Дифракционная решетка как спектральный прибор.

(основную часть текста составляют описания задач №136 и №152 практикума и Глава 6 из «Методики решения…))

Дифракционная решетка представляет собой пространственную периодическую структуру, состоящую из большого числа одинаковых по ширине щелей, находящихся на одном и том же расстоянии друг от друга. Распределение поля задается полученной ранее формулой дифракции на N щелях:

$$I_\varphi = I_0 \cdot \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sin N\delta}{\sin \delta}\right)^2$$

где $u = \frac{kb\sin\varphi}{2} = \frac{\pi d \sin\varphi}{\lambda}$;

$\delta = \frac{kd\sin\varphi}{2} = \frac{\pi d\sin\varphi}{\lambda}$;

b - ширина щели;

d - период решетки (расстояние между щелями).

В дифракционной картине имеются главные максимумы (находятся из условия $\delta = 0, \pi, 2\pi, ... = \pi m$ или $d\sin\varphi_m = 0, \lambda, 2\lambda, ... = m\lambda$), в которых интерференционный член $\left(\frac{\sin N\delta}{\sin\delta}\right)^2$ стремится к N^2. Эти максимумы называют **дифракционными максимумами *m*-го порядка**. Ближайшие к ним минимумы находятся из условия $\sin N\delta = 0$, или

$$d\sin\varphi_{m,\min} = \left(m \pm \frac{1}{N}\right)\lambda.$$

Считая углы φ малыми $(\sin\varphi \approx \varphi)$, получим, что угловой размер $\Delta\varphi_m$ максимума m-го порядка можно найти, взяв дифференциал по переменным φ_m и m при постоянных d и λ:

$$d \cdot d(\sin\varphi_m) = dm \cdot \lambda,$$

откуда из условий $d(\sin\varphi_m) = \cos\varphi_m \cdot \Delta\varphi_m$, $dm \cdot = \frac{1}{N}$ получим

$$\Delta\varphi_m = \frac{\lambda}{Nd\cos\varphi_m} = \frac{\lambda}{D\cos\varphi_m},$$

где $D = Nd$ - ширина дифракционной решетки. Если угол дифракции мал $(\cos\varphi_m \approx 1)$, то для угловой ширины максимума получим привычную для оптики формулу:

$$\Delta\varphi_m \approx \frac{\lambda}{D}.$$

Интенсивность дополнительных максимумов дифракционной картины существенно меньше интенсивности главного максимума, поэтому принято считать, что для дифракционной решетки с большим числом щелей (или **штрихов**) картина представляет собой совокупность только ярких главных максимумов m-го порядка с малым угловым размером $\Delta\varphi_m$.

Из условия нахождения максимумов $d\sin\varphi_m = m\lambda$ следует, что максимумам всех порядков (кроме нулевого) для различных длин волн будет соответствовать свой угол дифракции:

$$\sin\varphi_m(\lambda) = m\frac{\lambda}{d}.$$

Поэтому дифракционная решетка является **спектральным прибором**, осуществляющим пространственное разложение света на монохроматические составляющие. К характеристикам спектральных приборов относят:

1)**<u>угловая дисперсия</u>** $D_\varphi = \frac{d\varphi_m}{d\lambda}$ - отношение угла $d\varphi_m$, на который разнесены лучи с длинами волн, отличающимися на $d\lambda$, к величине $d\lambda$.

Для дифракционной решетки угловую дисперсию можно найти, взяв дифференциал от соотношения $d\sin\varphi_m = m\lambda$ по переменным φ_m и λ:

$$d\cos\varphi_m \cdot d\varphi_m = m d\lambda; \qquad D_\varphi = \frac{d\varphi_m}{d\lambda} = \frac{m}{d\cos\varphi_m}.$$

Если углы дифракции φ_m малы, то $\cos\varphi_m \approx 1$, и угловая дисперсия

$$D_\varphi \approx \frac{m}{d}$$

не зависит от длины волны.

2) **<u>разрешающая способность</u>**

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}$$

- это отношение длины волны λ излучения к $\delta\lambda$ - наименьшей разности длин волн двух спектральных линий, при которой эти линии различимы, т.е. наблюдаются раздельно (рис. 5). В соответствии с *критерием Рэлея* две линии λ и $(\lambda + \Delta\lambda)$ разрешены, если угловое расстояние между главными максимумами одного и того же порядка для этих длин волн не меньше угловой ширины $\Delta\varphi_m$ главного максимума:

$$\varphi_{m,\max}(\lambda + \Delta\lambda) - \varphi_{m,\max}(\lambda) \geq \Delta\varphi_m.$$

Это означает, что в предельном случае максимум m-го порядка для длины волны $(\lambda + \Delta\lambda)$ совпадает с минимумом, ближайшим к максимуму того же порядка для длины волны λ, т.е.

$$\varphi_{m,\max}(\lambda + \Delta\lambda) = \varphi_{m,\min}(\lambda).$$

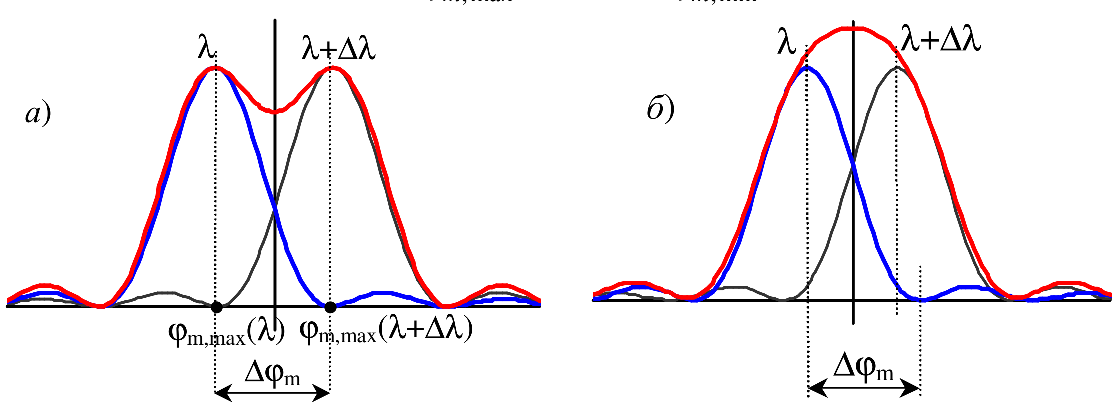

Рис. 5. К определению разрешающей способности:
а) спектральные линии разрешены; *б*) спектральные линии не разрешены.

:

.

Отсюда следует:

$$d\sin\left(\varphi_{m,\max}(\lambda + \Delta\lambda)\right) = m(\lambda + \Delta\lambda) = d\sin\left(\varphi_{m,\min}(\lambda)\right) = \left(m + \frac{1}{N}\right)\lambda.$$

В итоге получаем:

$$m(\lambda+\Delta\lambda)=\left(m+\frac{1}{N}\right)\lambda;$$

$$R=\frac{\lambda}{\Delta\lambda}=mN=\frac{d\sin\varphi}{\lambda}N=\frac{L\cdot\sin\varphi}{\lambda}. \qquad (8)$$

3)**свободная область дисперсии** $\Delta\lambda$ – это максимальная ширина спектрального интервала, при которой спектры соседних порядков не перекрываются. Это означает, что m-ый порядок для длины волны $\lambda+\Delta\lambda$ совпадает с (m+1)-ым порядком для длины волны λ:

$$m(\lambda+\Delta\lambda)=(m+1)\lambda \qquad \Delta\lambda=\frac{\lambda}{m}.$$

Для дифракционной решетки свободная область дисперсии велика (при работе в 1-м порядке дифракции совпадает с длиной волны). Обычно в дифракционном спектральном приборе работают именно в 1-м порядке, т.к. в больших порядках, хотя и увеличивается разрешающая способность, но падает интенсивность максимумов за счет дифракционного члена в формуле для N щелей.

Таблица для нахождения спектральных характеристик прибора.

Условие для нахождения дифракционных максимумов $d\sin\varphi_m=m\lambda$			
Параметр	const	Переменные	Вычисления
Угловая дисперсия D_φ	*d, m*	λ,φ	$d\cos\varphi_m\cdot d\varphi_m=md\lambda$ $D_\varphi=\frac{d\varphi_m}{d\lambda}=\frac{m}{d\cos\varphi_m}$
Угловая ширина максимума $\Delta\varphi_m$	d,λ	m,φ	$d\cdot d(\sin\varphi_m)=dm\cdot\lambda$; $dm\cdot=\frac{1}{N}$; $\Delta\varphi_m=\frac{\lambda}{Nd\cos\varphi_m}$
Разрешающая способность R	d,φ	λ,m	$d(d\sin\varphi_m)=0=md\lambda+dm\lambda$; $dm\cdot=\frac{1}{N}$ $R=\frac{\lambda}{\delta\lambda}=Nm$
Свободная область дисперсии $\Delta\lambda$	d,φ	λ,m	$d(d\sin\varphi_m)=0=md\lambda+dm\lambda$; $dm\cdot=1$ $\Delta\lambda=\frac{\lambda}{m}$

Кроме дифракционных, спектральные приборы бывают **призменные** (используют зависимость показателя преломления материала призмы от длины волны) и **интерференционные** (интерферометр Фабри-Перо).

Напомним, что поведение **интерферометра Фабри-Перо** описывается формулами Эйри, в которых разность фаз между соседними лучами задается соотношением $\delta = k\Delta s = 2khn\cos\theta'$. В случае конструкции ИФП как воздушной (n=1) прослойки толщиной h между зеркалами с коэффициентом отражения R имеем:

$$\delta = 2kh\cos\theta .$$

Условие максимума для прошедшей интенсивности имеет вид:

$$\delta = 2\pi m \quad (m=0,1,2,\ldots),$$

откуда

$$2h\cos\theta_m = m\lambda .$$

Для угловой дисперсии ИФП имеем:

$$2h\sin\theta_m d\theta_m = md\lambda \quad D_\theta = \frac{d\theta_m}{d\lambda} = \frac{m}{2h\sin\theta_m},$$

т.е. угловая дисперсия стремится к бесконечности в центре интерференционной картины $(\sin\theta_m \to 0)$.

У ИФП очень маленькая свободная область дисперсии $\Delta\lambda = \dfrac{\lambda}{m}$. Так как порядок интерференции максимален именно в центре интерференционной картины и равен $m_{\max} = \dfrac{2h}{\lambda}$, то для области дисперсии получим:

$$\Delta\lambda \approx \frac{\lambda^2}{2h} << \lambda .$$

Поэтому ИФП используют, когда необходимо разрешить две очень близко расположенные линии.

ИФП обладает очень высокой разрешающей способностью. Из формул Эйри можно показать (см. «Методику решения…»), что

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mF ,$$

где

$$F = \frac{\pi\sqrt{\rho}}{1-\rho}$$

называют **резкостью** интерференционных полос[1]. Если коэффициент отражения зеркал близок к единице $(\rho \approx 1)$, то

$$R \approx m_{\max} F \approx \frac{2h}{\lambda}\cdot\frac{\pi}{1-\rho}$$

и достигает значений $R \sim 10^5 - 10^6$. Разрешающую способность можно повысить, увеличивая базу интерферометра (расстояние h между пластинами) и коэффициент отражения зеркал.

---

[1] Во избежании путаницы с обозначениями коэффициент отражения зеркал по энергии обозначен ρ.

Таблица спектральных характеристик интерферометра Фабри–Перо

<table>
<tr><td colspan="4">Условие для нахождения интерференционных максимумов в интерферометре Фабри–Перо:
$2h\cdot\cos\theta_m = m\lambda$</td></tr>
<tr><td>Параметр</td><td>Констан ты</td><td>Переменные</td><td>Формулы</td></tr>
<tr><td>Угловая дисперсия D_θ</td><td>h, m</td><td>λ,θ</td><td>$2h\cdot\sin\theta_m\cdot\delta\theta_m = m\cdot\delta\lambda$,
$D_\theta = \frac{\delta\theta_m}{\delta\lambda} = \frac{m}{2h\sin\theta_m}$</td></tr>
<tr><td>Угловая ширина дифракционного максимума $\Delta\theta_m$</td><td>h, λ</td><td>θ, m</td><td>$2h\cdot\sin\theta_m\cdot\Delta\theta_m = \delta m\cdot\lambda$
$\delta m = \frac{1}{F} = \frac{(1-R)}{\pi\sqrt{R}}$
$\Delta\theta_m = \frac{\lambda\cdot(1-R)}{2\pi\cdot h\sin\theta_m\cdot\sqrt{R}}$</td></tr>
<tr><td>Разрешающая способность R</td><td>h, θ</td><td>m, λ</td><td>$0 = m\delta\lambda + \lambda\delta m$; $\delta m = \frac{(1-R)}{\pi\sqrt{R}}$;
$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{m}{\delta m} = mF$</td></tr>
<tr><td>Свободная область дисперсии $\Delta\lambda$</td><td>h, θ</td><td>m, λ</td><td>$0 = m\Delta\lambda + \lambda\delta m$; $\delta m = -1$;
$m(\lambda+\Delta\lambda) = (m+1)\lambda$,
$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m} \approx \frac{\lambda}{m_{\max}} = \frac{\lambda^2}{2h}$</td></tr>
</table>