Анализ, преобразование и синтез световых полей. Оптическая фильтрация.

Любое световое поле, используя временное и пространственное преобразования Фурье, можно представить как суперпозицию плоских монохроматических волн, распространяющихся в пространстве независимо друг от друга.

Анализ – частотное и пространственное разложение светового поля.

Преобразование – изменение какой-либо из компонент разложения.

Синтез – получение результирующего поля после преобразования.

Рассмотрим схему Аббе-Портера (рис. 1). Плоская волна падает нормально на объект, находящийся на расстоянии *a* от собирающей линзы с фокусным расстоянием *f*. Экран для наблюдения установлен в плоскости, сопряженной с плоскостью объекта, т.е. на расстоянии *b*, удовлетворяющем формуле тонкой линзы:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}.$$

На экране будет наблюдаться перевернутое изображение объекта, увеличенное в b/a раз.

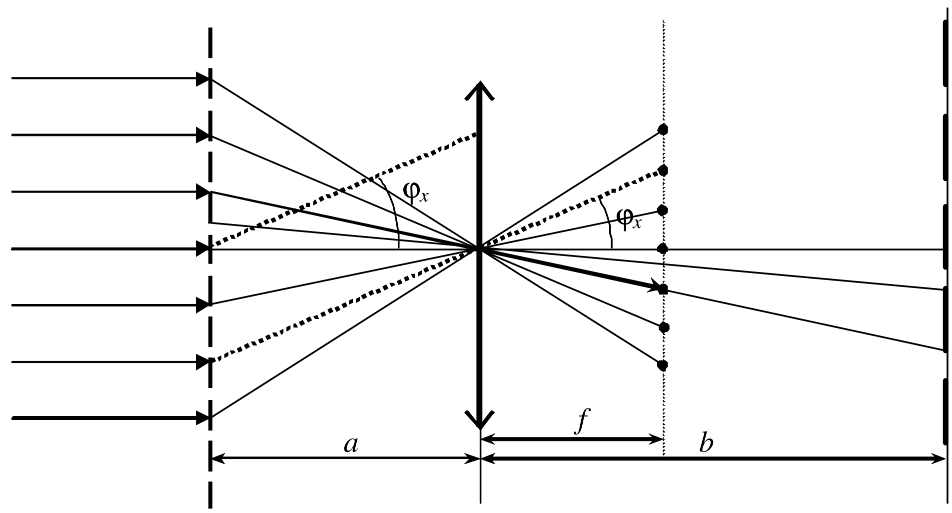

Рис. 1. Схема Аббе-Портера

Введем функцию пропускания объекта $\tau(x,y)$ как отношение комплексной амплитуды поля $A(x,y)$ сразу после прохождения объекта к комплексной амплитуде поля падающей волны $A_0(x,y)$ в плоскости объекта:

$$\tau(x,y)=\frac{A(x,y)}{A_0(x,y)}.$$

(в общем случае $\tau(x,y)$ - комплексная функция, $|\tau(x,y)|\le 1$).

В дальнейшем положим $A_0(x,y)\equiv 1$, $a=b=2f$ и будем считать, что объект симметричен относительно поворота на 180 градусов. При таких условиях распределение амплитуды изображения $A_{изобр}(x,y)$ на экране будет таким же, как и $A(x,y)$, т.е.

$$A_{изобр}(x,y)=A(x,y)=\tau(x,y).$$

В соответствии с приближением дифракции Фраунгофера после прохождения объекта формируется пространственный фурье-спектр (**анализ**) функции пропускания объекта по пространственным частотам k_x и k_y:

$$F(k_x, k_y) = F(\tau(x, y)),$$

где $k_x = k \cdot \sin \varphi_x$, $k_y = k \cdot \sin \varphi_y$ (на рисунке выделено одно возможное направление φ_x).

Линза локализует полученный спектр в своей фокальной плоскости.

$$k_x = k \cdot \sin \varphi_x \approx k \cdot \frac{x'}{f},$$

x' - координата в фокальной плоскости.

Из рисунка видно, что вследствие конечного радиуса *R* линзы пространственные частоты, соответствующие углам $tg\varphi_x \geq \frac{R}{a}$, не попадут в линзу, и, как следствие, будут отсутствовать в фокальной плоскости. Это может привести к потере информации о мелких деталях в изображении.

Если никаких преобразований в фокальной плоскости не производить, то при свободном распространении в области пространства между фокальной плоскостью и плоскостью изображения осуществляется обратное фурье-преобразование (**синтез**), в результате формируется изображение, подобное исходному.

Если $\tau(x, y)$ - регулярная функция (например, дифракционная решетка), то в фокальной плоскости будет наблюдаться ряд ярких точек – дифракционных максимумов (на рисунке указаны несколько различных направлений на максимумы). Перекрывая те или иные максимумы, можно осуществлять **преобразование** пространственного спектра, и, как следствие, преобразование изображения.

Рассмотрим, как изменяется изображение при перекрывании максимума нулевого порядка. Этот максимум в соответствии с формулой преобразования Фурье несет информацию о среднем значении амплитуды поля после объекта:

$$c_0 = \frac{1}{S_0} \int\int_{S_0} \tau(x, y) dxdy,$$

где S_0 – площадь объекта.

Пусть функция $\tau(x)$ имеет вид (рассмотрим случай зависимости только от одной координаты *x*), приведенный на рис. 2. Ее среднее значение (амплитуда максимума нулевого порядка) равно c_0.

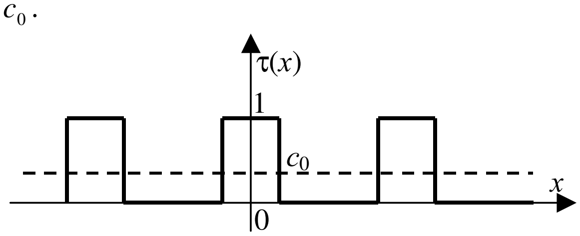

Рис. 2. Вид функции $\tau(x)$ и ее среднее значение c_0.

В результате перекрывания нулевого максимума амплитуда изображения в любой точке экрана уменьшится на c_0, т.е. будет равна $\tau(x) - c_0$. В результате интенсивность светлых полос станет пропорциональной $(1 - c_0)^2$, а темных полос - c_0^2.

Если ширина светлых полос объекта меньше ширины темных полос, то $c_0 < 1/2$. В этом случае светлые полосы станут чуть темнее, темные – чуть светлее. Если же ширина светлых полос объекта больше ширины темных полос, то $c_0 > 1/2$, в результате, напротив, светлые полосы станут темными, темные – светлыми. Если же $c_0 = 1/2$, то изображение пропадет, останется просто равномерно засвеченный экран.

Рассмотрим случай фазового объекта, для которого $|\tau(x)| = 1$, а фаза $\varphi(x)$ функции пропускания принимает значения 0 либо $\pi/2$ (рис. 3): Это означает, что $\tau(x) = e^{i\varphi(x)}$, т.е. равно либо 1, либо i.

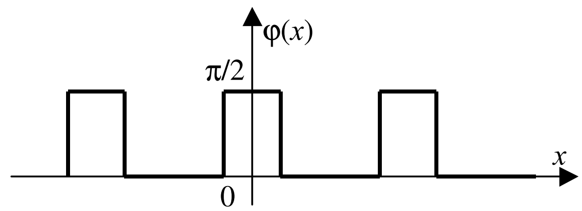

Рис. 3. Вид функции $\varphi(x)$.

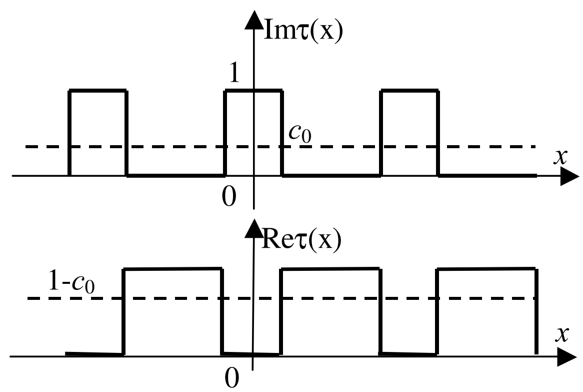

Рис. 4. К вычислению среднего значения действительной и мнимой частей $\tau(x)$.

Так как интенсивность пропорциональна квадрату модуля $|\tau(x)|^2$ и не зависит от фазы, то на экране никакого изображения не будет, интенсивность во всех точках будет одинаковой.

Среднее значение τ_0 комплексной функции $\tau(x)$ будет теперь комплексным числом, причем действительная и мнимая части τ_0 будут равны $\mathrm{Re}(\tau_0) = 1 - c_0$ и $\mathrm{Im}(\tau_0) = c_0$ (рис. 4). В результате перекрывания максимума нулевого порядка комплексная амплитуда $\tau(x)$ на экране уменьшится на τ_0 (см. рис. 5 с расположением амплитуд на комплексной плоскости).

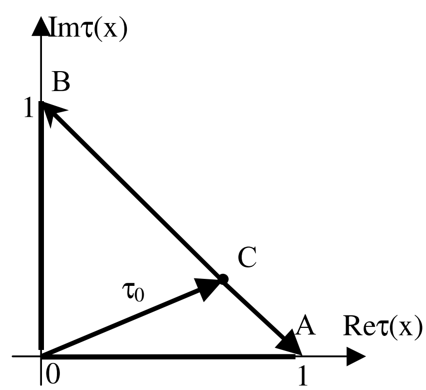

Рис. 5. Расчет комплексных амплитуд для фазового объекта (метод темного поля)

Из рис. 5 видно, что амплитуды изображения на участках с разными значениями фаз станут разными (CA для участка с фазой $\varphi(x) = 0$ и CB для участка с фазой $\varphi(x) = \pi/2$), что приведет к проявлению изображения на экране. Такой метод называют **методом темного поля**.

Однако, если $c_0 = \dfrac{1}{2}$, то $\mathrm{Re}(\tau_0) = \mathrm{Im}(\tau_0) = \dfrac{1}{2}$, и модули амплитуд (CA и CB) для разных участков изображений окажутся равными, хотя их фазы будут отличаться на π (рис. 6). Таким образом, перекрывание нулевого порядка не приведет к проявлению изображения. Но в этом случае на помощь приходит **метод фазового контраста**, в соответствии с которым максимум нулевого порядка перекрывают фазовой пластинкой, вносящей дополнительную разность фаз, например, $\pi/2$. В этом случае комплексный вектор τ_0 на рис. 6 следует повернуть на угол $\pi/2$ по или против часовой стрелки в положение 0C′ (в зависимости от знака вносимой разности фаз). Для нахождения амплитуды в разных точках экрана этот вектор 0C′ следует добавить к CA и CB. В результате модули амплитуд для разных участков изображений окажутся существенно различными. Фазовая модуляция объекта преобразуется в амплитудную модуляцию изображения.

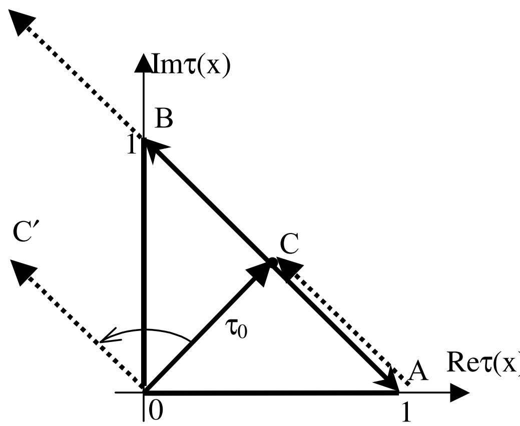

Рис. 6. Расчет комплексных амплитуд для фазового объекта (метод фазового контраста)

К разрешающей способности микроскопа

Микроскоп представляет собой оптическую систему, состоящую из двух собирающих линз (объектива и окуляра), установленных так, чтобы получить увеличенное мнимое изображение объекта.

Рассмотрим схему формирования действительного изображения в объективе микроскопа диаметра D_0 (рис. 7). Объект изучения длиной l располагается вблизи фокальной плоскости линзы на расстоянии $a > f$, $(a - f) << f$. Увеличенное изображение в соответствии с формулой тонкой линзы

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

будет находиться от линзы на расстоянии $b = \dfrac{f \cdot a}{a - f} >> a$. Найдем дифракционное разрешение микроскопа, т.е. минимальный размер $l_{\min}$ объекта, который еще можно разрешить.

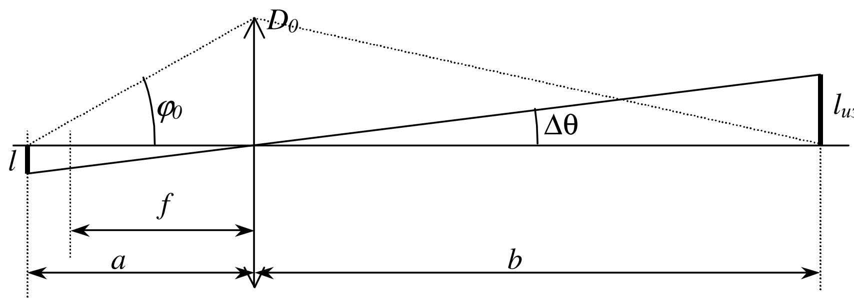

Рис. 6. Формирование изображения в микроскопе

Известно, что при падении плоской монохроматической волны на линзу диаметра D_0 угловой размер $\Delta\theta$ центрального дифракционного максимума равен:

$$\Delta\theta = \frac{1{,}22\lambda}{D_0}.$$

Чтобы воспользоваться этой формулой, представим объектив как совокупность двух собирающих линз $Л_a$ и $Л_b$ с фокусными расстояниями a и b, установленными вплотную друг к другу на место объектива. Процесс формирования изображения точечного объекта будет выглядеть следующим образом. Так как объект находится в фокальной плоскости линзы $Л_a$, то каждая его точка сформирует плоскую волну, падающую на линзу $Л_b$. Тогда угловой размер изображения точки, определяется размером линзы $Л_b$ и задается приведенной выше формулой. Линейный размер $l_{дифр}$ изображения равен

$$l_{дифр} = \Delta\theta \cdot b = \frac{1{,}22\lambda b}{D_0},$$

где b – фокусное расстояние линзы $Л_b$.

В то же время из геометрической оптики соотношение размеров объекта l и его изображения $l_{из}$ выражается формулой:

$$\frac{l_{из}}{l} = \frac{b}{a}$$

Объект будет хорошо различим, если $l_{дифр} \le l_{из}$. Отсюда для минимального размера $l_{\min}$ объекта получаем:

$$l_{\min} = \frac{a}{b} l_{из} \geq \frac{a}{b} l_{дифр} = \frac{1{,}22\lambda \cdot a}{D_0} = \frac{1{,}22\lambda}{D_0 / a} = \frac{1{,}22\lambda}{\varphi_0},$$

где φ_0 - угловая апертура объектива из места расположения объекта. Таким образом, для увеличения разрешения микроскопа следует увеличивать угловую апертуру.