

Семинар. Дисперсия света.

Основной материал семинара изложен в конспекте лекций по оптике по теме «Дисперсия света».

Здесь только дополнительные моменты.

Основные формулы:

Дисперсионное уравнение:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega)$$

Фазовая v и групповая u скорости:

$$v = \frac{\omega}{k}; \quad u = \frac{d\omega}{dk}.$$

Формула Рэлея

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$$

Задача 1. Задан закон дисперсии $k \sim \omega^2$. Найти связь фазовой и групповой скоростей.

Решение.

Запишем закон дисперсии в виде:

$$k = \alpha \omega^2,$$

где α - константа.

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\alpha \omega^2} = \frac{1}{\alpha \omega};$$
$$\frac{1}{u} = \frac{dk}{d\omega} = 2\alpha \omega.$$
$$v = 2u.$$

В общем случае, если

$$k = \alpha \omega^\gamma, \tag{1}$$

то

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\alpha \omega^\gamma} = \frac{1}{\alpha \omega^{\gamma-1}};$$
$$\frac{1}{u} = \frac{dk}{d\omega} = \gamma \alpha \omega^{\gamma-1};$$
$$v = \gamma u. \tag{1}$$

Задача 2. Задан закон дисперсии $v \sim \frac{\sqrt{\lambda}}{\omega^3}$. Найти связь фазовой и групповой скоростей.

Решение.

Запишем закон дисперсии в виде:

$$v = \frac{\omega}{k} = \beta \frac{\sqrt{\lambda}}{\omega^3} = \alpha \frac{1}{\sqrt{k} \omega^3},$$

где α - константа.

В результате получим:

$$\alpha k^{1/2} = \omega^4;$$

2

$$k = \frac{1}{\alpha^2} \omega^8,$$

т.е. задача свелась к предыдущей.

Из общей формулы (1) из (2) получим

$$v = \gamma u = 8u.$$

Примечание.

Попробуем решить данную задачу через формулу Рэлея:

$$v = \beta \frac{\sqrt{\lambda}}{\omega^3}; \quad \frac{dv}{d\lambda} = \frac{\beta}{2} \frac{1}{\omega^3 \lambda^{1/2}}$$
$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} = \beta \frac{\sqrt{\lambda}}{\omega^3} - \lambda \frac{\beta}{2} \frac{1}{\omega^3 \lambda^{1/2}} = \frac{1}{2} \beta \frac{\sqrt{\lambda}}{\omega^3} = \frac{1}{2} v$$
$$v = 2u.$$

Ответ другой!!!!

Попробуйте решить задачу в общем случае, когда

$$v = \beta \omega^\eta \lambda^\kappa,$$

воспользовавшись первой и второй методиками. Вы получите разные ответы!!!

Подумайте и решите, какой из способов дает верный результат.

Задача 3. Задан закон дисперсии в виде $n \sim \omega^2$, где n - показатель преломления. Найти связь фазовой и групповой скоростей.

Решение.

Запишем закон дисперсии в виде:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} = \beta \frac{c}{\omega^2},$$
$$k = \gamma \omega^3,$$

т.е. задача свелась к предыдущей.

Задача 4. Задан связь фазовой и групповой скоростей $v = 3u$. Найти закон дисперсии.

Решение.

Запишем связь скоростей в виде:

$$v = \frac{\omega}{k} = 3u = 3 \frac{d\omega}{dk}.$$

Решаем полученное дифференциальное уравнение методом разделения переменных:

$$\frac{dk}{k} = 3 \frac{d\omega}{\omega}; \quad \ln k = 3 \ln \omega + A;$$
$$k = B \omega^3.$$