Семинар 10. Интерференция квазимонохроматического света.

Основной материал семинара изложен в конспекте лекций по оптике для ФНМ.
Здесь только дополнительные моменты.

1. Найти распределение интенсивности на экране в схеме Юнга, если задано спектральное распределение излучения по частотам $S(\omega)$, симметричного относительно некоторой частоты ω_0.

Для монохроматического источника распределение интенсивности на экране в зависимости от разности хода Δs задается формулой:

$$I(\Delta s) = I_0 \cdot (1 + \cos(k \cdot \Delta s)).$$

Перейдем от пространственного представления к временному:

$$k \cdot \Delta s = kc \cdot \frac{\Delta s}{c} = \omega \cdot \Delta t\,,$$

где c- скорость света, $\Delta t = \dfrac{\Delta s}{c}$ - временное запаздывание.

Интенсивность света источника представима в виде:

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega,$$

тогда

$$dI(\Delta t) = S(\omega) \cdot (1 + \cos(\omega \cdot \Delta t)) d\omega.$$

Интегрируем по частотам:

$$I(\Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot (1 + \cos(\omega \cdot \Delta t)) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos(\omega \cdot \Delta t) d\omega =$$

$$= I_0 + \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos(\omega \cdot \Delta t) d\omega.$$

Вспомним, что функция $S(\omega)$ симметрична относительно некоторой частоты ω_0. Введем новую переменную

$$\Omega = \omega - \omega_0,$$

тогда

$$S(\omega) = S(\Omega + \omega_0) = f(\Omega),$$

где $f(\Omega)$ - симметрична относительно нуля.

Кроме того

$$\cos(\omega \cdot \Delta t) = \cos((\Omega + \omega_0) \cdot \Delta t) = \cos(\Omega \cdot \Delta t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot \Delta t) - \sin(\Omega \cdot \Delta t) \cdot \sin(\omega_0 \cdot \Delta t).$$

Из симметрии $f(\Omega)$ следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\Omega) \sin(\Omega \cdot \Delta t) \cdot \sin(\omega_0 \cdot \Delta t) d\Omega = 0.$$

В результате

$$I(\Delta t) = I_0 + \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos(\omega \cdot \Delta t) d\omega = I_0 + \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\Omega) \cos(\Omega \cdot \Delta t) d\Omega \right] \cdot \cos(\omega_0 \cdot \Delta t) =$$

$$= I_0\left(1 + \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\Omega)\cos(\Omega\cdot\Delta t)d\Omega}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\Omega)d\Omega}\cdot\cos(\omega_0\cdot\Delta t)\right)$$

так как $I_0 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} S(\omega)d\omega = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\Omega)d\Omega$.

Вспомним, что видность $V(\Delta t)$ интерференционной картины определяется формулой:

$$V(\Delta t) = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

где $I_{\max}$ и $I_{\min}$ - значения интенсивности в соседних максимуме и минимуме соответственно.
Из структуры формулы следует, что видность $V(\Delta t)$интерференционной картины равна:

$$V(\Delta t) = \left|\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\Omega)\cos(\Omega\cdot\Delta t)d\Omega}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\Omega)d\Omega}\right|,$$

т.е. равна модулю нормированного фурье преобразованию от формы линии в спектре излучения.
Видность принимает максимальное значение, равное 1, при $\Delta t = 0$, т.е. в центре интерференционной картины, где $\Delta s = 0$.

Графики видности и распределения интенсивностей в зависимости от формы линии приведены в Лекциях.

2. Пусть вследствие реализации какой-либо интерференционной схемы (например, схемы Юнга) в точку наблюдения приходят две одинаковые по амплитуде волны, вышедшие из одного источника. Разности хода Δs между волнами соответствует временной интервал $\tau = \frac{\Delta s}{c}$, где c – скорость света.
Волны в этом случае представимы в виде:

$$E_1(t) = E_0(t); \qquad E_2(t) = E_0(t+\tau).$$

Интенсивность пропорциональна среднему значению квадрата амплитуды:

$$I(\tau) \sim \left\langle (E_1(t) + E_2(t))^2\right\rangle = \left\langle E_1^2(t)\right\rangle + \left\langle E_2^2(t)\right\rangle + 2\langle E_1(t)E_2(t)\rangle = 2\left\langle E_0^2(t)\right\rangle + 2\langle E_0(t)E_0(t+\tau)\rangle$$

Функцию

$$B(\tau) = \langle E_0(t)E_0(t+\tau)\rangle$$

называют ***автокорреляционной функцией***.
Считая интенсивность каждой из волн равной I_0, в итоге получим:

$$I(\tau) = 2I_0 + 2B(\tau).$$

Вспомним, что если задана спектральная плотность $S(\omega)$ излучения, то для интенсивности справедливо соотношение

$$I(\tau) = 2I_0 + 2\int\limits_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\cdot\cos(\omega\tau)\cdot d\omega.$$

Таким образом, автокорреляционная функция $B(\tau)$ и спектральная плотность $S(\omega)$ излучения связаны соотношением:

$$B(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\cdot \cos\omega\tau \cdot d\omega .$$

3. О комплексной степени когерентности.
Представим волну в виде

$$E(t)=\frac{1}{2}E_0(t)\cdot e^{i\omega_0 t}+\text{к.с.},$$

где $E_0(t)$ - медленно меняющаяся амплитуда волны, запись «к.с.» означает комплексно сопряженную величину.
В этом случае

$$\langle E(t)E(t+\tau)\rangle=\left\langle\left(\frac{1}{2}E_0(t)e^{i\omega_0 t}+\frac{1}{2}E_0^*(t)e^{-i\omega_0 t}\right)\left(\frac{1}{2}E_0(t+\tau)e^{i\omega_0(t+\tau)}+\frac{1}{2}E_0^*(t+\tau)e^{-i\omega_0(t+\tau)}\right)\right\rangle=$$

$$=\frac{1}{4}\left\langle E_0(t)E_0(t+\tau)e^{i\omega_0(2t+\tau)}+E_0^*(t)E_0(t+\tau)e^{i\omega_0\tau}+\text{к.с.}\right\rangle=\frac{1}{4}\left(0+\left\langle E_0^*(t)E_0(t+\tau)\right\rangle e^{i\omega_0\tau}+\text{к.с.}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left[\left\langle E_0^*(t)E_0(t+\tau)\right\rangle e^{i\omega_0\tau}\right]=I_0\cdot\operatorname{Re}\left[\gamma(\tau)\cdot e^{i\omega_0\tau}\right],$$

где

$$\gamma(\tau)=\frac{\left\langle E_0^*(t)E_0(t+\tau)\right\rangle}{2I_0}$$

- ***комплексная степень когерентности***. Функцию

$$B^{\kappa}(\tau)=I_0\cdot\gamma(\tau)\cdot e^{i\omega_0\tau}$$

называют ***комплексной функцией корреляции***.
Если использовать представление

$$\gamma(\tau)=|\gamma(\tau)|\cdot e^{i\delta},$$

то для интенсивности получим:

$$I(\tau)=2I_0\left(1+|\gamma(\tau)|\cos(\omega_0\tau+\delta)\right).$$

Из данной формулы следует формула для видности:

$$V(\tau)=|\gamma(\tau)|.$$