Семинары 3-4. Электромагнитные волны. Давление света.

Основной материал семинара изложен в конспекте лекций по оптике.
Здесь только дополнительные моменты.

1. В вакууме распространяется электромагнитная волна, электрическая составляющая которой изменяется по закону:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}(x,t)=\mathbf{e_y}\cdot E_0\sin(\omega t-kx),$$

где $\mathbf{e_y}$ - единичный вектор, направленный вдоль оси Оу. Найти закон изменения $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$.

Решение.
Воспользуемся одним из уравнений Максвелла:

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}.$$

В декартовых координатах действие оператора ∇ (набла) векторно на вектор $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ записывается в виде:

$$\nabla\times\mathbf{E}=\begin{vmatrix}\mathbf{e_x} & \mathbf{e_y} & \mathbf{e_z}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ E_x & E_y & E_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\mathbf{e_x} & \mathbf{e_y} & \mathbf{e_z}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 0 & E_y & 0\end{vmatrix}=\mathbf{e_z}\cdot\frac{\partial E_y}{\partial x}=\mathbf{e_z}\cdot\left(-E_0\cdot k\cdot\cos(\omega t-kx)\right),$$

т.к. $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ имеет только одну ненулевую компоненту E_y, которая зависит только от одной $x-$координаты.
В итоге:

$$-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=\mathbf{e_z}\cdot\left(-E_0\cdot k\cdot\cos(\omega t-kx)\right),$$

$$\mathbf{B}=\mathbf{e_z}\cdot\int E_0\cdot k\cdot\cos(\omega t-kx)dt=\mathbf{e_z}\cdot\frac{k}{\omega}\cdot E_0\sin(\omega t-kx)=\mathbf{e_z}\cdot\frac{k}{\omega}\cdot E_y(z,t).$$

В результате видно, что E_y и B_z изменяются в фазе, а связь между амплитудами имеет вид:

$$E_0=B_0\cdot\frac{\omega}{k}=B_0\cdot c,$$

где $c=\dfrac{\omega}{k}$ - скорость света в вакууме.

Векторы $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{k}$ ориентированы вдоль осей Оу, Oz и Ox соответственно, т.е. образуют правую тройку векторов.
Замечание. Если волна распространяется в однородной изотропной среде с показателем преломления $n=\sqrt{\varepsilon}$, то амплитуды электрической и магнитной составляющих связаны соотношением:

$$E_0=B_0\cdot v,$$

где $v=\dfrac{c}{n}$ - скорость света в среде.
Последнюю формулу можно записать в виде:

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E_0=\sqrt{\mu\mu_0}H_0.$$

Из нее следует и равенство энергии электрической и магнитной составляющих в волне:

$$\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E_0^2}{2} = \frac{\mu\mu_0 H_0^2}{2}.$$

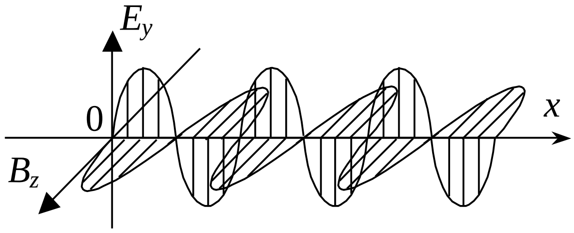


Рис. 1. Бегущая электромагнитная волна («мгновенная фотография»).

2. Воздух ионизуется при напряженности электрического поля E≈30 кВ/см. Чему равна интенсивность волны?

Решение.
Интенсивность по определению:

$$I = \langle S_n \rangle = \langle E \cdot H \rangle;$$

Так как в бегущей волне

$$E = B \cdot c = \mu_0 H \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} H,$$

то

$$H = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E.$$

$$I = \langle E \cdot H \rangle = \left\langle \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E^2 \right\rangle = \left\langle \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \cdot \cos^2 \omega t \right\rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0^2.$$

3. В вакууме навстречу друг другу распространяются две электромагнитные одинаково поляризованные волны, электрические составляющие которых изменяются по закону:

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_1(z,t) = \mathbf{e_y} \cdot E_0 \cos(\omega t - kx),$$
$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_2(z,t) = \mathbf{e_y} \cdot E_0 \cos(\omega t + kx),$$

где $\mathbf{e_y}$ - единичный вектор, направленный вдоль оси Оу. Найти закон изменения $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$.

Решение.
В соответствии с принципом суперпозиции

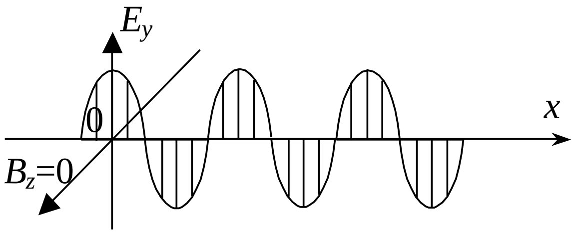
$$\mathbf{E}(z,t) = \mathbf{E}_1(z,t) + \mathbf{E}_2(z,t) = \mathbf{e_y} \cdot 2E_0 \cos(\omega t)\cos(kx),$$

т.е. формируется стоячая волна.
Аналогично зад.1 найти закон изменения магнитной составляющей (самостоятельно).

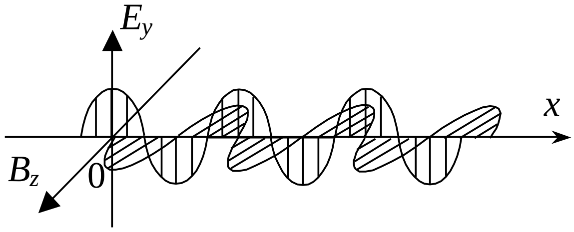
Ответ. $\mathbf{B}(z,t) = \mathbf{e_z} \cdot 2E_0 \cdot \frac{k}{\omega} \cdot \sin(\omega t)\sin(kx) = \mathbf{e_z} \cdot 2E_0 \cdot \frac{1}{c} \cdot \sin(\omega t)\sin(kx).$

Иллюстрации к поведению стоячей волны в разные моменты времени.

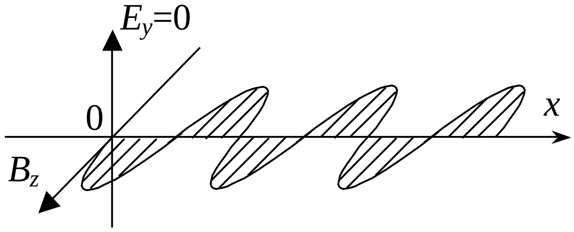
Стоячая волна (t=0): $E_y - \max$; $B_z = 0$.



Стоячая волна (t=T/8): $E_y \neq 0$; $B_z \neq 0$.



Стоячая волна (t=T/4): $E_y = 0$; $B_z - \max$.



Замечание.
Вспомним следующие формулы:
1. Связь амплитуд в электромагнитной волне: $E = Bc$.
2. Связь плотности энергии и плотности потока энергии: $\left|\vec{\mathbf{S}}\right| = c \cdot w_{элмагн}$.

Обращаем внимание, что справедливы они для одиночной ***бегущей электромагнитной*** волны. Если же в пространстве распространяются две (или более) волны, то данные соотношения могут нарушаться. В частности, в рассмотренной выше стоячей волне электрическая и магнитная составляющая изменяются не в фазе, и для расчета плотности энергии $w_{элмагн}$ и плотности потока энергии $\mathbf{S} = \left[\mathbf{E} \times \mathbf{H}\right]$ необходимо использовать исходные формулы.
В задаче 4.228 (Иродов, 1988) в вакууме две плоские волны распространяются во взаимно перпендикулярных направлениях, направления колебаний векторов $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ совпадают. Но направления колебаний векторов $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ будут взаимно ортогональны, поэтому для амплитуды электрической $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ и магнитной $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$ составляющих волны уже не будет справедлива связь амплитуд в виде $E = Bc$.

Сферическая волна

Для корректного нахождения уравнения сферической волны (на самом деле, не уравнения, а закона!) надо решать волновое уравнение в сферических координатах. Но есть способ проще. Так как фронт сферической волны – сфера, то легко сообразить общую форму закона:

$$E(r,t) = E_0(r)\cos(\omega t - kr),$$

причем здесь k – не вектор, а волновое число.
Рассмотрим тонкий сферический слой толщиной dr, расположенный на расстоянии r от точечного источника, и найдем энергию электрического поля dW в нем:

$$dW = w_{эл} \cdot dV = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(r,t) \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2(r)\cos^2(\omega t - kr) \cdot 4\pi r^2 dr$$

В процессе распространения данного сферического слоя со скоростью света его энергия не будет изменяться. Но не меняются также и толщина слоя dr, и фаза $(\omega t - kr)$. Следовательно,

$$dW = const \sim E_0^2(r) \cdot r^2 dr .$$

Из этого следует, что амплитуда сферической волны обратно пропорциональна расстоянию от источника:

$$E_0(r) \sim \frac{A_0}{r} .$$

Уравнение (закон!) сферической волны приобретает вид:

$$E(r,t) = \frac{A_0}{r}\cos(\omega t - kr),$$

где амплитудой волны следует называть не A_0, а $\frac{A_0}{r}$.

Иногда записывают

$$E(r,t) = \frac{E_0}{r}\cos(\omega t - kr),$$

что неверно из соображений размерности.

Характеризуя точечный источник сферической волны, обычно указывают среднюю мощность P, излучаемую им. Получим из этого знания выражение для A_0.

Так как интенсивность есть среднее значение энергии, проходящей в единицу времени через единичную площадку, то на расстоянии r от источника

$$I = \frac{dW}{dt \cdot 4\pi r^2} = \frac{P}{4\pi r^2} .$$

В то же время связь между интенсивностью и объемной плотностью энергии:

$$I = \langle w_{элмагн} \rangle \cdot c = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 \cdot c = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{A_0^2}{r^2} \cdot c .$$

В итоге получаем:

$$\frac{P}{4\pi r^2} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{A_0^2}{r^2} \cdot c ;$$

$$A_0^2 = \frac{P}{2\pi\varepsilon_0 \cdot c} .$$

Домашнее задание

4.219, 222, 227, 228, 230, 231

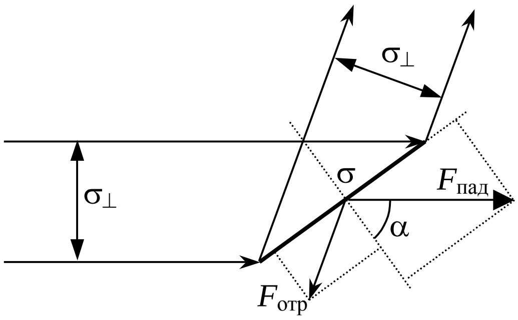
Давление света.

Как показано в Конспекте лекций, световой пучок с плотностью электромагнитной энергии $w_{элмагн}$ и поперечным сечением $\sigma_\perp$, попадая на полностью поглощающую пластинку, действует на нее с силой

$$F_{пад} = w_{элмагн} \cdot \sigma_\perp$$

независимо от ориентации пластинки. Направление действия силы совпадает с направлением падающего пучка.

Если пластинка отражает, или рассеивает, или пропускает часть падающей на нее энергии, то необходимо рассчитать дополнительную силу, которая возникает вследствие подобных действий.



Если коэффициент отражения пластинки равен *R*, то плотность энергии в отраженном пучке будет равна $R \cdot w_{элмагн}$, а поперечное сечение пучка останется точно таким же $\sigma_{\perp}$. В результате модуль силы, действующей на пластину за счет отражения, будет равен:

$$F_{отр} = R \cdot w_{элмагн} \cdot \sigma_{\perp},$$

а направление действия силы $F_{отр}$ будет противоположно направлению отраженного пучка.

Угол между направлениями действия сил $F_{пад}$ и $F_{отр}$ равен 2α, где α - угол между падающим пучком и нормалью к поверхности.

Учитывая связь между площадью σ пластинки и площадью $\sigma_{\perp}$ поперечного сечения пучка

$$\sigma_{\perp} = \sigma \cdot \cos\alpha,$$

для нормальной и тангенциальной составляющих суммы сил, действующих на пластину, получим:

$$F_n = F_{пад} \cdot \cos\alpha + F_{отр} \cdot \cos\alpha = (1+R) \cdot w_{элмагн} \cdot \sigma_{\perp} \cdot \cos\alpha = (1+R) \cdot w_{элмагн} \cdot \sigma \cdot \cos^2\alpha;$$

$$F_\tau = F_{пад} \cdot \sin\alpha - F_{отр} \cdot \sin\alpha = (1-R) \cdot w_{элмагн} \cdot \sigma_{\perp} \cdot \sin\alpha = (1-R) \cdot w_{элмагн} \cdot \sigma \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha.$$

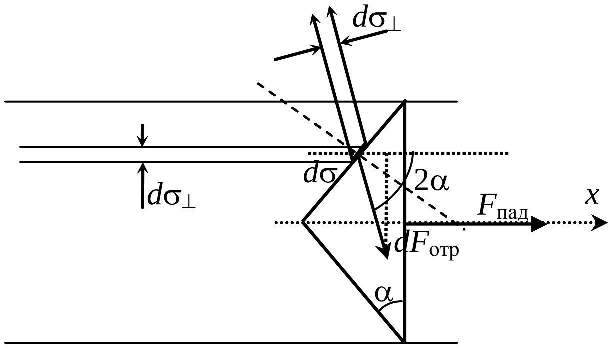
Задача. Найти силу давления света (плотность энергии $w_{элмагн}$) на зеркальный конус (коэффициент отражения *R*, радиус основания *a*, угол при основании α).

Решение.

Сила $F_{пад}$, создаваемая падающим пучком, равна

$$F_{пад} = w_{элмагн} \cdot \sigma_{\perp} = \pi a^2 \cdot w_{элмагн}$$

(такой результат соответствует любому полностью поглощающему объекту, поперечное сечение которого представляет собой окружность радиуса *a*).



Выделим в падающем пучке произвольное малое поперечное сечение $d\sigma_{\perp}$. Отраженный пучок будет иметь такое же поперечное сечение[1], и плотность энергии этого пучка будет равна $Rw_{элмагн}$. Угол падения равен $\theta_{пад} = \alpha$, угол между падающим и отраженным лучом в два раза больше и равен 2α, такой же угол между силами $F_{пад}$ и $dF_{отр}$, действующими на конус со стороны падающего и отраженного пучков соответственно.

Из симметрии задачи ясно, что суммарная сила за счет отраженного пучка $F_{отр}$ должна быть направлена вдоль оси падающего пучка, т.е. необходимо взять проекцию силы $dF_{отр}$

[1] Вообще говоря, площадка $d\sigma$ не будет плоской, и в отраженном пучке по мере удаления будут изменяться и размеры, и плотность энергии. Но мы выбираем площадку $d\sigma$ достаточно малой, чтобы можно было считать ее плоской. Кроме этого, мы смотрим на параметры отраженного пучка непосредственно вблизи площадки $d\sigma$,

на ось *x*, в результате появится множитель $\cos 2\alpha$. Таким образом, проекция силы на нужное направление, создаваемая пучком $d\sigma_{\perp}$ будет равна:

$$dF_{отр,x} = Rw_{элмагн} \cdot \cos 2\alpha \cdot d\sigma_{\perp}.$$

Т.к угол падения α одинаков для всех элементов конуса, то интегрирование по всем поперечным сечениям $d\sigma_{\perp}$ даст вновь полное сечение падающего пучка πa^2:

$$F_{отр,x} = Rw_{элмагн} \cdot \cos 2\alpha \cdot \pi a^2.$$

В результате для силы давления получим:

$$F_{дав} = F_{пад} + F_{отр,x} = \pi a^2 \cdot w_{элмагн}(1 + R\cos 2\alpha).$$

Проверим результат соображениями «здравого смысла». Если R=1, а $\alpha \Rightarrow 0$, то получим плоское зеркало, а результат:

$$F_{дав}(R = 1; \alpha = 0) = 2\pi a^2 \cdot w_{элмагн} \text{ (все верно!).}$$

Задача. Найти силу давления света (плотность энергии $w_{элмагн}$) на зеркальный шар (коэффициент отражения *R*, радиус *a*).

Решение.

Сила $F_{пад}$, создаваемая падающим пучком, равна

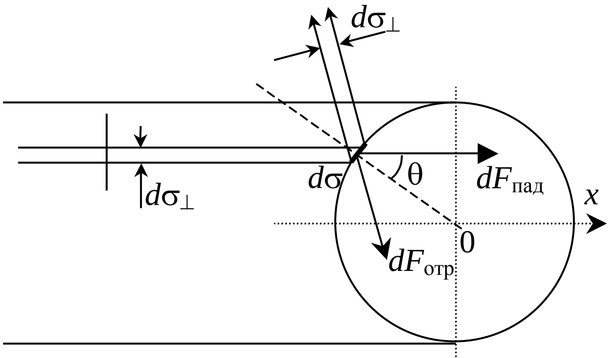
$$F_{пад} = w_{элмагн} \cdot \sigma_{\perp} = \pi a^2 \cdot w_{элмагн}$$

(такой результат соответствует любому полностью поглощающему объекту, поперечное сечение которого представляет собой окружность радиуса *a*).

Найдем теперь силу $dF_{отр}$, действующую на малый элемент $d\sigma$ поверхности шара за счет отраженной волны:

$$dF_{отр} = R \cdot w_{элмагн} \cdot d\sigma_{\perp} = R \cdot w_{элмагн} \cdot d\sigma \cdot \cos\theta,$$

где θ - угол падения на данный элемент; площади поперечного сечения падающего и отраженного пучков одинаковы и равны $d\sigma_{\perp} = d\sigma \cdot \cos\theta$.



Напомним, что элемент поверхности в сферических координатах равен

$$d\sigma = a^2 \cdot \sin\theta \cdot d\varphi \cdot d\theta$$

(угол отсчитывается от горизонтальной оси). Нетрудно заметить, что вследствие симметрии задачи по углу φ суммарная сила, возникающая за счет отражения, будет ориентирована вдоль направления падающего пучка (ось О*x*). Так как угол между направлениями отраженного и падающего пучков равен 2θ, то проекция $dF_{отр}$ на ось О*x* равна:

$$(dF_{отр})_x = R \cdot w_{элмагн} \cdot d\sigma \cdot \cos\theta \cdot \cos 2\theta = R \cdot w_{элмагн} \cdot a^2 \sin\theta \cdot d\varphi \cdot d\theta \cdot \cos\theta \cdot \cos 2\theta =$$

$$= R \cdot w_{элмагн} \cdot a^2 \cdot 2\pi \frac{\sin 2\theta}{2} \cdot \cos 2\theta \cdot d\theta = R \cdot w_{элмагн} \cdot a^2 \cdot 2\pi \frac{\sin 4\theta}{4} \cdot d\theta.$$

(интегрирование по φ дает 2π).

Т.к. угол θ изменяется в пределах от 0 до $\pi/2$, и

$$\int_0^{\pi/2} \sin 4\theta \cdot d\theta = -\frac{\cos 4\theta}{4}\Bigg|_0^{\pi/2} = 0,$$

то суммарная сила за счет отраженного пучка всегда равна нулю, причем независимо от коэффициента отражения *R*. Следовательно, сила давления на зеркальный шар точно такая же, как на полностью поглощающий диск такого же радиуса.

Задача. Точечный изотропный источник мощностью *P* находится в центре сферы радиуса *r*, внутренняя поверхность которой зеркальна (коэффициент отражения *R*). Половину сферы удаляют. Найти силу светового воздействия на оставшуюся полусферу.

Решение.

Прежде всего, найдем связь между мощностью *P* источника и объемной плотностью энергии $w_{элмагн}$. Интенсивность излучения есть средняя энергия, падающая в единицу времени на единичную (по площади) площадку. Интенсивность на расстоянии *r* от изотропного источника равна $I = \dfrac{P}{4\pi r^2}$, а плотность энергии:

$$w_{элмагн} = \frac{I}{c} = \frac{P}{4\pi r^2 c},$$

где *c* – скорость света.

На произвольный малый элемент $d\sigma$ сферической поверхности $\left(d\sigma = r^2 \cdot \sin\theta \cdot d\varphi \cdot d\theta\right)$ излучение падает нормально и, следовательно, отражается в противоположном направлении. Для модуля силы *dF* в этом случае можно записать:

$$dF = w_{элмагн}\left(1+R\right)\cdot d\sigma = \frac{P}{4\pi r^2 c}\cdot r^2 \cdot \sin\theta \cdot d\varphi \cdot d\theta = \frac{P}{4\pi c}\left(1+R\right)\cdot \sin\theta \cdot d\varphi \cdot d\theta$$

(угол θ отсчитывается от оси симметрии полусферы).

Из симметрии следует, что суммарная сила светового воздействия будет направлена по оси симметрии, поэтому следует взять соответствующую проекцию:

$$dF_x = dF \cdot \cos\theta = \frac{P}{4\pi c}\left(1+R\right)\cdot \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot d\varphi \cdot d\theta.$$

Осталось проинтегрировать по φ от 0 до 2π и по θ от 0 до π/2:

$$F_x = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \frac{P}{4\pi c}\left(1+R\right)\cdot \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot d\theta = \frac{P}{2c}\left(1+R\right)\int_0^{\pi/2} \sin\theta \cdot d\left(\sin\theta\right) =$$

$$= \frac{P}{2c}\left(1+R\right)\frac{\sin^2\theta}{2}\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{P}{4c}\left(1+R\right).$$

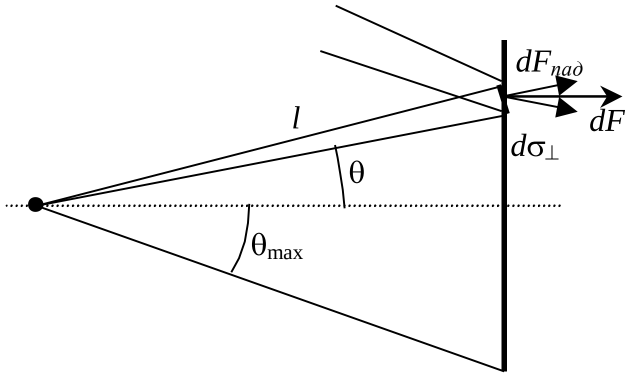
Задача. (Иродов, 5.284) На оси круглой абсолютно зеркальной пластинки находится точечный изотропный источник, световая мощность которого *P*. Расстояние между источником и пластинкой в n раз больше ее радиуса. Найти силу светового давления на пластинку.

Решение.

Прежде всего, найдем связь между мощностью *P* источника и объемной плотностью энергии $w_{элмагн}$. Интенсивность излучения есть средняя энергия, падающая в единицу времени на единичную (по площади) площадку. Интенсивность на расстоянии l от изотропного источника равна $I = \dfrac{P}{4\pi l^2}$, а плотность энергии:

$$w_{элмагн} = \frac{I}{c} = \frac{P}{4\pi l^2 c},$$

где c – скорость света.



Введем сферическую систему координат, угол θ отсчитывается от оси симметрии системы. Так как расстояние между источником и пластинкой в n раз больше ее радиуса, то угол θ изменяется в пределах от нуля до $\theta_{\max} = arctg\dfrac{1}{n}$.

Рассмотрим пучок излучения с поперечным сечением $d\sigma_{\perp} = l^2 \cdot \sin\theta \cdot d\varphi \cdot d\theta$ (это выражение для малого элемента площади в сферических координатах), где l -расстояние от источника до соответствующей точки площадки. Сила светового давления такого пучка по модулю равна

$$dF_{пад} = w_{элмагн} \cdot d\sigma_{\perp}.$$

С такой же силой будет действовать и отраженный пучок, сумма этих сил будет направлена параллельно оси симметрии и равна:

$$dF = 2 \cdot dF_{пад} \cdot \cos\theta = 2 \cdot w_{элмагн} \cdot d\sigma_{\perp} \cdot \cos\theta =$$

$$= 2 \cdot \frac{P}{4\pi l^2 c} \cdot l^2 \sin\theta \cdot d\varphi \cdot d\theta \cdot \cos\theta = \frac{P}{2\pi c} \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot d\varphi \cdot d\theta.$$

Осталось проинтегрировать по углам:

$$F = \frac{P}{2\pi c} \cdot 2\pi \cdot \int\limits_0^{\theta_{\max}} \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot d\theta = \frac{P}{c} \cdot \frac{\sin^2\theta_{\max}}{2} = \frac{P}{c} \cdot \frac{1}{2\left(n^2+1\right)}.$$

Домашнее задание

5.280, 281, 283, 284.

Приложение.

Как запомнить систему уравнений Максвелла? (те, кто ее знает, могут не читать).

Следует помнить, что:

1)в систему входят 4 уравнения;

2)в них входят 4 полевых вектора: 2 «электрических» ($\vec{E}$ и $\vec{D}$) и 2 «магнитных» ($\vec{B}$ и $\vec{H}$);

3)в правой части стоят дифференциальные операторы div и rot, действующие на «электрические» и «магнитные» векторы.

Итак, структура уравнений следующая:

«электрические» ($\vec{E}$ и $\vec{D}$)	«магнитные» ($\vec{B}$ и $\vec{H}$)
$div\,? = ?$	$div\,? = ?$
$rot\,? = ?$	$rot\,? = ?$

Сначала правильно расставим векторы в левой части уравнений. Для этого разобьем div и rot на буквы и поищем эти буквы среди векторов. В div входят буквы: «*d*», «*i*» и «*v*» (по-русски «в»), а в векторах есть $\vec{D}$ и $\vec{B}$ (пишется как русская «В»). Именно на эти векторы и будет действовать оператор div. Оставшимся векторам остается подвергнуться действию rot. Кстати, разбив rot по буквам, не найдем ни одного соответствия с векторами.

В результате получим:

«электрические» ($\vec{E}$ и $\vec{D}$)	«магнитные» ($\vec{B}$ и $\vec{H}$)
$div\,\vec{D} = ?$	$div\,\vec{B} = ?$
$rot\,\vec{E} = ?$	$rot\,\vec{H} = ?$

Теперь вспомним, что поля в некоторой степени «антиподы»: электрическое (точнее, электростатическое) потенциально – работа по замкнутому контуру равна нулю; магнитное вихревое – линии поля замкнуты. Работа связана с интегралом по контуру, т.е. с rot, замкнутость линий говорит о нулевом потоке через замкнутую поверхность, т.е. о div.

Новый результат:

«электрические» ($\vec{E}$ и $\vec{D}$)	«магнитные» ($\vec{B}$ и $\vec{H}$)
$div\,\vec{D} = ?$	$div\,\vec{B} = 0$
$rot\,\vec{E} = 0 + ?$	$rot\,\vec{H} = ?$

Теперь вспомним, что электрическое поле создается электрическими зарядами, а магнитное – токами. Но, т.к. уравнения дифференциальные, то следует говорить о плотности заряда ρ и тока $\vec{j}$. И подставить их в пока «не использованные» уравнения:

«электрические» ($\vec{E}$ и $\vec{D}$)	«магнитные» ($\vec{B}$ и $\vec{H}$)
$div\,\vec{D} = \rho$	$div\,\vec{B} = 0$
$rot\,\vec{E} = 0 + ?$	$rot\,\vec{H} = \vec{j} + ?$

Теперь вспомним, что переменное электрическое поле создает переменное магнитное и наоборот. Это приводит к появлению производных по времени $\frac{\partial}{\partial t}$, но в каких уравнениях? В тех, у которых в названии оператора есть буква «t», т.е.в уравнениях с rot. А действуют они все на те же «настырные» вектора $\vec{D}$ и $\vec{B}$, которые уже «влезли» под div, а теперь устремились к rot:

«электрические» ($\vec{E}$ и $\vec{D}$)	«магнитные» ($\vec{B}$ и $\vec{H}$)
$div\,\vec{D} = \rho$	$div\,\vec{B} = 0$
$rot\,\vec{E} = ?\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	$rot\,\vec{H} = \vec{j}?\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

Осталась «проблема знака» перед производными. Заметим, что в правой части уравнения для $rot\,\vec{E}$ стоит одно слагаемое, а правой части уравнения для $rot\,\vec{H}$ - два слагаемых. Поэтому и поставим перед производными одну и две черточки соответственно (они дадут знаки «минус» и «плюс»):

«электрические» ($\vec{E}$ и $\vec{D}$)	«магнитные» ($\vec{B}$ и $\vec{H}$)
$div\,\vec{D} = \rho$	$div\,\vec{B} = 0$

$rot\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$rot\,\vec{H} = \vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Система уравнений Максвелла получена (точнее, записана). Подчеркнем, что приведенное правило запоминания не есть доказательство правильности самих уравнений. Просто подсказка на «черный» день, неизбежно наступающий в день экзамена.