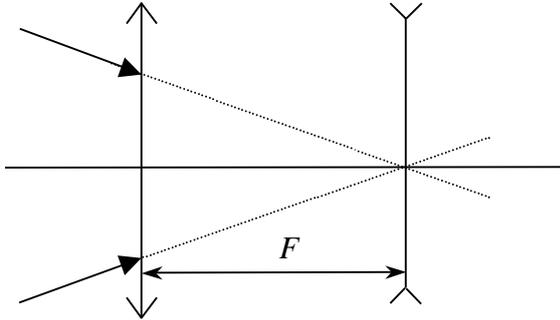


Семинар 2. Геометрическая оптика-2.

1. Собирающая и рассеивающая линзы с фокусными расстояниями $F_1=|F_2|=F$ находятся на расстоянии $d=F$ друг от друга. Два луча падают на собирающую линзу так, что их продолжения проходят через центр рассеивающей линзы. Найти положение изображения.



Решение.

Применяем последовательно формулу тонкой

$$\text{линзы } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}.$$

$$\text{1-я линза: } \frac{1}{-F} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}; \quad \frac{1}{b} = \frac{2}{F}; \quad b = \frac{F}{2}.$$

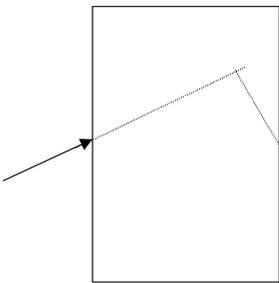
$$\text{2-я линза: } a_2 = d - b = \frac{F}{2}; \quad F_2 = -F.$$

$$\frac{1}{F/2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{-F}; \quad \frac{1}{b_2} = -\frac{3}{F}; \quad b_2 = -\frac{F}{3}.$$

Дома: меняем линзы местами. Что изменится? (задача решается в уме).

Дома решить похожую задачу:

1а. Собирающая и рассеивающая линзы с фокусными расстояниями $F_1=|F_2|=F$ находятся на расстоянии $d=F$ друг от друга (см. рисунок к предыдущей задаче). Точечный источник света находится на расстоянии $a=mF$ от собирающей линзы (m - произвольное число) и смещен на расстояние h от оптической оси. Найти координату изображения. Проанализировать результат в зависимости от m .



2. В черном ящике находится одна линза, параметры и местоположение которой неизвестны. Заданы луч, падающий на черный ящик, и луч, выходящий из него. Найти параметры линзы: местоположение, фокус. Однозначно ли решение?

Решение.

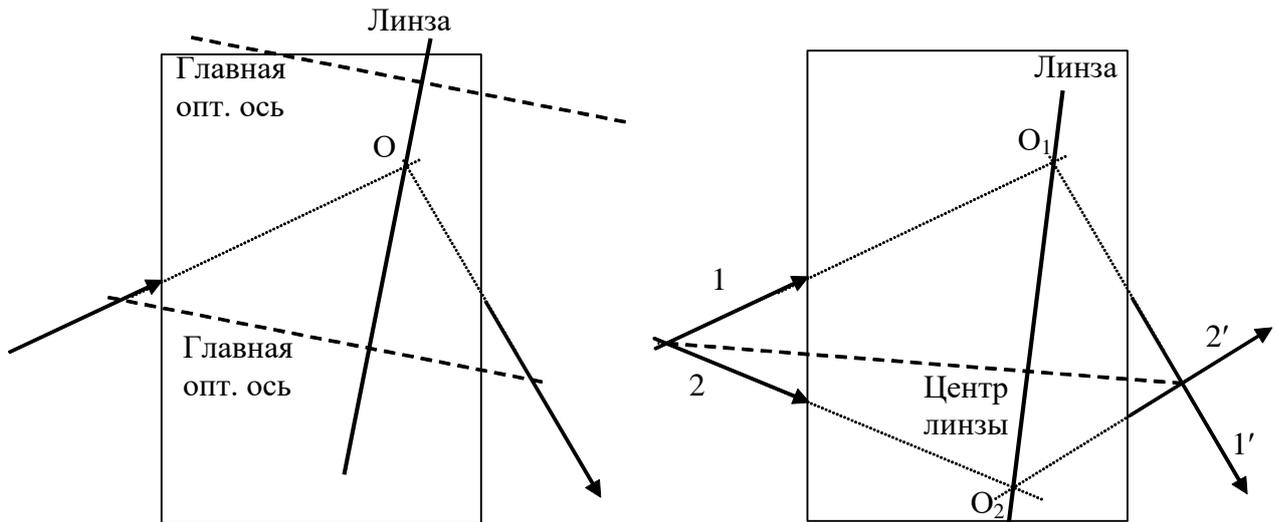
А. Продолжаем лучи до пересечения в т.О, тем самым находим одну из точек плоскости линзы.

Остальное – было на семинаре. Краткое напоминание – на рисунке.

(Линза – любая прямая, проходящая через т.О. Центр линзы – любая точка, кроме т.О. Главная оптическая ось перпендикулярна линзе. Дальнейшим построением определяется тип линзы и фокус). Решение неоднозначно.

Б. Решить задачу при условии, что задана еще и вторая пара лучей:

Решение – на рисунке.



А что будет, если неизвестно взаимное соответствие падающих и выходящих лучей?

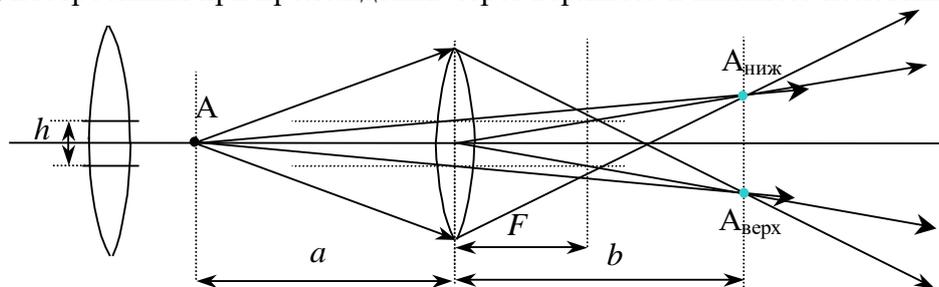
3. Из собирающей линзы с фокусом F удалили центральную часть шириной h и оставшиеся части сдвинули до соприкосновения. Точечный источник света находится на оси симметрии на расстоянии a от плоскости билинзы. Найти местоположения изображений. Изобразить ход пучков света.

Решение.

По формуле тонкой линзы находим расстояние от билинзы до плоскости изображений:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}; \quad b = \frac{aF}{a - F}.$$

Расстояние между оптическими осями верхней и нижней половин билинзы равно h . Выполняя построение в каждой половине билинзы, находим положение двух изображений $A_{\text{верх}}$ и $A_{\text{ниж}}$, построенных при прохождении через верхнюю и нижнюю половины.



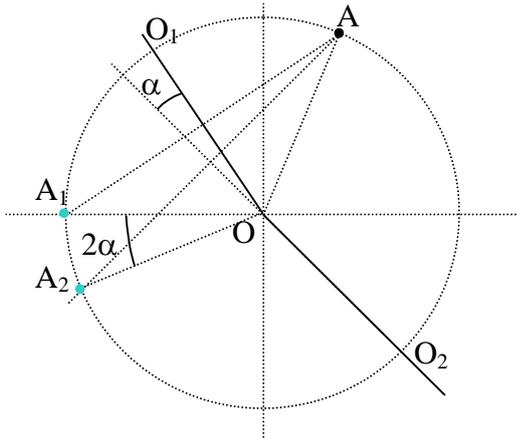
Расстояние d между изображениями A находится из пропорции:

$$\frac{d}{h} = \frac{a+b}{a}; \quad d = h \cdot \frac{a+b}{a}.$$

Из рисунка видно, что пучки света, ограниченные лучами, прошедшими через крайние точки каждой половины билинзы (вершину и середину) в области за изображениями не пересекаются. Область наложения этих пучков существует только между билинзой и изображениями, именно там можно наблюдать интерференцию.

Дома.

- 1) Проанализировать, как изменится картина, если источник разместить на расстоянии $a < F$.
- 2) Рассмотреть билинзу, полученную путем разрезания линзы и разведением половинок на расстояние h друг от друга (пространство между половинками закрыто непрозрачным экраном).



4. Бизеркало образовано двумя плоскими зеркалами OO_1 и OO_2 , угол между которыми $\alpha \ll 1$. Точечный источник света A находится на расстоянии R от ребра бизеркала O . Найти расстояние между двумя изображениями A_1 и A_2 .

Решение.

Из рисунка видно, расстояния от т.О до источника A и изображений A_1 и A_2 одинаковы и равны R . Угол A_1OA_2 равен 2α . Отсюда расстояние между источниками $A_1A_2 \approx 2\alpha R$. Подобная схема также используется для получения интерференционной картины.

5. Задача-«капкан №1».

Хорошо известно, что в оптике справедлив принцип обратимости хода лучей. Применительно к оптическим системам это означает, что источник и изображение можно поменять местами. Например, если в задаче 3 источник света из точки A перенести в точку $A_{\text{верх}}$ (или $A_{\text{ниж}}$), то его изображение (в обоих случаях) окажется в точке A .

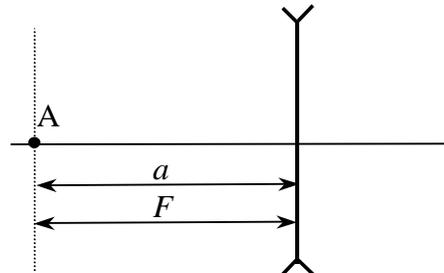
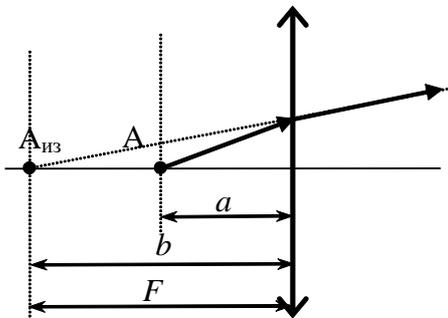
Перед собирающей линзой с фокусным расстоянием F поместим источник света A на расстоянии $a = F/2$. Тогда из формулы тонкой линзы несложно получить:

$$b = -F,$$

т.е. изображение $A_{\text{из}}$ окажется точно в фокусе (см. рисунок).

Теперь попытаемся поменять источник и изображение местами. Перенесем источник в точку $A_{\text{из}}$, т.е. в фокус. Но ведь если источник находится в фокусе собирающей линзы, то после линзы сформируется параллельный пучок света!!! Изображение окажется на бесконечности!!! А мы его ожидали увидеть в точке A !!!

В чем дело???



6. Задача-«капкан №2».

Источник света A находится точно в фокусе рассеивающей линзы (см. рисунок). Построением найти изображение.

Оптические инструменты.

1. ГЛАЗ

Основополагающим оптическим инструментом является **ГЛАЗ**. Не вдаваясь в тонкости (более полную информацию можно найти, например, в Ландсберге, §91,193), в качестве модели глаза можно взять собирающую линзу (хрусталик) с переменным фокусным расстоянием (регулируется мышечным усилием), позволяющую получить изображение какого-либо объекта на экране (сетчатке), положение которого относительно линзы фиксировано. Иными словами, в формуле тонкой линзы

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} \quad (1)$$

величина b фиксирована (расстояние между хрусталиком и сетчаткой), а наводка (аккомодация) глаза на объекты, удаленные на самые разные расстояния a осуществляется изменением фокусного расстояния F . Из жизненного опыта человек с нормальным зрением знает, что наводка на тот или иной объект осуществляется практически без малейших усилий, можно сказать, автоматически. Таким образом, каждый человек, имеющий глаза и устремляющий взгляд на какой-либо объект, мгновенно решает уравнение (1), находит требуемое фокусное расстояние и мышечным усилием устанавливает его. При этом подавляющее число людей и не подозревают о своих действиях.

Пространство между линзой-хрусталиком и экраном-сетчаткой заполнено жидкостью, что изменяет фокусное расстояние. Чтобы избежать ненужных (но не принципиальных) усложнений, забудем про это, будем считать, что с обеих сторон от линзы глаза находится воздух. Расстояние b около 20 мм, существенно меньше, чем возможные расстояния a , поэтому на экране-сетчатке всегда получается действительное перевернутое уменьшенное изображение объекта. Но при этом из свойств линзы известно, что угловые размеры объекта и изображения одинаковы (помним, что про жидкость мы забыли!). Таким образом, для получения более крупного изображения на сетчатке необходимо увеличивать именно **угловые** (а не линейные) размеры объекта. На рисунке три объекта, имеющих разные линейные размеры, будут давать одинаковые размеры изображений (для наглядности размеры глаза существенно увеличены).

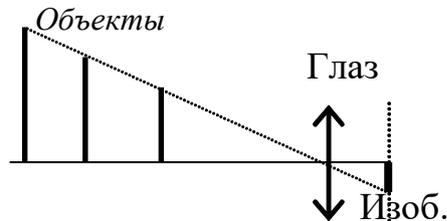


Рис. Наблюдение глазом объектов, расположенных на разных расстояниях.

Каждый человек знает, что для внимательного разглядывания какого-либо объекта его следует поднести как можно ближе к глазам, ведь при этом растут угловые размеры объекта. Но изменяется и мышечное усилие, необходимое для регулировки фокусного расстояния. Принято считать, что для нормального глаза усилия минимальны при его наведении на бесконечно удаленный объект; существует некоторый (довольно широкий) диапазон a , при которых глаз чувствует себя комфортно. Со значительным усилием можно рассматривать объекты и с расстояния 10 см. Для расчетов принято выделять *расстояние наилучшего зрения*:

$$D=25 \text{ см,}$$

это расстояние от объекта до глаза считают оптимальным для наблюдения близкорасположенного объекта.

Таким образом, при наблюдении глазом основная задача всех используемых оптических инструментов заключается в увеличении **угловых** размеров объекта.

2. ЛУПА.

Как и глаз, лупа - это собирающая линза с небольшим, но, в отличие от глаза, неизменным фокусным расстоянием ($F \sim 10-100$ мм). Чтобы получить увеличенное изображение объекта, находящегося перед наблюдателем, ее располагают между объектом и глазом на расстоянии, чуть меньшем фокусного. В результате лупа формирует мнимое прямое увеличенное изображение, именно оно и наблюдается глазом.

Из рисунка видно, что «с точки зрения» лупы угловой размер мнимого изображения такой же, как и размер самого объекта. Но для глаза при установленной лупе угловой размер изображения больше, чем без нее.

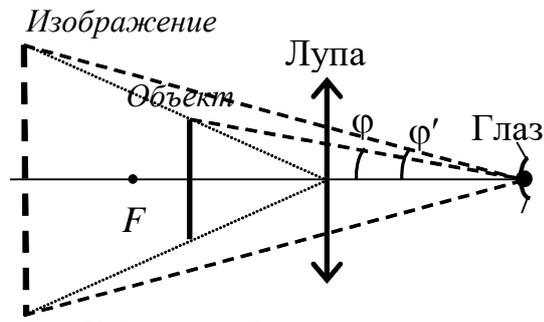


Рис. Наблюдение объекта с помощью лупы.

Рассчитаем коэффициент увеличения лупы, равный (по определению)

$$N = \frac{\operatorname{tg}\varphi'}{\operatorname{tg}\varphi},$$

где φ и φ' - угловые размеры объекта и изображения соответственно.

Пусть объект поперечным размером $2l$ находится от глаза на расстоянии наилучшего зрения D , тогда его угловой размер для невооруженного глаза равен

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{l}{D}.$$

Поместим между ними лупу так, чтобы объект оказался практически в фокусе, т.е. расстояние $a = F$. В этом случае в соответствии с формулой тонкой линзы (1) и линейные размеры изображения $2l'$, и расстояние $|b|$ от лупы до изображения устремятся к бесконечности, но – самое главное - угловой размер изображения (по отношению к лупе) останется тем же самым, что и у объекта и равным $\frac{l}{F}$. Но нормальный глаз не боится бесконечности, он, наблюдая через лупу, видит находящееся в бесконечности изображение без малейшего напряжения. Для бесконечно удаленного изображения его угловой размер для глаза будет точно таким же, как и для лупы:

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{l}{F}.$$

Следовательно, увеличение лупы равно

$$N = \frac{\operatorname{tg}\varphi'}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{D}{F}. \quad (2)$$

Именно эту величину и имеют в виду, когда говорят, что лупа имеет «такое-то» увеличение. Если, к примеру, увеличение четырехкратное, то фокусное расстояние лупы равно

$$F = \frac{D}{N} = \frac{25}{4} = 6,25 \text{ (см)}.$$

С помощью реальной лупы обычно получают увеличение не более шести- восьмикратного. Для большего увеличения применяют микроскоп.

Такую схему расчета увеличения лупы используют исключительно для получения формулы. При реальных наблюдениях с помощью лупы размер изображения наблюдатель выбирает сам, варьируя расстояния как от объекта до лупы, так и от лупы до глаза.

Если же лупу расположить от объекта на расстоянии, большем фокусного, то она даст действительное перевернутое изображение, которое может оказаться и за глазом, и перед ним. Его тоже можно наблюдать, но в разных ситуациях придется прикладывать определенное, иногда значительное, усилие для его наблюдения. Знание изложенных выше

фактов дает способ экспериментального определения типа линзы (собирающая или рассеивающая).

Попробуем теперь проанализировать ход лучей при наблюдении через лупу. Пусть объект с поперечным размером $2l$ находится точно в фокальной плоскости лупы диаметром d . Сначала установим вместо глаза экран. Каждая точка объекта будет давать на экране световое пятно, размер которого будет совпадать с поперечным размером самой лупы (на рисунке показан ход лучей от одной из крайних точек объекта). Если размер лупы существенно больше размера объекта, то понятно, что никакого изображения на экране не будет, будет просто световое пятно диаметром большим, чем диаметр лупы. Чтобы получить на экране четкое действительное изображение, следует объект и экран поместить так, чтобы была выполнена формула тонкой линзы (1).

Поместим теперь на место экрана глаз. Из множества лучей, прошедших через лупу, глаз будет видеть только те, что попадут непосредственно в хрусталик (на рисунке вновь показан ход лучей от крайней точки объекта). Без напряжения глаз превратит эти идущие из бесконечности лучи в точку на сетчатке. Точно также он поступит и с остальными точками объекта. В результате на сетчатке возникнет четкое изображение объекта с угловым размером φ' , определяемым из формулы

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{l}{F}.$$

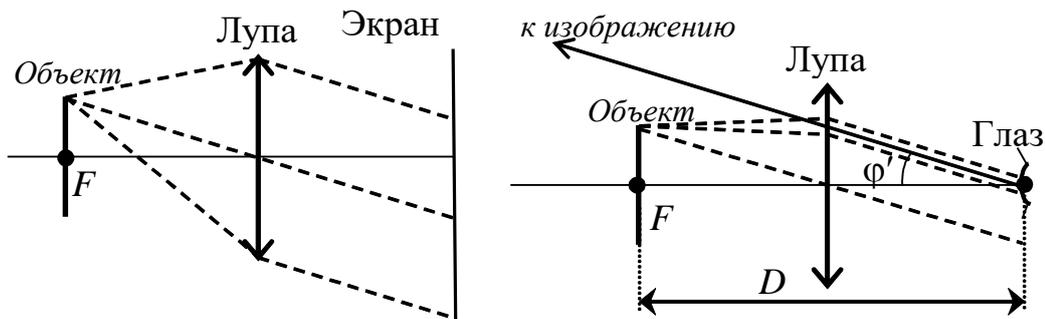


Рис. Наблюдение объекта, расположенного в фокальной плоскости лупы, на экране (слева) или глазом.

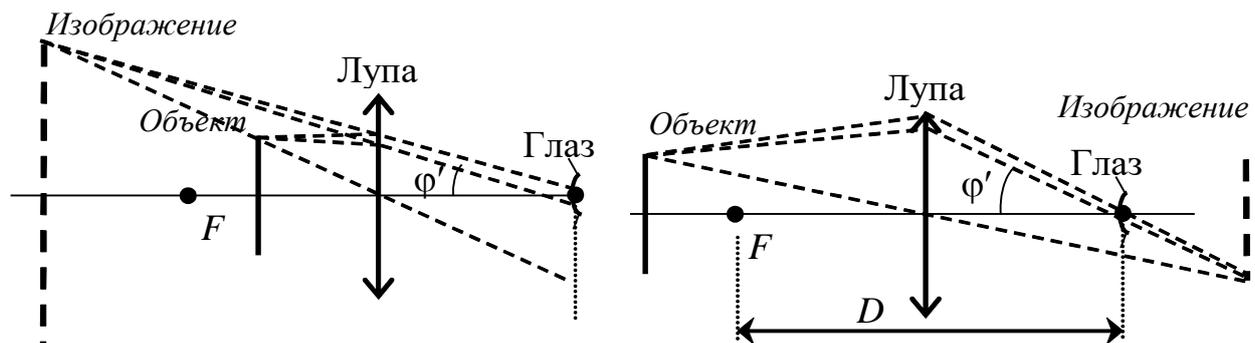


Рис. Наблюдение глазом объекта, смещенного из фокальной плоскости лупы.

Теперь сместим лупу к объекту, изображение останется мнимым, но располагаться будет уже не на бесконечном удалении от лупы (см. левый рисунок). Проводим из крайней точки изображения два луча в зрачок глаза, находя тем самым ход лучей, и видим, что угловой размер изображения практически не изменился (но все же стал чуть меньше).

Теперь чуть отдалим лупу от объекта, изображение станет действительным и окажется за глазом (см. правый рисунок). Вновь проводим лучи от крайней точки изображения через зрачок до линзы. Видим, что угловой размер изображения вырос, но на глаз падает сходящийся пучок!!! И большой вопрос: сможет ли глаз аккомодироваться, чтобы сформировать четкую точку на сетчатке. Может даже оказаться так, что при некоторых положениях глаза все лучи, вышедшие из крайней точки и прошедшие через лупу, пройдут

мимо глаза. А в глаз в этом случае попадут лучи только от центральной части объекта. Увеличение будет большим, чем то, что дается ранее полученной формулой (2). Правда, вследствие aberrаций оно может оказаться сильно искаженным. Да и глаз, возможно, не сможет получить четкого изображения. Построение хода лучей для такого случая выполнить самостоятельно.

Таким образом, для нормального глаза оптимальным является расположение объекта в фокальной плоскости лупы. Но на практике можно всегда подобрать удобное взаимное расположение объекта, лупы и глаза.

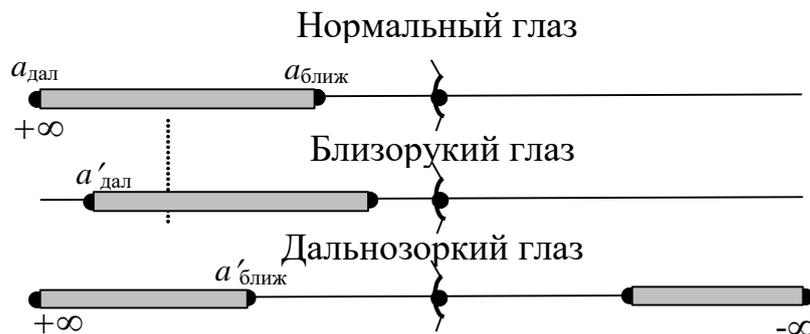
Пользуясь данным примером, подчеркнем, что ВСЕГДА при разборе формирования изображений различными оптическими системами следует различать случаи, когда наблюдения ведутся на экране ИЛИ глазом. Ведь глаз - это дополнительная оптическая система, да еще и с переменным фокусным расстоянием!!!

Особенности наблюдения через рассеивающую линзу разобрать самостоятельно (скажем только, что она ВСЕГДА уменьшает угловой размер).

3. ОЧКИ.

Очки, которые носит чуть ли не половина населения, - это дополнительная линза (собирающая или рассеивающая), позволяющая подправить отдельные незначительные дефекты зрения.

Человек с нормальным зрением способен хорошо настраивать (аккомодировать) свой глаз на наблюдение объектов, расположенных от глаза на расстоянии от бесконечности ($a_{\text{дал}}$) до 10-15 сантиметров ($a_{\text{ближ}}$). Среди дефектов зрения выделяют две большие группы: близорукость и дальнозоркость. Суть дефектов понимается из самих названий.



Близорукий глаз хорошо видит объекты, расположенные вблизи, и плохо видит вдали. Ближний и дальний пределы аккомодации глаза смещены к глазу (см. рисунок). Основное предназначение очков заключается в «перемещении» объекта, находящегося в «нехорошей» для глаза области, в «хорошую». Для близорукости это означает, что очки должны удалить на бесконечность объект «переместить» в область аккомодации глаза, т.е. приблизить его на расстояние $a'_{\text{дал}}$. Формула тонкой линзы (1) позволит нам рассчитать фокусное расстояние требуемой для этого линзы очков. Подставив в (1) $a = \infty$; $b = -a'_{\text{дал}}$ (знак «минус», т.к. изображение мнимое), получим:

$$F_{\text{оч}} = -a'_{\text{дал}},$$

т.е. необходимо использовать рассеивающую линзу с отрицательным фокусным расстоянием, равным дальнему ($a_{\text{дал}}$) пределу аккомодации близорукого глаза. В этом случае близорукий глаз будет без напряжения видеть далеко расположенные объекты, которые были «приближены» очками.

Дальнозоркий глаз, напротив, хорошо видит объекты, расположенные вдали, и плохо видит вблизи. Поэтому очки должны «переместить» объект, расположенный на расстоянии $a_{\text{ближ}}$ для нормального глаза, в область аккомодации дальнозоркого глаза, т.е. «удалить» объект от глаза на расстояние $a'_{\text{ближ}}$. Такую процедуру проделывает положительная линза, фокусное расстояние которой больше $a_{\text{ближ}}$ для нормального глаза: в результате формируется

мнимое изображение. Но у дальновзоркого глаза есть еще одна область уверенного наблюдения объектов, для которых $a < 0$ (объект мнимый). Понятно, что таких объектов в реальности не существует, ведь все объекты располагаются перед наблюдателем. Но положительные очки именно в эту область «перемещают» объекты, находящиеся от глаза на расстоянии, большем, чем фокусное расстояние очков. Т.е. после очков на дальновзоркий глаз от объекта падает сходящийся пучок лучей, который таким глазом воспринимается совершенно нормально без значительных усилий.

Таким образом, близорукие люди должны носить очки с отрицательным фокусным расстоянием, дальновзоркие – с положительным. Обычно говорят об оптической силе D очков, выражаемой в диоптриях:

$$D = \frac{1}{F}$$

(1Дп=1 м⁻¹). Поэтому фраза: «У меня очки «минус два»» означает, что их фокусное расстояние равно $F = -0,5$ м.

Каждый человек, экспериментально определив пределы отчетливого наблюдения своего глаза ($a'_{\text{дал}}$ и $a'_{\text{ближ}}$), может самостоятельно рассчитать, какие именно очки ему требуются (если, конечно, требуются).

Отметим также, что, так как очки расположены практически вплотную к глазу, то они не изменяют существенно углового размера объекта, они лишь «перемещают» его в область уверенного наблюдения глаза.

4. ТЕЛЕСКОП.

Телескоп предназначен для наблюдения объектов, расположенных очень далеко от наблюдателя, можно сказать, на бесконечности. Сами объекты могут иметь значительные линейные размеры (например, звезды), но их угловые размеры чрезвычайно малы. Поэтому основная задача телескопа, как, впрочем, и любой другой оптической системы, – это увеличение углового размера.

Простейший телескоп состоит из двух линз. Первая, расположенная ближе к объекту, собирающая, носит название *объектив*. Вторая может быть как собирающей, так и рассеивающей, ее называют *окуляр*. Глаз наблюдателя располагается практически вплотную к окуляру, поэтому диаметр окуляра лишь незначительно превосходит размеры хрусталика.

Рассмотрим, как работает телескоп (ограничимся случаем двух собирающих линз). Так как реальный объект находится на бесконечности, его изображение сформируется в фокальной плоскости объектива, его угловой размер φ совпадет с угловым размером объекта, а линейный размер будет равен

$$l_{\text{«об»}} = 2F_{\text{об}} \cdot \text{tg}\varphi.$$

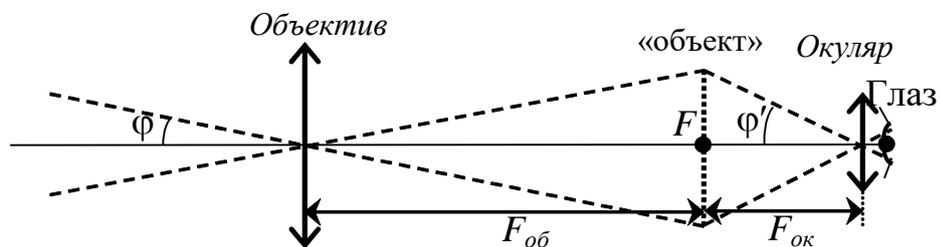


Рис. Оптическая схема телескопа.

Это изображение станет «объектом» для второй линзы – окуляра. Действие окуляра будет подобно действию лупы, но есть некоторые отличия. «Объект» должен находиться в фокальной плоскости окуляра, поэтому каждая точка «объекта» даст после прохождения окуляра параллельный пучок, который и будет легко наблюдаться глазом. Однако, в отличие от лупы, глаз будет располагаться вплотную к окуляру. Поэтому, в соответствии с формулой (2) увеличение лупы-окуляра будет равно единице!!! Ведь глаз расположен от «объекта» не на расстоянии наилучшего зрения, а на фокусном расстоянии окуляра $F_{\text{ок}}$.

Но при внимательном анализе можно заметить, что увеличение-то уже получено! Угловой размер «объекта» наблюдаемого глазом, не зависимо от того, наблюдается он через окуляр или без него, равен

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{l_{об}''/2}{F_{ок}} = \frac{F_{об}}{F_{ок}} \cdot \operatorname{tg}\varphi.$$

В итоге увеличение телескопа равно отношению фокусных расстояний объектива и окуляра:

$$N = \frac{\operatorname{tg}\varphi'}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{F_{об}}{F_{ок}}. \quad (2)$$

При этом фокальные плоскости объектива и окуляра совпадают, т.е. расстояние L между ними равно

$$L = F_{об} + F_{ок}.$$

Может сложиться обманчивое впечатление, что окуляр не нужен, ведь он не дает никакого углового увеличения! Это действительно так, но его основное предназначение в телескопе (и в ряде других приборов) – это «сделать хорошо» глазу. Обычно фокусное расстояние окуляра составляет несколько сантиметров (чем оно меньше, тем больше увеличение прибора). Глаз не способен рассмотреть «объект» с такого расстояния. А окуляр позволяет каждую точку «объекта» превратить в параллельный пучок, что чрезвычайно удобно для глаза.

С помощью телескопа можно наблюдать и объекты, расположенные ближе, чем на бесконечном расстоянии, но при этом гораздо большем, чем $F_{об}$. В этом случае изображение объекта окажется чуть дальше фокальной плоскости объектива. Поэтому окуляр необходимо сместить от объектива, чтобы полученное в объективе изображение оказалось точно в фокальной плоскости окуляра. Именно таким образом и осуществляют наведение на резкость при наблюдении не только с помощью телескопа, но и в другие оптические приборы.

Отметим также, что окуляр можно использовать и без объектива, в качестве лупы. У окуляра и малый диаметр, и малое фокусное расстояние. Поэтому его следует, с одной стороны, прижать непосредственно к глазу, а, с другой стороны, поднести к объекту (обычно тексту) на малое расстояние, равное фокусному. Увеличение углового размера в этом случае достигается именно за счет малого расстояния между объектом и глазом (оно существенно меньше наилучшего $D=25$ см), а окуляр помогает глазу, переводя изображение на бесконечность. Пожилые люди довольно часто используют именно такой «способ» для чтения.

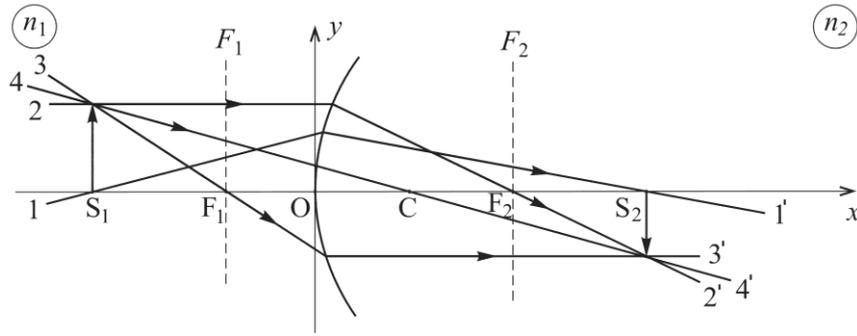
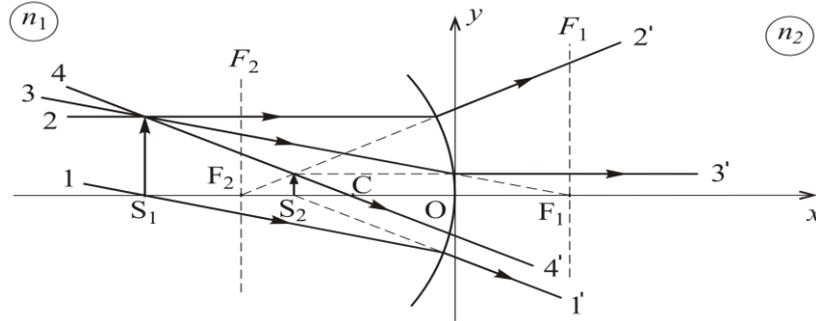
Фрагмент из «Оптика. Методика решения»

Преломление света на сферической границе раздела двух сред

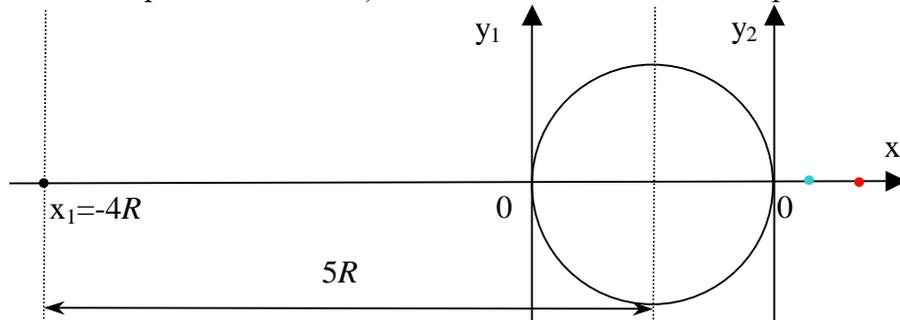
Пусть сферическая поверхность, радиус которой $OC = R$, разделяет среды с показателями преломления n_1 и n_2 (рис. 1.2 и 1.3). В параксиальном приближении (при малых углах между световым лучом и оптической осью Ox) x -координаты точек S_1 (предмет) и S_2 (изображение), отсчитываемые от вершины поверхности O , связаны соотношением:

$$\frac{n_2}{x_{S_2}} - \frac{n_1}{x_{S_1}} = \frac{n_2 - n_1}{R}. \quad (1.4)$$

Для оптической системы, показанной на рис. 1.2: $n_2 > n_1$, $R > 0$, $x_{S_1} < 0$, $x_{S_2} > 0$; для оптической системы, представленной на рис. 1.3: $n_2 > n_1$, $R < 0$, $x_{S_1} < 0$, $x_{S_2} < 0$.

Рис. 1.2. Преломление лучей на сферической границе раздела двух сред ($n_2 > n_1$)Рис. 1.3. Преломление лучей на сферической границе двух сред ($n_2 > n_1$)

5. Точечный источник света расположен на расстоянии $L=5R$ от центра прозрачного шара радиуса R (показатель преломления $n=2$). Рассчитать положение изображения.



Решение.

1) Преломление на первой границе:

$$\frac{n_2}{x_2} - \frac{n_1}{x_1} = \frac{n_2 - n_1}{r},$$

где $x_1 = -4R$, $r = R$, $n_1 = 1$, $n_2 = 2$.

$$\frac{n_2}{x_2} = \frac{n_1}{x_1} + \frac{n_2 - n_1}{r} = \frac{1}{-4R} + \frac{1}{R} = \frac{3}{4R}, \quad x_2 = \frac{4Rn_2}{3} = \frac{8R}{3}.$$

2) Преломление на второй границе:

$$\frac{n_2}{x_2} - \frac{n_1}{x_1} = \frac{n_2 - n_1}{r},$$

где $x_1 = \frac{8R}{3} - 2R = \frac{2R}{3}$, $r = -R$, $n_1 = 2$, $n_2 = 1$.

$$\frac{n_2}{x_2} = \frac{n_1}{x_1} + \frac{n_2 - n_1}{r} = \frac{3 \cdot 2}{2R} + \frac{-1}{-R} = \frac{4}{R}, \quad x_2 = \frac{R \cdot n_2}{4} = \frac{R}{4}.$$

6. Применение формулы (1.4) для случая тонкой линзы.

Тонкой называют линзу, толщина h которой существенно меньше радиусов кривизны R_1 и R_2 обеих поверхностей.

Для нахождения связи между координатами источника $x_{ист}$ и изображения $x_{из}$ следует два раза применить формулу (1.4), считая, что точки пересечения оптической оси с обеими поверхностями совпадают:

$$\frac{n_2}{x_2} - \frac{n_1}{x_{ист}} = \frac{n_2 - n_1}{R_1};$$

$$\frac{n_3}{x_{из}} - \frac{n_2}{x_2} = \frac{n_3 - n_2}{R_2},$$

где n_1, n_2, n_3 – показатели преломления: 1) среды, из которой идет свет; 2) материала линзы; 3) среды, в которую проходит свет после линзы.

Складывая, получим:

$$\frac{n_3}{x_{из}} - \frac{n_1}{x_{ист}} = \frac{n_2 - n_1}{R_1} + \frac{n_3 - n_2}{R_2}. \quad (3)$$

Если $n_1 = n_3$, то

$$\frac{1}{x_{из}} - \frac{1}{x_{ист}} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (4)$$

Сравним полученную формулу с привычной («школьной») формулой тонкой линзы

$$\frac{1}{x_{из}} + \frac{1}{x_{ист}} = \frac{1}{F}, \quad (5)$$

где в «школьной» формуле фокусное расстояние F находится из

$$\frac{1}{F} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (6)$$

($R_1, R_2 > 0$, если поверхности выпуклые, и $R_1, R_2 < 0$, если поверхности вогнутые).

Различие в знаках (4) и (5)-(6) объясняется тем, что в (4) указаны **координаты** как объектов $x_{ист}$ и $x_{из}$, так и центров кривизны R_1 и R_2 . Так, для двояковыпуклой линзы (см. рис.) в «школьных» (5)-(6) все величины будут со знаками «плюс», а в формуле (4) величины $x_{ист} < 0$ и $R_2 < 0$. В результате получаются одинаковые формулы для расчетов.

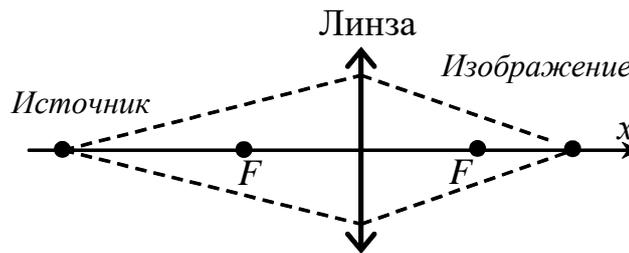


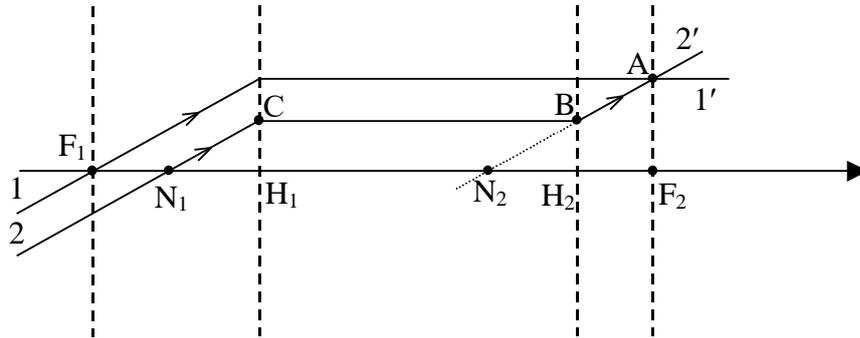
Рис. Построение изображения в собирающей линзе

Конечно, формула (1.4) и полученные из нее (3) и (4) обладают большей универсальностью, но для простых задач, на взгляд автора, можно пользоваться привычными «школьными» формулами (5) и (6). Но выбор – это личное дело учащегося, главное, чтобы ответ получался правильным.

Отметим, что если по разные стороны от линзы находятся различные среды ($n_1 \neq n_3$), то для нахождения координат необходимо использовать (3), т.к. формулы (5)-(6) «работать» не будут. Ведь даже фокусные расстояния не будут совпадать (кстати, а как же их найти? – подумайте).

Дополнение.**Построение по кардинальным точкам.**

1. Заданы главные плоскости H_1 и H_2 и фокусы F_1 и F_2 . Найти узловые точки N_1 и N_2 .



Проводим произвольный луч 1, проходящий через фокус F_1 . После оптической системы он выйдет параллельно главной оптической оси (луч 1') и пересечет фокальную плоскость F_2 в точке А. В эту же точку А соберутся все падающие на систему лучи, параллельные лучу 1.

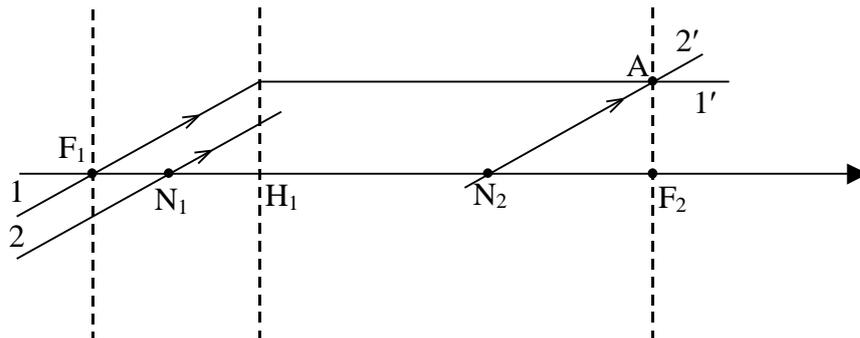
Проведем через точку А луч 2', параллельный лучу 1. Он пересечет главную плоскость H_2 в точке В и главную оптическую ось в точке N_2 . Найдем падающий на систему луч 2, который выйдет из системы как луч 2'. Проведем через точку В прямую, параллельную главной оптической оси, до пересечения с главной плоскостью H_1 (точка С). Через эту точку С проведем луч 2, параллельный лучам 1 и 2', который пересечет главную оптическую ось в точке N_1 .

Точки N_1 и N_2 и будут искомыми узловыми точками, т.к. лучи 2 и 2' параллельны друг другу.

Из геометрии видно, что фокусное расстояние F_1H_1 равно расстоянию N_2F_2 , аналогично $F_1N_1 = H_2F_2$. Кроме этого $N_1H_1 = N_2H_2$.

Отметим, что если с обеих сторон от системы находятся среды с одинаковыми показателями преломления (или одна и та же среда), то фокусные расстояния F_1H_1 и F_2H_2 одинаковы. В этом случае узловые точки N_1 и N_2 совпадают с главными H_1 и H_2 .

2. Заданы узловые точки N_1 и N_2 и фокусы F_1 и F_2 . Найти главные плоскости H_1 и H_2 .



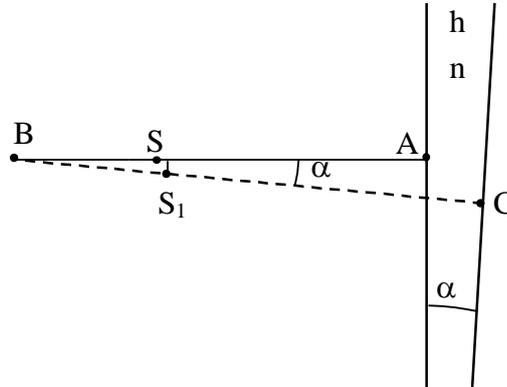
Проводим произвольный луч 2, проходящий через узловую точку N_1 . Луч 2', параллельный лучу 2 и проходящий через узловую точку N_2 , будет продолжением луча 2 после оптической системы и пересечет фокальную плоскость F_2 в точке А.

Проводим луч 1, проходящий через фокус F_1 и параллельный лучу 2. Проводим луч 1', проходящий через точку А и параллельный главной оптической оси. Пересечение лучей 1 и 1' даст положение главной плоскости H_1 .

Аналогично находится и положение главной плоскости H_2 .

Дополнение 2.

**Построение изображения точечного источника при прохождении через
оптический клин**



Источник света S расположен на расстоянии a (отрезок SA) от передней поверхности клина (толщина h , показатель преломления n , угол $\alpha \ll 1$). Построим изображение S_1 , возникающее при последовательном преломлении на передней и задней поверхностях клина. Для этого воспользуемся формулой преломления на сферической поверхности:

$$\frac{n_2}{s_2} - \frac{n_1}{s_1} = \frac{n_2 - n_1}{R}, \quad (1)$$

где s_1 и s_2 – координаты источника и изображения, излучение идет из среды с показателем преломления n_1 в среду с показателем преломления n_2 .

В нашем случае обе поверхности плоские ($R \rightarrow \infty$), поэтому при преломлении на плоской поверхности получим

$$\frac{s_2}{n_2} = \frac{s_1}{n_1}. \quad (1a)$$

В случае отражения в формуле (1) следует положить $n_1 = -n_2$, тогда

$$\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_1} = \frac{2}{R}. \quad (2)$$

а для плоской поверхности

$$s_2 + s_1 = 0. \quad (2a)$$

Из формул (1a)-(2a) следует, что при преломлении источник и его изображение находятся по одну сторону от границы раздела (знаки s_1 и s_2 совпадают), а при отражении – по разные (s_1 и s_2 имеют разные знаки).

Положение изображения S_1 найдем в два этапа.

1. При преломлении на передней поверхности в соответствии с (1a), где $n_1 = 1$, $n_2 = n$, изображение будет находиться в точке B на расстоянии $BA = na$ от передней поверхности.

2. Опустим из т. B перпендикуляр на заднюю поверхность клина, длина перпендикуляра BC будет равна

$$BC = (BA + h) \cdot \cos \alpha = (na + h) \cdot \cos \alpha.$$

В соответствии с (1a) расстояние от т. C до изображения S_1 будет равно

$$CS_1 = \frac{BC}{n} = \left(a + \frac{h}{n} \right) \cdot \cos \alpha.$$

Для длины отрезка BS_1 справедливо соотношение

$$BS_1 = \frac{n-1}{n} BC = \left[(n-1)a + \frac{(n-1)h}{n} \right] \cdot \cos \alpha.$$

Опустим из т. S_1 перпендикуляр на линию ВА. Теперь несложно найти, на сколько источник S и изображение S_1 смещены относительно друг друга. По вертикальной оси

$$(SS_1)_{\text{верт}} = BS_1 \sin \alpha = \left[(n-1)a + \frac{(n-1)h}{n} \right] \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha .$$

Если $\alpha \ll 1$ и $h \ll a$, то получаем хорошо знакомую формулу:

$$(SS_1)_{\text{верт}} \approx (n-1)a \cdot \alpha .$$

(смещение мнимого источника при интерференции на бипризме)

По горизонтали смещение равно

$$(SS_1)_{\text{гор}} = BS - BS_1 \cdot \cos \alpha = (n-1)a - \left[(n-1)a + \frac{(n-1)h}{n} \right] \cdot \cos^2 \alpha \approx -\frac{(n-1)h}{n}$$

(изображение S_1 чуть ближе к поверхности клина, чем источник S).

Если $h \ll a$, то смещение по горизонтали пренебрежимо мало, и можно считать, что источник и его изображение находятся на одинаковом расстоянии от передней поверхности клина.

В случае плоскопараллельной пластинки (ППП) угол α равен нулю, изображение S_1 окажется на линии SA, причем ближе к поверхности, чем источник S, на расстояние

$$(SS_1)_{\text{гор}} = \frac{(n-1)h}{n} .$$

Данное построение доказывает, что два изображения, получаемые при построении в бипризме, находятся от нее на том же расстоянии, что и источник (принято считать, что $h \ll a$).

Домашнее задание.

5.33, 34а, 35 а,б, 44 и по желанию на кардинальные элементы 5.53 а,б.