<u>Преобразование Фурье в оптике.</u>

В математике доказывается, что периодическую функцию $f(t)$ с периодом T, удовлетворяющую определенным требованиям, можно представить **рядом Фурье**:

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t\right),$$

где $\omega=\frac{2\pi}{T}$, $\quad a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\cos n\omega t dt$, $\quad b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\sin n\omega t dt$,

a_n и b_n - коэффициенты ряда Фурье.

Непериодическую функцию нельзя представить в виде ряда Фурье. Но если эта функция абсолютно интегрируемая на интервале $(-\infty,\infty)$, то ее представляют в виде **<u>интеграла Фурье</u>** в комплексной форме:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\cdot e^{i\omega t}d\omega \qquad (1)$$

где

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cdot e^{-i\omega t}dt \qquad (2)$$

- **фурье-образ** функции $f(t)$, или ее спектр (комплексный спектр, Фурье-спектр). Соотношение (1) принято называть обратным преобразованием Фурье, соотношение (2) - прямым преобразованием Фурье

Особенности фурье-представления.

Функция $f(t)$ - действительная функция, заданная на бесконечном временном интервале $(-\infty,\infty)$; функция $F(\omega)$ - комплексная функция, заданная на бесконечном частотном интервале $(-\infty,\infty)$. Несомненно, странно, что для описания одной «бесконечной» функции (действительной $f(t)$) требуется задать две «бесконечные» (комплексную $F(\omega)$), и наоборот. Но из формулы (2) следует:

$$F^*(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cdot e^{+i\omega t}dt;$$

$$F(-\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cdot e^{-i(-)\omega t}dt=F^*(\omega).$$

где звездочка означает знак комплексного сопряжения. Следовательно

$$F(-\omega)=F^*(\omega) \text{ или } F(\omega)=F^*(-\omega), \qquad (3)$$

т.е. достаточно знать значения функции $F(\omega)$ только для положительных частот $\omega>0$, отрицательные частоты не имеют физического смысла, это чисто математическая форма записи. Теперь с точки зрения «бесконечности» все в порядке, одна «бесконечная» функция описывается двумя «полубесконечными»:

$$\infty=\frac{\infty}{2}+\frac{\infty}{2}.$$

Комплексную функцию $F(\omega)$ можно представить в виде:

$$F(\omega)=A(\omega)e^{i\varphi(\omega)},$$

где $A(\omega)$ - спектральная амплитуда, $\varphi(\omega)$ - спектральная фаза.

Из (3) следует, что $A(\omega)$ является четной функцией, а $\varphi(\omega)$ - нечетной.

Необходимость фурье-представления в оптике.

Электромагнитные волны в оптическом диапазоне характеризуются частотами порядка 10^{15} Гц. Экспериментальное измерение изменяющейся во времени с такой частотой функции практически неосуществимо, да и не требуется. Самый «главный» оптический инструмент – глаз – реагирует на «светло-темно», т.е. на интенсивность излучения. Но к тому же глаз распознает цвета, т.е. осуществляет разложение энергии светового пучка по частотам. Кроме этого, существуют оптические приборы, называемые **спектральными**, которые осуществляют фактическое разложение излучения по частотам (**разложение в спектр**).

Фурье-преобразование от временной функции позволяет представить реальную электромагнитную волну как суперпозицию монохроматических волн.

Энергетическая характеристика в спектральном представлении.

Вспомним, что для электромагнитной волны

$$f(t)=E(t)$$

энергия, падающая на единичную по площади площадку в единицу времени (плотность потока энергии) пропорциональна квадрату $f^2(t)=E^2(t)$. Воспользуемся фурье представлением для нахождения полной энергии $W_{полн}$:

$$W_{полн} \approx \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \cdot = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)d\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)d\omega \cdot F(-\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)F^*(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega .$$

Полученное соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

носит название **<u>теоремы Паншереля</u>**. Она показывает, что для нахождения энергетических характеристик электромагнитной волны достаточно знать спектральное разложение этой волны по частотам.

Величину $S(\omega) \sim |F(\omega)|^2$ принято называть **<u>спектральной плотностью интенсивности</u>** (иногда говорят о спектральной плотности энергии, излучения и пр.). Указанное выше свойство (3) позволяет утверждать, что $S(\omega)$ - **всегда** четная функция.

Интенсивность электромагнитной волны принято выражать через интеграл от спектральной плотности интенсивности:

$$I = \int_{0}^{\infty} S(\omega)d\omega . \tag{4}$$

(это позволяет не думать о нормировочных коэффициентах).

Замечание. Так как $S(\omega)$ -четная функция, то интеграл (4) принято брать только по положительным частотам. По мнению автора, в ряде случаев интегрирование по всему диапазону частот от «минус» до «плюс» бесконечности позволяет обнаружить некоторые любопытные свойства. Поэтому в дальнейшем в ряде случаев вместо (4) будем использовать

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)d\omega . \tag{4a}$$

Вспоминая, что интенсивность I есть энергия, падающая в единицу времени на единичную площадку, то спектральная плотность $S(\omega)$ есть отношение интенсивности dI, приходящейся на узкий спектральный интервал $d\omega$, к величине этого интервала:

$$S(\omega)=\frac{dI(\omega)}{d\omega}.$$

В экспериментах спектральные приборы, как правило, регистрируют величины, пропорциональные $S(\omega)$, хотя довольно часто на графиках вместо $S(\omega)$ пишут *I*. Это, несомненно, ошибка, т.к. в определении интенсивности отсутствует упоминание о спектральных свойствах излучения.

Заметим, что, зная $F(\omega)$, можно полностью восстановить $f(t)$, т.е. узнать форму сигнала. Однако по измеренной $S(\omega) \sim |F(\omega)|^2$ восстановление $f(t)$ невозможно, так как потеряна информация о фазе сигнала:

$$F(\omega) = |F(\omega)| \cdot e^{i\varphi(\omega)},$$

но $S(\omega) \sim F(\omega) \cdot F^*(\omega) = |F(\omega)|^2$.

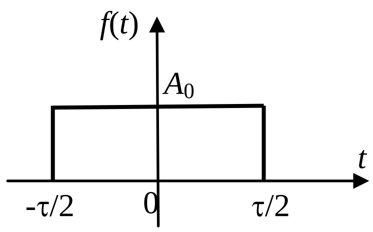
Примеры вычисления фурье-образа.

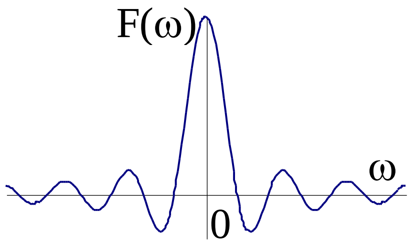
1)Прямоугольный импульс $f(t) = \begin{cases} A_0, & |t| < \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases}$, τ-длительность импульса.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A_0 \cdot e^{-i\omega t} dt = \cdot \left. \frac{A_0 \cdot e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right|_{-\tau/2}^{\tau/2} =$$

$$= \frac{A_0 \cdot \left(e^{-i\omega \tau/2} - e^{i\omega \tau/2} \right)}{-i\omega} = \frac{-A_0 \cdot 2i \sin(\omega\tau/2)}{-i\omega} = \frac{A_0 \cdot 2\sin(\omega\tau/2)}{\omega \cdot \tau/2} \cdot \tau/2 =$$

$$= A_0 \tau \cdot \mathrm{sinc}(\omega\tau/2).$$





Первый нуль $F(\omega)$ можно найти из соотношения

$$\omega\tau/2 = \pi.$$

Шириной спектра $\Delta\omega$ называют расстояние от центра линии до первого нуля функции, т.е. $\Delta\omega = \frac{2\pi}{\tau}$, или $\Delta\nu = \frac{1}{\tau}$. Можно сказать, что основная часть энергии такого сигнала сосредоточена именно в спектральном интервале $\Delta\omega = \frac{2\pi}{\tau}$. В итоге получаем соотношение между длительностью сигнала τ и шириной спектра $\Delta\nu$ по частотам:

$$\tau \cdot \Delta\nu = 1.$$

Это соотношение широко применяется в оптике, причем не только для сигнала прямоугольной формы.

Отметим, что в точке $\omega_ш = \pm\frac{\Delta\omega}{2}$ значение функции $\mathrm{sinc}(\omega\tau/2)$ равно:

$$\mathrm{sinc}\left(\omega_ш \tau/2\right) = \mathrm{sinc}\left(\pm \Delta\omega\tau/4\right) = \mathrm{sinc}\left(\pm \pi/2\right) = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}64$$

2) Пусть для сигнала $f(t)$ известен его спектр $F(\omega)$, найдем спектр этого же сигнала, заполненного высокой частотой ω_0:

$$f_{зап}(t) = f(t)\cdot\cos\omega_0 t = f(t)\cdot\frac{e^{i\omega_0 t}+e^{-i\omega_0 t}}{2}.$$

Рассмотрим интеграл вида

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{i\omega_0 t}\cdot e^{-i\omega t}dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-i(\omega-\omega_0)t}dt = F(\omega-\omega_0).$$

Следовательно,

$$F_{зап}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{зап}(t)\cdot e^{-i\omega t}dt = \frac{F(\omega-\omega_0)+F(\omega+\omega_0)}{2}, \qquad (5)$$

т.е. спектр сдвигается по шкале частот на $\pm\,\omega_0$, при этом его форма не изменяется.

3) Прямоугольный импульс, заполненный высокой частотой ω_0 (**волновой цуг**):

$$f(t) = \begin{cases} A_0\cdot\cos(\omega_0 t), & |t| < \tau/2, \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases}, \quad \text{где } \omega_0 >> \frac{2\pi}{\tau}.$$

Используя представление $\cos(\omega_0 t) = \dfrac{e^{i\omega_0 t}+e^{-i\omega_0 t}}{2}$ и рассчитанный выше спектр $F_{прям}(\omega)$ прямоугольного импульса, несложно получить

$$F(\omega) = \frac{A_0\tau}{2}\cdot\left(\operatorname{sinc}\left((\omega-\omega_0)\tau/2\right)+\operatorname{sinc}\left((\omega+\omega_0)\tau/2\right)\right) =$$

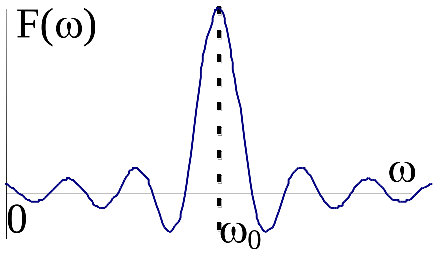
$$= \frac{1}{2}\left(F_{прям}(\omega-\omega_0)+F_{прям}(\omega+\omega_0)\right).$$

Так как $\omega_0 >> \dfrac{2\pi}{\tau}$, то в области положительных частот $F_{прям}(\omega+\omega_0)\approx 0$, в итоге

$$F(\omega) \approx \frac{1}{2}F_{прям}(\omega-\omega_0),$$

т.е. максимум спектра смещается из нуля на частоту ω_0. Ширина спектральной линии определяется из соотношения $\Delta\omega = \dfrac{2\pi}{\tau}$, т.е. $\omega_0 >> \Delta\omega$.

Замечание. В приведенной формуле мы опять «забыли» об отрицательных частотах, как это часто делают в учебной (и не только) литературе. Но мы-то знаем, что можно и не забывать и пользоваться общей формулой (5)



4) Затухающий (квази)гармонический сигнал:

$$f(t)=\begin{cases} A_0\cdot e^{-\delta t}\cos(\omega_0 t), & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}.$$

В отсутствие гармонической составляющей имеем:

$$F(\omega)=\int_0^{\infty} A_0 e^{-\delta t}\cdot e^{-i\omega t}dt=A_0\cdot\left.\frac{e^{-(\delta+i\omega)t}}{-(\delta+i\omega)}\right|_0^{\infty}=$$

$$=A_0\cdot\frac{1}{\delta+i\omega}=A_0\frac{\delta-i\omega}{\delta^2+\omega^2}.$$

Так как исходная функция не симметричная, то (в отличие от разобранных ранее случаев) ее спектр является комплексной функцией. В этом случае принято рассчитывать спектральную плотность сигнала:

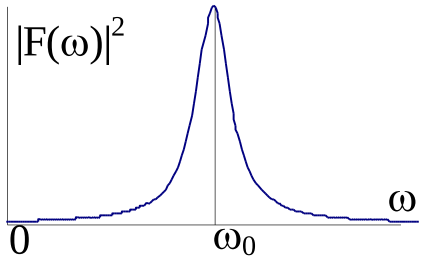
$$|F(\omega)|^2=\frac{A_0^2}{\delta^2}\cdot\frac{\delta^2}{\delta^2+\omega^2}=\frac{A_0^2}{\delta^2}\cdot L\left(\frac{\omega}{\delta}\right)=(A_0\tau)^2\cdot L\left(\frac{\omega}{\delta}\right),$$

где $L(x)\equiv\frac{1}{1+x^2}$ – функция Лоренца. Эта функция, как и отмечалось выше, является четной.

При наличии гармонической составляющей спектр, не изменяя формы, сдвигается на ω_0, спектральная плотность излучения равна

$$S(\omega)\sim F(\omega)\cdot F^*(\omega)=|F(\omega)|^2=\frac{A_0^2}{4}\cdot\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2+\delta^2}.$$

Данный спектр принято называть **лоренцевым**. Он имеет резко выраженный максимум на частоте ω_0 и ширину на полувысоте, равную $\Delta\omega=2\delta$.



Если считать, что длительность импульса $\tau\approx\frac{1}{\delta}$, то $\Delta\omega\cdot\tau\approx 2$ и $\Delta\nu\cdot\tau\approx 1$, т.е. справедливо уже упоминавшееся ранее соотношение между длительностью сигнала τ и шириной спектра $\Delta\nu$ по частотам

5) Гауссов (квази)гармонический сигнал:

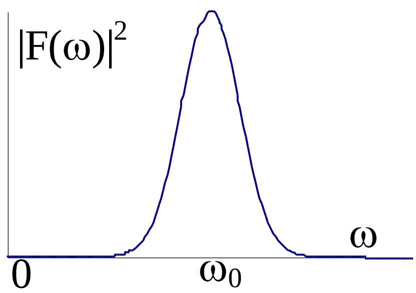
$$f(t)=A_0 e^{-t^2/\tau^2}\cos(\omega_0 t)$$

.

Спектральная плотность излучения равна

$$S(\omega)=F(\omega)\cdot F^*(\omega)=|F(\omega)|^2=\frac{A_0^2}{4}\pi\tau^2\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\tau^2(\omega-\omega_0)^2\right).$$

Данный спектр принято называть **гауссовым**. Он имеет резко выраженный максимум на частоте ω_0 и ширину на полувысоте, равную $\Delta\omega=2\sqrt{2\cdot\ln 2}/\tau$. И в данном случае $\Delta\nu\cdot\tau\approx 1$.



6) Бесконечный гармонический сигнал:

$f(t) = A_0 \cos(\omega_0 t);\ -\infty \le t \le +\infty$.

Фурье спектр такого сигнала

$$F(\omega) = \pi \cdot A_0 \cdot (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)),$$

где дельта-функция:

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt$$

- бесконечно узкий и бесконечно высокий «выброс» в нуле. При этом

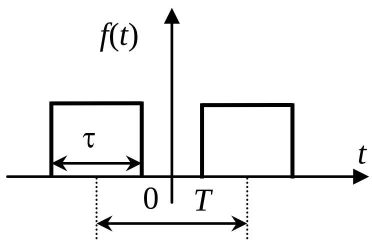
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) d\omega = 1.$$

7) Если для сигнала $f(t)$ его спектр $F(\omega)$, то для спектра сигнала $f(t-T)$, смещенного на T=*const* по времени, получим:

$$F_T(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-T) \cdot e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-T) \cdot e^{-i\omega(t-T)} \cdot e^{-i\omega T} dt = F(\omega) \cdot e^{-i\omega T}.$$

Т.е. в спектре появляется фазовый множитель $\cdot e^{-i\omega T}$, однако $|F_T(\omega)| = |F(\omega)|$ - спектральная плотность не меняется.

8) Определите спектр двух одинаковых прямоугольных импульсов длительностью τ каждый, смещенных по времени на T.



Решение

Функцию, описывающую два прямоугольных импульса одинаковой полярности, можно представить в виде:

$$f(t) = f_0\left(t - \frac{T}{2}\right) + f_0\left(t + \frac{T}{2}\right),$$

где функция $f_0(t)$ - одиночный прямоугольный симметричный импульс длительностью τ, спектр $F_0(\omega)$ которого был найден в п.1:

$$F_0(\omega) = A_0 \cdot \tau \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right).$$

В соответствии с п.7.

$$F(\omega) = A_0 \cdot \tau \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \cdot \left(e^{-i\omega\frac{T}{2}} + e^{i\omega\frac{T}{2}}\right) =$$

$$= A_0 \cdot \tau \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \cdot 2\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

В общем случае для последовательности из N импульсов длительностью τ каждый, следующих с временной периодичностью T, спектр имеет вид:

$$F(\omega) = A_0 \cdot \tau \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{N\omega T}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}.$$

Подобная формула нам встретится позднее при рассмотрении дифракции Фраунгофера на N щелях.

9) Случайная последовательность одинаковых волновых цугов $f_0(t) = \sum_{i=1}^{N} f(t - t_i)$:

$$F_0(\omega) = \sum_{i=1}^{N} F(\omega) \cdot e^{-i\omega t_i} = F(\omega) \cdot \sum_{i=1}^{N} e^{-i\omega t_i}.$$

Для спектральной плотности имеем:

$$S_0(\omega) = F_0(\omega) \cdot F_0^*(\omega) = F(\omega) \cdot F^*(\omega) \left(\sum_{i=1}^{N} e^{-i\omega t_i} \cdot \sum_{j=1}^{N} e^{i\omega t_j} \right) =$$

$$= F(\omega) \cdot F^*(\omega) \left(\sum_{i=1}^{N} e^{-i\omega t_i} \cdot \sum_{j=1}^{N} e^{i\omega t_j} \right) = S(\omega) \cdot \left(N + \sum_{i,j=1; i\neq j}^{N} e^{-i\omega(t_i - t_j)} \right) = NS(\omega)$$

(перекрестное произведение в среднем равно нулю). Спектральная плотность N цугов возрастает в N раз, однако, если бы последовательность была регулярной (через одинаковые промежутки), то для некоторых частот увеличение было бы в N^2 раз.

В заключении вновь вернемся к рассуждениям о диапазоне частот – формулам (4) и (4а).
В п.2 была получена формула (5) для спектра произвольного временного сигнала $f(t)$, заполненного высокой частотой ω_0. Ограничимся привычным для оптики случаем: $f(t)$ это импульс, длительность τ которого существенно превышает период T колебаний поля в сигнале. Тогда диапазон $\Delta\omega$ спектра $F(\omega)$ сигнала существенно меньше ω_0:

$$\Delta\omega \approx \frac{2\pi}{\tau} << \omega_0. \tag{6}$$

При вычислении спектральной плотности $S_{зап}(\omega)$ заполненного сигнала (5) получим:

$$S_{зап}(\omega) = F_{зап}(\omega) \cdot F^*_{зап}(\omega) = \frac{F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)}{2} \cdot \frac{F^*(\omega - \omega_0) + F^*(\omega + \omega_0)}{2}.$$

Из (6) следует:

$$F(\omega - \omega_0) \cdot F^*(\omega + \omega_0) = 0; \qquad F(\omega + \omega_0) \cdot F^*(\omega - \omega_0) = 0,$$

поэтому

$$S_{зап}(\omega) = \frac{S(\omega - \omega_0) + S(\omega + \omega_0)}{4}.$$

т.е. и спектральная плотность $S_{зап}(\omega)$ при заполнении высокой частотой «прыгает» на $\pm\omega_0$.

Вспомним, что независимо от вида $f(t)$ спектральная плотность $S(\omega)$– всегда четная функция, поэтому и «совершившие прыжки» функции $S(\omega\text{-}\omega_0)$ и $S(\omega\text{-}{+}\omega_0)$ также симметричны относительно своих центров.

Полученная информация будет полезна в дальнейшем.

$$F_{зап}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{зап}(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = \frac{F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)}{2}$$