

### Интерференция квазимонохроматического света.

(изложение идейно схоже с книгой Е.И. Бутикова «Оптика», п.5.4)

**Квазимонохроматическое излучение** – это излучение, удовлетворяющее условию

$$\frac{\bar{\lambda}}{\delta\lambda} \gg 1,$$

где  $\bar{\lambda}$  - среднее значение длины волны источника,  $\delta\lambda$  - диапазон длин волн.

Аналогичные соотношения можно написать и для частот, и волновых чисел:

$$\frac{\bar{\lambda}}{\delta\lambda} = \frac{\bar{\omega}}{\delta\omega} = \frac{\bar{k}}{\delta k} \gg 1.$$

Волны с различными частотами (длинами волн) **не интерферируют**, поэтому для нахождения интерференционной картины необходимо записать распределение интенсивности для каждой частоты и просуммировать (проинтегрировать) по всем частотам.

Рассмотрим схему Юнга с различными источниками.

1) источник, излучающий две близкие длины волны  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ ,  $\Delta\lambda = (\lambda_1 - \lambda_2) \ll \lambda_1, \lambda_2$ , интенсивности каждого из вторичных источников одинаковы и поровну делятся по длинам волн (бихроматический источник).

Для каждой длины волны

$$I_j(\Delta s) = I_0 \cdot (1 + \cos(k_j \cdot \Delta s)).$$

Суммарная интенсивность равна сумме интенсивностей:

$$\begin{aligned} I(\Delta s) &= I_1(\Delta s) + I_2(\Delta s) = 2I_0 + I_0 \cdot (\cos(k_1 \cdot \Delta s) + \cos(k_2 \cdot \Delta s)) = \\ &= 2I_0 + I_0 \cdot \left( 2 \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2} \cdot \Delta s\right) \cdot \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2} \cdot \Delta s\right) \right). \end{aligned}$$

Вводим обозначения:  $k = \frac{k_1 + k_2}{2}$ ,  $\Delta k = k_1 - k_2$ , получим

$$I(\Delta s) = 2I_0 \left( 1 + \cos\left(\frac{\Delta k}{2} \cdot \Delta s\right) \cdot \cos(k \cdot \Delta s) \right).$$

Полученная формула отличается от формулы для монохроматического источника наличием перед  $\cos(k \cdot \Delta s)$  медленно изменяющегося множителя  $\cos\left(\frac{\Delta k}{2} \cdot \Delta s\right)$ .

Зависимость интенсивности интерференционной картины от разности хода показана на рисунке.

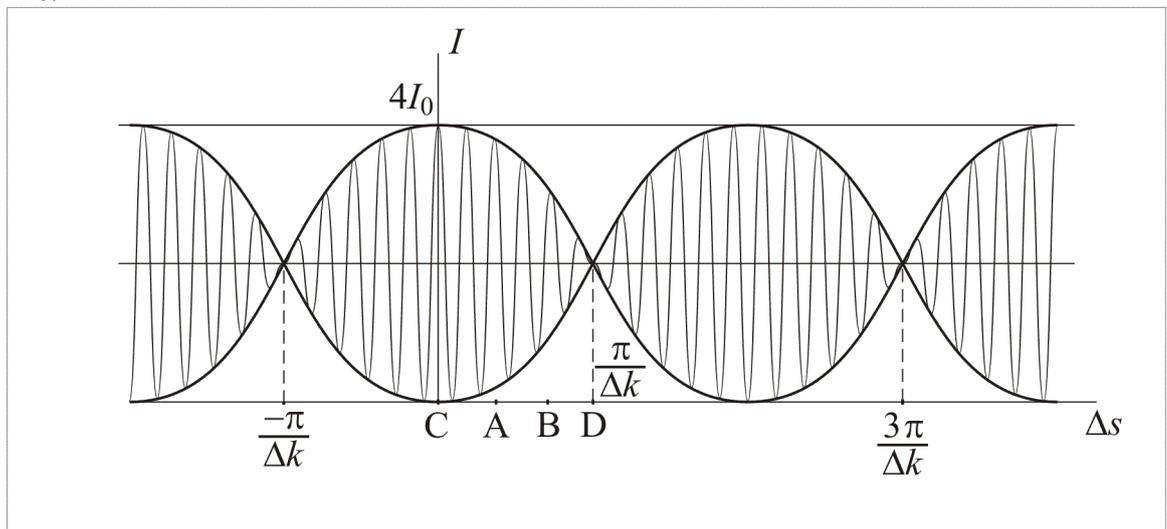


Рис. Интерференционная картина от бихроматического источника

Введем понятие **видности интерференционной картины**:

$$V(x) = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

где  $I_{\max}$  и  $I_{\min}$  - значения интенсивности картины в соседних максимуме и минимуме.

Для монохроматического источника видность всюду равна единице  $V=1$ , т.к.  $I_{\min} = 0$  для всех минимумов. Для источника, излучающего две длины волны, из формулы для интенсивности следует, что

$$I_{\max} = 4I_0 \left( 1 + \left| \cos \left( \frac{\Delta k}{2} \cdot \Delta s \right) \right| \right); \quad I_{\min} = 4I_0 \left( 1 - \left| \cos \left( \frac{\Delta k}{2} \cdot \Delta s \right) \right| \right).$$

Отсюда для видности имеем:

$$V(x) = \left| \cos \left( \frac{\Delta k}{2} \cdot \Delta s \right) \right|.$$

Видность равна нулю (интерференционная картина пропадает), когда  $\frac{\Delta k}{2} \cdot \Delta s = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$ . Из соотношения  $\Delta k = \frac{2\pi}{\lambda^2} \Delta \lambda$  получим для первого нуля видности:

$$\Delta s_1 = \frac{\lambda^2}{2\Delta \lambda}$$

Вспомня, что порядок интерференции  $n$  задается соотношением  $\Delta s = n\lambda$ , получим, что интерференция пропадет в порядке  $n_1$ , равном

$$n_1 = \frac{\lambda}{2\Delta \lambda}.$$

Это выражение можно получить из простых соображений: максимум для одной длины волны должен совпасть с минимумом для другой:

$$n_1 \left( \lambda - \frac{\Delta \lambda}{2} \right) = \left( n_1 - \frac{1}{2} \right) \cdot \left( \lambda + \frac{\Delta \lambda}{2} \right).$$

Видность максимальна в центре интерференционной картины, по мере удаления от центра она уменьшается, становится равной нулю в порядке  $n_1 = \frac{\lambda}{2\Delta \lambda}$ , затем растет и становится равной единице в порядке  $n_2 = 2n_1$  и т.д.

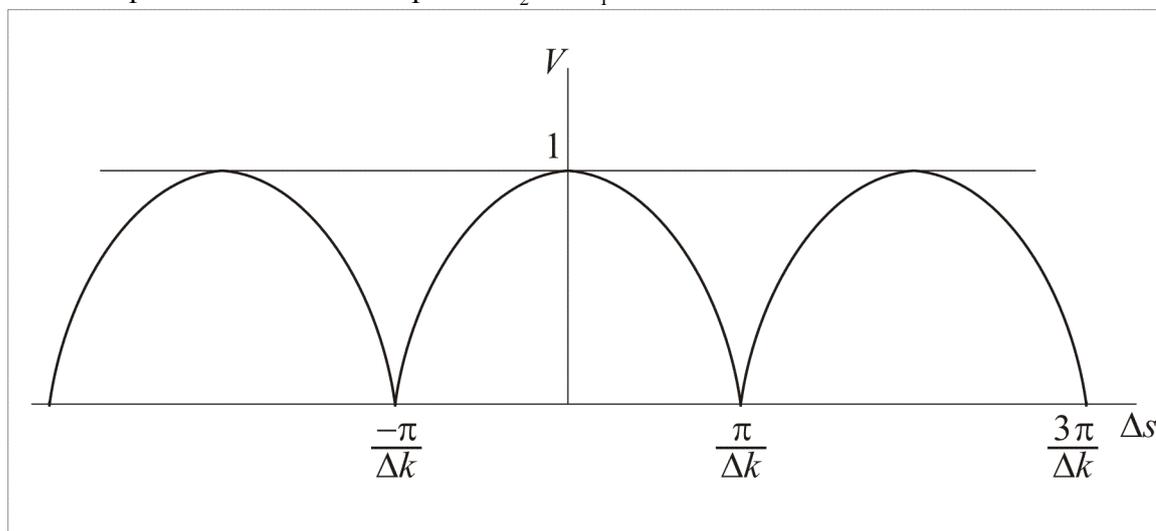


Рис. Видность интерференционной картины от бихроматического источника

Зависимость видности интерференционной картины от разности хода показана на рисунке.

2) источник, излучающий в узком спектральном диапазоне от  $\lambda - \frac{\Delta\lambda}{2}$  до  $\lambda + \frac{\Delta\lambda}{2}$ .

В этом случае координаты интерференционных максимумов одного и того же порядка для различных длин волн будут отличаться друг от друга. Видность по-прежнему максимальна в центре интерференционной картины, т.к. максимумы и минимумы для всех длин волн практически совпадают. По мере удаления от центра максимумы для различных длин волн расходятся. Из рис. видно, что полное размывание картины произойдет, когда расстояние между максимумами  $m$ -го порядка для крайних длин волн диапазона станет равным ширине интерференционной полосы  $\Delta x$  (ширину  $\Delta x$  можно считать одинаковой для всего диапазона  $\Delta\lambda$ ). В этом случае максимум  $m$ -го порядка для длины волны  $\lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2}$  совпадет с максимумом  $(m-1)$ -го порядка для длины волны  $\lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2}$ , т.е. для разности хода  $\Delta s$  в точке исчезновения полос имеем:

$$\Delta s = \left( \lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2} \right) \cdot m = \left( \lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2} \right) \cdot (m-1).$$

Спектр источника

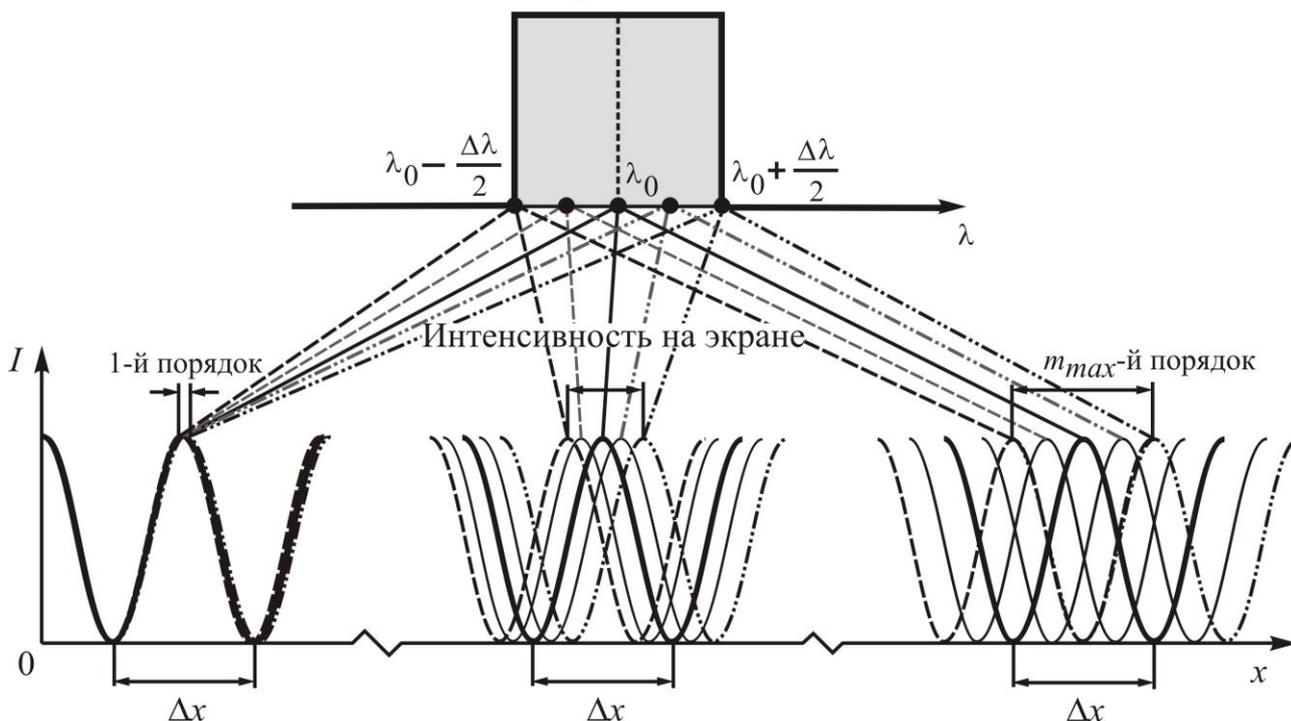


Рис. Размывание интерференционной картины в случае квазимонохроматического источника ( $\Delta\lambda \ll \lambda_0$ ). Показано распределение интенсивности для пяти различных длин волн из диапазона  $\Delta\lambda$ .

Отсюда получаем, что порядок интерференции  $m_{max}$ , при котором полностью пропадают интерференционные полосы, равен

$$m_{max} = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda}.$$

Способность двух квазимонохроматических пучков интерферировать называют **временной когерентностью**. Максимальная разность хода, при которой возможна

интерференция, называется **длиной когерентности**  $l_{\text{ког}}$ , а соответствующее время запаздывания – **временем когерентности**  $t_{\text{ког}} = l_{\text{ког}}/v$ . Длина когерентности

$l_{\text{ког}} = m\lambda = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$  равна длине цуга, а время когерентности – длительности цуга  $\Delta t$ .

Интерференция возможна, если запаздывание волновых цугов  $\tau$  меньше длин цугов  $\Delta t$ . На рис. показаны три возможных случая наложения двух цугов. В первом случае оба цуга идут без отставания, и в этом случае наблюдается интерференционная картина с видимостью  $V=1$ . Во втором случае один цуг отстает от другого на время  $\tau$ . Интерferируют только перекрывающиеся участки цугов. В течение времени  $(\Delta t - \tau)$  наблюдается интерференционная картина, а в течение времени  $2\tau$  на экран падает только одна из волн, давая равномерную засветку. Условия для интерференции хуже (видимость меньше). В третьем случае интерференции нет вообще, т.к. отставание  $\tau > \Delta t$ .

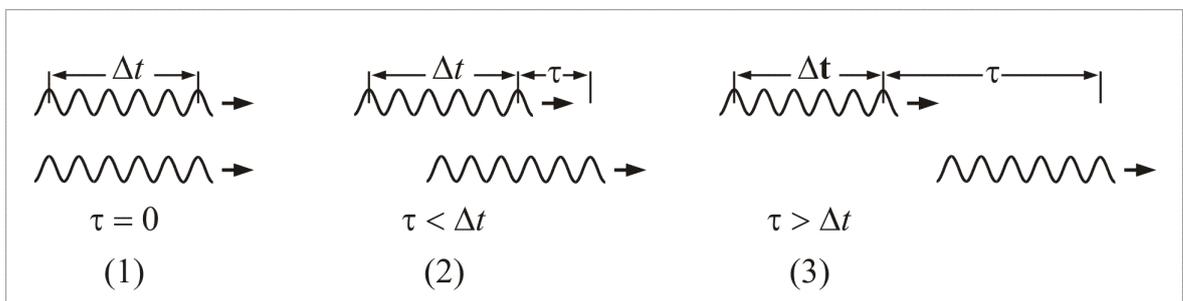


Рис. Наложение волновых цугов при интерференции

Докажем, что длительность цуга  $\Delta t$  и есть время когерентности:  $\Delta t \cong \frac{1}{\Delta\nu} = \tau_{\text{ког}}$ . Так

как  $\frac{v}{\Delta\nu} = \frac{c}{\lambda\Delta\nu} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$ , то  $\tau_{\text{ког}} = \frac{1}{\Delta\nu} = \frac{\lambda^2}{c\Delta\lambda}$ . Длина когерентности  $l_{\text{ког}} = c \cdot \tau_{\text{ког}} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$ .

Найдем распределение интенсивности на экране в схеме Юнга, если задано спектральное распределение излучения по частотам  $S(\omega)$ . Если источник квазимонохроматичный, то пусть максимум  $S(\omega)$  соответствует частоте  $\omega_0$ , а диапазон излучаемых частот  $\Delta\omega \ll \omega_0$  (напомним, что функция  $S(\omega)$  четная).

Для монохроматического источника распределение интенсивности на экране в зависимости от разности хода  $\Delta s$  задается формулой:

$$I(\Delta s) = I_0 \cdot (1 + \cos(k \cdot \Delta s)).$$

Перейдем от пространственного представления к временному:

$$k \cdot \Delta s = kc \cdot \frac{\Delta s}{c} = \omega \cdot \Delta t,$$

где  $c$  - скорость света,  $\Delta t = \frac{\Delta s}{c}$  - временное запаздывание.

Интенсивность света источника представим в виде:

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega,$$

тогда для узкого спектрального диапазона  $d\omega$  можно записать:

$$dI(\Delta t) = S(\omega) \cdot (1 + \cos(\omega \cdot \Delta t)) d\omega.$$

Интегрируем по частотам:

$$\begin{aligned} I(\Delta t) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot (1 + \cos(\omega \cdot \Delta t)) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos(\omega \cdot \Delta t) d\omega = \\ &= I_0 + \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos(\omega \cdot \Delta t) d\omega. \end{aligned}$$

Таким образом, для нахождения интерференционной картины необходимо вычислить интеграл вида  $\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos(\omega \cdot \Delta t) d\omega$

**Замечание.** Довольно часто в литературе (например, Матвеев, §26, формула (26.20), или Алешкевич, лекция 8, формула (8.23)) интегрируют только по положительным частотам, пользуясь четностью функции  $S(\omega)$ . По мнению автора данного изложения, это менее удобно, т.к. интегрирование в бесконечных пределах сразу приводит к классическим интегралам типа интеграла Фурье. И это позволяет в дальнейшем использовать свойства преобразования Фурье.

Вспомним из фурье-преобразований, что  $S(\omega) \sim F(\omega) \cdot F^*(\omega)$  - функция вещественная и четная, поэтому интеграл вида  $\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \sin(\omega \cdot \Delta t) d\omega$  равен нулю (интеграл от нечетной функции в симметричных пределах). В итоге можно написать:

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos(\omega \cdot \Delta t) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot e^{i\omega \cdot \Delta t} d\omega - \quad (1)$$

т.е. интересующий нас **интерференционный член есть фурье – преобразование от спектральной плотности.**

*Таким образом, распределение интенсивности интерференционной картины  $I(\Delta t)$  есть фурье-преобразование от спектральной плотности  $S(\omega)$  плюс константа  $I_0$ .*

Из свойств фурье-преобразования вспомним, что если известен спектр  $F(\omega)$  сигнала  $f(t)$ , то при его заполнении высокой частотой  $\omega_0$

$$f_{zan}(t) = f(t) \cdot \cos \omega_0 t$$

спектр заполненного сигнала представляется в виде:

$$F_{zan}(\omega) = \frac{1}{2} (F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)).$$

Для спектральной плотности заполненного сигнала получим:

$$\begin{aligned} S_{zan}(\omega) &= F_{zan}(\omega) \cdot F_{zan}^*(\omega) = \frac{1}{2} (F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)) \cdot \frac{1}{2} (F^*(\omega - \omega_0) + F^*(\omega + \omega_0)) = \\ &= \frac{1}{4} (F(\omega - \omega_0) F^*(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0) F^*(\omega + \omega_0) + \\ &\quad + F(\omega - \omega_0) F^*(\omega + \omega_0) + F(\omega + \omega_0) F^*(\omega - \omega_0)) \end{aligned}$$

Если ширина спектра  $F(\omega)$  сигнала  $f(t)$  много меньше частоты  $\omega_0$ , то слагаемые  $F(\omega - \omega_0)F^*(\omega + \omega_0)$  и  $F(\omega + \omega_0)F^*(\omega - \omega_0)$  равны нулю, в итоге для спектральной плотности получим (см. рис.):

$$S_{зан}(\omega) = \frac{1}{4}(S_0(\omega - \omega_0) + S_0(\omega + \omega_0)).$$

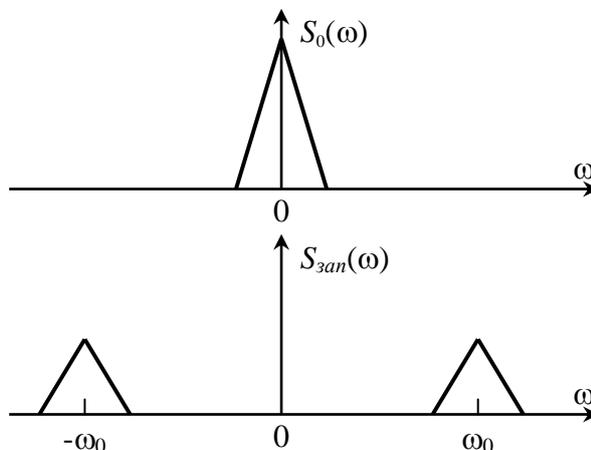


Рис. Спектр заполненного сигнала.

Используем это свойство для вычисления интерференционного члена (1), при этом учтем, что структура указанного в (1) спектра  $S(\omega)$  такая же, как структура приведенного на рисунке спектра  $S_{зан}(\omega)$ . Поэтому вместо  $S(\omega)$  необходимо использовать спектральную плотность реального источника, т.е.  $S_{зан}(\omega)$ :

$$\text{Инт.член} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{зан}(\omega) \cdot e^{i\omega\Delta t} d\omega = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} (S_0(\omega - \omega_0) + S_0(\omega + \omega_0)) \cdot e^{i\omega\Delta t} d\omega.$$

где  $S_0(\omega)$  - спектр, максимум которого соответствует  $\omega=0$ .

Вспомним еще одно свойство фурье-преобразования: если известен спектр  $F(\omega)$  сигнала  $f(t)$ , то спектр сигнала  $f(t - T)$ , смещенного на  $T$ , отличается появлением фазового множителя:

$$F_T(\omega) = F(\omega) \cdot e^{i\omega T}.$$

В нашем случае это свойство используется для сравнения сигналов вида  $S_0(\omega)$  и  $S_0(\omega - \omega_0)$ , т.е. смещение не по времени, а по частоте на  $\omega_0$ . Если для фурье-преобразования спектральной плотности  $S_0(\omega)$  ввести обозначение

$$g(\Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_0(\omega) \cdot e^{i\omega\Delta t} d\omega,$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_0(\omega - \omega_0) \cdot e^{i\omega\Delta t} d\omega = g_{\omega_0}(\Delta t) = g(\Delta t) \cdot e^{i\omega_0\Delta t}.$$

Если функция  $S_0(\omega)$  четная, то  $g(\Delta t)$  - действительная. В этом случае для интерференционного члена получим:

$$\text{Инт.член} = \frac{1}{2} (g(\Delta t) \cdot e^{i\omega_0\Delta t} + g(\Delta t) \cdot e^{-i\omega_0\Delta t}) = g(\Delta t) \cdot \cos(\omega_0\Delta t).$$

Итоговый результат для распределения интенсивности приобретает вид:

$$I(\Delta t) = I_0 + \text{инт.член} = I_0 \cdot \left( 1 + \frac{g(\Delta t)}{I_0} \cdot \cos(\omega_0 \Delta t) \right), \quad (2)$$

где  $g(\Delta t)$  есть фурье-образ от спектральной плотности  $S_0(\omega)$  сигнала, не заполненного высокой частотой.

Вспомним, что видность  $V(\Delta t)$  интерференционной картины определяется формулой:

$$V(\Delta t) = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

где  $I_{\max}$  и  $I_{\min}$  - значения интенсивности в соседних максимуме и минимуме соответственно.

Из структуры формулы следует, что видность  $V(\Delta t)$  интерференционной картины равна:

$$V(\Delta t) = \left| \frac{g(\Delta t)}{I_0} \right| = \left| \frac{\int_{-\infty}^{\infty} S_0(\omega) \cdot e^{i\omega \cdot \Delta t} d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} S_0(\omega) d\omega} \right| \leq 1,$$

т.е. равна модулю нормированного фурье- преобразования от формы линии в спектральной плотности сигнала, не заполненного высокой частотой  $\omega_0$ .

Видность принимает максимальное значение, равное 1, при  $\Delta t = 0$ , т.е. в центре интерференционной картины, где  $\Delta s = 0$ . С ростом разности хода  $\Delta s = c \cdot \Delta t$  видность уменьшается.

Таким образом, находя порядок интерференции, при котором пропадает интерференционная картина, можно оценить ширину линии излучения.

Повторим кратко (заодно еще раз напомним, что изложение сходно с книгой Бутикова, п.5.4).

Если квазимонохроматичный источник излучает на частоте  $\omega_0$ , и известна форма линии в спектре (например, прямоугольник или лоренц), то видность интерференционной картины есть фурье-преобразование от формы линии.

Рассмотрим типичные формы линии излучения и сопоставим им графики видностей.

формы линии излучения	Видность
прямоугольник	синк
лоренц	затухающая экспонента
гаусс	гаусс

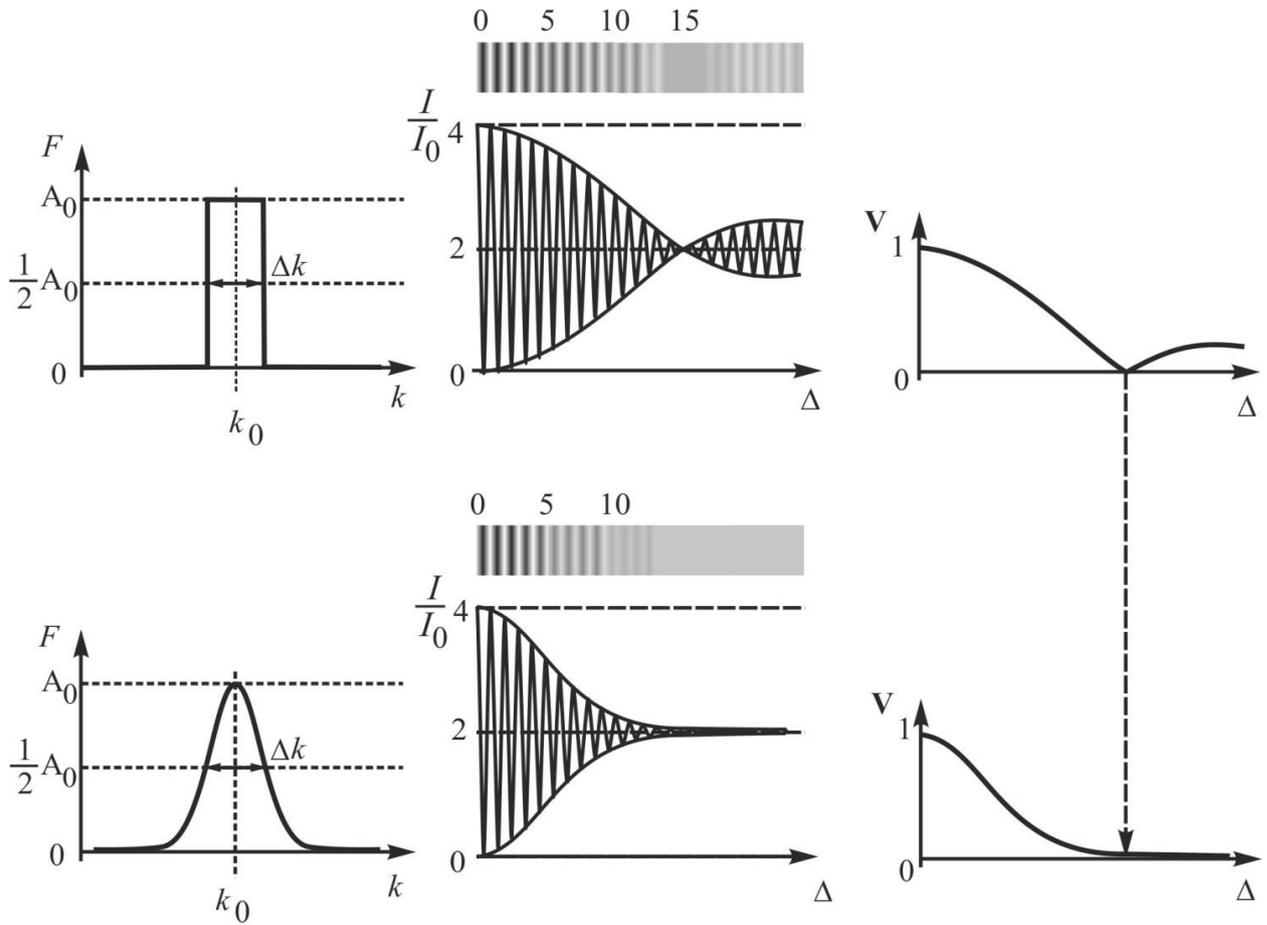


Рис. Зависимости видимостей и распределения интенсивностей интерференционной картины для различных форм линий спектра (прямоугольной и гауссовой)

Для белого света (диапазон длин волн от 400 до 700 нм) порядок, в котором пропадает интерференция, примерно равен  $n \approx 1-2$ . Но глаз человека различает не общую интенсивность, как приемник, а цветовую окраску, поэтому при освещении белым светом наблюдается порядка десятка цветных интерференционных полос. В центре картины наблюдается белая (неокрашенная) полоса – это нулевой порядок интерференции, а затем в первом порядке наблюдаются цвета в последовательности цветов радуги. Далее порядки перемешиваются, и картина пропадает. Иногда, если в оптической схеме интерференции между волнами возникает дополнительная разность фаз, равная  $\pi$  (обычно при отражении одной из волн от оптически более плотной среды), в нулевом порядке наблюдается темная полоса.

Использование светофильтра позволяет уменьшить спектральный диапазон падающего излучения. Чем *уже полоса* пропускания светофильтра, тем *меньше* число *цветов* представлено в интерференционной картине, но тем *больше* число наблюдаемых интерференционных полос.

### Замечание.

При нахождении интерференционной картины для квазимонохроматического света нам потребовалось вычислять интеграл вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos(\omega \cdot \Delta t) d\omega,$$

где спектр излучения  $S(\omega)$  задается зависимостью от частоты  $\omega$ . Однако спектр можно задавать и в зависимости от длины волны  $S(\lambda)$ , и от волнового числа  $S(k)$ . Выясним, каким образом осуществляется переход от одной переменной к другой.

Прежде всего, напомним, что

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c},$$

Тогда связи между спектральными плотностями находятся из соотношений

$$dI = S(\omega)d\omega = S(k)dk = S(\lambda)d\lambda.$$

Так как переменные  $\omega$  и  $k$  пропорциональны, то формы спектров  $S(\omega)$  и  $S(k)$  подобны друг другу. Кроме этого, аргумент косинуса в интеграле

$$\omega \cdot \Delta t = \frac{\omega}{c} \cdot c\Delta t = k \cdot \Delta s,$$

и интеграл для вычисления имеет вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(k) \cos(k \cdot \Delta s) dk.$$

Т.е. переход между переменными  $\omega$  и  $k$  осуществляется легко и просто. А с переменной  $\lambda$  возникают проблемы. Во-первых,

$$S(\lambda) = S(k) \frac{dk}{d\lambda} = -S(k) \frac{2\pi}{\lambda^2},$$

(форма изменяется). Во-вторых, интеграл по  $\lambda$  имеет вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(\lambda) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta s\right) d\lambda,$$

и взять подобный интеграл – непростая задача.

Поэтому в спектроскопии основными переменными являются **частота  $\omega$**  и **волновое число  $k$** . А *длину волны* принято выражать в обратных сантиметрах, т.е. длиной волны на самом деле называют не  $\lambda$ , а величину, обратную к ней  $\frac{1}{\lambda}$ . Хотя в привычной жизни, говоря, например, о диапазоне видимого глазом света, принято называть длины волн (при этом обычно забывают добавить «в вакууме»).

## Приложение 1.

**Несколько иной вывод формулы для интерференции от квазимонохроматического источника (менее корректный, но, возможно, более понятный).**

Найдем распределение интенсивности на экране в схеме Юнга, если задано спектральное распределение излучения по частотам  $S(\omega)$ .

Для монохроматического источника распределение интенсивности на экране в зависимости от разности хода  $\Delta s$  задается формулой:

$$I(\Delta s) = I_0 \cdot (1 + \cos(k \cdot \Delta s)).$$

Перейдем от пространственного представления к временному:

$$k \cdot \Delta s = kc \cdot \frac{\Delta s}{c} = \omega \cdot \Delta t,$$

где  $c$  - скорость света,  $\Delta t = \frac{\Delta s}{c}$  - временное запаздывание.

Интенсивность света источника представима в виде:

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega,$$

тогда

$$dI(\Delta t) = S(\omega) \cdot (1 + \cos(\omega \cdot \Delta t)) d\omega.$$

Интегрируем по частотам:

$$\begin{aligned} I(\Delta t) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot (1 + \cos(\omega \cdot \Delta t)) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos(\omega \cdot \Delta t) d\omega = \\ &= I_0 + \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos(\omega \cdot \Delta t) d\omega. \end{aligned}$$

Таким образом, для нахождения интерференционной картины необходимо вычислить интеграл вида  $\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos(\omega \cdot \Delta t) d\omega$

Пусть функция  $S(\omega)$  симметрична относительно некоторой частоты  $\omega_0$ . (рассматривается только положительная ветвь частот  $\omega > 0$ ). Введем новую переменную  $\Omega = \omega - \omega_0$ ,

тогда

$$S(\omega) = S(\Omega + \omega_0) = f(\Omega),$$

где  $f(\Omega)$  - симметрична относительно нуля.

Кроме того

$$\cos(\omega \cdot \Delta t) = \cos((\Omega + \omega_0) \cdot \Delta t) = \cos(\Omega \cdot \Delta t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot \Delta t) - \sin(\Omega \cdot \Delta t) \cdot \sin(\omega_0 \cdot \Delta t).$$

Из симметрии  $f(\Omega)$  следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\Omega) \sin(\Omega \cdot \Delta t) \cdot \sin(\omega_0 \cdot \Delta t) d\Omega = 0.$$

В результате

$$\begin{aligned} I(\Delta t) &= I_0 + \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos(\omega \cdot \Delta t) d\omega = I_0 + \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(\Omega) \cos(\Omega \cdot \Delta t) d\Omega \right] \cdot \cos(\omega_0 \cdot \Delta t) = \\ &= I_0 \left( 1 + \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(\Omega) \cos(\Omega \cdot \Delta t) d\Omega}{\int_{-\infty}^{\infty} f(\Omega) d\Omega} \cdot \cos(\omega_0 \cdot \Delta t) \right) \end{aligned}$$

так как  $I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(\Omega) d\Omega$ .

Вспомним, что видность  $V(\Delta t)$  интерференционной картины определяется формулой:

$$V(\Delta t) = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

где  $I_{\max}$  и  $I_{\min}$  - значения интенсивности в соседних максимуме и минимуме соответственно.

Из структуры формулы следует, что видность  $V(\Delta t)$  интерференционной картины равна:

$$V(\Delta t) = \left| \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(\Omega) \cos(\Omega \cdot \Delta t) d\Omega}{\int_{-\infty}^{\infty} f(\Omega) d\Omega} \right|,$$

т.е. равна модулю нормированного фурье преобразованию от формы линии в спектре излучения.

Видность принимает максимальное значение, равное 1, при  $\Delta t = 0$ , т.е. в центре интерференционной картины, где  $\Delta s = 0$ .

В итоге, формула для распределения интенсивности при интерференции света от квазимонохроматического источника имеет вид:

$$I(\Delta t) = 2I_0(1 + C(\Delta t) \cdot \cos(\omega_0 \cdot \Delta t)).$$

где

$$C(\Delta t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(\Omega) \cos(\Omega \cdot \Delta t) d\Omega}{\int_{-\infty}^{\infty} f(\Omega) d\Omega}$$

(косинус-фурье преобразование – это обычное фурье преобразование с отбрасываемой мнимой частью, для симметричных функций мнимая часть всегда равна нулю).

Видность картины задается этим коэффициентом:

$$V = |C(\Delta t)|.$$

Таким образом, находя порядок интерференции, при котором пропадает интерференционная картина, можно оценить ширину линии излучения.

## Приложение 2.

### Автокорреляционная функция. Теорема Винера -Хинчина.

Пусть вследствие реализации какой-либо интерференционной схемы (например, схемы Юнга) в точку наблюдения приходят две волны, вышедшие из одного источника. Разности хода  $\Delta s$  между волнами соответствует временной интервал  $\tau = \frac{\Delta s}{c}$ , где  $c$  – скорость света.

Волны в этом случае представимы в виде:

$$E_1(t) = E(t); \quad E_2(t) = E(t + \tau).$$

Интенсивность пропорциональна среднему значению квадрата напряженности поля:

$$I(\tau) \sim \langle (E_1(t) + E_2(t))^2 \rangle = \langle E_1^2(t) \rangle + \langle E_2^2(t) \rangle + 2\langle E_1(t)E_2(t) \rangle = 2\langle E^2(t) \rangle + 2\langle E(t)E(t + \tau) \rangle$$

Функцию

$$B(\tau) = \langle E(t)E(t + \tau) \rangle$$

называют *автокорреляционной функцией*.

Считая интенсивность каждой из волн равной  $I_0$ , в итоге получим:

$$I(\tau) = 2I_0 + 2B(\tau).$$

Вспомним, что если задана спектральная плотность  $S(\omega)$  излучения, то для интенсивности справедливо соотношение

$$I(\tau) = 2I_0 + 2 \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot \cos(\omega\tau) \cdot d\omega.$$

Вследствие симметричности  $S(\omega)$  можно записать:

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cos(\omega \cdot \Delta t) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot e^{i\omega \cdot \Delta t} d\omega$$

Таким образом, автокорреляционная функция  $B(\tau)$  и спектральная плотность  $S(\omega)$  излучения связаны преобразованием Фурье:

$$B(\Delta\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot e^{i\omega \cdot \Delta\tau} \cdot d\omega.$$

Полученное выражение называют **теоремой Винера-Хинчина**.  
С другой стороны

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\Delta\tau) \cdot e^{-i\omega \cdot \Delta\tau} \cdot d\Delta\tau.$$

В общем случае  $B(\Delta\tau)$  и  $S(\omega)$  - вещественные четные функции своих аргументов.

### Приложение 3.

#### О комплексной степени когерентности.

(см. Бутиков, п.5.4).

Представим квазимонохроматическую волну в виде

$$E(t) = \frac{1}{2} E_0(t) \cdot e^{i\omega_0 t} + \text{к.с.},$$

где  $E_0(t)$  - медленно меняющаяся комплексная амплитуда волны, запись «к.с.» означает комплексно сопряженную величину.

В этом случае для интерференционного члена (автокорреляционной функции  $B(\tau) = \langle E(t)E(t+\tau) \rangle$ ) получим:

$$\begin{aligned} \langle E(t)E(t+\tau) \rangle &= \left\langle \left( \frac{1}{2} E_0(t) e^{i\omega_0 t} + \frac{1}{2} E_0^*(t) e^{-i\omega_0 t} \right) \left( \frac{1}{2} E_0(t+\tau) e^{i\omega_0(t+\tau)} + \frac{1}{2} E_0^*(t+\tau) e^{-i\omega_0(t+\tau)} \right) \right\rangle = \\ &= \frac{1}{4} \langle E_0(t)E_0(t+\tau) e^{i\omega_0(2t+\tau)} + E_0^*(t)E_0(t+\tau) e^{i\omega_0\tau} + \text{к.с.} \rangle = \frac{1}{4} \left( 0 + \langle E_0^*(t)E_0(t+\tau) \rangle e^{i\omega_0\tau} + \text{к.с.} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \langle E_0^*(t)E_0(t+\tau) \rangle e^{i\omega_0\tau} \right] = I_0 \cdot \text{Re} \left[ \gamma(\tau) \cdot e^{i\omega_0\tau} \right], \end{aligned}$$

где

$$\gamma(\tau) = \frac{\langle E_0^*(t)E_0(t+\tau) \rangle}{2I_0}$$

- **комплексная степень когерентности**. Функцию

$$B^k(\tau) = I_0 \cdot \gamma(\tau) \cdot e^{i\omega_0\tau}$$

называют **комплексной функцией корреляции**.

Если использовать представление

$$\gamma(\tau) = |\gamma(\tau)| \cdot e^{i\delta},$$

то для интенсивности получим:

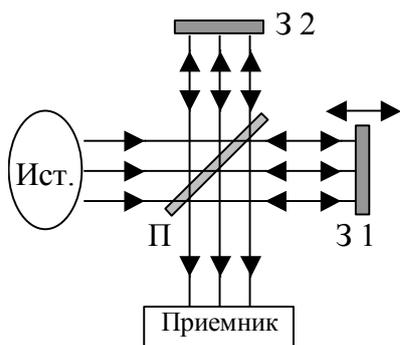
$$I(\tau) = 2I_0 (1 + |\gamma(\tau)| \cos(\omega_0\tau + \delta)).$$

Из данной формулы следует формула для видности:

$$V(\tau) = |\gamma(\tau)|.$$

## Приложение 4. Фурье-спектрометр.

Фурье-спектрометр применяется для нахождения спектра слабых источников с использованием малочувствительных приемников. В отличие от дифракционных приборов, использующих узкую входную щель, в данном случае на прибор поступает весь световой поток.



Основным элементом фурье-спектрометра является интерферометр Майкельсона. Излучение от источника разделяется на два примерно равных по интенсивности пучка на светоделительной пластине П. Каждый из пучков, отражаясь от своего зеркала (31 и 32), возвращается к светоделительной пластине, и от нее поступает в приемник.

Оба пучка вышли из одного источника, разность хода между ними определяется разностью длин плеч интерферометра  $\Delta l$ , а временное запаздывание  $\tau$  равно  $\tau = \frac{2 \cdot \Delta l}{c}$ . Интенсивность, регистрируемая приемником,

задается формулой

$$I(\tau) = 2I_0 + 2B(\tau),$$

где  $I_0$  - интенсивность каждой из волн,  $B(\tau)$  - автокорреляционная функция (см. Приложение 2).

Перемещая одно из зеркал 31 интерферометра с постоянной скоростью и, тем самым, изменяя  $\tau$ , можно экспериментально измерить  $B(\tau)$ . Выполняя фурье-преобразование, на основе теоремы Винера-Хинчина можно найти спектральную плотность  $S(\omega)$  излучения источника.

## Приложение 5. Особенности фурье-преобразования от спектральной плотности.

Для нахождения видности интерференционной картины необходимо вычислить интеграл вида:

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F^*(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega.$$

Вспомним, что

$$1) F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \cdot e^{-i\omega t'} dt';$$

$$2) F^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i(-\omega)t} dt = F(-\omega).$$

В результате получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F^*(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') \cdot e^{-i\omega t'} dt' \cdot F(-\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega =$$

(меняем порядок интегрирования)

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t') dt' \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t'} \cdot F(-\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') dt' \int_{-\infty}^{\infty} F(-\omega) \cdot e^{i\omega(t-t')} d\omega = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t') dt' \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega(t'-t)} d\omega = 2\pi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t') f(t'-t) dt'.
\end{aligned}$$

Данное соотношение носит название **уравнения свертки**.

Отметим, что функция

$$\psi(t) = 2\pi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t') f(t'-t) dt'.$$

является четной:

$$\begin{aligned}
\psi(-t) &= 2\pi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t') f(t'+t) dt' = 2\pi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t'+t-t) f(t'+t) dt' = \\
&\quad (\text{делаем замену переменных } t'+t = \tau) \\
&= 2\pi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau-t) f(\tau) d\tau = \psi(t).
\end{aligned}$$

Более общее утверждение имеет вид:

Если  $F_1(\omega)$  и  $F_2(\omega)$  есть фурье-образы от  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$ , то произведение  $F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$

есть фурье-образ от  $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-t') f_2(t') dt'$ .

**Пример.** Для лоренцевой формы линии функция  $f(t)$  имеет вид затухающей экспоненты:

$$f(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t}; t \geq 0 \\ 0; t < 0 \end{cases}.$$

Вычислим

$$\psi(t) = 2\pi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t') f(t'-t) dt' = 2\pi \cdot \int_t^{\infty} A^2 \cdot e^{-\alpha t'} \cdot e^{-\alpha(t'-t)} dt' =$$

(при условии  $t > 0$  нижний предел интегрирования равен  $t$ , см. рис.)

$$= 2\pi \cdot A^2 e^{\alpha t} \cdot \left. \frac{e^{-2\alpha t'}}{-2\alpha} \right|_t^{\infty} = 2\pi \cdot A^2 e^{\alpha t} \cdot \frac{e^{-2\alpha t}}{2\alpha} = \frac{\pi}{\alpha} \cdot A^2 e^{-\alpha t}.$$

т.е. фурье-образ – вновь затухающая экспонента. Вспоминя про четность функции  $\psi(t)$  получим график вида:

