничению энергетических параметров используемых электронных пучков и генерируемой мощности. Эффективным способом управления величиной стартового тока является введение труб дрейфа, т. е. секционирование электродинамической структуры. Секционирование позволяет наряду с возможностью регулировки обратной связи в генераторе повысить его КПД.

Электродинамическая структура МВЧГ содержит две секции сверхразмерного ($D/\lambda \gg 1$) диафрагмированного волновода с одинаковыми периодами ($l_1 = l_2$), соединённые трубой дрейфа того же диаметра. Для расширения возможностей регулировки обратной связи в пространстве дрейфа могут устанавливаться поглотители СВЧ-излучения дифракционного типа. Такими поглотителями могут служить, например, диафрагменные линии, где расстояние между диафрагмами равно периоду диафрагменных волноводов секции. В МВЧГ используется взаимодействие пучка с полем неустановившейся из-за малой длины секций поверхностной волны вблизи частоты π -вида нижней полосы прозрачности. В полосу синхронизма могут попадать как аксиально-симметричные (E_{01}), так и несимметричные ($EH_{11}, EH_{21}, \dots$) волны. Аксиально-симметричные колебания обычно выделяются посредством электронной селекции по стартовым токам. В первой секции реализуется преимущественно ЛОВ режим и осуществляется модуляция электронов пучка по скорости. В пространстве дрейфа электроны группируются в сгустки. Во второй секции реализуется преимущественно режим ЛБВ с эффективной передачей энергии сгустков в э/м поле. Такое разделение функций в достаточной степени условно, так как и модуляция электронов в первой секции, и энергоотбор во второй сопровождаются группировкой электронного потока в сгустки. Однако оно в целом правильно отражает особенности работы МВЧГ.

Излучение во второй секции является многоволновым и имеет диаграмму направленности типа антенны бегущей волны. Из второй секции оно попадает в первую и осуществляет обратную связь в генераторе. Генерация излучения в одной отдельно взятой секции отсутствует.

МВЧГ является эффективным источником СВЧ-излучения в силу реализации в выходной секции распределения высокочастотного поля, соответствующего режиму ЛБВ, и клистронного механизма группировки, позволяющего получать компактные сгустки с малым разбросом электронов по скоростям. Существенная особенность МВЧГ по сравнению с другими многоволновыми генераторами, содержащими сверхразмерные структуры, – простота фиксации частоты и геометрии диаграммы направленности излучения.

1.2.2 Релятивистский дифракционный генератор

Релятивистские дифракционные генераторы [4] содержат низкодобротные периодические сверхразмерные ($D/\lambda \gg 1$) электродинамические структуры с периодом $l \sim \lambda$. Электромагнитное поле в структуре можно разложить на пространственные гармоники. С синхронными гармониками взаимодействует высокоточный релятивистский электронный пучок. При этом устанавливается определённая, зависящая от электронного пучка конфигурация электромаг-

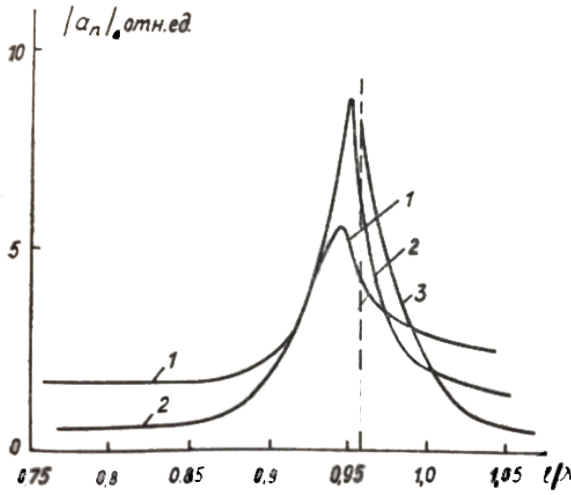


Рис. 1.2: Зависимость амплитуд дифракционных гармоник с $n = 0(1)$, $-1(2)$ и $-2(3)$ от частоты для плоской решётки с параметрами $h/l = 0,12$, $d/l = 0,72$, $\beta_{||} = 0,975$.

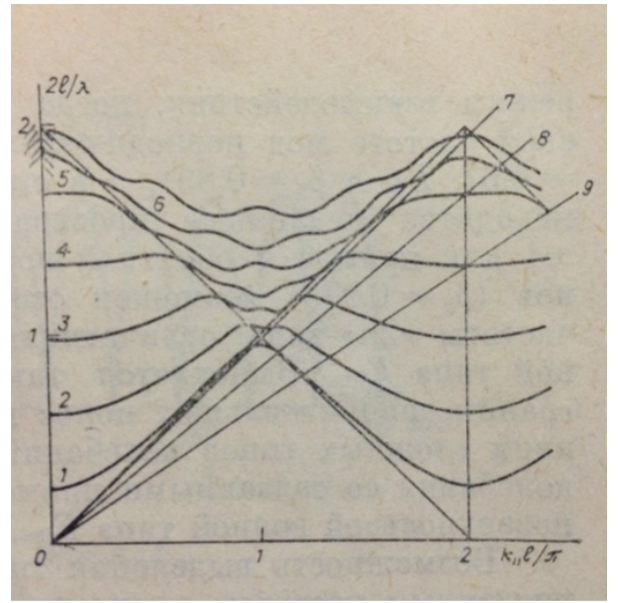


Рис. 1.3: Дисперсионные характеристики мод диафрагмированного цилиндрического волновода (1-6) при $D/l = 5,6$, $h/l = 0,12$, $d/l = 0,72$ и пучка с $\beta_{||} = 0,975$ (7), $0,85$ (8) и $0,67$ (9).

нитного поля с формированием выделенных направлений распространения энергии за счёт закономерностей дифракционного излучения.

Рассмотрим установление структуры электромагнитного поля в электродинамических системах РДГ, в которых реализуется одноволновой режим дифракционного излучения пространственной гармоники с номером $n = -1$. Если $l \sim \lambda$, то для релятивистского электронного пучка ($\beta_{||} > 0,9$) частота резонанса дифракционного излучения (аномалии Вуда), связанного с «рождением» 2-ой объёмной дифракционной гармоники, становится близкой к частоте резонанса электродинамической структуры на колебаниях 2π -вида при возбуждении таким же электронным потоком:

$$(l/\lambda)_{an}^{-2} = 2\beta_{||}/(1 + \beta_{||}), (l/\lambda)_{2\pi} \approx \beta_{||}.$$

Амплитуды дифракционных гармоник a_n при излучении промодулированного электронного потока у бесконечной дифракционной решётки с эквивалентным прямоугольным сечением элемента периодичности вблизи частоты аномалии Вуда резко возрастают (рис. 1.2). Гармоника с номером $n = 0$ является поверхностным полем, синхронным с электронным пучком. Такое резонансное возрастание используется в дифракционных генераторах для выделения узкой области локализации частоты генерации $\Delta\omega$. Однако для обеспечения эффективного взаимодействия, помимо выполнения условий резонанса по дифракционному излучению, необходимо реализовать на тех же частотах положительную обратную связь, что означает выполнение условий фазированного сложения излучений.

С точки зрения периодических волноводов выполнение условий фазированного сложения излучения эквивалентно нахождению собственных волновых чисел и определению собственных волн системы. Вид дисперсионных характеристик приведён на рис 1.3. Начальным участкам кривых 1-5 можно поставить в соответствие моды типов $E_{01} - E_{05}$. Особое место занимает кривая 6, ход которой вблизи точек $k_{||} \sim 0$ и $k_{||} \sim 2\pi/l$ аналогичен ходу дисперсионной кривой моды E_{01} у π -вида ($k_{||} \sim \pi/l$) и отличается от хода кривых вблизи критических частот волн E_{0m} ($k_{||} \sim 0$). В частности, для низших дисперсионных кривых (1-5 и для кривой 6 в области $k_{||} \sim 0$ различны направления групповой скорости $v_{gr} = \partial\omega/\partial k_{||}$. Структура синхронного поля аналогична структуре поверхностной волны: амплитуды медленных +1-ой

и -1 -ой пространственных гармоник, убывающие при удалении от стенок волновода, значительно превосходят амплитуду 0 -ой объёмной пространственной гармоники. Поэтому кривой b , по крайней мере в областях $k_{||} \sim 0$, $k_{||} \sim 2\pi/l$, естественно поставить в соответствие моду E_{01} периодического волновода.

1.3 Эксперимент по возбуждению несимметричных мод поля

Изначально программа, использованная в [6], была создана для изучения периодических систем, где возбуждаются аксиально-симметричные моды электромагнитного поля, т. е. невозможно смоделировать поведение волн, у которых есть моды E_{nm} или H_{nm} при $n \neq 0$ и $m \neq 0$.

Потребность в моделировании такого типа волн появилась при изучении свойств таких периодических систем, как МВЧГ, РДГ, МВДГ. Как было показано [2] в экспериментах по изучению таких систем, имеется множество вариаций по углу при прохождении э/м волны через них. Например, было проведено теоретическое исследование РДГ. Процессы в электронном потоке описывались в рамках линейного приближения, электромагнитное поле разлагалось по ортогональным функциям поперечного сечения, удовлетворяющим граничным условиям. Рассчитывалась диаграмма направленности излучения и распределение поля E_z поперёк системы при экспоненциальном изменении продольного тока $j_{\omega} \sim e_{\chi z}$, где χ — инкремент нарастания, определяемый численно.

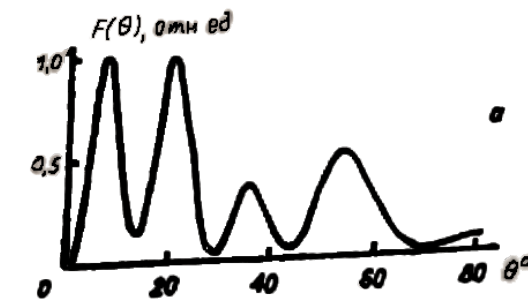


Рис. 1.4: Диаграмма направленности излучения [1]

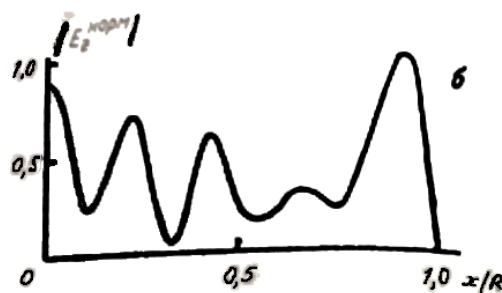


Рис. 1.5: Распределение продольного электрического поля поперёк плоского волновода [1]

Можно увидеть, что диаграмма направленности излучения достаточно широка и амплитуды полей в приосевой области значительны. Распределение поля E_z в поперечном направлении становится сложным и не сводится к одной моде периодического волновода. В ограниченной структуре реализуется многоволновой режим взаимодействия на одной частоте ω с несколькими модами, соотношение между амплитудами которых определяется из решения краевой задачи. Полученные данные с достаточной точностью подтверждались экспериментальными данными, т. е. была показана сложная структура поля, требующая учитывать в расчётах несимметричные моды.

Глава 2

Основные уравнения теории

В ходе выполнения работы для решения задач дифракции возбуждающего поля на конечных осесимметричных структурах использовался матричный многомодовый метод.

Матричный многомодовый метод (МММ) – вариант метода поперечных сечений [6], основанный на разбиении произвольного нерегулярного волновода на отрезки гладких волноводов сравнения и разложении полей на этих участках полным для решения уравнений Максвелла системам функций – модам гладкого волновода. Метод позволяет исследовать нестационарные процессы самосогласованного взаимодействия потока и поля в изучаемых структурах, определять эффективность, модовый состав и спектр излучения. Схематичное изображение разбиения регулярного волновода можно увидеть на рис. 2.1.

2.1 Вывод основных соотношений для вычисления электромагнитного поля

2.1.1 Основные соотношения многомодовой методики

Запишем уравнения Максвелла для электромагнитного поля на s -м участке гладкого волновода в слабонестационарном приближении, а также комплексно сопряженные уравнения для мод гладкого волновода

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{E}_s &= -\varepsilon_0 \left(i\omega + \frac{\partial}{\partial t} \right) \vec{H}_s \\ \operatorname{rot} \vec{H}_s &= \varepsilon_0 \left(i\omega + \frac{\partial}{\partial t} \right) \vec{E}_s + \vec{j}_{\omega,s} \\ \operatorname{rot} (\vec{E}_{n,s}^\pm)^* &= i\omega\mu_0 (\vec{H}_{n,s}^\pm)^* \\ \operatorname{rot} (\vec{H}_{n,s}^\pm)^* &= -i\omega\varepsilon_0 (\vec{E}_{n,s}^\pm)^*\end{aligned}\tag{2.1}$$

Умножим первое уравнение на $(\vec{H}_{n,s}^\pm)^*$ и четвёртое на $\vec{E}_s$, используя формулы векторного анализа, получаем:

$$\operatorname{div}[\vec{E}_s \times (\vec{H}_{n,s}^\pm)^*] = i\omega(\varepsilon_0(\vec{E}_{n,s}^\pm)^* \cdot \vec{E}_s - \mu_0(\vec{H}_{n,s}^\pm)^* \cdot \vec{H}_s) - \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} ((\vec{H}_{n,s}^\pm)^* \cdot \vec{H}_s)$$

Аналогично для второй пары уравнений:

$$\operatorname{div}[\vec{H}_s \times (\vec{E}_{n,s}^\pm)^*] = i\omega(\varepsilon_0(\vec{E}_{n,s}^\pm)^* \cdot \vec{E}_s - \mu_0(\vec{H}_{n,s}^\pm)^* \cdot \vec{H}_s) + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} ((\vec{E}_{n,s}^\pm)^* \cdot \vec{E}_s) + \vec{j}_{\omega,s} \cdot (\vec{E}_{n,s}^\pm)^*.$$

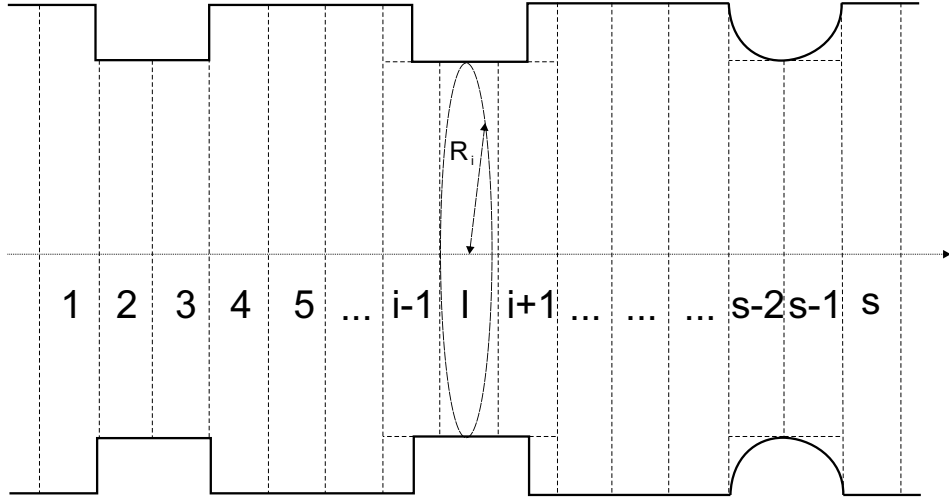


Рис. 2.1: Разбиение волновода на регулярные ячейки

Вычитая из первого второе и интегрируя по рассматриваемому объёму V_s , получаем уравнения возбуждения полей для выделенного регулярного участка волновода:

$$\oint_S \left\{ [\vec{E}_s \times (\vec{H}_{nm}^\pm)^*] + [(\vec{E}_{nm}^\pm)^* \times \vec{H}_s] \right\} d\vec{S} =$$

$$= \int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \vec{H}_s) \cdot (\vec{H}_{nm}^\pm)^* + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \vec{E}_s) \cdot (\vec{E}_{nm}^\pm)^* \right] dV - \int_V \vec{j}_{\omega s} (E_{nm}^\pm)^* dV \quad (2.2)$$

где $\vec{E}_{nm}^\pm = \{\vec{e}_r^{nm}; \vec{e}_\alpha^{nm}; \vec{e}_z^{nm}\}$ и $\vec{H}_{nm}^\pm = \{\pm \vec{h}_r^{nm}; \pm \vec{h}_\alpha^{nm}; 0\}$ обозначают ТЕ-моды гладкого волновода с круглым сечением. Они равны:

$$\begin{cases} e_r = -i \frac{\Gamma_{nm}^E}{\chi_{nm}^E} \cdot J'_n(\chi_{nm}^E r) A(n\alpha) \cdot e^{-i\Gamma_{nm}^E z} \cdot E_0^{nm} \\ e_\alpha = -i \frac{\Gamma_{nm}^E}{(\chi_{nm}^E)^2} \cdot \frac{n}{r} J_n(\chi_{nm}^E r) A'(n\alpha) \cdot e^{-i\Gamma_{nm}^E z} \cdot E_0^{nm} \\ e_z = J_n(\chi_{nm}^E r) A(n\alpha) \cdot e^{-i\Gamma_{nm}^E z} \cdot E_0^{nm} \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\begin{cases} h_r = i \frac{E_0^{nm}}{W_{nm}^E} \cdot \frac{\Gamma_{nm}^E}{(\chi_{nm}^E)^2} \cdot \frac{n}{r} \cdot J_n(\chi_{nm}^E r) A'(n\alpha) \cdot e^{-i\Gamma_{nm}^E z} \\ h_\alpha = -i \frac{E_0^{nm}}{W_{nm}^E} \cdot \frac{\Gamma_{nm}^E}{\chi_{nm}^E} \cdot J'_n(\chi_{nm}^E r) A(n\alpha) \cdot e^{-i\Gamma_{nm}^E z} \\ h_z = 0 \end{cases}$$

Здесь введены обозначения:

$$\Gamma_{nm}^E = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{B_{nm}^2}{R_T^2}};$$

$$A(n\alpha) = C_1 \cos(n\alpha) + C_2 \sin(n\alpha);$$

$$\chi_{nm} = \frac{B_{nm}}{R_T};$$

$$W_{nm}^E = \frac{\Gamma_{nm}^E}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon};$$

$$Z_{nm} = \frac{\Gamma_{nm}}{\omega \varepsilon_0}.$$

где B_{nm} – корни уравнения $J_n(B_{nm}) = 0$. А вихревые поля представляются как сумма этих этих мод:

$$\begin{aligned}\vec{E}_s &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N \{C_{nm}^+(z)H_{nm}^+ + C_{nm}^-(z)H_{nm}^-\} \\ \vec{H}_s &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N \{C_{nm}^+(z)H_{nm}^+ + C_{nm}^-(z)H_{nm}^-\}\end{aligned}\quad (2.4)$$

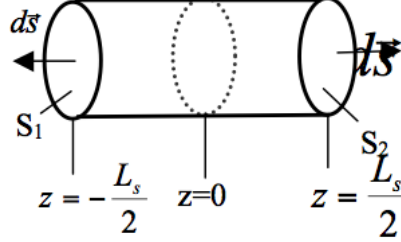


Рис. 2.2: Интегрируемая область

Рассмотрим левую часть уравнения 2.2 (интегрирование производится по области, изображённой на рис. 2.2) и подставим в неё решения 2.3 и разложение 2.4:

$$\begin{aligned}& \oint_S \left\{ [\vec{E}_s \times (\vec{H}_{kl}^\pm)^*] + [(\vec{E}_{kl}^\pm)^* \times \vec{H}_s] \right\} d\vec{S} = \\&= - \oint_{S_1} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N [(C_{nm}^+(-\frac{L_s}{2})\vec{e}_{nm}e^{-i\Gamma_{nm}^E(-\frac{L_s}{2})} + C_{nm}^-(-\frac{L_s}{2})\vec{e}_{nm}e^{i\Gamma_{nm}^E(-\frac{L_s}{2})}) \times (\pm\vec{h}_{kl}e^{\pm i\Gamma_{kl}^E(-\frac{L_s}{2})})^*] + \right. \\&+ \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N [(\vec{e}_{kl}e^{\pm i\Gamma_{kl}^E(-\frac{L_s}{2})})^* \times (C_{nm}^+(-\frac{L_s}{2})\vec{h}_{nm}e^{-i\Gamma_{nm}^E(-\frac{L_s}{2})} - C_{nm}^-(-\frac{L_s}{2})\vec{h}_{nm}e^{i\Gamma_{nm}^E(-\frac{L_s}{2})})] \Big) dS + \\&+ \oint_{S_2} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N [(C_{nm}^+(\frac{L_s}{2})\vec{e}_{nm}e^{-i\Gamma_{nm}^E(\frac{L_s}{2})} + C_{nm}^-(\frac{L_s}{2})\vec{e}_{nm}e^{i\Gamma_{nm}^E(\frac{L_s}{2})}) \times (\pm\vec{h}_{kl}e^{\pm i\Gamma_{kl}^E(\frac{L_s}{2})})^*] + \right. \\&+ \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N [(\vec{e}_{kl}e^{\pm i\Gamma_{kl}^E(\frac{L_s}{2})})^* \times (C_{nm}^+(\frac{L_s}{2})\vec{h}_{nm}e^{-i\Gamma_{nm}^E(\frac{L_s}{2})} - C_{nm}^-(\frac{L_s}{2})\vec{h}_{nm}e^{i\Gamma_{nm}^E(\frac{L_s}{2})})] \Big) dS = \\&= - \oint_{S_1} e^{\mp i\Gamma_{kl}^* \frac{L_s}{2}} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N C_{nm}^+(-\frac{L_s}{2})e^{i\Gamma_{nm} \frac{L_s}{2}} [\vec{e}_{nm} \times (\pm\vec{h}_{kl}^*)] + \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N C_{nm}^-(-\frac{L_s}{2})e^{-i\Gamma_{nm} \frac{L_s}{2}} [\vec{e}_{nm} \times (\pm\vec{h}_{kl}^*)] \right) + \\&+ \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N C_{nm}^+(-\frac{L_s}{2})e^{i\Gamma_{nm} \frac{L_s}{2}} [\vec{e}_{kl}^* \times \vec{h}_{nm}] - \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N C_{nm}^-(-\frac{L_s}{2})e^{-i\Gamma_{nm} \frac{L_s}{2}} [\vec{e}_{kl}^* \times \vec{h}_{nm}] \Big) dS + \\&+ \oint_{S_2} e^{\pm i\Gamma_{kl}^* \frac{L_s}{2}} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N C_{nm}^+(\frac{L_s}{2})e^{-i\Gamma_{nm} \frac{L_s}{2}} [\vec{e}_{nm} \times (\pm\vec{h}_{kl}^*)] + \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N C_{nm}^-(\frac{L_s}{2})e^{i\Gamma_{nm} \frac{L_s}{2}} [\vec{e}_{nm} \times (\pm\vec{h}_{kl}^*)] \right) + \\&+ \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N C_{nm}^+(\frac{L_s}{2})e^{-i\Gamma_{nm} \frac{L_s}{2}} [\vec{e}_{kl}^* \times \vec{h}_{nm}] - \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N C_{nm}^-(\frac{L_s}{2})e^{i\Gamma_{nm} \frac{L_s}{2}} [\vec{e}_{kl}^* \times \vec{h}_{nm}] \Big) dS\end{aligned}$$

Далее для вычисления интегралов воспользуемся нормировкой на волновые сопротивления:

$$\begin{aligned}
\oint_S (\vec{e}_{nm} \cdot \vec{e}_{kl}^*) dS &= \delta_{nk} \delta_{ml} |Z_{nm}| \\
\oint_S (\vec{h}_{nm} \cdot \vec{h}_{kl}^*) dS &= \frac{\delta_{nk} \delta_{ml}}{|Z_{nm}|} \\
\oint_S [\vec{e}_{nm} \times \vec{h}_{kl}^*]_z dS &= \delta_{nk} \delta_{ml} \frac{Z_{nm}}{|Z_{nm}|}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Поэтому правая часть уравнения 2.2 примет вид:

$$\begin{aligned}
\oint_S \left\{ [\vec{E}_s \times (\vec{H}_{kl}^\pm)^*] + [(\vec{E}_{kl}^\pm)^* \times \vec{H}_s] \right\} d\vec{S} = \\
= -e^{\mp i\Gamma_{kl}^* \frac{L_s}{2}} \left(C_{kl}^+ \left(-\frac{L_s}{2} \right) e^{i\Gamma_{kl} \frac{L_s}{2}} \frac{\pm Z_{kl}}{|Z_{kl}|} + C_{kl}^- \left(-\frac{L_s}{2} \right) e^{-i\Gamma_{kl} \frac{L_s}{2}} \frac{\pm Z_{kl}}{|Z_{kl}|} + \right. \\
+ C_{kl}^+ \left(-\frac{L_s}{2} \right) e^{i\Gamma_{kl} \frac{L_s}{2}} \frac{Z_{kl}^*}{|Z_{kl}|} - C_{kl}^- \left(-\frac{L_s}{2} \right) e^{-i\Gamma_{kl} \frac{L_s}{2}} \frac{Z_{kl}^*}{|Z_{kl}|} \Big) + \\
+ e^{\pm i\Gamma_{kl}^* \frac{L_s}{2}} \left(C_{kl}^+ \left(\frac{L_s}{2} \right) e^{-i\Gamma_{kl} \frac{L_s}{2}} \frac{\pm Z_{kl}}{|Z_{kl}|} + C_{kl}^- \left(\frac{L_s}{2} \right) e^{i\Gamma_{kl} \frac{L_s}{2}} \frac{\pm Z_{kl}}{|Z_{kl}|} + \right. \\
+ C_{kl}^+ \left(\frac{L_s}{2} \right) e^{-i\Gamma_{kl} \frac{L_s}{2}} \frac{Z_{kl}^*}{|Z_{kl}|} - C_{kl}^- \left(\frac{L_s}{2} \right) e^{i\Gamma_{kl} \frac{L_s}{2}} \frac{Z_{kl}^*}{|Z_{kl}|} \Big) = \\
= -C_{kl}^+ \left(-\frac{L_s}{2} \right) e^{i(\Gamma_{kl} \mp \Gamma_{kl}^*) \frac{L_s}{2}} \left\{ \pm \frac{Z_{kl}}{|Z_{kl}|} + \frac{Z_{kl}^*}{|Z_{kl}|} \right\} - C_{kl}^- \left(-\frac{L_s}{2} \right) e^{-i(\Gamma_{kl} \pm \Gamma_{kl}^*) \frac{L_s}{2}} \left\{ \pm \frac{Z_{kl}}{|Z_{kl}|} - \frac{Z_{kl}^*}{|Z_{kl}|} \right\} + \\
+ C_{kl}^+ \left(\frac{L_s}{2} \right) e^{-i(\Gamma_{kl} \mp \Gamma_{kl}^*) \frac{L_s}{2}} \left\{ \pm \frac{Z_{kl}}{|Z_{kl}|} + \frac{Z_{kl}^*}{|Z_{kl}|} \right\} + C_{kl}^- \left(\frac{L_s}{2} \right) e^{i(\Gamma_{kl} \pm \Gamma_{kl}^*) \frac{L_s}{2}} \left\{ \pm \frac{Z_{kl}}{|Z_{kl}|} - \frac{Z_{kl}^*}{|Z_{kl}|} \right\}
\end{aligned}$$

Далее будем использовать приближение:

$$C(z) = C(0) + \frac{dC(0)}{dz} z \tag{2.6}$$

после введения которого правая часть уравнения 2.2 примет вид:

$$\begin{aligned}
\oint_S \left\{ [\vec{E}_s \times (\vec{H}_{kl}^\pm)^*] + [(\vec{E}_{kl}^\pm)^* \times \vec{H}_s] \right\} d\vec{S} = \\
= - \left(C_{kl}^+(0) - \frac{dC_{kl}^+(0)}{dz} \frac{L_s}{2} \right) e^{i(\Gamma_{kl} \mp \Gamma_{kl}^*) \frac{L_s}{2}} \left\{ \pm \frac{Z_{kl}}{|Z_{kl}|} + \frac{Z_{kl}^*}{|Z_{kl}|} \right\} - \\
- \left(C_{kl}^-(0) - \frac{dC_{kl}^-(0)}{dz} \frac{L_s}{2} \right) e^{-i(\Gamma_{kl} \pm \Gamma_{kl}^*) \frac{L_s}{2}} \left\{ \pm \frac{Z_{kl}}{|Z_{kl}|} - \frac{Z_{kl}^*}{|Z_{kl}|} \right\} + \\
+ \left(C_{kl}^+(0) + \frac{dC_{kl}^+(0)}{dz} \frac{L_s}{2} \right) e^{-i(\Gamma_{kl} \mp \Gamma_{kl}^*) \frac{L_s}{2}} \left\{ \pm \frac{Z_{kl}}{|Z_{kl}|} + \frac{Z_{kl}^*}{|Z_{kl}|} \right\} + \\
+ \left(C_{kl}^-(0) + \frac{dC_{kl}^-(0)}{dz} \frac{L_s}{2} \right) e^{i(\Gamma_{kl} \pm \Gamma_{kl}^*) \frac{L_s}{2}} \left\{ \pm \frac{Z_{kl}}{|Z_{kl}|} - \frac{Z_{kl}^*}{|Z_{kl}|} \right\}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Здесь перегруппируем слагаемые и введём обозначения:

$$\begin{aligned}
d_{nm}^\pm &= \left\{ \pm \frac{Z_{nm}}{|Z_{nm}|} + \frac{Z_{nm}^*}{|Z_{nm}|} \right\} \\
-d_{nm}^\mp &= \left\{ \pm \frac{Z_{nm}}{|Z_{nm}|} - \frac{Z_{nm}^*}{|Z_{nm}|} \right\} = - \left\{ \mp \frac{Z_{nm}}{|Z_{nm}|} + \frac{Z_{nm}^*}{|Z_{nm}|} \right\}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

И получим:

$$\begin{aligned}
(2.7) &= \\
&= C_{kl}^+(0) \left(e^{-i(\Gamma_{kl} \mp \Gamma_{kl}^*) \frac{L_s}{2}} - e^{i(\Gamma_{kl} \mp \Gamma_{kl}^*) \frac{L_s}{2}} \right) \cdot d_{kl}^\pm + \\
&+ \frac{dC_{kl}^+(0)}{dz} \cdot \frac{L_s}{2} \cdot \left(e^{-i(\Gamma_{kl} \mp \Gamma_{kl}^*) \frac{L_s}{2}} + e^{i(\Gamma_{kl} \mp \Gamma_{kl}^*) \frac{L_s}{2}} \right) \cdot d_{kl}^\pm + \\
&+ C_{kl}^-(0) \left(e^{i(\Gamma_{kl} \pm \Gamma_{kl}^*) \frac{L_s}{2}} - e^{-i(\Gamma_{kl} \pm \Gamma_{kl}^*) \frac{L_s}{2}} \right) \cdot (-d_{kl}^\mp) + \\
&+ \frac{dC_{kl}^-(0)}{dz} \cdot \frac{L_s}{2} \cdot \left(e^{i(\Gamma_{kl} \pm \Gamma_{kl}^*) \frac{L_s}{2}} + e^{-i(\Gamma_{kl} \pm \Gamma_{kl}^*) \frac{L_s}{2}} \right) \cdot (-d_{kl}^\mp)
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Теперь разберёмся с правой частью уравнения 2.2 и найдём интеграл:

$$\begin{aligned}
I_1^\pm &= - \int_V \left[(\mu_0 \vec{H}_s) \cdot (\vec{H}_{nm}^\pm)^* + (\varepsilon_0 \vec{E}_s) \cdot (\vec{E}_{nm}^\pm)^* \right] dV = \\
&- \int_V \left[\mu_0 \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N \{ C_{nm}^+(z) \vec{h}_{nm} e^{-i\Gamma_{nm}z} - C_{nm}^-(z) \vec{h}_{nm} e^{i\Gamma_{nm}z} \} \cdot (\pm \vec{h}_{kl}^* e^{\pm i\Gamma_{kl}^* z}) \right) + \right. \\
&+ \varepsilon_0 \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N \{ C_{nm}^+(z) \vec{e}_{nm} e^{-i\Gamma_{nm}z} + C_{nm}^-(z) \vec{e}_{nm} e^{i\Gamma_{nm}z} \} \cdot (\vec{e}_{kl}^* e^{\pm i\Gamma_{kl}^* z}) \} \right] dV = \\
&= - \int_{-L_s/2}^{L_s/2} \left[\mu_0 \left(\pm \frac{1}{|Z_{kl}|} \right) (C_{kl}^+(z) e^{-i(\Gamma_{kl} \mp \Gamma_{kl}^*)z} - C_{kl}^-(z) e^{i(\Gamma_{kl} \pm \Gamma_{kl}^*)z}) + \right. \\
&+ \varepsilon_0 |Z_{kl}| (C_{kl}^+(z) e^{-i(\Gamma_{kl} \mp \Gamma_{kl}^*)z} + C_{kl}^-(z) e^{i(\Gamma_{kl} \pm \Gamma_{kl}^*)z}) \Big] dz = \\
&= - \int_{-L_s/2}^{L_s/2} C_{kl}^+(z) e^{-i(\Gamma_{kl} \mp \Gamma_{kl}^*)z} dz \cdot \left(\pm \mu_0 \frac{1}{|Z_{kl}|} + \varepsilon_0 |Z_{kl}| \right) + \\
&+ \int_{-L_s/2}^{L_s/2} C_{kl}^-(z) e^{i(\Gamma_{kl} \pm \Gamma_{kl}^*)z} dz \cdot \left(\pm \mu_0 \frac{1}{|Z_{kl}|} - \varepsilon_0 |Z_{kl}| \right)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Введём обозначения:

$$\begin{aligned}
\pm \mu_0 \frac{1}{|Z_{kl}|} + \varepsilon_0 |Z_{kl}| &= b_1^\pm \\
\pm \mu_0 \frac{1}{|Z_{kl}|} - \varepsilon_0 |Z_{kl}| &= -b_1^\mp
\end{aligned}$$

Подставив их в предыдущий интеграл, получим:

$$I_1^\pm = - \int_{-L_s/2}^{L_s/2} C_{kl}^+(z) e^{-i(\Gamma_{kl} \mp \Gamma_{kl}^*)z} dz \cdot b_1^\pm + \int_{-L_s/2}^{L_s/2} C_{kl}^-(z) e^{i(\Gamma_{kl} \pm \Gamma_{kl}^*)z} dz \cdot (-b_1^\mp) \tag{2.11}$$

Дальнейшее интегрирование 2.11 нужно проводить отдельно для открытых и закрытых мод.

1. Моды открытые, то есть Γ_{nm} – действительное:

$$\begin{aligned}
I_{11}^+ &= - \int_{-L_s/2}^{L_s/2} C_{kl}^+(z) dz \cdot b_1^+ + \int_{-L_s/2}^{L_s/2} C_{kl}^-(z) e^{i2\Gamma_{kl}z} dz \cdot (-b_1^-) \\
I_{11}^- &= - \int_{-L_s/2}^{L_s/2} C_{kl}^+(z) e^{-i2\Gamma_{kl}z} dz \cdot b_1^- + \int_{-L_s/2}^{L_s/2} C_{kl}^-(z) dz \cdot (-b_1^+)
\end{aligned}$$

2. Моды закрытые, то есть Γ_{nm} – мнимое:

$$I_{12}^+ = - \int_{-L_s/2}^{L_s/2} C_{kl}^+(z) e^{-i2\Gamma_{kl}z} dz \cdot b_1^+ + \int_{-L_s/2}^{L_s/2} C_{kl}^-(z) dz \cdot (-b_1^-)$$

$$I_{12}^- = - \int_{-L_s/2}^{L_s/2} C_{kl}^+(z) dz \cdot b_1^- + \int_{-L_s/2}^{L_s/2} C_{kl}^-(z) e^{i2\Gamma_{kl}z} dz \cdot (-b_1^+)$$

Начнём интегрировать, так же используя приближение 2.6:

$$I_{11}^+ = - \int_{-L_s/2}^{L_s/2} C_{kl}^+(z) dz \cdot b_1^+ + \int_{-L_s/2}^{L_s/2} C_{kl}^-(z) e^{i2\Gamma_{kl}z} dz \cdot (-b_1^-) =$$

$$= -b_1^+ \left[C_{kl}^+(0)z + \frac{1}{2} \frac{dC_{kl}^+(0)}{dz} z^2 \right] \Big|_{-L_s/2}^{L_s/2} -$$

$$- b_1^- \left[\frac{1}{i2\Gamma_{kl}} C_{kl}^-(0) \cdot e^{i2\Gamma_{kl}z} + \frac{dC_{kl}^-(0)}{dz} \frac{1}{i2\Gamma_{kl}} \left(e^{i2\Gamma_{kl}z} z - \frac{1}{i2\Gamma_{kl}} e^{i2\Gamma_{kl}z} \right) \right] \Big|_{-L_s/2}^{L_s/2} =$$

$$= -b_1^+ C_{kl}^+(0) L_s -$$

$$- b_1^- \frac{1}{i2\Gamma_{kl}} \left[C_{kl}^-(0) (e^{i\Gamma_{kl}L_s} - e^{-i\Gamma_{kl}L_s}) + \frac{dC_{kl}^-(0)}{dz} \left\{ \frac{L_s}{2} (e^{i\Gamma_{kl}L_s} + e^{-i\Gamma_{kl}L_s}) - \frac{1}{i2\Gamma_{kl}} (e^{i\Gamma_{kl}L_s} - e^{-i\Gamma_{kl}L_s}) \right\} \right]$$

$$I_{11}^- = - \int_{-L_s/2}^{L_s/2} C_{kl}^+(z) e^{-i2\Gamma_{kl}z} dz \cdot b_1^- + \int_{-L_s/2}^{L_s/2} C_{kl}^-(z) dz \cdot (-b_1^+) =$$

$$= -b_1^- \left[-\frac{1}{i2\Gamma_{kl}} C_{kl}^+(0) \cdot e^{-i2\Gamma_{kl}z} - \frac{dC_{kl}^+(0)}{dz} \frac{1}{i2\Gamma_{kl}} \left(e^{-i2\Gamma_{kl}z} z + \frac{1}{i2\Gamma_{kl}} e^{-i2\Gamma_{kl}z} \right) \right] \Big|_{-L_s/2}^{L_s/2} -$$

$$- b_1^+ \left[C_{kl}^-(0)z + \frac{1}{2} \frac{dC_{kl}^-(0)}{dz} z^2 \right] \Big|_{-L_s/2}^{L_s/2} =$$

$$= b_1^- \frac{1}{i2\Gamma_{kl}} \left[C_{kl}^+(0) (e^{-i\Gamma_{kl}L_s} - e^{i\Gamma_{kl}L_s}) + \frac{dC_{kl}^+(0)}{dz} \left\{ \frac{L_s}{2} (e^{-i\Gamma_{kl}L_s} + e^{i\Gamma_{kl}L_s}) + \frac{1}{i2\Gamma_{kl}} (e^{-i\Gamma_{kl}L_s} - e^{i\Gamma_{kl}L_s}) \right\} \right] -$$

$$- b_1^+ C_{kl}^-(0) L_s$$

$$I_{12}^+ = - \int_{-L_s/2}^{L_s/2} C_{kl}^+(z) e^{-i2\Gamma_{kl}z} dz \cdot b_1^+ + \int_{-L_s/2}^{L_s/2} C_{kl}^-(z) dz \cdot (-b_1^-) =$$

$$= -b_1^+ \left[-\frac{1}{i2\Gamma_{kl}} C_{kl}^+(0) \cdot e^{-i2\Gamma_{kl}z} - \frac{dC_{kl}^+(0)}{dz} \frac{1}{i2\Gamma_{kl}} \left(e^{-i2\Gamma_{kl}z} z + \frac{1}{i2\Gamma_{kl}} e^{-i2\Gamma_{kl}z} \right) \right] \Big|_{-L_s/2}^{L_s/2} -$$

$$- b_1^- \left[C_{kl}^-(0)z + \frac{1}{2} \frac{dC_{kl}^-(0)}{dz} z^2 \right] \Big|_{-L_s/2}^{L_s/2} =$$

$$= b_1^+ \frac{1}{i2\Gamma_{kl}} \left[C_{kl}^+(0) (e^{-i\Gamma_{kl}L_s} - e^{i\Gamma_{kl}L_s}) + \frac{dC_{kl}^+(0)}{dz} \left\{ \frac{L_s}{2} (e^{-i\Gamma_{kl}L_s} + e^{i\Gamma_{kl}L_s}) + \frac{1}{i2\Gamma_{kl}} (e^{-i\Gamma_{kl}L_s} - e^{i\Gamma_{kl}L_s}) \right\} \right] -$$

$$- b_1^- C_{kl}^-(0) L_s$$

$$\begin{aligned}
I_{12}^- &= - \int_{-L_s/2}^{L_s/2} C_{kl}^+(z) dz \cdot b_1^- + \int_{-L_s/2}^{L_s/2} C_{kl}^-(z) e^{i2\Gamma_{kl}z} dz \cdot (-b_1^+) = \\
&= -b_1^- \left[C_{kl}^+(0)z + \frac{1}{2} \frac{dC_{kl}^+(0)}{dz} z^2 \right] \Big|_{-L_s/2}^{L_s/2} - \\
&- b_1^+ \left[\frac{1}{i2\Gamma_{kl}} C_{kl}^-(0) \cdot e^{i2\Gamma_{kl}z} + \frac{dC_{kl}^-(0)}{dz} \frac{1}{i2\Gamma_{kl}} \left(e^{i2\Gamma_{kl}z} z - \frac{1}{i2\Gamma_{kl}} e^{i2\Gamma_{kl}z} \right) \right] \Big|_{-L_s/2}^{L_s/2} = \\
&= -b_1^- C_{kl}^+(0) L_s - \\
&- b_1^+ \frac{1}{i2\Gamma_{kl}} \left[C_{kl}^-(0) (e^{i\Gamma_{kl}L_s} - e^{-i\Gamma_{kl}L_s}) + \frac{dC_{kl}^-(0)}{dz} \left\{ \frac{L_s}{2} (e^{i\Gamma_{kl}L_s} + e^{-i\Gamma_{kl}L_s}) - \frac{1}{i2\Gamma_{kl}} (e^{i\Gamma_{kl}L_s} - e^{-i\Gamma_{kl}L_s}) \right\} \right]
\end{aligned}$$

Введём функции:

$$\begin{aligned}
f_1(n, m) &= \frac{e^{i\Gamma_{nm}L_s} - e^{-i\Gamma_{nm}L_s}}{2i\Gamma_{nm}} \\
f_2(n, m) &= \frac{e^{i\Gamma_{nm}L_s} + e^{-i\Gamma_{nm}L_s}}{2i\Gamma_{nm}}
\end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned}
I_{11}^+ &= -b_1^+ C_{kl}^+(0) L_s - b_1^- \left[C_{kl}^-(0) \cdot f_1(k, l) + \frac{dC_{kl}^-(0)}{dz} \left\{ \frac{L_s}{2} f_2(k, l) - \frac{f_1(k, l)}{2i\Gamma_{kl}} \right\} \right] \\
I_{11}^- &= -b_1^+ C_{kl}^-(0) L_s + b_1^- \left[C_{kl}^+(0) f_1(k, l) + \frac{dC_{kl}^+(0)}{dz} \left\{ \frac{L_s}{2} f_2(k, l) + \frac{f_1(k, l)}{2i\Gamma_{kl}} \right\} \right] \\
I_{12}^+ &= -b_1^- C_{kl}^-(0) L_s + b_1^+ \left[C_{kl}^+(0) f_1(k, l) + \frac{dC_{kl}^+(0)}{dz} \left\{ \frac{L_s}{2} f_2(k, l) + \frac{f_1(k, l)}{2i\Gamma_{kl}} \right\} \right] \\
I_{12}^- &= -b_1^- C_{kl}^+(0) L_s - b_1^+ \left[C_{kl}^-(0) \cdot f_1(k, l) + \frac{dC_{kl}^-(0)}{dz} \left\{ \frac{L_s}{2} f_2(k, l) - \frac{f_1(k, l)}{2i\Gamma_{kl}} \right\} \right]
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\vec{x}_s^\pm &= C_{kl}^\pm(0) \\
D_{1s}^\pm &= \begin{cases} 0, & n \neq k, \quad m \neq l \\ \left(e^{-i(\Gamma_{kl} \mp \Gamma_{kl}^*) \frac{L_s}{2}} - e^{i(\Gamma_{kl} \mp \Gamma_{kl}^*) \frac{L_s}{2}} \right) \cdot d_{kl}^\pm, & n = k, \quad m = l \end{cases} \\
D_{2s}^\pm &= \begin{cases} 0, & n \neq k, \quad m \neq l \\ \left(e^{i(\Gamma_{kl} \pm \Gamma_{kl}^*) \frac{L_s}{2}} - e^{-i(\Gamma_{kl} \pm \Gamma_{kl}^*) \frac{L_s}{2}} \right) \cdot (-d_{kl}^\mp), & n = k, \quad m = l \end{cases} \\
DD_{1s}^\pm &= \begin{cases} 0, & n \neq k, \quad m \neq l \\ \frac{L_s}{2} \cdot \left(e^{-i(\Gamma_{kl} \mp \Gamma_{kl}^*) \frac{L_s}{2}} + e^{i(\Gamma_{kl} \mp \Gamma_{kl}^*) \frac{L_s}{2}} \right) \cdot d_{kl}^\pm, & n = k, \quad m = l \end{cases} \\
DD_{2s}^\pm &= \begin{cases} 0, & n \neq k, \quad m \neq l \\ \frac{L_s}{2} \cdot \left(e^{i(\Gamma_{kl} \pm \Gamma_{kl}^*) \frac{L_s}{2}} + e^{-i(\Gamma_{kl} \pm \Gamma_{kl}^*) \frac{L_s}{2}} \right) \cdot (-d_{kl}^\mp), & n = k, \quad m = l \end{cases} \\
B_{1s}^+ &= \begin{cases} 0, & n \neq k, \quad m \neq l \\ -b_1^+ \cdot L_s, & n = k, \quad m = l, \quad k < N_{\text{open}}, l < M_{\text{open}} \\ b_1^+ f_1(k, l), & n = k, \quad m = l, \quad k > N_{\text{open}}, l > M_{\text{open}} \end{cases} \\
B_{1s}^- &= \begin{cases} 0, & n \neq k, \quad m \neq l \\ -b_1^- f_1(k, l), & n = k, \quad m = l, \quad k < N_{\text{open}}, l < M_{\text{open}} \\ -b_1^- \cdot L_s, & n = k, \quad m = l, \quad k > N_{\text{open}}, l > M_{\text{open}} \end{cases} \\
B_{2s}^+ &= \begin{cases} 0, & n \neq k, \quad m \neq l \\ -b_1^+ \cdot L_s, & n = k, \quad m = l, \quad k < N_{\text{open}}, l < M_{\text{open}} \\ -b_1^+ f_1(k, l), & n = k, \quad m = l, \quad k > N_{\text{open}}, l > M_{\text{open}} \end{cases} \\
B_{2s}^- &= \begin{cases} 0, & n \neq k, \quad m \neq l \\ b_1^- f_1(k, l), & n = k, \quad m = l, \quad k < N_{\text{open}}, l < M_{\text{open}} \\ -b_1^- \cdot L_s, & n = k, \quad m = l, \quad k > N_{\text{open}}, l > M_{\text{open}} \end{cases} \\
BB_{1s}^+ &= \begin{cases} 0, & n \neq k, \quad m \neq l \\ 0, & n = k, \quad m = l, \quad k < N_{\text{open}}, l < M_{\text{open}} \\ b_1^+ \left(\frac{L_s}{2} f_2(k, l) + \frac{f_1(k, l)}{2i\Gamma_{kl}} \right), & n = k, \quad m = l, \quad k > N_{\text{open}}, l > M_{\text{open}} \end{cases} \\
BB_{1s}^- &= \begin{cases} 0, & n \neq k, \quad m \neq l \\ b_1^- \left(\frac{L_s}{2} f_2(k, l) + \frac{f_1(k, l)}{2i\Gamma_{kl}} \right), & n = k, \quad m = l, \quad k < N_{\text{open}}, l < M_{\text{open}} \\ 0, & n = k, \quad m = l, \quad k > N_{\text{open}}, l > M_{\text{open}} \end{cases} \\
BB_{2s}^+ &= \begin{cases} 0, & n \neq k, \quad m \neq l \\ -b_1^- \left(\frac{L_s}{2} f_2(k, l) - \frac{f_1(k, l)}{2i\Gamma_{kl}} \right), & n = k, \quad m = l, \quad k < N_{\text{open}}, l < M_{\text{open}} \\ 0, & n = k, \quad m = l, \quad k > N_{\text{open}}, l > M_{\text{open}} \end{cases} \\
BB_{2s}^- &= \begin{cases} 0, & n \neq k, \quad m \neq l \\ 0, & n = k, \quad m = l, \quad k < N_{\text{open}}, l < M_{\text{open}} \\ -b_1^+ \left(\frac{L_s}{2} f_2(k, l) - \frac{f_1(k, l)}{2i\Gamma_{kl}} \right), & n = k, \quad m = l, \quad k > N_{\text{open}}, l > M_{\text{open}} \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

После которых исходное уравнение (2.2) принимает вид:

$$\begin{aligned}
& D_{1s}^+ \vec{x}_s^+ + DD_{1s}^+ \frac{d\vec{x}_s^+}{dz} + D_{2s}^+ \vec{x}_s^- + DD_{2s}^+ \frac{d\vec{x}_s^-}{dz} = \\
& = \frac{d}{dt} \left(B_{1s}^+ \vec{x}_s^+ + BB_{1s}^+ \frac{d\vec{x}_s^+}{dz} + B_{2s}^+ \vec{x}_s^- + BB_{2s}^+ \frac{d\vec{x}_s^-}{dz} \right) + \vec{\eta}_s^+
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
& (D_{1s}^+ \Delta t - B_{1s}^+) \cdot \hat{\vec{x}}_s^+ + (DD_{1s}^+ \Delta t - BB_{1s}^+) \cdot \frac{d\hat{\vec{x}}_s^+}{dz} + \\
& (D_{2s}^+ \Delta t - B_{2s}^+) \cdot \hat{\vec{x}}_s^- + (DD_{2s}^+ \Delta t - BB_{2s}^+) \cdot \frac{d\hat{\vec{x}}_s^-}{dz} = \\
& = -B_{1s}^+ \vec{x}_s^+ - BB_{1s}^+ \frac{d\vec{x}_s^+}{dz} - B_{2s}^+ \vec{x}_s^- - BB_{2s}^+ \frac{d\vec{x}_s^-}{dz} + \vec{\eta}_s^+ \Delta t
\end{aligned} \tag{2.14-a}$$

Аналогично получаем ещё одно уравнение:

$$\begin{aligned}
& (D_{1s}^- \Delta t - B_{1s}^-) \cdot \hat{x}_s^+ + (DD_{1s}^- \Delta t - BB_{1s}^-) \cdot \frac{d\hat{x}_s^+}{dz} + \\
& (D_{2s}^- \Delta t - B_{2s}^-) \cdot \hat{x}_s^- + (DD_{2s}^- \Delta t - BB_{2s}^-) \cdot \frac{d\hat{x}_s^-}{dz} = \\
& = -B_{1s}^- \vec{x}_s^+ - BB_{1s}^- \frac{d\vec{x}_s^+}{dz} - B_{2s}^- \vec{x}_s^- - BB_{2s}^- \frac{d\vec{x}_s^-}{dz} + \vec{\eta}_s^- \Delta t
\end{aligned} \tag{2.14-6}$$

2.1.2 Возбуждение полей на участке гладкого волновода

Соотношения (2.14-а) и (2.14-б) запишем в формальном виде:

$$\begin{aligned}
DB_{1s}^+ \cdot \mathbf{x}_s^+ + DDB_{1s}^+ \cdot \left(\frac{d\mathbf{x}_s^+}{dz} \right) + DB_{2s}^+ \cdot \mathbf{x}_s^- + DDB_{2s}^+ \cdot \left(\frac{d\mathbf{x}_s^-}{dz} \right) &= \vec{N}_s^+ \\
DB_{1s}^- \cdot \mathbf{x}_s^+ + DDB_{1s}^- \cdot \left(\frac{d\mathbf{x}_s^+}{dz} \right) + DB_{2s}^- \cdot \mathbf{x}_s^- + DDB_{2s}^- \cdot \left(\frac{d\mathbf{x}_s^-}{dz} \right) &= \vec{N}_s^-
\end{aligned} \tag{2.15}$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned}
DB_{1s}^\pm &= D_{1s}^\pm \cdot \Delta t - B_{1s}^\pm \\
DB_{2s}^\pm &= D_{2s}^\pm \cdot \Delta t - B_{2s}^\pm \\
DDB_{1s}^\pm &= DD_{1s}^\pm \cdot \Delta t - B_{1s}^\pm \\
DDB_{2s}^\pm &= DD_{2s}^\pm \cdot \Delta t - B_{2s}^\pm \\
N_s^\pm &= \frac{RNPLUS}{RNMINUS} = -B_{1s}^\pm \vec{x}_s^+ - BB_{1s}^\pm \frac{d\vec{x}_s^+}{dz} - B_{2s}^\pm \vec{x}_s^- - BB_{2s}^\pm \frac{d\vec{x}_s^-}{dz} + \vec{\eta}_s^\pm \Delta t
\end{aligned}$$

Из этих уравнений получаем:

$$\begin{aligned}
& ((DDB_{2s}^+)^{-1} \cdot DDB_{1s}^+ - (DDB_{2s}^-)^{-1} \cdot DDB_{1s}^-) \frac{d\hat{x}_s^+}{dz} = \\
& = (DDB_{2s}^+)^{-1} \cdot N_s^+ - (DDB_{2s}^-)^{-1} \cdot N_s^- + \\
& + \left(-(DDB_{2s}^+)^{-1} \cdot DB_{1s}^+ + (DDB_{2s}^-)^{-1} \cdot DB_{1s}^- \right) \cdot \hat{x}_s^+ + \\
& + \left(-(DDB_{2s}^+)^{-1} \cdot DB_{2s}^+ + (DDB_{2s}^-)^{-1} \cdot DB_{2s}^- \right) \cdot \hat{x}_s^- \\
& ((DDB_{1s}^+)^{-1} \cdot DDB_{2s}^+ - (DDB_{1s}^-)^{-1} \cdot DDB_{2s}^-) \frac{d\hat{x}_s^-}{dz} = \\
& = (DDB_{1s}^+)^{-1} \cdot N_s^+ - (DDB_{1s}^-)^{-1} \cdot N_s^- + \\
& + \left(-(DDB_{1s}^+)^{-1} \cdot DB_{1s}^+ + (DDB_{1s}^-)^{-1} \cdot DB_{1s}^- \right) \cdot \hat{x}_s^+ + \\
& + \left(-(DDB_{1s}^+)^{-1} \cdot DB_{2s}^+ + (DDB_{1s}^-)^{-1} \cdot DB_{2s}^- \right) \cdot \hat{x}_s^-
\end{aligned}$$

Эти уравнения запишем в компактном виде:

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{x}_s^+}{dz} &= NN_s^+ + \alpha_s^+ \cdot \mathbf{x}_s^+ + \beta_s^+ \mathbf{x}_s^- \\
\frac{d\mathbf{x}_s^-}{dz} &= NN_s^- + \alpha_s^- \cdot \mathbf{x}_s^+ + \beta_s^- \mathbf{x}_s^-
\end{aligned} \tag{2.16}$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned}
\alpha_s^+ &= ((DDB_{2s}^+)^{-1} \cdot DDB_{1s}^+ - (DDB_{2s}^-)^{-1} \cdot DDB_{1s}^-)^{-1} \cdot \left(-(DDB_{2s}^+)^{-1} \cdot DB_{1s}^+ + (DDB_{2s}^-)^{-1} \cdot DB_{1s}^- \right) \\
\beta_s^+ &= ((DDB_{2s}^+)^{-1} \cdot DDB_{1s}^+ - (DDB_{2s}^-)^{-1} \cdot DDB_{1s}^-)^{-1} \cdot \left(-(DDB_{2s}^+)^{-1} \cdot DB_{2s}^+ + (DDB_{2s}^-)^{-1} \cdot DB_{2s}^- \right) \\
NN_s^+ &= RNNPLUS = ((DDB_{2s}^+)^{-1} \cdot DDB_{1s}^+ - (DDB_{2s}^-)^{-1} \cdot DDB_{1s}^-)^{-1} \cdot \\
& \cdot ((DDB_{2s}^+)^{-1} \cdot N_s^+ - (DDB_{2s}^-)^{-1} \cdot N_s^-)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_s^- &= ((DDB_{1s}^+)^{-1} \cdot DDB_{2s}^+ - (DDB_{1s}^-)^{-1} \cdot DDB_{2s}^-)^{-1} \cdot (-(DDB_{1s}^+)^{-1} \cdot DB_{1s}^+ + (DDB_{1s}^-)^{-1} \cdot DB_{1s}^-) \\
\beta_s^- &= ((DDB_{1s}^+)^{-1} \cdot DDB_{2s}^+ - (DDB_{1s}^-)^{-1} \cdot DDB_{2s}^-)^{-1} \cdot (-(DDB_{1s}^+)^{-1} \cdot DB_{2s}^+ + (DDB_{1s}^-)^{-1} \cdot DB_{2s}^-) \\
NN_s^- &= RNNMINUS = ((DDB_{1s}^+)^{-1} \cdot DDB_{2s}^+ - (DDB_{1s}^-)^{-1} \cdot DDB_{2s}^-)^{-1} \cdot \\
&\cdot ((DDB_{1s}^+)^{-1} \cdot N_s^+ - (DDB_{1s}^-)^{-1} \cdot N_s^-)
\end{aligned}$$

Для скачков будем использовать условия сшивания, основанные на непрерывности вектора Умова-Пойтинга, а также приближение (2.6):

$$\begin{aligned}
&UST_{1s}^e \cdot (F\Gamma_{s-1}^+ \cdot \mathbf{x}_{s-1}^+ + F\Gamma_{s-1}^+ \cdot \frac{L_{s-1}}{2} \cdot \frac{d\mathbf{x}_{s-1}^+}{dz} + F\Gamma_{s-1}^- \cdot \mathbf{x}_{s-1}^- + F\Gamma_{s-1}^- \cdot \frac{L_{s-1}}{2} \cdot \frac{d\mathbf{x}_{s-1}^-}{dz}) = \\
&= UST_{2s}^e \cdot (F\Gamma_{s-1}^- \cdot \mathbf{x}_s^+ + F\Gamma_s^- \cdot \frac{L_s}{2} \cdot \frac{d\mathbf{x}_s^+}{dz} + F\Gamma_s^+ \cdot \mathbf{x}_s^- + F\Gamma_s^+ \cdot \frac{L_s}{2} \cdot \frac{d\mathbf{x}_s^-}{dz})
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Матрицы $F\Gamma_{s-1}$ для всех регулярных участков имеют вид:

$$F\Gamma_s^\pm = \begin{cases} 0 & n \neq k, m \neq l \\ e^{\mp i\Gamma_{nm} \frac{L_s}{2}} & n = k, m = l \end{cases}$$

а множители UST_{1s}^e и UST_{2s}^e представляют из себя интегралы:

- В случае, если радиус волновода резко уменьшается ($R_1 > R_2$)

$$\begin{aligned}
USTE_{1s} &= \begin{cases} 0, & n \neq k, m \neq l \\ \frac{Z_{nm,s-1}}{|Z_{nm,s-1}|}, & n = k, m = l \end{cases} \\
USTE_{2s} &= \Pi_{nmkl,s}^1 \\
USTH_{1s} &= (\Pi_{nmkl,s}^1)^* \\
USTH_{2s} &= \begin{cases} 0, & n \neq k, m \neq l \\ \frac{Z_{nm,s}^*}{|Z_{nm,s}|}, & n = k, m = l \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.18-a}$$

- В случае, если радиус волновода резко увеличивается ($R_1 < R_2$)

$$\begin{aligned}
USTE_{1s} &= (\Pi_{nmkl,s}^2)^* \\
USTE_{2s} &= \begin{cases} 0, & n \neq k, m \neq l \\ \frac{Z_{nm,s}}{|Z_{nm,s}|}, & n = k, m = l \end{cases} \\
USTH_{1s} &= \begin{cases} 0, & n \neq k, m \neq l \\ \frac{Z_{nm,s-1}^*}{|Z_{nm,s-1}|}, & n = k, m = l \end{cases} \\
USTH_{2s} &= (\Pi_{nmkl,s}^2)^*
\end{aligned} \tag{2.18-б}$$

Величины $\Pi_{nmkl,s}^1$ и $\Pi_{nmkl,s}^2$ являются следующими интегралами:

$$\begin{aligned}
\Pi_{nmkl,s}^1 &= \int_{S_c} [\vec{e}_{nm}^c \times (\vec{h}_{kl}^p)^*] d\vec{S} \\
\Pi_{nmkl,s}^2 &= \int_{S_p} [\vec{e}_{nm}^p \times (\vec{h}_{kl}^c)^*] d\vec{S},
\end{aligned}$$

где индексы p и c обозначают предыдущий и текущий участок волновода соответственно. Эти интегралы в рабочей программе вычисляются численно, методом Гаусса.

После подстановки (2.16) в (2.17) получаем:

$$\begin{aligned}
& USTE_{1s} \cdot (F\Gamma_{s-1}^+ \cdot \mathbf{x}_{s-1}^+ + F\Gamma_{s-1}^+ \cdot \frac{L_{s-1}}{2} \cdot (NN_{s-1}^+ + \alpha_{s-1}^+ \mathbf{x}_{s-1}^+ + \beta_{s-1}^+ \mathbf{x}_{s-1}^-) + \\
& + F\Gamma_{s-1}^- \cdot \mathbf{x}_{s-1}^- + F\Gamma_{s-1}^- \cdot \frac{L_{s-1}}{2} \cdot (NN_{s-1}^- + \alpha_{s-1}^- \mathbf{x}_{s-1}^+ + \beta_{s-1}^- \mathbf{x}_{s-1}^-)) = \\
& = USTE_{2s} \cdot (F\Gamma_s^- \cdot \mathbf{x}_s^+ - F\Gamma_s^- \cdot \frac{L_s}{2} \cdot (NN_s^+ + \alpha_s^+ \mathbf{x}_s^+ + \beta_s^+ \mathbf{x}_s^-) + \\
& + F\Gamma_s^+ \cdot \mathbf{x}_s^- - F\Gamma_s^+ \cdot \frac{L_s}{2} \cdot (NN_s^- + \alpha_s^- \mathbf{x}_s^+ + \beta_s^- \mathbf{x}_s^-)) \quad (2.19-a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& USTH_{1s} \cdot (F\Gamma_{s-1}^+ \cdot \mathbf{x}_{s-1}^+ + F\Gamma_{s-1}^+ \cdot \frac{L_{s-1}}{2} \cdot (NN_{s-1}^+ + \alpha_{s-1}^+ \mathbf{x}_{s-1}^+ + \beta_{s-1}^+ \mathbf{x}_{s-1}^-) - \\
& - F\Gamma_{s-1}^- \cdot \mathbf{x}_{s-1}^- - F\Gamma_{s-1}^- \cdot \frac{L_{s-1}}{2} \cdot (NN_{s-1}^- + \alpha_{s-1}^- \mathbf{x}_{s-1}^+ + \beta_{s-1}^- \mathbf{x}_{s-1}^-)) = \\
& = USTH_{2s} \cdot (F\Gamma_s^- \cdot \mathbf{x}_s^+ - F\Gamma_s^- \cdot \frac{L_s}{2} \cdot (NN_s^+ + \alpha_s^+ \mathbf{x}_s^+ + \beta_s^+ \mathbf{x}_s^-) - \\
& - F\Gamma_s^+ \cdot \mathbf{x}_s^- + F\Gamma_s^+ \cdot \frac{L_s}{2} \cdot (NN_s^- + \alpha_s^- \mathbf{x}_s^+ + \beta_s^- \mathbf{x}_s^-)) \quad (2.19-b)
\end{aligned}$$

Эти соотношения запишем в формальном виде:

$$\begin{aligned}
\chi_{1s}^e \cdot \hat{x}_{s-1}^+ + \psi_{1s}^e \cdot \hat{x}_{s-1}^- + NB_{1s}^e &= \chi_{2s}^e \cdot \hat{x}_s^+ + \psi_{2s}^e \cdot \hat{x}_s^- + NB_{2s}^e \\
\chi_{1s}^h \cdot \hat{x}_{s-1}^+ + \psi_{1s}^h \cdot \hat{x}_{s-1}^- + NB_{1s}^h &= \chi_{2s}^h \cdot \hat{x}_s^+ + \psi_{2s}^h \cdot \hat{x}_s^- + NB_{2s}^h
\end{aligned} \quad (2.20)$$

Для скачка между участками s и $s+1$ аналогично:

$$\begin{aligned}
\chi_{1s+1}^e \cdot \hat{x}_s^+ + \psi_{1s+1}^e \cdot \hat{x}_s^- + NB_{1s+1}^e &= \chi_{2s+1}^e \cdot \hat{x}_{s+1}^+ + \psi_{2s+1}^e \cdot \hat{x}_{s+1}^- + NB_{2s+1}^e \\
\chi_{1s+1}^h \cdot \hat{x}_s^+ + \psi_{1s+1}^h \cdot \hat{x}_s^- + NB_{1s+1}^h &= \chi_{2s+1}^h \cdot \hat{x}_{s+1}^+ + \psi_{2s+1}^h \cdot \hat{x}_{s+1}^- + NB_{2s+1}^h
\end{aligned} \quad (2.21)$$

В этих уравнениях обозначено:

$$\begin{aligned}
\chi_{1s}^e &= USTE_{1s} \left(F\Gamma_{s-1}^+ + \frac{L_{s-1}}{2} F\Gamma_{s-1}^+ \alpha_{s-1}^+ + \frac{L_{s-1}}{2} F\Gamma_{s-1}^- \alpha_{s-1}^- \right) \\
\chi_{1s}^h &= USTH_{1s} \left(F\Gamma_{s-1}^+ + \frac{L_{s-1}}{2} F\Gamma_{s-1}^+ \alpha_{s-1}^+ - \frac{L_{s-1}}{2} F\Gamma_{s-1}^- \alpha_{s-1}^- \right) \\
\psi_{1s}^e &= USTE_{1s} \left(F\Gamma_{s-1}^- + \frac{L_{s-1}}{2} F\Gamma_{s-1}^+ \beta_{s-1}^+ + \frac{L_{s-1}}{2} F\Gamma_{s-1}^- \beta_{s-1}^- \right) \\
\psi_{1s}^h &= USTH_{1s} \left(-F\Gamma_{s-1}^- + \frac{L_{s-1}}{2} F\Gamma_{s-1}^+ \beta_{s-1}^+ - \frac{L_{s-1}}{2} F\Gamma_{s-1}^- \beta_{s-1}^- \right) \\
NB_{1s}^e &= USTE_{1s} \left(\frac{L_{s-1}}{2} F\Gamma_{s-1}^+ \cdot NN_{s-1}^+ + \frac{L_{s-1}}{2} F\Gamma_{s-1}^- \cdot NN_{s-1}^- \right) \\
NB_{1s}^h &= USTH_{1s} \left(\frac{L_{s-1}}{2} F\Gamma_{s-1}^+ \cdot NN_{s-1}^+ - \frac{L_{s-1}}{2} F\Gamma_{s-1}^- \cdot NN_{s-1}^- \right) \\
\chi_{2s}^e &= USTE_{2s} \left(F\Gamma_s^- - \frac{L_s}{2} F\Gamma_s^- \alpha_s^+ - \frac{L_s}{2} F\Gamma_s^+ \alpha_s^- \right) \\
\chi_{2s}^h &= USTH_{2s} \left(F\Gamma_s^- - \frac{L_s}{2} F\Gamma_s^- \alpha_s^+ + \frac{L_s}{2} F\Gamma_s^+ \alpha_s^- \right) \\
\psi_{2s}^e &= USTE_{2s} \left(F\Gamma_s^+ - \frac{L_s}{2} F\Gamma_s^- \beta_s^+ - \frac{L_s}{2} F\Gamma_s^+ \beta_s^- \right) \\
\psi_{2s}^h &= USTH_{2s} \left(-F\Gamma_s^+ - \frac{L_s}{2} F\Gamma_s^- \beta_s^+ + \frac{L_s}{2} F\Gamma_s^+ \beta_s^- \right) \\
NB_{2s}^e &= USTE_{2s} \left(-\frac{L_s}{2} F\Gamma_s^- \cdot NN_s^+ - \frac{L_s}{2} F\Gamma_s^+ \cdot NN_s^- \right) \\
NB_{2s}^h &= USTH_{2s} \left(-\frac{L_s}{2} F\Gamma_s^- \cdot NN_s^+ + \frac{L_s}{2} F\Gamma_s^+ \cdot NN_s^- \right)
\end{aligned}$$

Окончательно получаем:

$$\begin{aligned}
\hat{x}_s^- &= (\psi\psi_{1s})^{-1} \left(\psi\chi_{1s} \cdot \hat{x}_{s-1}^+ + \psi\chi_{2s} \cdot \hat{x}_s^+ + \psi NB_{1s} \right) \\
\hat{x}_s^- &= (\psi\psi_{2s})^{-1} \left(\psi\chi_{3s} \cdot \hat{x}_{s+1}^+ + \psi\chi_{4s} \cdot \hat{x}_s^+ + \psi NB_{2s} \right)
\end{aligned}$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned}
\psi\psi_{1s} &= (\psi_{1s}^e)^{-1} \cdot \psi_{2s}^e - (\psi_{1s}^h)^{-1} \cdot \psi_{2s}^h \\
\psi\psi_{2s} &= (\psi_{2s+1}^e)^{-1} \cdot \psi_{1s+1}^e - (\psi_{2s+1}^h)^{-1} \cdot \psi_{1s+1}^h \\
\psi\chi_{1s} &= (\psi_{1s}^e)^{-1} \cdot \chi_{1s}^e - (\psi_{1s}^h)^{-1} \cdot \chi_{1s}^h \\
\psi\chi_{2s} &= -(\psi_{1s}^e)^{-1} \cdot \chi_{2s}^e + (\psi_{1s}^h)^{-1} \cdot \chi_{2s}^h \\
\psi\chi_{3s} &= (\psi_{2s+1}^e)^{-1} \cdot \chi_{2s+1}^e - (\psi_{2s+1}^h)^{-1} \cdot \chi_{2s+1}^h \\
\psi\chi_{4s} &= -(\psi_{2s+1}^e)^{-1} \cdot \chi_{1s+1}^e + (\psi_{2s+1}^h)^{-1} \cdot \chi_{1s+1}^h \\
\psi NB_{1s} &= (\psi_{1s}^e)^{-1} (NB_{1s}^e - NB_{2s}^e) - (\psi_{1s}^h)^{-1} (NB_{1s}^h - NB_{2s}^h) \\
\psi NB_{2s} &= (\psi_{2s+1}^e)^{-1} (NB_{2s+1}^e - NB_{1s+1}^e) - (\psi_{2s+1}^h)^{-1} (NB_{2s+1}^h - NB_{1s+1}^h)
\end{aligned}$$

В результате преобразований получаем уравнение для регулярных ячеек:

$$\begin{aligned}
&(\psi\psi_{1s})^{-1} \cdot \psi\chi_{1s} \cdot \mathbf{x}_{s-1}^+ + [(\psi\psi_{1s})^{-1} \cdot \psi\chi_{2s} - (\psi\psi_{2s})^{-1} \cdot \psi\chi_{4s}] \cdot \mathbf{x}_s^+ - \\
&\quad - (\psi\psi_{2s})^{-1} \cdot \psi\chi_{3s} \cdot \mathbf{x}_{s+1}^+ = (\psi\psi_{2s})^{-1} \cdot \psi NB_{2s} - (\psi\psi_{1s})^{-1} \cdot \psi NB_{1s} \quad (2.22)
\end{aligned}$$

2.1.3 Сшивание поля на скачках радиуса волновода

Стоит сказать пару слов о "сшивании" электромагнитного поля на скачках волновода. В рамках рассматриваемой методики используются условия, обеспечивающие непрерывность вектора Умова-Пойтинга. Такие соотношения широко применяются для расчетов замедляющих систем и обеспечивают достаточно хорошее совпадение данных теории и эксперимента. В частности, при увеличении радиуса волновода ($R_p < R_c$), они имеют вид:

$$\begin{aligned} \int_{S_p} [\vec{E}_p \times (\vec{h}_{nm c})^*] d\vec{S} &= \int_{S_c} [\vec{E}_c \times (\vec{h}_{nm p})^*] d\vec{S} \\ \int_{S_p} [\vec{e}_{nm p} \times (\vec{H}_p)^*] d\vec{S} &= \int_{S_p} [\vec{e}_{nm p} \times (\vec{H}_c)^*] d\vec{S} \end{aligned} \quad (2.23-a)$$

В том случае, если радиус уменьшается ($R_p > R_c$), проекционные соотношения записываются в виде:

$$\begin{aligned} \int_{S_p} [\vec{E}_p \times (\vec{h}_{nm p})^*] d\vec{S} &= \int_{S_c} [\vec{E}_c \times (\vec{h}_{nm p})^*] d\vec{S} \\ \int_{S_c} [\vec{e}_{nm c} \times (\vec{H}_p)^*] d\vec{S} &= \int_{S_c} [\vec{e}_{nm c} \times (\vec{H}_c)^*] d\vec{S} \end{aligned} \quad (2.23-b)$$

где индексы p и c обозначают предыдущий и текущий регулярные участки соответственно.

2.2 Уравнения движения электронного пучка

Для анализа процессов в электронном потоке используется модель крупных частиц. Крупные частицы представляют собой тонкие кольца с зарядом

$$q = \frac{I_0 \cdot 2\pi}{M_0 \cdot \omega},$$

где I_0 – ток потока, M_0 – число частиц на длину волны.

Движение потока считается одномерным, силами пространственного заряда пренебрегается. Уравнения движения крупных частиц в рамках выбранной модели имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{dv}{d\tau} = -\frac{\eta}{\omega\gamma} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \cdot E_z = -\frac{\eta}{\omega} \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2} \cdot E_z \\ \frac{dz}{d\tau} = \frac{v}{\omega} \end{cases} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} E_z &= \text{Re} \sum_{n=1}^N \left[(C_{n,s}^+(z) \cdot e^{i(\tau - \Gamma_{n,s}z)} + C_{n,s}^-(z) \cdot e^{i(\tau + \Gamma_{n,s}z)}) \cdot e_{zn,s}(R) \right] = \\ &= \text{Re} \sum_{n=1}^N \left[\left(\left(C_{n,s}^+(0) + \frac{dC_{n,s}^+}{dz} \right) \cdot e^{i(\tau - \Gamma_{n,s}z)} + \left(C_{n,s}^-(0) + \frac{dC_{n,s}^-}{dz} \right) \cdot e^{i(\tau + \Gamma_{n,s}z)} \right) \cdot e_{zn,s}(R) \right], \end{aligned} \quad (2.25)$$

где $e_{zn,s}(R)$ – величина продольной компоненты функции поперечного сечения в области электронного потока, R – радиус потока.

Энергетический интеграл из уравнений (2.14-а) и (2.14-б) при учёте пренебрежения си-

лами пространственного заряда записывается в виде:

$$\begin{aligned}
\vec{\eta}_s^\pm &= \int_{\tau_k}^{\tau_k+\Delta\tau} \int_V \vec{j}_{bs}(\vec{E}_n^\pm)^* dV d\tau = \\
&= \sum_{m=1}^{M_{k,s}} \left(\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\tau_k}^{\tau_k+\Delta\tau} q \cdot v_m \cdot e^{-i\tau} e^{\pm\Gamma_{n,s}^* z_m(\tau)} \cdot e_{zn,s}^*(R) \cdot d\tau \right) = \\
&= \sum_{m=1}^{M_{k,s}} \left(\frac{\delta\tau}{2\pi} \cdot \sum_{\tau=\tau_k, \delta\tau}^{\tau_k+\Delta\tau} q \cdot v_m(\tau) \cdot e^{-i\tau} e^{\pm\Gamma_{n,s}^* z_m(\tau)} \cdot e_{zn,s}^*(R) \right).
\end{aligned} \tag{2.26}$$

2.3 Особенности моделирования

2.3.1 Алгоритм решения

Как было сказано в начале главы, для решения задачи использовался матричный много-модовый метод. Стоит подробнее остановиться на его реализации. Моделирование задачи можно свести к следующему алгоритму:

1. Задание геометрии системы и определение констант, т. е. задаются массивы данных, связанных с величиной радиуса волновода на каждом участке. Здесь же для каждого участка определяются постоянные распространения, волновые сопротивления и т. п.
2. Задание не меняющихся со временем матриц, например, интегралов сшивания (методом Гаусса численного интегрирования).
3. Задание параметров пучка и расчёт его движения. Здесь методом Рунге-Кутты решаются уравнения движения пучка 2.24, и на основе полученных интегралов $\eta^\pm$ решается уравнение 2.22 методом прогонки.
4. Пересчёт матриц, связанных с движением пучка (амплитуд полей).

Для уменьшения времени решения данный алгоритм был распараллелен для работы на нескольких процессорах вычислительной машины с помощью библиотек OpenMP для языка Fortran 90. Принципиально здесь можно распараллелить только процесс получения статических матриц и процесс моделирования электронных струй (электронный поток представляет из себя набор равномерно распределённый по углу струй), что и было проведено в данной работе. Статические матрицы можно вычислять отдельно для каждого регулярного участка, т. к. в них нет зависимости между собой, а распараллеливание процесса движения электронного потока можно выполнить только в том смысле, что движение каждой электронной струи будет вычисляться на отдельном процессоре, т. е. взаимодействия между этими струями в данном случае не будет. Сам же процесс вычисления движения электронной струи распараллелить невозможно, т. к. в нём используется метод Рунге-Кутты, который на каждой текущей итерации использует результаты предыдущей (см. следующий раздел).

2.3.2 Используемые численные методы

Метод прогонки

Метод прогонки [7] используется для решения систем линейных алгебраических уравнений вида $Ax = F$, где A – трёхдиагональная матрица.

Уравнение $Ax = F$ равносильно соотношению

$$A_i x_{i-1} + C_i x_i + B_i x_{i+1} = F_i. \tag{2.27}$$

Метод прогонки основывается на предположении, что искомые неизвестные связаны соотношением:

$$x_i = \alpha_{i+1}x_{i+1} + \beta_{i+1}, \text{ где } i = n-1, n-2, \dots, 1. \quad (2.28)$$

Используя это соотношение, выразим x_{i-1} и x_i через x_{i+1} и подставим в уравнение (2.27):

$$(A_i\alpha_i\alpha_{i+1} + C_i\alpha_{i+1} + B_i)x_{i+1} + A_i\alpha_i\beta_{i+1} + A_i\beta_i + C_i\beta_{i+1} - F_i = 0,$$

где F_i – правая часть i -го уравнения. Это соотношение будет выполняться независимо от решения, если потребовать

$$\begin{cases} A_i\alpha_i\alpha_{i+1} + C_i\alpha_{i+1} + B_i = 0, \\ A_i\alpha_i\beta_{i+1} + A_i\beta_i + C_i\beta_{i+1} - F_i = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует:

$$\begin{cases} \alpha_{i+1} = \frac{-B_i}{A_i\alpha_i + C_i}, \\ \beta_{i+1} = \frac{F_i - A_i\beta_i}{A_i\alpha_i + C_i}. \end{cases}$$

Из первого уравнения получим:

$$\begin{cases} \alpha_2 = \frac{-B_1}{C_1}, \\ \beta_2 = \frac{F_1}{C_1}. \end{cases}$$

После нахождения прогоночных коэффициентов α и β , используя уравнение (2.28), получим решение системы. При этом,

$$\begin{aligned} x_i &= \alpha_{i+1}x_{i+1} + \beta_{i+1}, i = n-1, \dots, 1, \\ x_n &= \frac{F_n - A_n\beta_n}{C_n + A_n\alpha_n}. \end{aligned}$$

Метод Рунге-Кутты

Формально, методом Рунге — Кутты является [7] модифицированный и исправленный метод Эйлера, они представляют собой схемы второго порядка точности. Рассмотрим задачу Коши:

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0.$$

Тогда приближённое значение в последующих точках вычисляется по итерационной формуле:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Вычисление новых значений проходит в четыре стадии:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n), \\ k_2 &= hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_1), \\ k_3 &= hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_2), \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3), \end{aligned}$$

где h – величина шага сетки по x .

Этот метод имеет четвёртый порядок точности, то есть суммарная ошибка на конечном интервале интегрирования имеет порядок $O(h^4)$ (ошибка на каждом шаге порядка $O(h^5)$).

Метод Гаусса численного интегрирования

Метод Гаусса – метод численного интегрирования [7], позволяющий повысить алгебраический порядок точности методов на основе интерполяционных формул путём специального выбора узлов интегрирования без увеличения числа используемых значений подынтегральной функции. Метод Гаусса позволяет достичь максимальной для данного числа узлов интегрирования алгебраической точности.

Например, для двух узлов можно получить метод 3-го порядка точности

$$I \approx \frac{b-a}{2} \left(f\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right) \right)$$

тогда как для равноотстоящих узлов метода выше 2-го порядка получить невозможно. В общем случае, используя n точек, можно получить метод с порядком точности $2n - 1$. Значения узлов метода Гаусса по n точкам являются корнями полинома Лежандра степени n . Значения весов вычисляются по формуле $a_i = \frac{2}{(1-x_i^2)[P'_n(x_i)]^2}$, где P'_n – первая производная полинома Лежандра.

Для $n = 3$ узлы и веса имеют следующие значения: $x_{1,3} = \pm\sqrt{0,6}$, $x_2 = 0$, веса: $a_{1,3} = \frac{5}{9}$, $a_2 = \frac{8}{9}$ (полином определен на отрезке $[-1; 1]$).

Наиболее известен метод Гаусса по пяти точкам.

Глава 3

Многоволновой релятивистский генератор с выходной дифракционной секцией. Результаты моделирования

3.1 Постановка задачи

Как было сказано, в данной задаче численно исследуются резонансные режимы гибридного двухсекционного генератора черенковского и дифракционного излучения (рис. 3.1), который имеет вид двух соединённых гладкой трубой дрейфа отрезков периодического круглого сверхразмерного волновода с неоднородностями в форме полуторов на пьедестале, аналогичных использованным в экспериментальных исследованиях [1].

Геометрические размеры первой секции обеспечивают черенковское взаимодействие релятивистского электронного потока и поля периодического волновода. Во второй (выходной) секции осуществляется дифракционное излучение промодулированного потока. Использование дифракционного излучения во второй секции позволяет уменьшить напряжённость поля вблизи металлической поверхности и, тем самым, уменьшить вероятность высокочастотного пробоя, ограничивающего длительность импульса.

Для реализации электронной селекции мод возбуждение первой секции происходит на частоте, близкой к частоте π -вида колебаний низшей аксиально-симметричной моды волновода. Условия синхронизма потока и поля при этом имеют вид:

$$\frac{\omega}{v_0} \cdot d_1 \approx \pi,$$

где ω – собственная частота, v_0 – скорость электронов в потоке при заданном значении ускоряющего напряжения, d_1 – период неоднородностей первой секции структуры. Для заданной частоты генерации использование данной формулы позволяет определить период неоднородностей первой секции генератора.

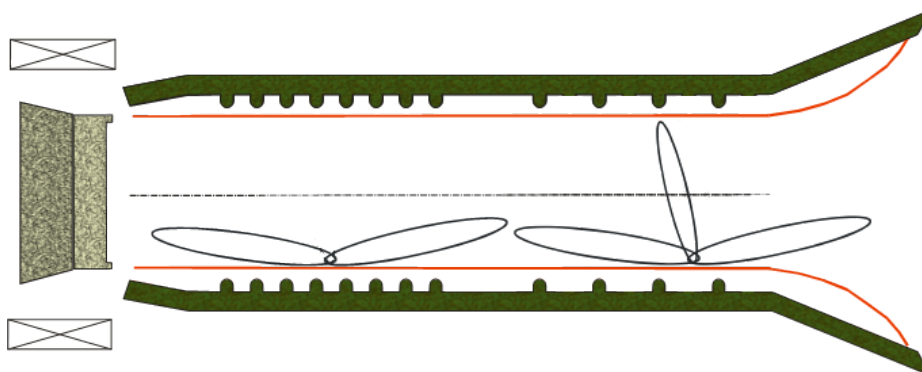


Рис. 3.1: Вид двухсекционной структуры МВЧГ-РДГ

Период неоднородностей второй секции будет подбираться из тех соображений, чтобы при возбуждении периодической структуры заданным током на той же частоте, которая является резонансной для первой секции, удовлетворялись условия резонансного взаимодействия вблизи частоты 2π -вида колебаний для второй секции, присущие дифракционному генератору, т. е. условия синхронизма для второй секции имеют вид

$$\frac{\omega}{v_0} \cdot d_2 \approx 2\pi,$$

где d_2 – период неоднородностей второй секции.

Далее будут исследованы особенности возбуждения несимметричных мод в первой черенковской секции данного генератора согласно теоретической методике, описанной в предыдущей главе. В ряде экспериментов было показано [1], что в таких сверхразмерных системах ($D/\lambda \sim 3$) возбуждается множество мод, в том числе несимметричных.

3.2 Геометрия системы и выбор основных параметров

3.2.1 Резонансные свойства отдельных секций

Для построения системы была выбрана основа в виде черенковской секции с 15 периодами неоднородности (подробное описание будет приведено в разделе 3.2.3). Такая система показала хороший КПД и оптимальные стартовые токи в предыдущих исследованиях [2].

Для каждой секции были проведены исследования по изучению АЧХ, возбуждаемым электронным пучком. Диапазон частот был выбран таким образом, чтобы можно было наблюдать колебания на π -виде первой секции и, соответственно, на 2π -виде второй, т.е. измерения проходили в области 5,6 – 11,9 ГГц. Результаты приведены на рис. 3.2. За основу был взят максимум первой секции (черенковской), находящийся на π -виде (11,1 ГГц), к которому подгонялся максимум АЧХ 2π -вида второй секции (дифракционной). Вторым резонансный пик второй секции в районе частоты $6,5 \cdot 10^{10}$ рад/сек соответствует открытию в данной многомодовой системе объемных мод более высокого порядка. Видно, что данные системы наилучшим образом вступают в суперпозицию, когда вторая секция имеет длину периода равной 3,12 см. Данный результат и стал основой для дальнейших исследований.

3.2.2 Стартовые условия самовозбуждения отдельных секций

Далее было проведено исследование стартовых токов полученных секций. Задача состояла в том, что было необходимо сделать первую секцию предстартовой, т. е. в ней данный ток должен запустить режим генерации излучения, тогда как у второй секции стартовый ток должен быть немного выше, чтобы она не давала сильного искажения получаемого спектра. Стартовым же током называется такая сила тока электронного пучка, при которой генерация данной системы не затухает со временем, т. е. система продолжает генерировать э/м излучение на протяжении всего рассматриваемого временного промежутка.

Полученные графики приведены на рисунках ниже. На графиках 3.3а, 3.4а, 3.5а видно, как со временем изменяется выходная мощность у отдельных черенковской и дифракционной (7 и 8 периодов неоднородности) секций, а на графиках 3.3б, 3.4б, 3.5б изображены спектры на выходе таких секций. Видно, что стартовый ток у черенковской секции установился в районе 17 кА, а у секции РДГ, содержащей 7 периодов неоднородности, стартовый ток составляет примерно 21 кА, тогда как у аналогичной секции с 8 периодами стартовый ток оказался в районе 17 кА. Отсюда можно заключить, что наилучшим образом для нашей задачи подходит первая черенковская секция с подключённой к ней через трубу дрейфа дифракционной секцией с 7-ю периодами неоднородности.

Из данных графиков видно, что стартовый ток секции МВЧГ установился в районе 17 кА (рис. 3.3а), тогда как секция РДГ на измеренных токах (в том числе при 17 кА) не

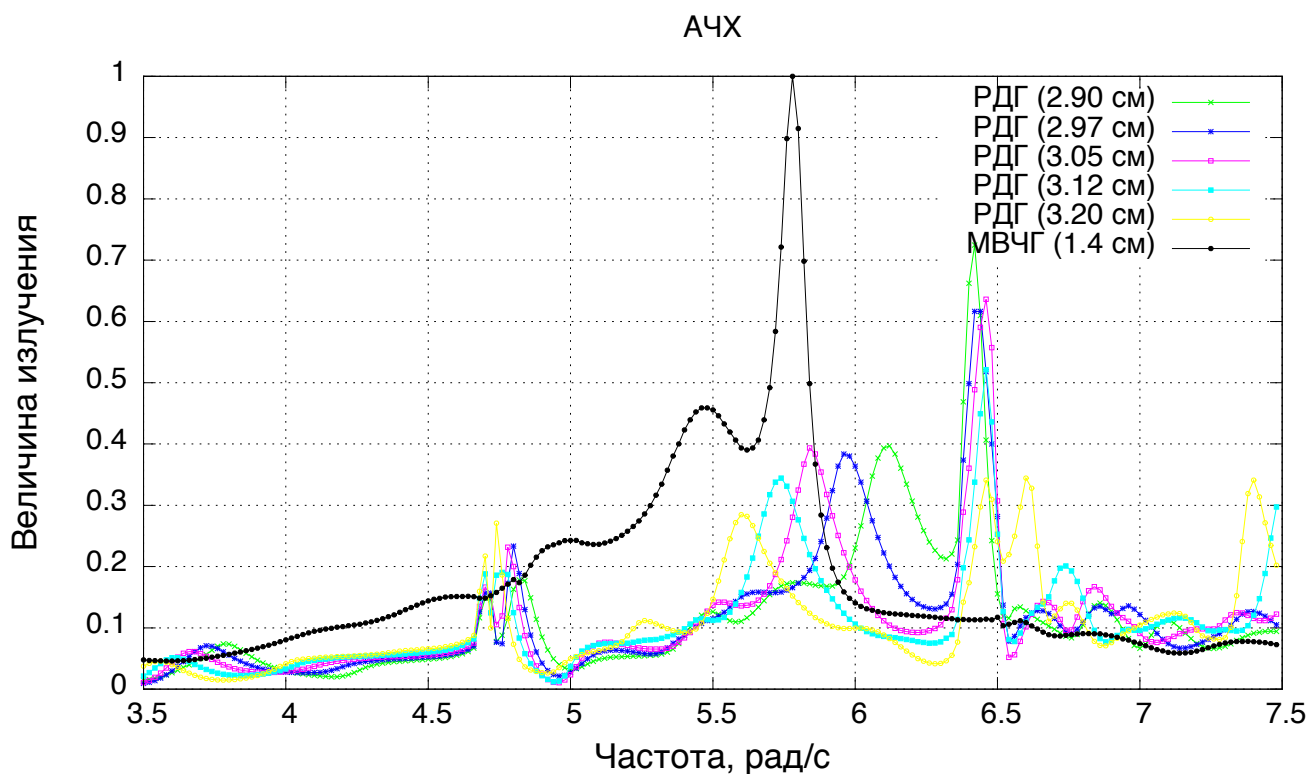


Рис. 3.2: Зависимость величины излучения от частоты для каждой секции в отдельности

генерирует, но имеет предгенерационный характер излучения. Она хорошо согласуется и по спектру с секцией МВЧГ (рис. 3.46 и рис. 3.36), хоть и имеет небольшие отклонения. Данные отклонения невозможно устранить путём изменения длины периода этой секции, т. к. в этом случае будут наблюдаться отклонения от выбранного максимума АЧХ секции МВЧГ (рис. 3.2)

3.2.3 Выбор геометрии электродинамической системы многоволнового генератора с выходной дифракционной секцией

Из полученных выше результатов можно составить окончательный вид системы:

- Первая секция – МВЧГ:

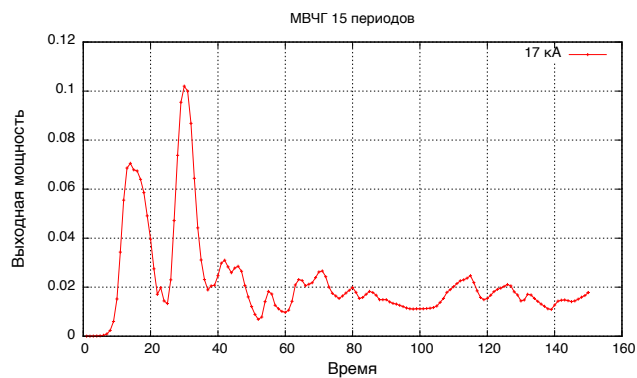
Число периодов	Тип неоднородности	Внутренний радиус, см
15	полупер	5,2
Внешний радиус, см	Длина гладкого участка, см	Длина неоднородности, см
5,55	0,75	0,65

- Труба дрейфа: Длина – 1 см
- Вторая секция – РДГ:

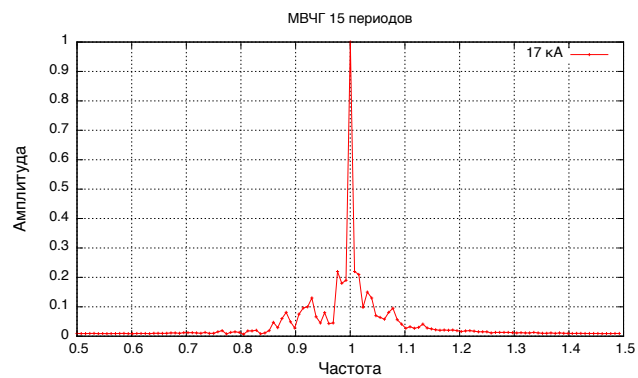
Число периодов	Тип неоднородности	Внутренний радиус, см
7	полупер	5,2
Внешний радиус, см	Длина гладкого участка, см	Длина неоднородности, см
5,55	2,475	0,65

Параметры электронного пучка были следующими:

Сила тока, А	Напряжение, кВ	Радиус пучка, см
17000	1260	4,6

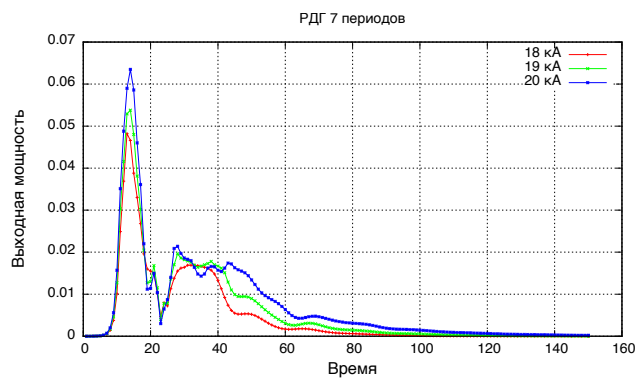


(а) Зависимость излучения от времени

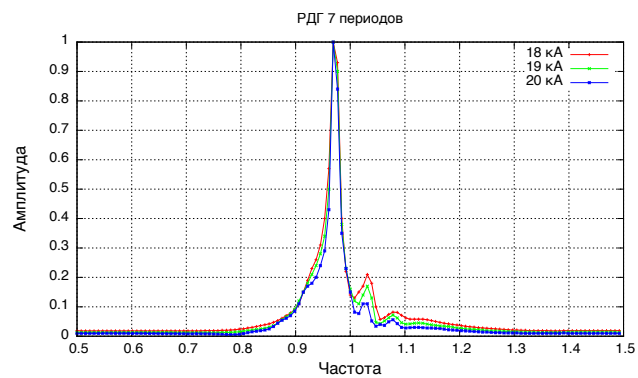


(б) Спектр излучения

Рис. 3.3: Секция черенковского генератора

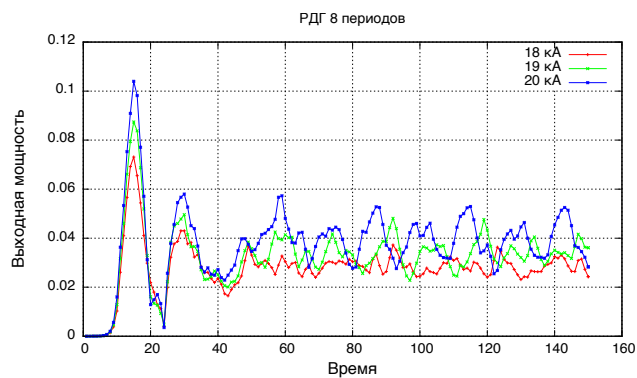


(а) Зависимость излучения от времени

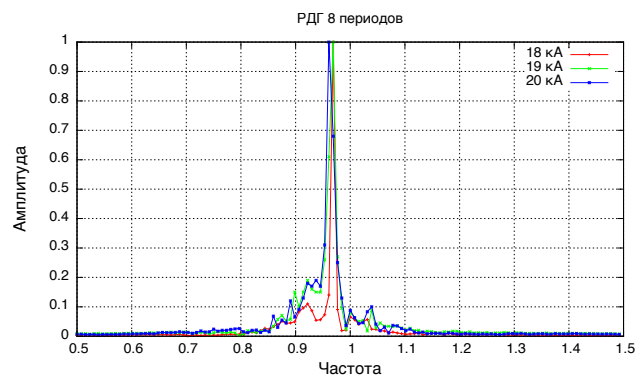


(б) Спектр излучения

Рис. 3.4: РДГ (7 периодов)



(а) Зависимость излучения от времени



(б) Спектр излучения

Рис. 3.5: РДГ (8 периодов)

3.3 Взаимодействие потока и поля в релятивистском многоволновом генераторе комбинированного типа

3.3.1 Особенности самовозбуждения генератора

С приведёнными выше параметрами системы было проведено численное моделирование, результаты которого можно увидеть на графиках 3.6а и 3.6б. На первом из них можно увидеть изменение выходного излучения в зависимости от времени, а на втором его спектр после последней временной итерации.

Можно отметить, что КПД такой системы оказался $\sim 10\%$, соответственно, при заданных параметрах электронного пучка мощность генератора получилась равной ~ 2 ГВт. Основной пик спектра излучения такой системы оказался не на одной частоте, что обусловлено конечными размерами такой системы и, скорее всего, тем, что секции не были чётко синхронизированы по частоте между собой, что видно из приведённых выше спектров каждой секции в отдельности.

3.3.2 Структура электромагнитных полей

Согласно поставленной задаче, необходимо убедиться, что поверхностная ε/μ волна, созданная в первой секции, действительно переходит в объёмную во второй. Для этого посмотрим, как выглядят компоненты ТЕ-волны e_r и e_z на протяжении всей системы (рис. 3.7 и 3.8). Сама же система изображена на рис. 3.9, где синими линиями разделены участки, в пределах которых рассмотрены амплитуды электрического поля.

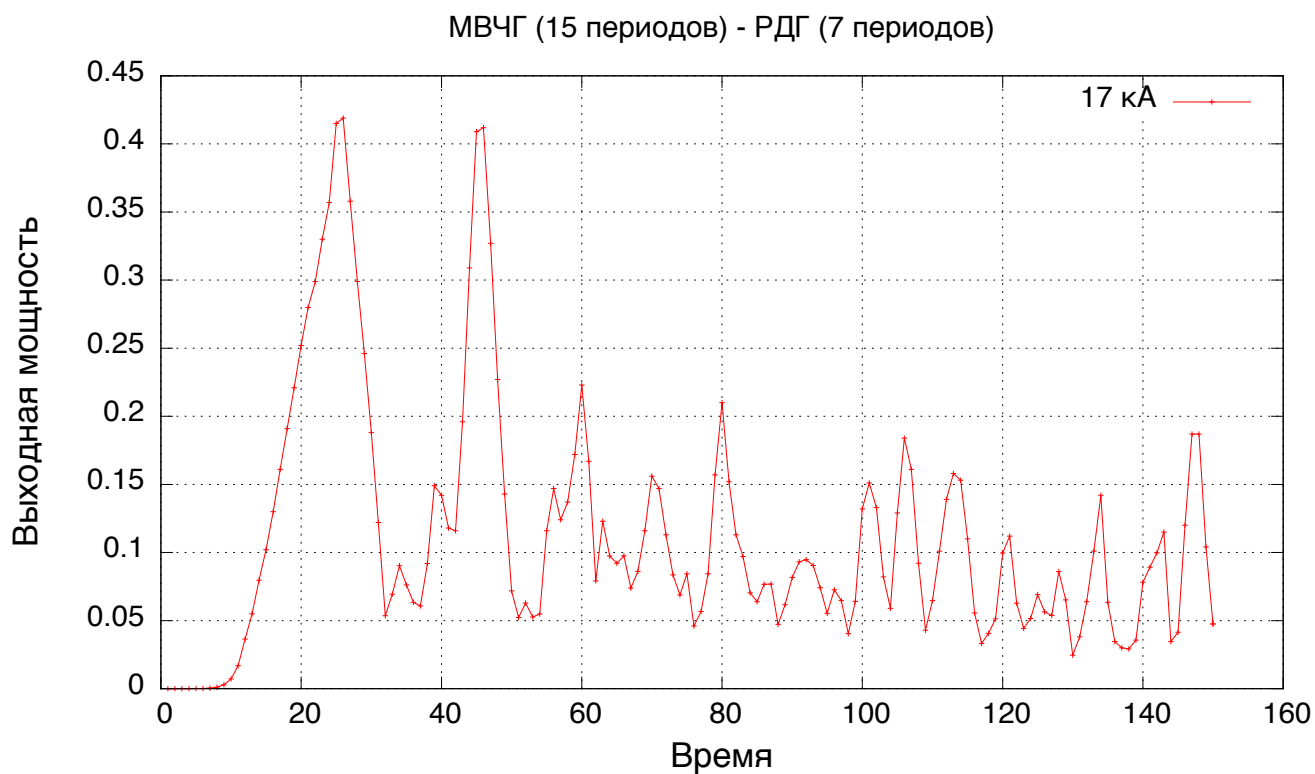
Сначала рассмотрим компоненту e_r . Из представленного графика можно увидеть, как по мере прохождения волны через систему (особенно во второй секции) вблизи стенки волновода эта компонента u поля уменьшается, что говорит нам о том, что напряжённость поля становится направленной вдоль волновода. Посмотрев же на компоненту e_z , можно увидеть, что во второй секции она значительно растёт u поля вблизи границы волновода, подтверждая тем самым наше представление о преобразовании поверхностной волны в объёмную.

3.4 Особенности возбуждения несимметричных мод

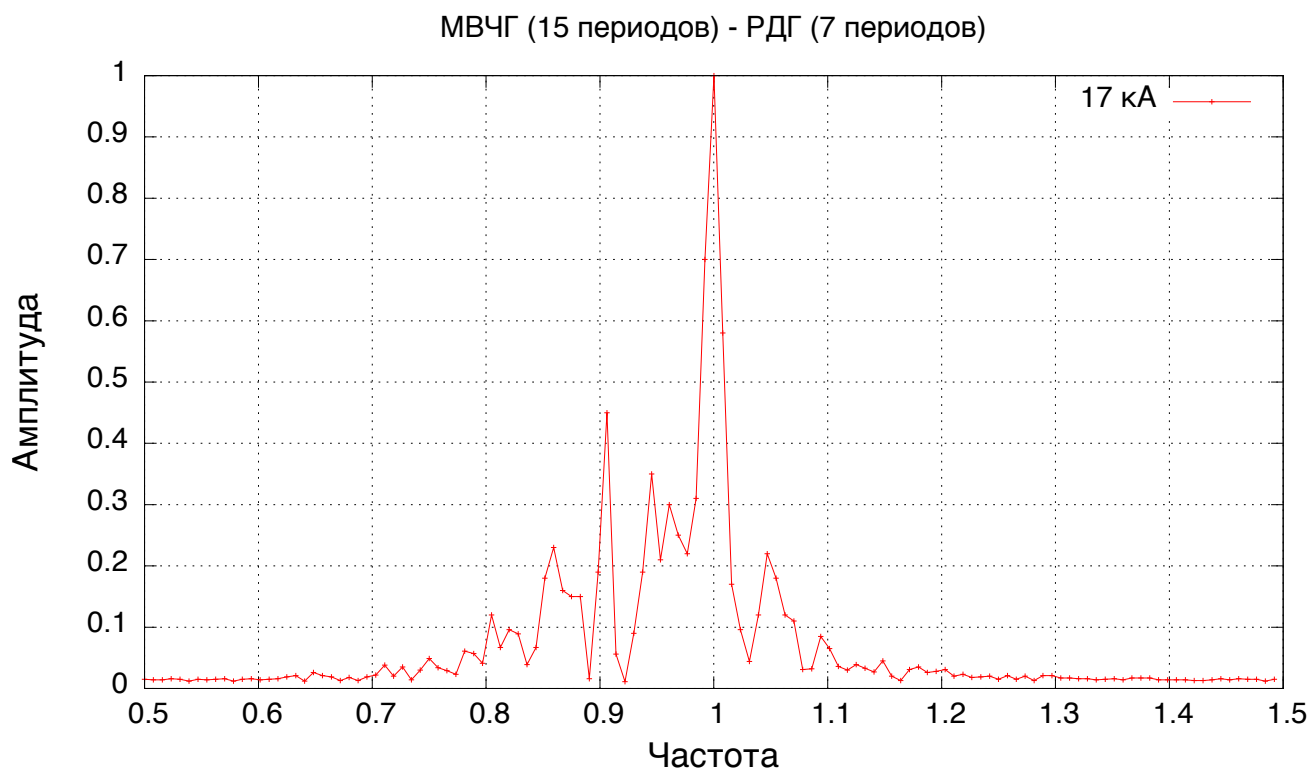
3.4.1 Исследование зависимости АЧХ от номера возбуждаемой моды

Экспериментальные исследования многоволновых генераторов показали, что наряду с аксиально-симметричным полем излучения, присутствует излучение, соответствующее возбуждению несимметричного поля [1].

Особенности возбуждения несимметричных мод были исследованы на примере 1-й секции. Отметим, что частота π -вида для поля E_{11} лежит выше, чем для поля E_{01} . Это объясняется тем, что у данной моды граница полосы непрозрачности находится выше, что следует из решения задачи на собственные функции для данного волновода. Поскольку границы полос прозрачности отличаются, то и АЧХ при возбуждении E_{01} и E_{11} отличаются друг от друга. Резонансные свойства систем исследовались при возбуждении полем на входе системы или промодулированным электронным потоком. Результаты, полученные в ходе этой работы можно увидеть на рис. 3.10. На этом графике видно, как поле мод E_{01} и E_{11} , возбуждённое на разных частотах проходит через систему. Можно отметить, что более позднее появление полосы непрозрачности у моды E_{11} по сравнению с модой E_{01} хорошо согласуется с теоретическим представлением дисперсионной характеристики этих мод для периодической системы, а периодический характер мощности поля в области $2d/\lambda < 0,87$ связан с возбуждением и отражением от неоднородностей обратных волн разных гармоник. Отметим ещё положение каждого минимума для АЧХ. Хорошо видно, что для моды E_{11} все минимумы меньше,



(а) Зависимость излучения от времени



(б) Спектр выходного излучения

Рис. 3.6: МВЧГ-РДГ

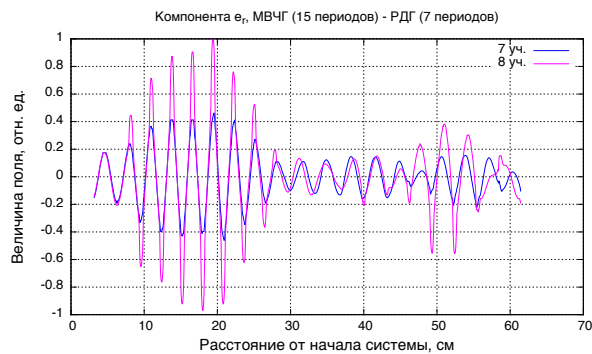


Рис. 3.7: Компонента e_r

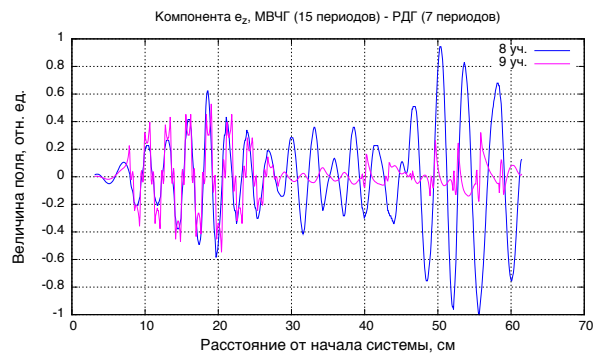


Рис. 3.8: Компонента e_z

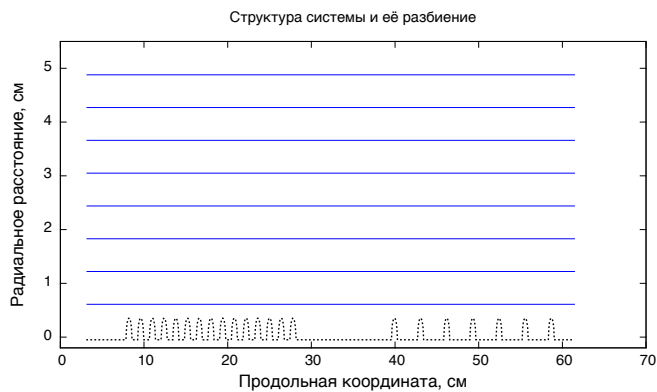


Рис. 3.9: Структура системы и её продольное разбиение для анализа поля

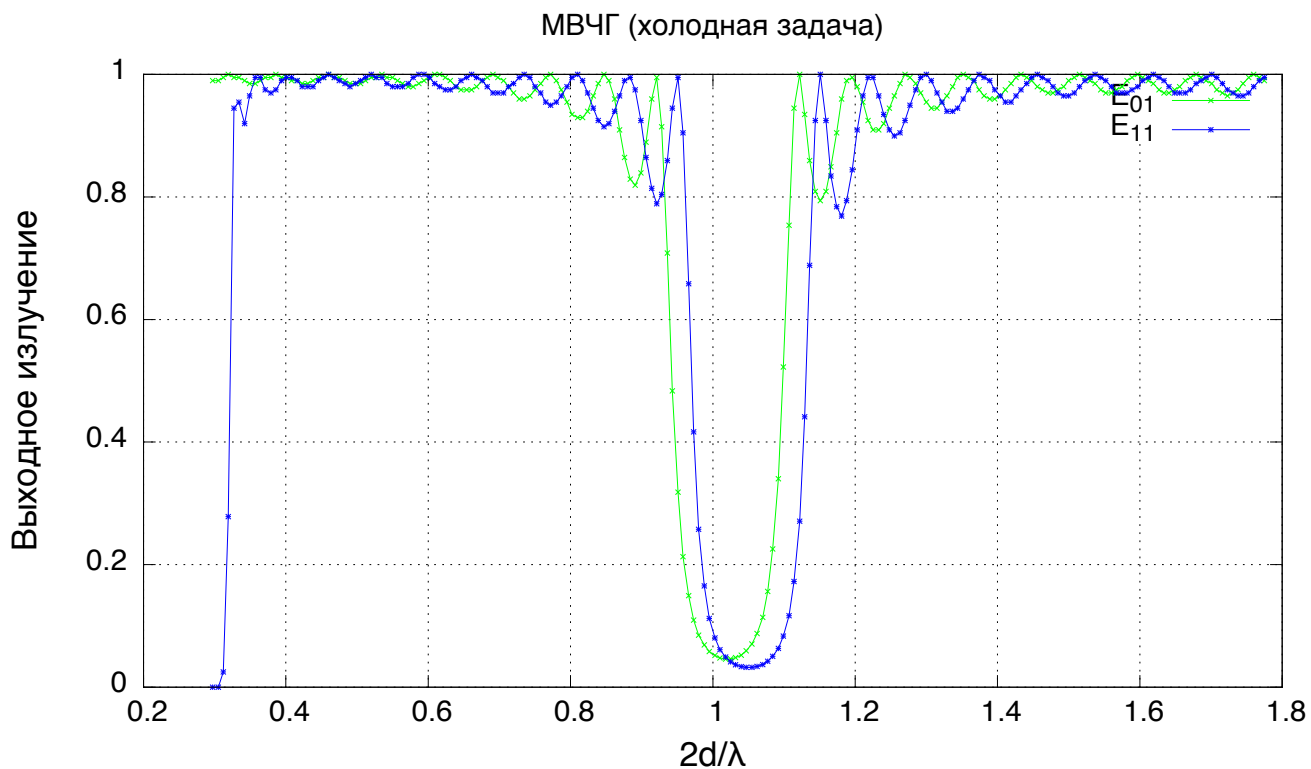


Рис. 3.10: АЧХ первой секции системы при различных возбуждаемых полях модах

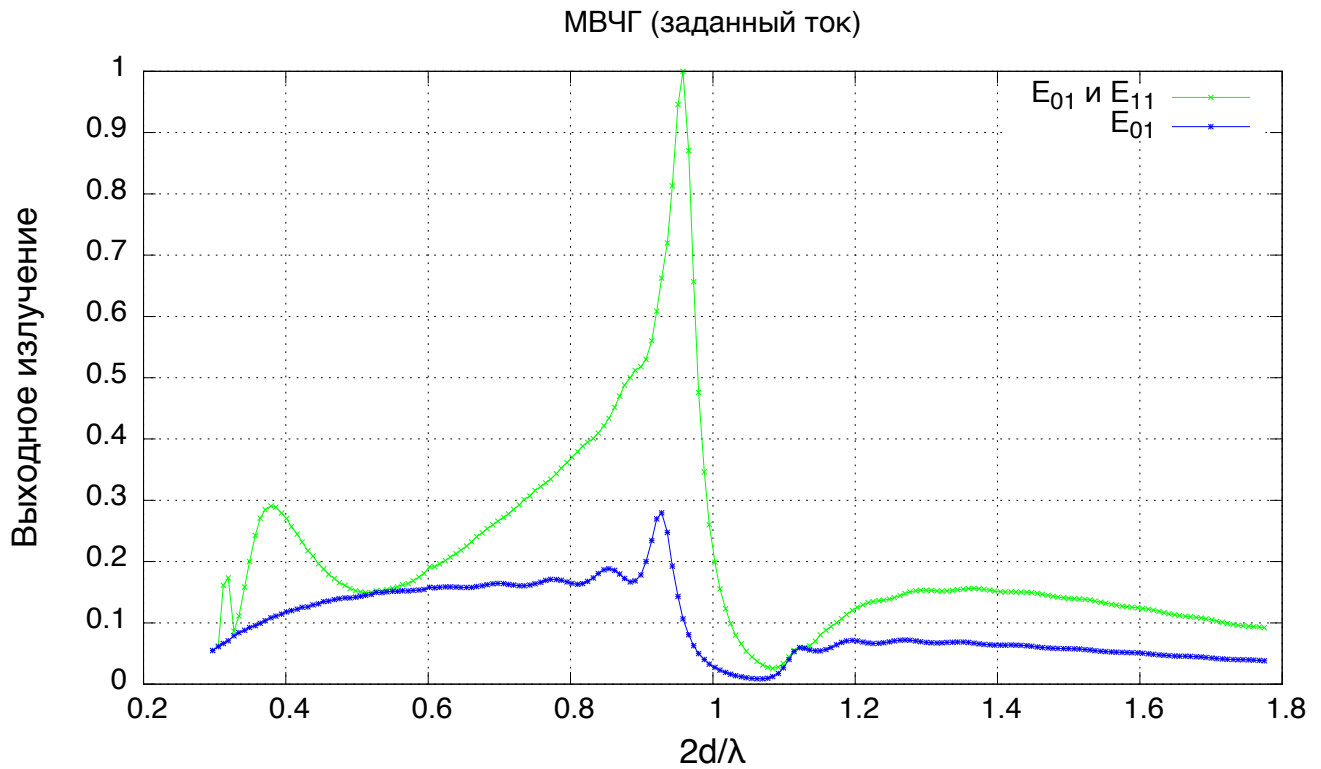


Рис. 3.11: Зависимость величины излучения от частоты при возбуждении пучком (заданный ток)

чем для моды E_{01} . Это прямо следует из решения уравнений Максвелла гладкого круглого волновода (2.3): корни функций Бесселя для моды E_{11} меньше аналогичных для моды E_{01} .

3.4.2 Исследование системы в режиме заданного тока

Изучение взаимодействия э/м поля несимметричных мод с пучком проводилось в режиме заданного тока. Было предложено посмотреть, как на разных частотах электронный пучок возбуждает поле в волноводе первой секции (МВЧГ). Результаты данного исследования приведены на рис. 3.11. На этом графике можно увидеть две кривые, показывающие резонансные отклики системы на прохождение через неё электронного пучка при учёте одной или двух мод. Можно увидеть характерные пики для обоих случаев: при учёте всего одной моды E_{01} основной резонанс находится на частоте $2d/\lambda = 0,921$, тогда как при учёте двух мод — E_{01} и E_{11} , резонансный пик наблюдается на частоте $2d/\lambda = 0,951$. Полученный результат хорошо согласуется с представленными АЧХ на рис. 3.10. Можно увидеть, что указанные выше пики имеются на данной АЧХ у соответствующих им мод на частотах $2d/\lambda = 0,928$ и $2d/\lambda = 0,958$.

Стоит подробнее остановиться на слабом проявлении резонансного пика, принадлежащего моде E_{01} , на АЧХ в режиме заданного тока с учётом двух мод. Данный эффект объясняется тем, что в этом режиме пучок представлял из себя некоторую струю, которая была смещена от центра системы на определённый радиус. Данное смещение оказало больший эффект на возбуждение несимметричной моды, нежели симметричной (пучок может по-разному взаимодействовать с модами на разных радиусах), поэтому этот пик проявляется в значительно меньшей степени.

Заключение

Основные результаты и выводы

1. Создана теоретическая модель взаимодействия релятивистского электронного потока с электромагнитным полем сверхразмерного нерегулярного волновода с учётом возбуждения несимметричных мод, проработана методика вычисления этих мод, реализовано взаимодействие такого поля с электронным пучком.
2. Создана программа численного моделирования взаимодействия эллипсоидального электронного потока и электрического поля сверхразмерного нерегулярного волновода с учётом возбуждения несимметричных полей и проведено её необходимое тестирование. Также эта программа была распараллелена между вычислительными процессорами с помощью современных средств программирования, что упростит дальнейшую её эксплуатацию.
3. Разработана схема двухсекционного релятивистского генератора, в первой секции которого осуществляется черенковское взаимодействие потока и поля, а во второй – дифракционное излучение сгруппированного электронного потока.

Показано, что эффективность такого генератора превышает 10%, что позволяет ожидать получения мультигигаватных уровней мощности при оптимизации системы.

Показано, что во второй секции генератора поверхностная волна эффективно преобразуется во второй секции в объёмное поле дифракционного излучения. Этот эффект ведёт к снижению вероятности пробоя и удлинению импульса генерации.

Показано, что в рассматриваемом генераторе поле несимметричной моды E_{11} является замедленным, т. е. может быть в синхронизме с электронным потоком. Особенности самовозбуждения генератора на этой моде требуют дополнительного исследования.

Литература

- [1] С. П. Бугаев, В. И. Канавец, В. И. Кошелев, В. А. Черепенин. *Релятивистские многоволновые СВЧ-генераторы*. // Новосибирск: Наука. Сиб. отделение.
- [2] В. И. Канавец, Ю. Д. Мозговой, А. И. Слепков. *Изучение мощных электронных потоков в резонансных замедляющих системах*. // Радиотехника и электроника, Т. 20, 10. 1975 г.
- [3] В. П. Шестопалов. *Дифракционная электроника*.
- [4] С. П. Бугаев, А. Н. Власов, В. И. Канавец, А. Д. Копенкин, В. И. Кошелев, В. И. Корниенко, В. А. Попов, В. А. Черепенин. *Релятивистские дифракционные генераторы*. // Релятивистская высокочастотная электроника. Вып. 6. Горький: Изд. ИПФ ФН СССР. 1990.
- [5] С. П. Бугаев, В. И. Канавец, А. И. Климов, В. И. Кошелев, В. А. Черепенин. *Релятивистские многоволновые генераторы объёмных волн*. // Генераторы и усилители на релятивистских электронных потоках. Сборник.
- [6] Слепков А. И. *Изучение мощных электронных потоков в резонансных периодических электродинамических системах*. // Диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук. 2005 г.
- [7] Калиткин Н. Н. *Численные методы*.
- [8] Никольский В. В. *Теория электромагнитного поля*. // М.: Высшая школа 1961.
- [9] Никольский В. В., Никольская Т. И. *Электродинамика и распространение радиоволн*. // М. Наука, 1973.
- [10] Бугаев С. П., Канавец В. И., Кошелев В. И., Черепенин В. А. *Релятивистский многоволновой черенковский генератор*. // Письма ЖТФ, 1983, № 22
- [11] Г. Н. Ватсон *Теория бесселевых функций*. // 1949
- [12] Бугаев С. П., Канавец В. И., Кошелев В. И., Попов В. А., Слепков А. И., Фёдоров А. В., Черепенин В. А. *Исследование многоволнового черенковского генератора миллиметрового диапазона гигаваттного уровня мощности*. // Радиотехника и электроника, 1989, т. 33, вып. 2
- [13] Корниенко В. Н., Черепенин В. А. *Численная трёхмерная модель динамики электромагнитного поля в многоволновом черенковском генераторе*. // Радиотехника и электроника. 2003, т. 47, № 6
- [14] Гинзбург В. Л. *Теоретическая физика и астрофизика. Дополнительные главы*.
- [15] Ландау Л. Д. *Теория поля* // 6-е издание, М.: Наука, 1973

- [16] **А. И. Слепков, О. В. Галлямова, А. А. Демидов** *Исследование механизмов взаимодействия потока и поля в сильноточном СВЧ-генераторе гибридного типа РДГ-МВЧГ*
// Труды 15 межвузовской научной школы молодых специалистов «Концентрированные потоки энергии в космической технике, электронике, экологии и медицине», 2014 г.