

Семинары 17-18. Дифракция Фраунгофера.

Основной материал семинара изложен в конспекте лекций по оптике по теме «Дифракция Фраунгофера и в Методике решения задач по оптике. Здесь только дополнительные моменты.

Основные формулы

Интенсивность при дифракции Фраунгофера на одной щели шириной b (рис. 1):

$$I_{\varphi} = I_0 \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{k b \sin \varphi}{2}\right) = I_0 \cdot \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \quad (1)$$

где I_0 - интенсивность в центре дифракционной картины ($I_0 \sim b^2$),

$$u = \frac{k b \sin \varphi}{2}.$$

Вывод этой формулы через интеграл Гюйгенса-Френеля дается в конспекте лекций, через векторные диаграммы – в Методике решения задач по оптике.

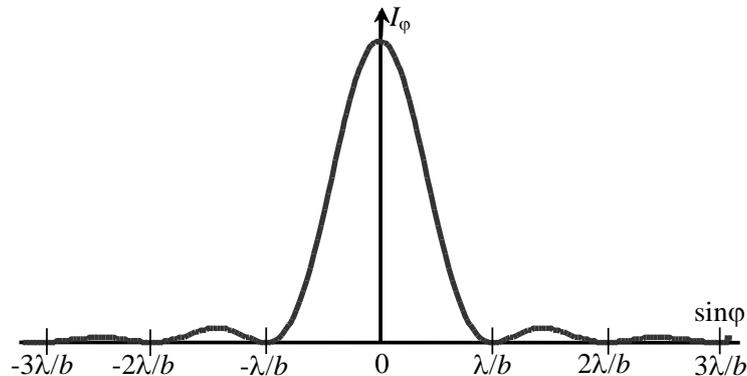


Рис. 1. Дифракция Фраунгофера на одной щели: распределение интенсивности на экране в зависимости от синуса угла дифракции.

Направления φ_m на минимумы m -го порядка находятся из соотношения

$$b \sin \varphi_m = m \lambda.$$

Из рис.1 видно, что основная часть светового потока сосредоточена в центральной дифракционной полосе, определяемой значениями $\sin \varphi = \frac{\lambda}{b} \approx \varphi$ (так называемый центральный максимум нулевого порядка), малая его часть будет распространяться в пределах первых ($\approx 5\%$) и вторых ($\approx 2\%$) максимумов и т.д. Угловой размер центрального дифракционного максимума

$$\Delta \varphi = \frac{\lambda}{b}$$

называют дифракционной расходимостью пучка в дальней зоне.

Дифракционная картина от круглого отверстия имеет вид концентрических окружностей, комплексная амплитуда A в зависимости от угла дифракции θ задается функцией Бесселя J_1 первого порядка:

$$A(\theta) \sim \pi R^2 \cdot \frac{2J_1(\xi)}{\xi},$$

где R – радиус отверстия;

$$\xi = kR \sin \theta = k_r R;$$

θ - угол дифракции.

Максимальная амплитуда в центре картины пропорциональна площади отверстия $S = \pi R^2$ (волны от всех вторичных источников приходят в фазе).

Интенсивность дифракционной картины

$$I(\theta) \sim A^2(\theta) \sim (\pi R^2)^2 \cdot \left(\frac{2J_1(\xi)}{\xi} \right)^2. \quad (2)$$

График функции $f(\xi) = \left(\frac{2J_1(\xi)}{\xi} \right)^2$ напоминает квадрат СИНКа:

$$f(0) = 1 - \text{max}; \quad f(1,22\pi) = 0 - \text{min}; \quad f(1,635\pi) = 0,0175 - \text{max}; \quad f(2,23\pi) = 0 - \text{min} \text{ и т.д.}$$

Направления на минимумы находятся из соотношений:

$$\sin \theta_1 \approx 0,61 \cdot \frac{\lambda}{R} = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D},$$

$$\sin \theta_2 \approx 2,23 \cdot \frac{\lambda}{D},$$

где D - диаметр отверстия.

Как и в случае щели, для круглого отверстия принято считать, что основная энергия сосредоточена в центральном пятне, угловой размер $\Delta\theta$ которого

$$\Delta\theta \approx \sin \theta_1 \approx 0,61 \cdot \frac{\lambda}{R} = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D}.$$

Данная формула часто используется при определении разрешающей способности объективов.

Интенсивность при дифракции Фраунгофера на нескольких щелях (дифракционной решетке)

$$I_\varphi = I_0 \cdot \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin N\delta}{\sin \delta} \right)^2 \quad (12)$$

где $I_0 \sim b^2$,

$$u = \frac{k b \sin \varphi}{2};$$

$$\delta = \frac{k d \sin \varphi}{2};$$

Характерные точки:

1) дифракционные минимумы находятся из условия:

$$b \sin \varphi_{m,\min} = m\lambda; \quad \sin \varphi_{m,\min} = \frac{m\lambda}{b}$$

- совпадают с минимумами дифракции на одной щели;

2) главные максимумы находятся из условия:

$$d \sin \varphi_{m,\max} = m\lambda; \quad \sin \varphi_{m,\max} = \frac{m\lambda}{d}.$$

При этом $\delta_{m,\max} = \frac{k d \sin \varphi_{m,\max}}{2} = m\pi$, в сомножителе $\left(\frac{\sin N\delta}{\sin \delta}\right)^2$ и числитель, и знаменатель равны нулю, в пределе $\left(\frac{\sin N\delta}{\sin \delta}\right)^2 \Rightarrow N^2$, интенсивность максимумов резко растет с увеличением N .

3) между соседними главными максимумами находятся $(N-1)$ дополнительных минимумов, или $(N-2)$ дополнительных максимумов.

Сопоставление дифракции Фраунгофера и спектров сигналов

Ранее, в теме **Фурье-преобразование** было получено, что для прямоугольного импульса длительностью τ ширина спектра равна $\Delta\omega = \frac{2\pi}{\tau}$. При вычислениях в интеграл

Фурье входит запись $e^{i\omega t}$.

Дифракция Фраунгофера, как было показано в лекциях, есть пространственное Фурье-преобразование от функции пропускания объекта. Пусть таким объектом является щель шириной b . Для волн от вторичных источников, идущих под углом дифракции φ (направление вектора \mathbf{k}) в интеграл Фурье войдет запись $e^{ik_x x}$, где $k_x = k \sin \varphi$. По аналогии с временным спектром для ширины углового пространственного спектра получим:

$$\Delta k_x = k_x = \frac{2\pi}{b}; \quad \frac{2\pi}{\lambda} \sin \varphi = \frac{2\pi}{b}; \quad \sin \varphi = \frac{\lambda}{b}.$$

Это и есть угловая ширина главного дифракционного максимума.

Как и для временного случая, формула будет по порядку величины справедлива для различных форм отверстия. В частности, для круглого отверстия диаметром D

$$\sin \varphi = \frac{1,22 \cdot \lambda}{D}.$$

Напомним, что приближение Фраунгофера справедливо в дальней зоне. Границу такой зоны (дифракционную длину $l_{\text{диф}}$) определим из условия, что на таком расстоянии от щели ширина дифрагированного пучка превысит ширину щели:

$$l_{\text{диф}} \cdot \text{tg} \varphi \approx l_{\text{диф}} \cdot \sin \varphi = b,$$

откуда получим:

$$l_{\text{диф}} \approx \frac{b^2}{\lambda},$$

что соответствует первой зоне Френеля.

Эту формулу опять же легко запомнить из простых соображений

$$l_{\text{диф}} \cdot \lambda \approx b \cdot b.$$

Задачи по разграничению приближений Френеля и Фраунгофера – см. Методику решения..., задача 5.2.2.

Задачи по влиянию дифракции Фраунгофера на параметры дифракционной картины – см. Методику решения..., задача 5.2.3- 5.2.5.

Задачи по дифракции Фраунгофера как пространственном преобразовании Фурье – см. Методику решения..., задача 5.2.6.

Задачи по дифракции Фраунгофера на дифракционной решетке – см. Методику решения..., задачи 5.2.7.

Домашнее задание.

Иродов. 5.125-5.126; 5.129-5.133, 5.136.