Семинары 15-16. Дифракция Френеля на круглом отверстии.

Основной материал семинара изложен в конспекте лекций по оптике по теме «Дифракция Френеля» и в Методике решения задач по оптике.
Здесь только дополнительные моменты.

Перечислим порядок решения типичных задач по дифракции Френеля на круглом отверстии:

1) Рисуем спираль Френеля – лучше в виде окружности – и расставляем на ней характерные точки O и O_∞;

2) Для каждого характерного параметра (радиуса) объекта дифракции находим соответствующее ему число зон Френеля – m и расставляем точки O_m на спирали;

3) Для каждого открытого участка объекта записываем соответствующий вектор (комплексное число) в виде $O_{m1}O_{m2}$. Если участок открыт не полностью, то записывается соответствующий множитель. Если какой-либо из участков перекрыт прозрачной пластиной, вносящей дополнительную разность фаз, то соответствующий ему вектор поворачивается (в нужную сторону!) на угол, равный разности фаз;

4) Для нахождения результирующей амплитуды все векторы складываются по правилам сложения векторов. /Для нахождения интенсивности не забываем возвести в квадрат!!!

Основные формулы

Разность хода Δs между лучом, прошедшим через вторичный источник, расположенный на расстояния r от оси симметрии, и лучом, прошедшим по оси:

$$\Delta s = \frac{r^2}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right). \tag{1}$$

Радиус n-ой зоны Френеля

$$R_n^2 = \frac{n\lambda}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}. \tag{2}$$

В случае падения плоской волны

$$R_n^2 = n\lambda b. \tag{2a}$$

Разность фаз ψ_n между лучом, прошедшим через границу n-ой зоны Френеля и лучом, прошедшим по оси (рис. 1):

$$\psi_n = n\pi. \tag{3}$$

Разность хода, вносимая линзой с фокусным расстоянием f в зависимости от расстояния r от оси симметрии:

$$\Delta s_{лин} = -\frac{r^2}{2f} + const. \tag{4}$$

Задача 1. Используя спираль Френеля, получить формулу зависимости интенсивности в центре картины при дифракции на круглом отверстии от числа *n* открытых зон Френеля.

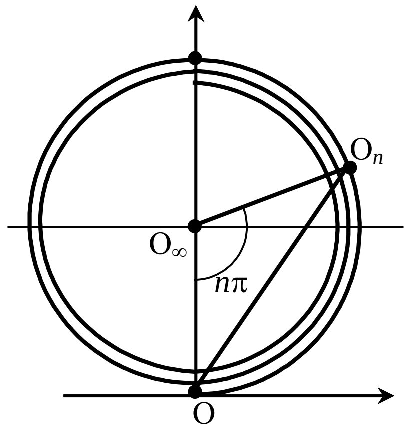

Рис. 1 Спираль Френеля)

Решение

Изобразим спираль Френеля (рис. 1) и возьмем на ней произвольную точку O_n. В соответствии с (2) угол $OO_\infty O_n$ равен $n\pi$ (на рисунке n < 1). Треугольник $OO_\infty O_n$ равнобедренный, его стороны OO_∞ и $O_\infty O_n$ одинаковы и равны A_0, где A_0 - амплитуда в отсутствие препятствия. Сторона OO_n и есть искомая комплексная амплитуда A поля.

Применяя теорему косинусов, получим:

$$A^2 = A_0^2 + A_0^2 - 2A_0^2 \cdot \cos n\pi;$$

$$I(n) = 2I_0(1 - \cos n\pi) = 4I_0 \cdot \sin^2 \frac{n\pi}{2}.$$

Полученная формула справедлива для небольшого числа открытых зон, когда скручиванием спирали можно пренебречь.

Ответ: $I(n) = 2I_0(1 - \cos n\pi)$.

Задача 2. На пути монохроматической волны, распространяющейся от точечного источника, установили препятствие с прозрачными участками в виде круглого отверстия радиуса r_1 и кольца с внутренним радиусом r_2=2 r_1 и внешним радиусом r_3=3 r_1 (рис. 2). Найти интенсивность в точке наблюдения, для которой радиус r_1 равен радиусу первой зоны Френеля. В отсутствие препятствия интенсивность в точке наблюдения равна I_0.

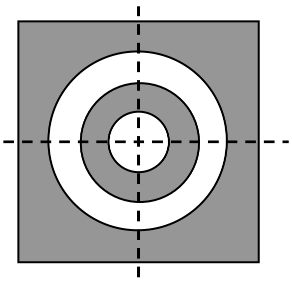

Рис. 2. Объект дифракции

Решение

Изобразим спираль Френеля и найдем на ней точки, соответствующие трем заданным значениям радиусов (рис. 3). По условию, радиус r_1 соответствует первой зоне Френеля (точка O_1 на спирали). Так как число *n* зон Френеля пропорционально квадрату радиуса R_n^2, то радиусы r_2 = $2r_1$ и r_3 = $3r_1$ соответствуют границам четвертой и девятой зон Френеля (точки O_4 и O_9 на спирали). Пренебрегая скручиванием спирали, будем считать, что точка O_4 совпадает с точкой O, а точка O_9 – с точкой O_1. Так как в рассматриваемых ниже задачах число зон Френеля обычно невелико, в дальнейшем *вместо спирали будем рисовать окружность, и именно на ней отмечать соответствующие точки*.

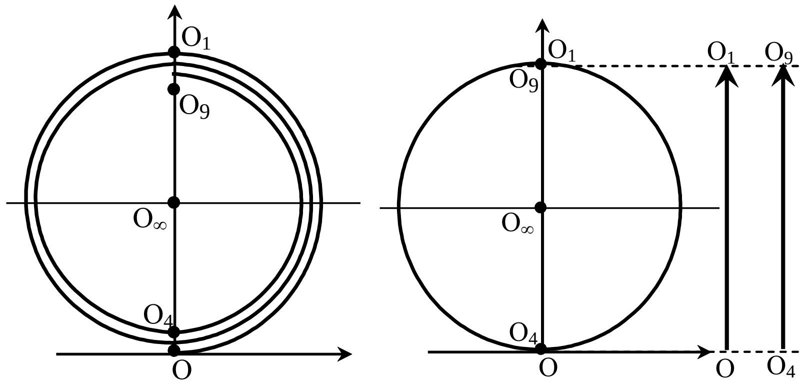

Рис. 3. Спираль Френеля (к **задаче 2**).

Таким образом, вкладам в комплексную амплитуду поля от открытых участков соответствуют векторы $\mathbf{OO_1}$ и $\mathbf{O_4O_9}$, которые совпадают по направлению и имеют одинаковую длину $2A_0$, гдеA_0 – амплитуда в отсутствие препятствия. Складывая амплитуды

$$\mathbf{A} = \mathbf{OO_1} + \mathbf{O_4O_9},$$

а затем, возводя в квадрат, для интенсивности получим:

$$I_a = 16 I_0 .$$

Задачи по дифракции на некруглых отверстиях и при использовании стеклянных пластин – см. Методику решения…, задачи 4.2.3 – 4.2.4.

Задачи по дифракции с использованием линзы – см. Методику решения…, задача 4.2.5.

Задачи по дифракции Френеля на щели с использованием спирали Корню – см. Методику решения…, задача 4.2.7.

Домашнее задание.
Иродов. 5.103-5.107; 5.108-5.111, 5.114; на спираль Корню 5.116-5.117.