

Семинар. Интерференция от протяженного источника света.

В данном тексте повторяется и материал из конспекта лекций

1. Получение интерференционной картины в оптическом диапазоне возможно только в случае, когда интерферирующие волны исходят из одного источника. В схеме Юнга свет от точечного источника падает на плоскость с двумя бесконечно узкими щелями: именно они и являются вторичными когерентными источниками, дающими на экране интерференционную картину. Вопрос: как изменится картина, если источник станет **протяженным**? Протяженный источник представляет собой совокупность **некогерентных** точечных источников, поэтому для расчета интерференции необходимо **просуммировать интенсивности**, даваемые каждым из точечных (бесконечно малых) фрагментов источника.

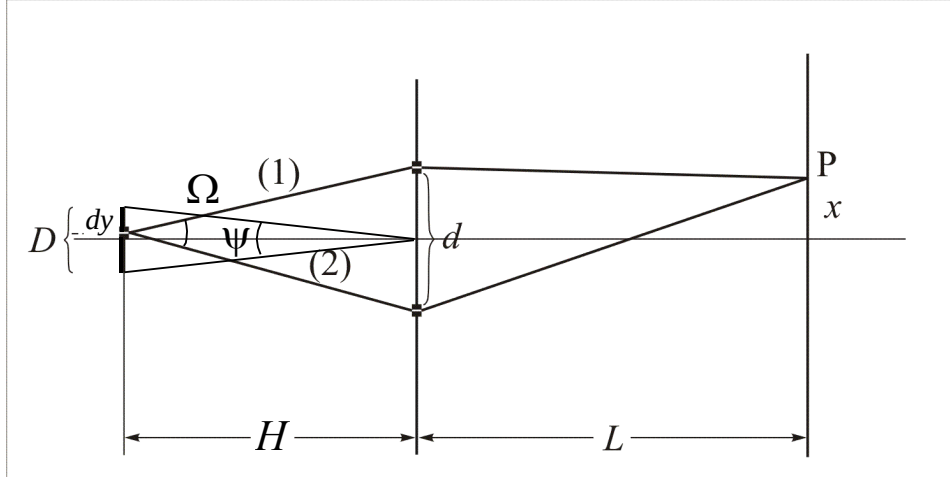


Рис. 1. К расчету интерференции от протяженного источника.

Пусть расстояние от протяженного монохроматического источника интенсивностью I_0 до плоскости со щелями равно $H \gg d$, размер равномерно светящегося источника D (рис. 1). Обозначим за y координату какой либо точки источника (источник расположен в области $|y| < \frac{D}{2}$). Дополнительная разность хода Δs_y между лучами, идущими от точки y к двум щелям, рассчитывается точно также, как и в схеме Юнга:

$$\Delta s_y = \frac{y \cdot d}{H},$$

интенсивность источника длиной dy равна $dI_{\text{ист}} = I_0 \frac{dy}{D}$.

Тогда суммарная разность хода равна $\Delta s = \Delta s_x + \Delta s_y = \frac{x \cdot d}{L} + \frac{y \cdot d}{H}$, интенсивность интерференционной картины от такого источника дается формулой:

$$dI_{\text{экp}} = dI_{\text{ист}} \cdot (1 + \cos(k(\Delta s_x + \Delta s_y))).$$

Раскрываем $\cos(k(\Delta s_x + \Delta s_y)) = \cos(k\Delta s_x) \cdot \cos(k\Delta s_y) + \sin(k\Delta s_x) \cdot \sin(k\Delta s_y)$ и интегрируем по y в пределах от $-\frac{D}{2}$ до $\frac{D}{2}$. Интеграл от $\sin(k\Delta s_y)$ в симметричных пределах дает ноль, поэтому остается:

$$I_{\text{экp}} = \frac{I_0}{D} \cdot \left(D + \cos(k\Delta s_x) \cdot \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} \cos(k\Delta s_y) dy \right) = \frac{I_0}{D} \cdot \left(D + \cos(k\Delta s_x) \cdot \left[\frac{\sin\left(k \frac{yd}{H}\right)}{k \frac{d}{H}} \right]_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} \right) =$$

$$= \frac{I_0}{D} \cdot \left(D + \cos(k\Delta s_x) \cdot \frac{\sin\left(k \frac{Dd}{2H}\right)}{k \frac{Dd}{2H}} \cdot D \right) = I_0 \cdot \left(1 + \frac{\sin\left(k \frac{Dd}{2H}\right)}{k \frac{Dd}{2H}} \cdot \cos(k\Delta s_x) \right).$$

Структура полученной формулы такая же, как и для квазимонохроматического вида, следовательно, видность картины равна

$$V(x) = \left| \frac{\sin\left(k \frac{Dd}{2H}\right)}{k \frac{Dd}{2H}} \right| = \left| \text{sinc}\left(k \frac{Dd}{2H}\right) \right|,$$

причем видность **не зависит** от x . Это означает, что по мере увеличения размеров источника видность уменьшается во ВСЕХ точках экрана, а не только по краям, как в случае с квазимонохроматическим источником (рис. 2). Видность станет равной нулю, когда

$$k \frac{Dd}{2H} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{Dd}{2H} = \pi \cdot \frac{Dd}{\lambda H} = \pi,$$

откуда условие полного пропадания интерференции запишется в виде:

$$\frac{Dd}{\lambda H} = 1.$$

Заметим, что часто фразу «полное пропадание интерференционной картины» ошибочно трактуют как отсутствие какой-либо освещенности на экране. Как следует из формул, это не так: интерференционный член становится равным нулю, а интенсивность на экране равна сумме интенсивностей каждого из источников, т.е. наблюдается равномерно засвеченное поле.

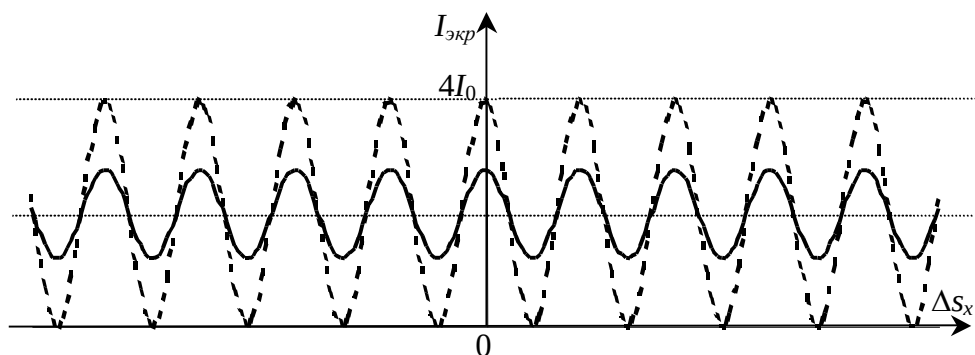


Рис. 2. Зависимость интенсивности от разности хода в случае протяженного (сплошная линия) и точечного (штриховая линия) источника.

Расстояние между щелями $d_0 = \frac{\lambda H}{D}$, при котором пропадает интерференционная

картина, называют **радиусом когерентности**. Вводя $\psi = \frac{D}{H}$ - угол, под которым виден протяженный источник от плоскости щелей (или **угловой размер источника**), получаем для радиуса когерентности

$$d_0 = \frac{\lambda}{\psi}.$$

Введем также понятие **угловой апертуры интерференции** Ω - угла, под которым из центра источника видны щели:

$$\Omega = \frac{d}{H}.$$

С учетом введенных обозначений условие нулевого значения видности можно записать в следующих видах:

$$\frac{Dd}{\lambda H} = \frac{D \cdot \Omega}{\lambda} = \frac{\psi \cdot d}{\lambda} = 1.$$

Иными словами, видность будет ненулевой, если выполнены условия:

$$D \leq \frac{\lambda}{\Omega} \text{ или } d \leq \frac{\lambda}{\psi}.$$

Формулу $\frac{Dd}{\lambda H} = 1$ легко запомнить, используя привычную схему: произведение самой большой (H) из величин на самую маленькую (λ) равно произведению двух остальных (Dd), к тому же еще эти величины обозначены одной и той же буквой.

Если источник не протяженный, а состоит из двух точечных некогерентных источников, находящихся на расстоянии D друг от друга, то картина пропадает при условии $d_0 = \frac{\lambda}{2\psi}$. Данный факт используется в звездном интерферометре Майкельсона для определения угловых расстояний между двумя близко расположенными звездами.

2. Обратим внимание на тот факт, что при вычислениях у нас появилась функция СИНК, которая ранее возникала при вычислении фурье-преобразования от прямоугольного импульса. «Поискем» его и здесь.

Действительно, СИНК появился при вычислении интеграла

$$\int_{-D/2}^{D/2} \cos(k\Delta s_y) dy.$$

Введем понятие функции излучения источника $U(y)$, характеризующей распределение излучаемой энергии по различным «точкам» источника, т.е. суммарная интенсивность, излучаемая источником, будет выражаться формулой:

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} U(y) \cdot dy.$$

(в рассмотренном выше случае $U(y) = \begin{cases} I_0/D, & |y| \leq D/2 \\ 0, & |y| > D/2 \end{cases}$).

Тогда появляется интеграл вида

$$\int_{-D/2}^{D/2} \cos(k\Delta s_y) dy \sim \int_{-\infty}^{\infty} U(y) \cos(k\Delta s_y) dy,$$

или, если потребовать четности функции $U(y)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(y) \cdot e^{ik\Delta s_y} \cdot dy$$

Данное выражение есть не что иное, как пространственное преобразование Фурье от функции излучения источника. В таком случае для видности в случае произвольного (но

симметричного) распределения излучаемой источником энергии, можно записать общую формулу:

$$V_{nrom} = \left| \frac{\int_{-\infty}^{\infty} U(y) \cdot e^{ik\Delta s_y} \cdot dy}{\int_{-\infty}^{\infty} U(y) \cdot dy} \right|.$$

Вспомним, что для точечного квазимонохроматического источника со спектральной плотностью интенсивности $S(\omega)$ ранее была получена формула:

$$V_{кваз}(\Delta t) = \left| \frac{\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot e^{i\omega \cdot \Delta t} d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega} \right|$$

(и здесь имеет место фурье-преобразование!)

Так как в обоих случаях при вычислении распределения интенсивности на экране интегрирование ведется по разным переменным (по пространственной y и по частоте ω), то нетрудно сообразить, что для квазимонохроматического протяженного источника, используемого в схеме Юнга, видность на экране будет произведением полученных ранее видностей:

$$V_{кваз_nrom} = \left| \frac{\int_{-\infty}^{\infty} U(y) \cdot e^{ik\Delta s_y} \cdot dy}{\int_{-\infty}^{\infty} U(y) \cdot dy} \right| \cdot \left| \frac{\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot e^{i\omega \cdot \Delta t} d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega} \right|.$$

Обратим еще раз внимание, что множитель V_{nrom} не зависит от пространственной переменной x (координаты точек на экране), поэтому он одинаково влияет на видность картины на всем экране сразу. В множителе $V_{кваз}(\Delta t)$ есть переменная Δt , однозначно связанная с координатой x :

$$\Delta t = \frac{\Delta s_x}{c} = \frac{x \cdot d}{L \cdot c}.$$

Так как в центре интерференционной картины (в нулевом порядке интерференции) $V_{кваз}(\Delta t = 0) \equiv 1$, то, измеряя видность в центре, можно получить оценку для размера источника D . В свою очередь, определяя, в каком порядке m_{nrom} интерференционная картина размывается, можно оценить степень монохроматичности источника:

$$m_{nrom} \approx \frac{\lambda}{\Delta \lambda}.$$

3. Рассмотрим формирование интерференционной картины от протяженного источника в схеме Юнга с другой позиции. Как отмечалось ранее, разность хода между волнами, идущими от двух отверстий O_1 и O_2 к точке экрана A с координатой x , равна:

$$\Delta s_x = \frac{d \cdot x}{L} = d \cdot \sin \psi$$

где ψ - угол между направлением ОА на точку наблюдения и горизонтальной осью ОА₀ (рис. 3). Отсюда следует, что для всех точек, лежащих на линии ОА, разность хода Δs_x одна и та же, независимо от положения экрана.

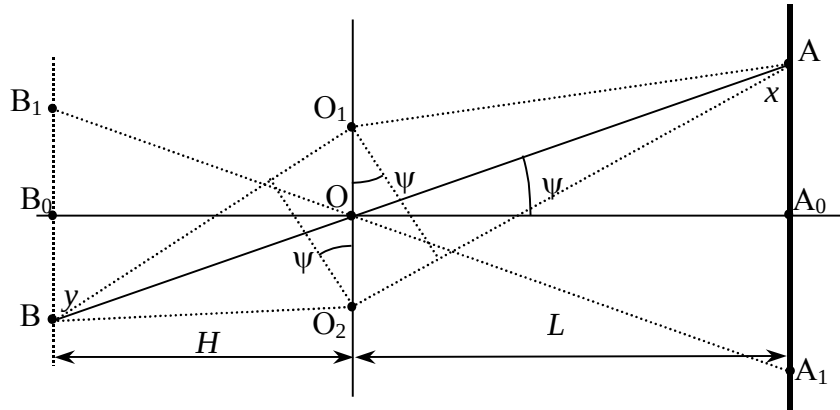


Рис. 3. К нахождению нулевого порядка интерференции при смещении источника

Поместим источник света в точку В, лежащую на продолжении линии ОА. В этом случае разность хода между волнами, идущими от источника В с координатой у до отверстий О₁ и О₂ будет точно такой же и равной

$$\Delta s_y = \frac{d \cdot y}{H} = d \cdot \sin \psi = \Delta s_x$$

(не забудем, что соотношение для разности хода справедливо при условиях $d \ll L$, $d \ll H$).

Таким образом, разность хода между путями ВО₁А и ВО₂А равна нулю. Это справедливо для произвольных положений источника и точки наблюдения, лежащих на одной прямой ВА, проходящей через середину отрезка О₁О₂ (точку О). Таким образом, при смещении источника В от оси симметрии В₀А₀ на расстояние у, точка наблюдения А, соответствующая положению максимума нулевого порядка, смещается на расстояние

$$x = \frac{L}{H} \cdot y.$$

Следовательно, любую прямую, проходящую через точку О, можно условно назвать линией «источник - нулевой порядок интерференции». Для любого положения источника на этой прямой слева от точки О максимум нулевого порядка будет находиться в любой точке прямой справа от точки О.

Полученный результат позволяет очень просто решать задачу об условии размывания интерференционной картины для протяженного источника.

За. Пусть, к примеру, имеются два точечных монохроматических ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$), но некогерентных источника В₀ и В (рис. 3). Интерференционные картины для каждого из источников будут идентичны, но максимумы нулевого порядка будут смещены друг от друга на расстояние $x = \frac{L}{H} \cdot y$. Вследствие некогерентности источников результирующая

картина будет суммой интенсивностей каждой из картин. Нетрудно сообразить, что полное пропадание картины будет тогда, когда интерференционный максимум для одного из источников придется на интерференционный минимум для другого. Это означает, что в точке А (максимуме нулевого порядка для источника В) должен находиться минимум для источника В₀, что соответствует разности хода $\Delta s_x = \frac{\lambda}{2} + m\lambda$.

Для расстояния между источниками (координаты у) получаем:

$$\Delta s_y = \frac{d \cdot y}{H} = \Delta s_x = \frac{\lambda}{2} + m\lambda,$$

$$y = \frac{H\lambda}{2d} + m \frac{H\lambda}{d}.$$

Минимальное расстояние между источниками, при котором полностью пропадает интерференционная картина, равно

$$y_0 = \frac{H\lambda}{2d}.$$

36. Теперь рассмотрим случай протяженного источника шириной D , занимающего область от B до B_1 (симметрично относительно точки B_0) (рис. 3). Максимум нулевого порядка для любого из точечных источников B' из области D будет находиться между точками A и A_1 на экране (в точке пересечения прямой, проходящей через B' и O , и экраном)

Нетрудно сообразить, что интерференционная картина пропадет, если область AA_1 на экране будет равна ширине интерференционной полосы, т.е. максимумы нулевого порядка равномерно заполнят данную область. А это означает, что в точках A и A_1 должны находиться минимумы для источника B_0 , ближайшие к максимуму нулевого порядка. Этот вывод совпадает с результатом, полученным в предыдущей задаче, в итоге имеем:

$$y_0 = \frac{H\lambda}{2d}.$$

Но ширина источника $D = 2y_0$, в результате условие пропадания интерференционной картины принимает вид:

$$D = \frac{H\lambda}{d},$$

что совпадает с результатом, полученным при интегрировании.

4. Рассмотрим конкретный интерференционный объект – бипризму (рис. 4). Напомним, что для получения характеристик интерференционной картины требовалось свести задачу к построению схемы Юнга. Ранее было получено, что изображения S_1 и S_2 точечного источника S будут находиться на расстоянии

$$d = 2\psi \cdot a = 2\theta \cdot (n-1) \cdot a$$

друг от друга. Расстояние от источников до экрана $\mathcal{E}$ равно $L = a + b$, в итоге для ширины интерференционной полосы Δx получим:

$$\Delta x = \frac{L\lambda}{d} = \frac{(a+b)\lambda}{2\theta(n-1)a}.$$

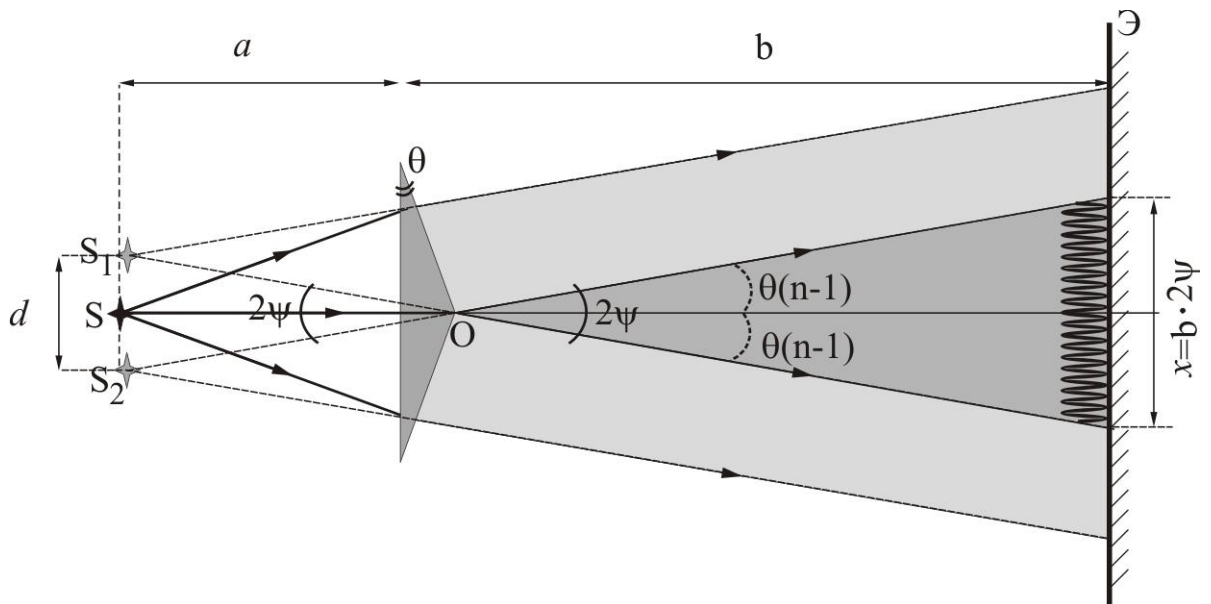


Рис. 4. Схема интерференции, получаемой с помощью бипризмы

Пусть источник S теперь имеет размер D . Рассмотрим лучи, выходящие из центра источника S и из его крайней точки B , смещенной на $D/2$ вверх от S , приходящие в центр O бипризмы (рис. 5). Угол SOB между направлениями на S и B равен

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{D}{2a},$$

именно на такой же угол повернутся и все лучи, вышедшие из B и прошедшие через бипризму (по отношению к лучам, вышедшим из S). Как следствие, вторичные источники B_1 и B_2 также сместятся вверх на $D/2$ от S_1 и S_2 . Где же для этих источников окажется максимум нулевого порядка?

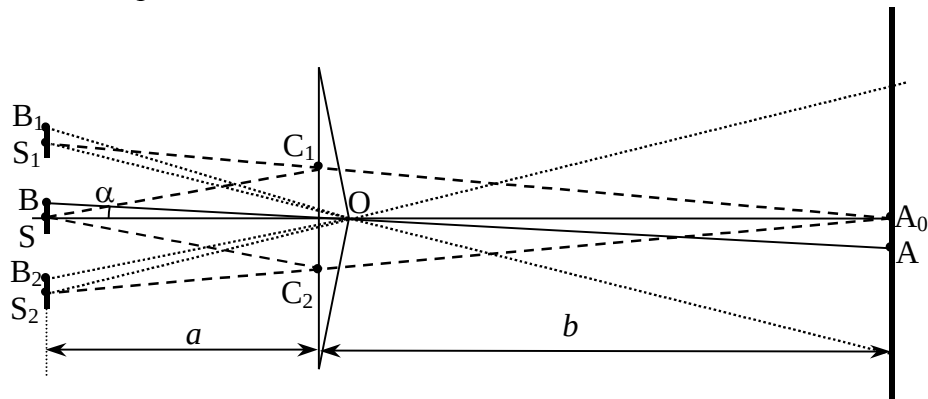


Рис. 5. К расчету интерференции от протяженного источника

На первый взгляд кажется, что и он сместится вверх на $D/2$, оказавшись на оси симметрии между источниками B_1 и B_2 . Однако это не так. Дело в том, что вследствие симметрии первоначальной задачи можно было утверждать, что источники S_1 и S_2 излучают в одинаковой фазе. Но про источники B_1 и B_2 этого сказать нельзя.

Рассмотрим лучи B_1O и B_2O , идущие от вторичных источников B_1 и B_2 до ребра бипризмы O . С точки зрения геометрии, между ними есть разность хода:

$$\Delta s_o \approx B_1O - B_2O \neq 0.$$

Однако в действительности разность хода между ними должна быть равна НУЛЮ! Ведь от реального источника B к точке O идет один единственный луч, и только после прохождения бипризмы он раздваивается, преломляясь на гранях чуть выше и чуть ниже

точки О. Следовательно, лучи «вышедшие» из изображений B_1 и B_2 , находятся в точке О в фазе. Это означает, что между самими источниками B_1 и B_2 есть разность фаз, равная

$$\Delta\varphi_0 = -k\Delta s_0,$$

компенсирующая разность хода, найденную при геометрических построениях. И эту разность фаз необходимо учитывать при расчетах.

Но можно заметить более простой способ расчета. Продолжим линию ВО до пересечения с плоскостью экрана в точке А. Эта линия проходит точно посередине между источниками B_1 и B_2 , следовательно, для каждой ее точки, как отмечалось в п.2, разность хода между лучами, идущими от B_1 и B_2 , одна и та же. Но в точке О эта разность хода равна нулю, следовательно, она равна нулю и для остальных точек, включая точку А. Следовательно максимум нулевого порядка для источников B_1 и B_2 окажется в точке А.

Все остальные рассуждения полностью идентичны приведенным в п.26. Для полного размывания картины в А должен оказаться интерференционный минимум для источника S, т.е. расстояние от центра картины A_0 до А равно половине ширины полосы $\Delta x/2$. Из пропорции

$$\frac{D/2}{a} = \frac{\Delta x/2}{b}$$

получим:

$$D = \frac{a}{b} \Delta x,$$

$$D = \frac{(a+b)\lambda}{2\theta(n-1)b}.$$

5. Возникает ощущение, что при решении задачи нам совсем не понадобились результаты, полученные в п.1 для схемы Юнга, в частности, формула $\frac{Dd}{\lambda H} = 1$.

Действительно, при выводе данной формулы рассчитывалась разность хода между лучами, идущими сначала от реального источника к отверстиям (вторичным источникам), а затем от них к точке наблюдения. Здесь же вторичные источники S_1 и S_2 находятся в одной плоскости с реальным источником S. И что же, лучи из S пойдут сначала к S_1 и S_2 , а затем в точку наблюдения на экране? Конечно, нет! Необходимо найти истинный путь, по которому лучи от источника S доходят до центра экрана.

Для этого соединим вторичные источники S_1 и S_2 с центром интерференционной картины A_0 (рис. 6). Эти линии пересекут плоскость бипризмы в точках C_1 и C_2 . Следовательно, после прохождения бипризмы лучи в точку A_0 придут именно из точек C_1 и C_2 . Значит и лучи, вышедшие из реального источника S и пришедшие затем в центр экрана A_0 , пройдут через точки C_1 и C_2 бипризмы. Таким образом, два луча проходят путями SC_1A_0 и SC_2A_0 соответственно.

Мы получили схему Юнга, идентичную рис.1, где расстояние d_0 между «источниками» C_1 и C_2 находится из пропорции:

$$\frac{d_0}{b} = \frac{d}{a+b},$$

$$d_0 = \frac{b}{a+b} d = \frac{b}{a+b} \cdot 2\theta(n-1)a.$$

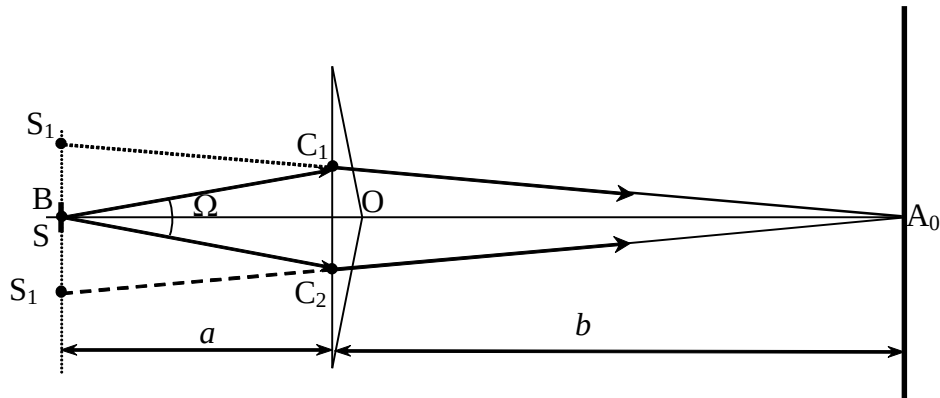


Рис. 6. Ход лучей в бипризме

В формулу для условия пропадаания картины $\frac{\lambda H}{Dd} = 1$ подставим a вместо H и «расстояние между источниками» d_0 вместо d , в итоге получим:

$$\lambda a = D \cdot \frac{b}{a+b} \cdot 2\theta(n-1)a,$$

$$D = \frac{(a+b)\lambda}{2\theta(n-1)b}.$$

Результат тот же самый, что и полученный ранее.

Заметим следующее. Ранее при расчете параметров интерференционной картины от точечного источника наша цель заключалась в нахождении положения вторичных источников – изображений. При этом мы забывали про реальный источник и считали, что интерферирующие волны «исходят» из изображений, находили расстояние между ними, расстояние от изображений до экрана и определяли параметры картины.

Для протяженного источника требуется иной подход. Необходимо найти ход лучей, идущих от реального источника к объекту и от него на экран. Положение вторичных источников позволяет найти лучи, уже прошедшие через объект, тем самым, задав и точки объекта, через которые проходят лучи. Соединив реальный источник с этими точками объекта, мы найдем апертуру интерференции. Таким образом, в формуле для условия пропадаания интерференционных полос $\frac{Dd}{\lambda H} = 1$ расстояние H - это всегда расстояние от реального источника до объекта, а расстояние d - это всегда расстояние между двумя точками на объекте, через которые проходят реальные лучи, приходящие затем в центр картины.

Подобный подход можно использовать и при рассмотрении других интерференционных схем с протяженным источником. Для этого следует изобразить ход лучей, выходящих из центральной точки реального источника и приходящих в центр интерференционной картины. Точки пересечения этих лучей с плоскостью объекта и дадут два вторичных источника, расстояние d_0 между которыми и следует подставлять в формулу $\frac{Dd_0}{\lambda H} = 1$.

Очень часто при решении задач используют понятие **угловой апертуры интерференции** Ω - угла, под которым из центра реального источника S расходятся лучи, которые затем придут в максимум нулевого порядка:

$$\Omega = \frac{d_0}{a}.$$

Условие пропадаания картины в этом случае запишется в виде:

$$D = \frac{\lambda}{\Omega}.$$

Формула очень простая, показывающая, что ограничение на размер источника можно задать всего одним параметром: угловой апертурой Ω .

Этот прием эффективен и при рассмотрении интерференции, получаемой с помощью билинзы, когда источник света находится не в фокальной плоскости. Как и для бипризмы, в этом случае вторичные источники, полученные не для центральной точки реального источника, будут излучать не в фазе.

Билинзу рассмотреть самостоятельно.

6. Рассмотрим случай, когда излучение от протяженного источника, находящегося в фокальной плоскости линзы с фокусом F , падает на бипризму. Напомним, что в случае точечного источника S за бипризмой возникали две плоские волны, сходящиеся под углом

$$2\psi = 2\theta(n-1),$$

расстояние между полосами равно:

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\psi} = \frac{\lambda}{2\theta(n-1)}.$$

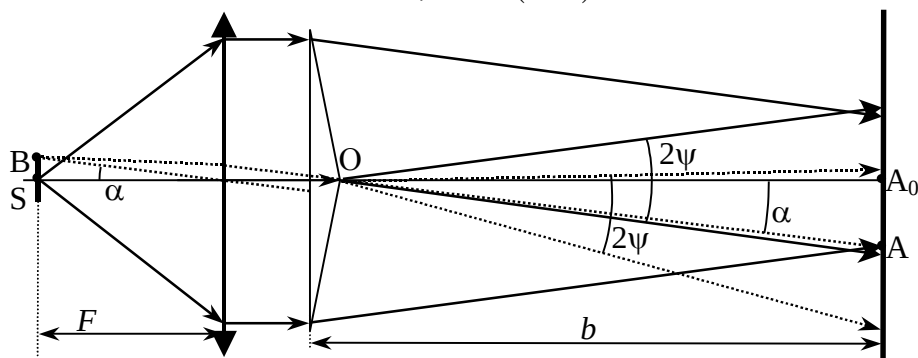


Рис. 6. Интерференция при падении параллельного пучка на бипризму.

Для источника B , смещенного от оси симметрии на $D/2$, сформированный после прохождения линзы параллельный пучок повернет на угол

$$\alpha = \frac{D}{2F}.$$

Угол схождения параллельных пучков после бипризмы будет тем же самым, а направление на максимум нулевого порядка OA будет повернуто относительно OA_0 на тот угол α .

Картина пропадет когда этот максимум попадет на минимум для центральной точки S источника, т.е. расстояние AA_0 равно половине ширины полосы $\Delta x/2$. Если расстояние от бипризмы до экрана равно b , то из условия

$$\alpha = \frac{\Delta x}{2b}$$

получим для размера источника:

$$D = \frac{F\Delta x}{b} = \frac{F\lambda}{2\theta(n-1)b}.$$

Отметим, что ширина полос Δx не зависит от положения экрана, что характерно для интерференции плоских волн. Но размер источника D , при котором пропадает интерференционная картина, обратно пропорционален расстоянию b от бипризмы до экрана.