

Интерференция от протяженного источника света.

1. Получение интерференционной картины в оптическом диапазоне возможно только в случае, когда интерферирующие волны исходят из одного источника. В схеме Юнга свет от точечного источника падает на плоскость с двумя бесконечно узкими щелями: именно они и являются вторичными когерентными источниками, дающими на экране интерференционную картину. Вопрос: как изменится картина, если источник станет **протяженным**? Протяженный источник представляет собой совокупность **некогерентных** точечных источников, поэтому для расчета интерференции необходимо **просуммировать интенсивности**, даваемые каждым из точечных (бесконечно малых) фрагментов источника.

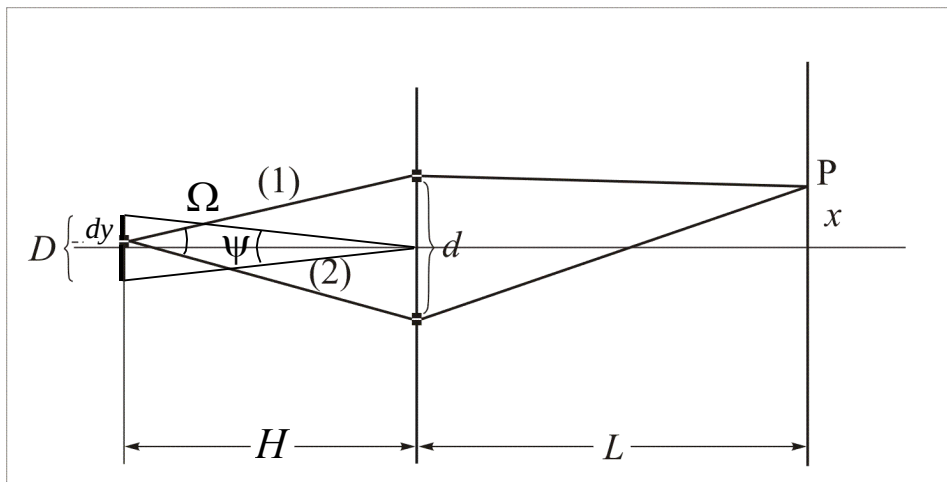


Рис. 1. К расчету интерференции от протяженного источника.

Пусть расстояние от протяженного монохроматического источника интенсивностью I_0 до плоскости со щелями равно $H \gg d$, размер равномерно светящегося источника D (рис. 1). Обозначим за y координату какой либо точки источника (источник расположен в области $|y| < \frac{D}{2}$). Дополнительная разность хода Δs_y между лучами, идущими от точки y к двум щелям, рассчитывается точно также, как и в схеме Юнга:

$$\Delta s_y = \frac{y \cdot d}{H},$$

интенсивность источника длиной dy равна $dI_{ист} = I_0 \frac{dy}{D}$.

Тогда суммарная разность хода равна $\Delta s = \Delta s_x + \Delta s_y = \frac{x \cdot d}{L} + \frac{y \cdot d}{H}$, интенсивность интерференционной картины от такого источника дается формулой:

$$dI_{экр} = dI_{ист} \cdot (1 + \cos(k(\Delta s_x + \Delta s_y))).$$

Раскрываем $\cos(k(\Delta s_x + \Delta s_y)) = \cos(k\Delta s_x) \cdot \cos(k\Delta s_y) + \sin(k\Delta s_x) \cdot \sin(k\Delta s_y)$ и интегрируем по y в пределах от $-\frac{D}{2}$ до $\frac{D}{2}$. Интеграл от $\sin(k\Delta s_y)$ в симметричных пределах дает ноль, поэтому остается:

$$I_{экр} = \frac{I_0}{D} \cdot \left(D + \cos(k\Delta s_x) \cdot \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} \cos(k\Delta s_y) dy \cdot \right) = \frac{I_0}{D} \cdot \left(D + \cos(k\Delta s_x) \cdot \frac{\sin\left(k \frac{yd}{H}\right)}{k \frac{d}{H}} \Big|_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} \cdot \right) =$$

$$= \frac{I_0}{D} \cdot \left(D + \cos(k\Delta s_x) \cdot \frac{\sin\left(k \frac{Dd}{2H}\right)}{k \frac{Dd}{2H}} \cdot D \right) = I_0 \cdot \left(1 + \frac{\sin\left(k \frac{Dd}{2H}\right)}{k \frac{Dd}{2H}} \cdot \cos(k\Delta s_x) \right).$$

Структура полученной формулы такая же, как и для квазимонохроматического вида, следовательно, видность картины равна

$$V(x) = \left| \frac{\sin\left(k \frac{Dd}{2H}\right)}{k \frac{Dd}{2H}} \right| = \left| \text{sinc}\left(k \frac{Dd}{2H}\right) \right|,$$

причем видность **не зависит** от x . Это означает, что по мере увеличения размеров источника видность уменьшается во ВСЕХ точках экрана, а не только по краям, как в случае с квазимонохроматическим источником (рис. 2). Видность станет равной нулю, когда

$$k \frac{Dd}{2H} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{Dd}{2H} = \pi \cdot \frac{Dd}{\lambda H} = \pi,$$

откуда условие полного пропадания интерференции запишется в виде:

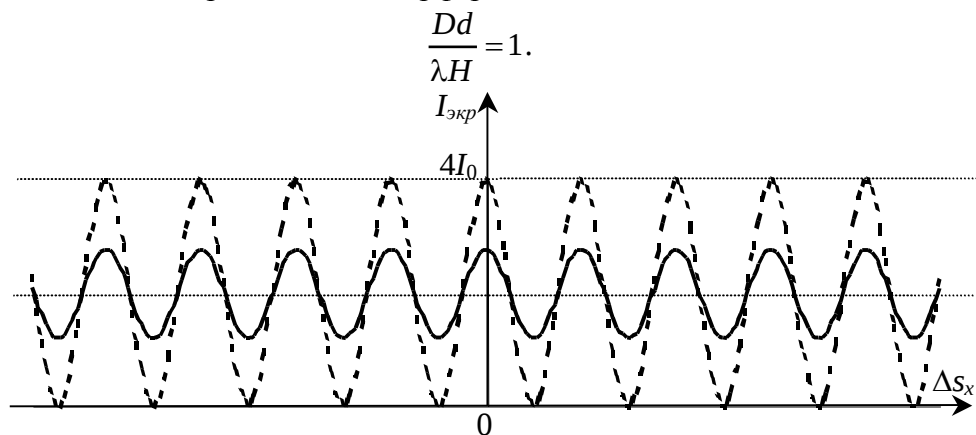


Рис. 2. Зависимость интенсивности от разности хода в случае протяженного (сплошная линия) и точечного (штриховая линия) источника.

Заметим, что часто фразу «полное пропадание интерференционной картины» ошибочно трактуют как отсутствие какой-либо освещенности на экране. Как следует из формул, это не так: интерференционный член становится равным нулю, а интенсивность на экране равна сумме интенсивностей каждого из источников, т.е. наблюдается равномерно засвеченное поле.

На рис. 3 приведен график зависимости видности интерференционной картины от размера источника D . Видность равна нулю при

$$D_{\text{прон}} = \frac{\lambda H}{d}.$$

Часто в литературе встречается условие на размер источника, при котором интерференционная картина еще видна:

$$D_{\text{еще_видна}} = \frac{D_{\text{прон}}}{2} = \frac{\lambda H}{2d}.$$

Нетрудно подсчитать, что $V(D_{\text{еще_видна}}) = \frac{2}{\pi}$.

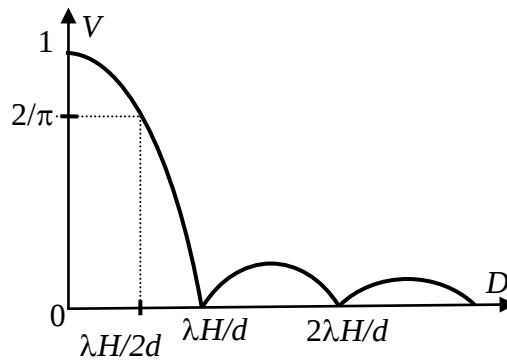


Рис. 3. График зависимости видности от размера источника D .

Расстояние между щелями $d_0 = \frac{\lambda H}{D}$, при котором пропадает интерференционная картина, называют **радиусом когерентности**. Вводя $\psi = \frac{D}{H}$ - угол, под которым виден протяженный источник от плоскости щелей (или **угловой размер источника**), получаем для радиуса когерентности

$$d_0 = \frac{\lambda}{\psi}.$$

Введем также понятие **угловой апертуры интерференции** Ω - угла, под которым из центра источника видны щели:

$$\Omega = \frac{d}{H}.$$

С учетом введенных обозначений условие нулевого значения видности можно записать в следующих видах:

$$\frac{\lambda H}{Dd} = \frac{\lambda}{D \cdot \Omega} = \frac{\lambda}{\psi \cdot d} = 1.$$

Иными словами, видность будет ненулевой, если выполнены условия:

$$D \leq \frac{\lambda}{\Omega} \text{ или } d \leq \frac{\lambda}{\psi}.$$

Формулу $\frac{Dd}{\lambda H} = 1$ легко запомнить, используя привычную схему: произведение самой большой (H) из величин на самую маленькую (λ) равно произведению двух остальных (Dd), к тому же еще эти величины обозначены одной и той же буквой.

Если источник не протяженный, а состоит из двух точечных некогерентных источников, находящихся на расстоянии D друг от друга, то картина пропадает при условии $d_0 = \frac{\lambda}{2\psi}$. Данный факт используется в звездном интерферометре Майкельсона для определения угловых расстояний между двумя близко расположенными звездами.

2. Обратим внимание на тот факт, что при вычислениях у нас появилась функция СИНК, которая ранее возникала при вычислении фурье-преобразования от прямоугольного импульса. «Поищем» его и здесь.

Действительно, СИНК появился при вычислении интеграла

$$\int_{-D/2}^{D/2} \cos(k\Delta s_y) dy.$$

Введем понятие функции излучения источника $U(y)$, характеризующей распределение излучаемой энергии по различным «точкам» источника, т.е. суммарная интенсивность, излучаемая источником, будет выражаться формулой:

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} U(y) \cdot dy.$$

$$(\text{в рассмотренном выше случае } U(y) = \begin{cases} I_0/D, & |y| \leq D/2 \\ 0, & |y| > D/2 \end{cases}).$$

Тогда появляется интеграл вида

$$\int_{-D/2}^{D/2} \cos(k\Delta s_y) dy \sim \int_{-\infty}^{\infty} U(y) \cos(k\Delta s_y) dy,$$

или, если потребовать четности функции $U(y)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(y) \cdot e^{ik\Delta s_y} \cdot dy$$

Данное выражение есть не что иное, как пространственное преобразование Фурье от функции излучения источника. В таком случае для видности в случае произвольного (но симметричного) распределения излучаемой источником энергии, можно записать общую формулу:

$$V_{\text{нром}} = \left| \frac{\int_{-\infty}^{\infty} U(y) \cdot e^{ik\Delta s_y} \cdot dy}{\int_{-\infty}^{\infty} U(y) \cdot dy} \right|.$$

Вспомним, что для точечного квазимонохроматического источника со спектральной плотностью интенсивности $S(\omega)$ ранее была получена формула:

$$V_{\text{кваз}}(\Delta t) = \left| \frac{\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot e^{i\omega \Delta t} d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega} \right|$$

(и здесь имеет место фурье-преобразование!)

Так как в обоих случаях при вычислении распределения интенсивности на экране интегрирование ведется по разным переменным (по пространственной y и по частоте ω), то нетрудно сообразить, что для квазимонохроматического протяженного источника, используемого в схеме Юнга, видность на экране будет произведением полученных ранее видностей:

$$V_{\text{кваз_нром}} = \left| \frac{\int_{-\infty}^{\infty} U(y) \cdot e^{ik\Delta s_y} \cdot dy}{\int_{-\infty}^{\infty} U(y) \cdot dy} \right| \cdot \left| \frac{\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot e^{i\omega \Delta t} d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega} \right|.$$

Обратим еще раз внимание, что сомножитель $V_{\text{нром}}$ не зависит от пространственной переменной x (координаты точек на экране), поэтому он одинаково влияет на видность картины на всем экране сразу. В сомножителе $V_{\text{кваз}}(\Delta t)$ есть переменная Δt , однозначно связанная с координатой x :

$$\Delta t = \frac{\Delta s_x}{c} = \frac{x \cdot d}{L \cdot c}.$$

Так как в центре интерференционной картины (в нулевом порядке интерференции) $V_{\text{квaz}}(\Delta t = 0) \equiv 1$, то, измеряя видность в центре, можно получить оценку для размера источника D . В свою очередь, определяя, в каком порядке $m_{\text{нрон}}$ интерференционная картина размывается, можно оценить степень монохроматичности источника:

$$m_{\text{нрон}} \approx \frac{\lambda}{\Delta \lambda}.$$

Пространственно-временная когерентность

Ранее для случая квазимонохроматического точечного источника вводилось понятие *комплексной степени когерентности*:

$$\gamma(\tau) = \frac{\langle E_0^*(t) E_0(t + \tau) \rangle}{2I_0},$$

связанное с вычислением автокорреляционной функции

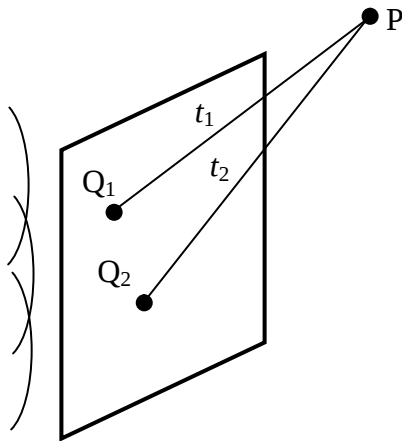
$$B(\tau) = \langle E(t) E(t + \tau) \rangle$$

(напомним, что $E(t) = \frac{1}{2} E_0(t) \cdot e^{i\omega_0 t} + \text{к.с.}$).

Излучение выходило из одной точки (точечного источника) и приходило разными путями опять же в одну точку (точку наблюдения) с временной разницей τ . Величина $\gamma(\tau)$ характеризовала временную когерентность двух колебаний в одной точке пространства.

В случае протяженного источника говорят о когерентности одного и того же волнового поля в двух различных пространственно – временных точках.

В общем случае поле излучения создается множеством произвольных (по пространственно-временным характеристикам) источников. Выберем в поле излучения



две точки Q_1 и Q_2 пространства и мысленно поместим непрозрачный экран с двумя малыми отверстиями в этих точках. Эти отверстия станут вторичными источниками волн $E_1(Q_1, t)$ и $E_2(Q_2, t)$.

Выберем точку наблюдения P , в которую излучение от заданных точек Q_1 и Q_2 , вышедшее в моменты времени t_1 и t_2 соответственно, приходит одновременно.

Пространственно-временная корреляционная функция имеет вид:

$$B_{12}(\tau) = \langle E_1(Q_1, t) E_2(Q_2, t + \tau) \rangle,$$

где $\tau = t_2 - t_1$.

Аналогично случаю временной когерентности, запишем

$$E_i(t) = \frac{1}{2} E_{i0}(Q_i, t) \cdot e^{i\omega_0 t} + \text{к.с.},$$

где $E_{i0}(Q_i, t)$ - комплексные амплитуды сигналов от точек Q_1 и Q_2 .

В результате получим:

$$B_{12}(\tau) = \sqrt{I_1 I_2} \cdot \text{Re} \left[\frac{\langle E_{10}(Q_1, t) E_{20}(Q_2, t + \tau) \rangle}{2\sqrt{I_1 I_2}} \cdot e^{i\omega_0 \tau} \right],$$

где I_1, I_2 - интенсивности волн, приходящих из точек Q_1 и Q_2 соответственно.

Под комплексной степенью пространственно-временной когерентности понимают

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\langle E_{10}(Q_1, t) E_{20}(Q_2, t + \tau) \rangle}{2\sqrt{I_1 I_2}}$$

Если расстояния от точек Q_1 и Q_2 до точки P одинаковы, т.е. моменты времени $t_1 = t_2$, то в точке P определяют степень пространственной когерентности. Изменяя расстояние между точками Q_1 и Q_2 и наблюдая за видностью интерференционной картины в точке P , можно определить радиус пространственной когерентности. Если видность картины близка к единице и не зависит от положения точек Q_1 и Q_2 , то говорят о полной пространственной когерентности (источник излучения, скорее всего, точечный). Если же с ростом расстояния между точками видность падает, то источник протяженный. Расстояние между источниками, при котором видность становится нулевой, и есть радиус пространственной когерентности.