Оптика

(конспект лекций доцента Митина И.В.)

Курс оптики, в отличие от большинства общих курсов, строится по принципу «От общего к частному». Записывается общая система уравнений Максвелла, которая затем решается при различных предположениях и упрощениях.

Первоначально рассматривается случай однородной изотропной линейной среды.

Электромагнитные волны в однородной изотропной среде.

Пусть в однородной изотропной среде отсутствуют заряды и токи, т.е. ρ=0 и $\vec{\mathbf{j}}=0$. Тогда уравнения Максвелла и материальные уравнения запишутся в виде:

$$\nabla\cdot\vec{\mathbf{D}}=0,\qquad \nabla\cdot\vec{\mathbf{B}}=0,\qquad \nabla\times\vec{\mathbf{E}}=-\frac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial t},\qquad \nabla\times\vec{\mathbf{H}}=\frac{\partial\vec{\mathbf{D}}}{\partial t},$$

$$\vec{\mathbf{D}}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{\mathbf{E}},\qquad \vec{\mathbf{B}}=\mu\mu_0\vec{\mathrm{H}}.$$

где ε,μ - диэлектрическая и магнитная проницаемости среды– суть константы.

Подействуем векторно оператором ∇ на уравнение $\nabla\times\vec{\mathbf{E}}=-\frac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$:

$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{\mathbf{E}}\right)=-\nabla\times\frac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial t}.$$

Раскрывая двойное векторное произведение в левой части уравнения по формуле $\vec{\mathbf{A}}\times\left(\vec{\mathbf{B}}\times\vec{\mathbf{C}}\right)=\vec{\mathbf{B}}\cdot\left(\vec{\mathbf{A}}\vec{\mathbf{C}}\right)-\left(\vec{\mathbf{A}}\vec{\mathbf{B}}\right)\vec{\mathbf{C}}$, получим:

$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{\mathbf{E}}\right)=\nabla\cdot\left(\nabla\cdot\vec{\mathbf{E}}\right)-\nabla^2\cdot\vec{\mathbf{E}}=0-\nabla^2\cdot\vec{\mathbf{E}}.$$

В декартовых координатах $\nabla^2\cdot\vec{\mathbf{E}}=\Delta\vec{\mathbf{E}}=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\vec{\mathbf{E}}$ - это вектор; $\Delta=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$ - оператор Лапласа (для сравнения в уравнении Пуассона $\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ действие оператора ∇^2 на скаляр φ - это скаляр $\nabla^2\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$)

Продифференцируем по времени уравнение $\nabla\times\vec{\mathbf{H}}=\frac{\partial\vec{\mathbf{D}}}{\partial t}$ с учетом материальных уравнений и поменяем порядок дифференцирования по времени и координате:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\vec{\mathbf{H}}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\vec{\mathbf{D}}}{\partial t},\qquad \nabla\times\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{\mathbf{B}}}{\mu\mu_0}\right)=\frac{\partial^2\left(\varepsilon\varepsilon_0\vec{\mathbf{E}}\right)}{\partial t^2}\qquad \nabla\times\frac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial t}=\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2}$$

В результате получим:

$$\nabla^2\vec{\mathbf{E}}=\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2}\qquad \nabla^2\vec{\mathbf{E}}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2},$$

где $v=\frac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$

$$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

- величины, имеющие размерность скорости.

Аналогичное уравнение можно получить и для вектора $\vec{\mathbf{B}}$:

$$\nabla^2\vec{\mathbf{B}} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{\mathbf{B}}}{\partial t^2}.$$

Эти уравнения называют **волновыми уравнениями**. Так как они одинаковы для векторов $\vec{\mathbf{E}}$ и $\vec{\mathbf{B}}$, то обычно рассматривают только уравнение для $\vec{\mathbf{E}}$.

Волновое уравнение имеет множество решений. Вследствие линейности уравнения произвольная суперпозиция решений также является решением.

Общая теория решения подобных уравнений в частных производных рассматривается в курсе математической физики на 3-м курсе. Мы же ограничимся простейшими случаями.

Если, к примеру, векторы $\vec{\mathbf{E}}$ и $\vec{\mathbf{B}}$ зависят только от одной пространственной переменной z, то решением уравнения $\frac{\partial^2\vec{\mathbf{E}}}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2}$ будет суперпозиция произвольных (дифференцируемых) функций с аргументами $t + \frac{z}{v}$ и $t - \frac{z}{v}$:

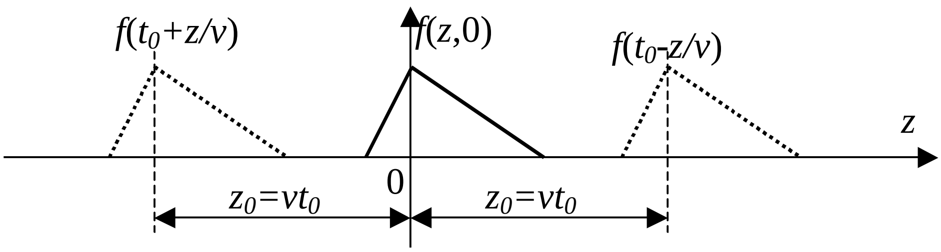
$$\vec{\mathbf{E}}(z,t) = \vec{\mathbf{E}}_1\left(t + \frac{z}{v}\right) + \vec{\mathbf{E}}_2\left(t - \frac{z}{v}\right)$$

(проверяется непосредственной подстановкой). Первая функция (со знаком «плюс») распространяется со скоростью v в отрицательном направлении оси Oz, вторая – в положительном.

Если направление распространения волны задать единичным вектором $\vec{\mathbf{n}}$, то, заменяя координату $z = \vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{z}} \cdot \vec{\mathbf{r}}$ на $\vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{r}}$, получим:

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \vec{\mathbf{E}}\left(t \pm \frac{\vec{\mathbf{n}}\cdot\vec{\mathbf{r}}}{v}\right)$$

Пример. Пусть скалярная функция $f(z,t) = f\left(t \pm \frac{z}{v}\right)$ в начальный момент t=0 имеет форму треугольника (см. рисунок). Тогда в момент времени t_0 функции $f\left(t \pm \frac{z}{v}\right)$, не меняя формы, сместятся вправо и влево на расстояние $z_0 = v \cdot t_0$.



Примечание. В оптике принято считать μ=1, т.к. на оптических частотах магнитные моменты вещества не успевают реагировать на быстро изменяющееся магнитное поле: пропадают пара- и ферромагнетизм, а диамагнетизм пренебрежимо мал.

Одним из наиболее часто рассматриваемых решений является решение в виде **плоской монохроматической электромагнитной бегущей волны**

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \vec{\mathbf{E}}_0 \cdot \cos(\vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{r}} - \omega t + \varphi),$$

(волна бежит вдоль направления вектора $\vec{\mathbf{k}}$, называемого **волновым вектором**). Подставляя решение в волновое уравнение, получим связь k и ω:

$$k^2 = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \cdot \omega^2; \qquad k = \frac{\omega}{v}.$$

Напомним, что фазой волны называют величину $\Phi = \vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{r}} - \omega t + \varphi$, уравнение поверхности постоянной фазы $\Phi = \vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{r}} - \omega t + \varphi = const$ определяет в пространстве (при t=const) плоскость перпендикулярную вектору $\vec{\mathbf{k}}$. Поверхность постоянной фазы называют **волновой поверхностью**, или **волновым фронтом**, в данном случае волну по форме волнового фронта называют **плоской** (бывают также сферические, цилиндрические и др. волны).

Скорость распространения волнового фронта называют **фазовой скоростью распространения волны**, для ее нахождения продифференцируем по времени выражение $\Phi = kz - \omega t + \varphi = const$ (положим для простоты, что вектор $\vec{\mathbf{k}}$ направлен по оси Oz):

$$\frac{d\Phi}{dt} = k\frac{dz}{dt} - \omega = 0 \qquad v_{фаз} = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k}.$$

Часто используемые соотношения:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \text{ где } T \text{ – период;}$$

$$k = \frac{\omega}{v_{фаз}} = \frac{2\pi}{v_{фаз}T} = \frac{2\pi}{\lambda}, \text{ где } \lambda\text{- } \textbf{длина волны}.$$

Очень удобно для описания волновых процессов использовать комплексную форму записи, тогда вместо $\vec{\mathbf{E}}(z,t) = \vec{\mathbf{E}}_{00} \cdot \cos(\vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{r}} - \omega t + \varphi)$ можно записать:

$$\mathbf{E}(z,t) = \mathbf{E}_{00} \cdot e^{i(\vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{r}} - \omega t + \varphi)} = \mathbf{E}_{00} \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{i(\vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{r}} - \omega t)} = \mathbf{E}_0 \cdot e^{i(\vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{r}} - \omega t)},$$

где $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_{00} \cdot e^{i\varphi}$ комплексная амплитуда волны.

Строго говоря, выражение для плоской гармонической волны в комплексном виде следует записывать в виде:

$$\mathbf{E}(z,t) = \mathbf{E}_{00} \cdot \cos(\vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{r}} - \omega t + \varphi) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}_{00} \cdot e^{i(\vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{r}} - \omega t + \varphi)} + \mathbf{E}_{00} \cdot e^{-i(\vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{r}} - \omega t + \varphi)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{E}_0 \cdot e^{i(\vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{r}} - \omega t)} + к.с.,$$

где *к.с.* означает комплексно сопряженное от первого выражения. Однако в учебной литературе практически всегда член *к.с.* и коэффициент $\frac{1}{2}$ опускают.

Для такой формы записи производные по времени и координате записываются в виде:

$$\nabla\vec{\mathbf{E}} = i\vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{E}} \qquad \nabla \times \vec{\mathbf{E}} = i\vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{E}} \qquad \frac{\partial\vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = -i\omega\vec{\mathbf{E}}$$

а уравнения Максвелла будут иметь вид:

$$\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{E}} = 0, \qquad \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0, \qquad \vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{E}} = \omega\vec{\mathbf{B}}, \qquad v_{фаз}^2 \cdot \vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{B}} = -\omega\vec{\mathbf{E}}.$$

Из этих формул следует **поперечность** плоских электромагнитных волн, т.е. векторы $\vec{\mathbf{E}}$ и $\vec{\mathbf{B}}$ перпендикулярны вектору $\vec{\mathbf{k}}$, и в свою очередь перпендикулярны друг к другу.

Таким образом, векторы $\vec{\mathbf{E}}$, $\vec{\mathbf{B}}$ и $\vec{\mathbf{k}}$ образуют правую тройку векторов. Этот факт показан на примере монохроматической волны, но может быть доказан и в общем случае для плоских и сферических волн,

Соотношение между их амплитудами из уравнения $\vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{E}} = \omega\vec{\mathbf{B}}$ имеет вид:

$$E = B \cdot v_{фаз}$$

(в вакууме $E = Bc$, где c – скорость света в вакууме). Это соотношение можно запомнить и в следующем виде:

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E = \sqrt{\mu\mu_0}H.$$

Из факта, что соотношение $E = B \cdot v_{фаз}$ справедливо в любой момент времени, следует, что в бегущей волне векторы $\vec{\mathbf{E}}$ и $\vec{\mathbf{B}}$ колеблются в одинаковых фазах.

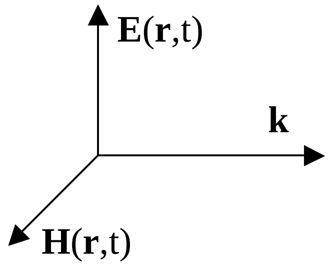


Рис 1. Взаимное расположение векторов в бегущей электромагнитной волне

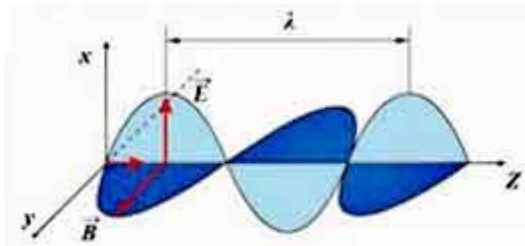


Рис 2. «Мгновенная фотография» бегущей электромагнитной волны

Подставив это соотношение в выражения для объемной плотности энергии электрического $w_{эл} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\vec{\mathbf{E}}\vec{\mathbf{D}}}{2}$ и магнитного $w_{магн} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{\vec{\mathbf{B}}\vec{\mathbf{H}}}{2}$ полей, получим, что в электромагнитной волне

$$w_{эл} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 v^2 B^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} B^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = w_{магн};$$

т.е. объемные плотности энергии обеих составляющих одинаковы. Суммарная объемная плотность энергии в электромагнитной волне равна

$$w_{элмагн} = w_{эл} + w_{магн} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu\mu_0}.$$

(напоминаем, что объемная плотность энергии есть энергия единицы объема, размерность $\left[w_{элмагн}\right] = \frac{Дж}{м^3}$)

Замечание.

Решение волнового уравнения в виде бегущей гармонической волны довольно часто называют «уравнением волны». Такое название следует признать неудачным, т.к. возникает путаница в практически одинаково звучащих терминах: «волновое уравнение» и «уравнение волны».

Если вспомнить курс механики, то там использовались термины «уравнение движения» и «закон движения». Последовательность действий такова: записывается уравнение движения, затем оно решается, и полученное решение называют законом движения.

Такой же логики следует придерживаться и в данном случае. Записывается волновое уравнение, оно решается, и полученное решение следует называть законом волнового движения или распространения.

<u>Энергия электромагнитной волны</u>

Электромагнитная волна, распространяясь в пространстве, переносит энергию, которую принято характеризовать вектором <u>**плотности потока энергии**</u> – энергией, переносимой волной в единицу времени через площадку единичной площади. Этот вектор называют вектором Пойнтинга и обозначают $\mathbf{S}$. Из определения следует, что плотность потока энергии имеет размерность $[\mathbf{S}] = \dfrac{Дж}{м^2 \cdot с}$.

В бегущей волне можно показать, что связь между объемной плотностью энергии $w_{элмагн}$ электромагнитной волны и вектором Пойнтинга может быть выражена простым соотношением:

$$\left|\vec{\mathbf{S}}\right| = v_{фаз} \cdot w_{элмагн}$$

(в вакууме $\left|\vec{\mathbf{S}}\right| = c \cdot w_{элмагн}$). Эту формулу легко запомнить из соображений размерности: $[\mathbf{S}]/[w_{элмагн}] = \dfrac{м}{с} = [v]$

Выражение для вектора Пойнтинга получим из соображений закона сохранения энергии. Продифференцируем выражение для объемной плотности энергии электромагнитного поля и подставим из уравнений Максвелла:

$$\frac{d}{dt} w_{элмагн} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{D}}}{2} + \frac{\vec{\mathbf{H}} \cdot \vec{\mathbf{B}}}{2}\right) = \vec{\mathbf{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} + \vec{\mathbf{H}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = \left(\vec{\mathbf{E}} \cdot \nabla \times \vec{\mathbf{H}}\right) - \left(\vec{\mathbf{H}} \cdot \nabla \times \vec{\mathbf{E}}\right).$$

Так как из математики следует, что

$$div\left[\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}\right] = \vec{\mathbf{b}} \cdot rot\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{a}} \cdot rot\vec{\mathbf{b}},$$

то

$$\left(\vec{\mathbf{E}} \cdot \nabla \times \vec{\mathbf{H}}\right) - \left(\vec{\mathbf{H}} \cdot \nabla \times \vec{\mathbf{E}}\right) = -div\left[\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}}\right],$$

$$\frac{d}{dt} w_{элмагн} = -div\vec{\mathbf{S}},$$

где введено обозначение

$$\vec{\mathbf{S}} = \left[\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}}\right].$$

В интегральной форме это выражение имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\int_V w_{элмагн} dV = -\oint_\Sigma \vec{\mathbf{S}} \cdot d\vec{\mathbf{A}},$$

$$\frac{dW_{элмагн}}{dt} = -\oint_\Sigma \vec{\mathbf{S}} \cdot d\vec{\mathbf{A}},$$

где Σ – поверхность, ограничивающая объем V, $d\vec{\mathbf{A}}$ - элемент площади, $W_{элмагн}$ –энергия электромагнитного поля в объеме V. Данное соотношение говорит о том, что изменение энергии в некотором объеме V равно потоку энергии через поверхность, ограничивающую данный объем. Таким образом, вектор $\vec{\mathbf{S}}$ и есть плотность потока энергии волны.

Полученные уравнения есть не что иное, как закон сохранения энергии при распространении электромагнитных волн.

Так как частота оптического излучения велика, то объемную плотность энергии, как и плотность потока энергии усредняют по времени (время усреднения существенно превышает период колебаний). В результате для среднего значения объемной плотности энергии плоской волны имеем

$$\left\langle w_{элмагн} \right\rangle = \left\langle \varepsilon\varepsilon_0 E^2 \right\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E_0^2.$$

Среднее значение проекции плотности потока энергии на направление распространения называют **<u>интенсивностью</u>** волны:

$$I = \langle S_n \rangle = v_{фаз} \cdot \langle w_{элмагн} \rangle = \frac{1}{2} v_{фаз} \cdot \varepsilon\varepsilon_0 E_0^2 .$$

(здесь E_0 - модуль комплексной амплитуды волны). Размерность I совпадает с размерностью $\mathbf{S}$: $[I] = [\mathbf{S}] = \frac{Дж}{м^2 \cdot с}$, ее легко запомнить по «словесной формуле»: «энергия, падающая в единицу времени на единичную площадку».

В бегущей волне принято говорить, что интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды напряженности электрического поля $I \sim E_0^2$. Однако подобной общепринятой формулировкой следует очень осторожно пользоваться при переходах излучения из одной среды в другую (см. ниже в теме «Отражение и преломление волн на границе раздела сред»).

Примечание. В случае распространения волны в проводящей среде в ней возникает электрический ток, и в соответствующем уравнении Максвелла следует учесть, что $\boldsymbol{j} \neq 0$. Часть энергии волны будет преобразовываться в тепло, в результате в законе сохранения энергии появятся дополнительные слагаемые:

$$\frac{d}{dt} w_{элмагн} = -q - div\vec{\mathbf{S}};$$

$$\frac{dW_{элмагн}}{dt} = -Q - \oint_{\Sigma} \vec{\mathbf{S}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} .$$

Смысл величин q и Q легко понять из соображений размерности:

$q = \left(\bar{\mathbf{j}} \cdot \overline{\mathbf{E}} \right)$ – тепловая энергия, выделяющаяся в единице объема в единицу времени;

$Q = \int_V q dV$ - мощность тепловых потерь.

В заключении еще раз напомним названия введенных энергетических величин:

$w_{элмагн}$ - объемная плотность энергии электромагнитного поля;

$\vec{\mathbf{S}}$ - вектор плотности потока энергии (вектор Умова-Пойнтинга);

I – интенсивность волны (скаляр) - среднее значение проекции плотности потока энергии на направление распространения волны.

<u>Сферическая волна.</u>

Если источник излучения – точечный, то от него во все стороны расходится сферическая волна (фронт такой волны – сфера). Выражение для волны можно получить, решая волновое уравнение в сферических координатах. Но мы его попробуем «угадать» из соображений сохранения энергии.

Общий вид сферической монохроматической волны представим в виде, аналогичном плоской волне:

$$\vec{\mathbf{E}}(r,t) = \vec{\mathbf{E}}_0(r) \cdot \cos(kr - \omega t + \varphi);$$

однако в данном случае

1) k уже не вектор (волна распространяется во всех направлениях), а волновое число: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$;

2) поверхность постоянной фазы есть сфера: Φ=const , если r=const;

3) амплитуда волны $\vec{\mathbf{E}}_0(r)$ зависит от расстояния r от источника.

Рассмотрим тонкий сферический слой толщиной dr. В процессе распространения волны энергия dW слоя не меняется. Объемная плотность энергии w пропорциональна квадрату амплитуды $w \sim E_0^2$, объем слоя равен $dV = 4\pi r^2 dr$, следовательно

$$dW = w \cdot dV \sim E_0^2 r^2 dr = const. \qquad E_0 \sim \frac{1}{r}.$$

Сферическая волна запишется в виде:

$$\vec{\mathbf{E}}(r,t) = \frac{\vec{\mathbf{A}}_0}{r} \cdot \cos(kr - \omega t + \varphi),$$

где амплитуду волны $\vec{\mathbf{E}}_0(r) = \dfrac{\vec{\mathbf{A}}_0}{r}$ можно выразить, к примеру, зная мощность P_0 источника (сделайте это самостоятельно).

<u>Стоячая волна.</u>

Стоячая волна возникает при наложении двух бегущих навстречу друг другу волн одинаковой частоты, амплитуды и поляризации:

$$E_{cm}(x,t) = A_0 \cos(\omega t - kx) + A_0 \cos(\omega t + kx) = 2A_0 \cos(\omega t)\cos(kx);$$
$$B_{cm}(x,t) = B_0 \cos(\omega t - kx) - B_0 \cos(\omega t + kx) = 2B_0 \sin(\omega t)\sin(kx);$$

(знак «минус» в формуле для $B_{cm}(x,t)$ из-за противоположной направленности волновых векторов $\vec{\mathbf{k}}_1$ и $\vec{\mathbf{k}}_2$).

Для каждой компоненты поля существуют точки, в которых поле всегда равно нулю (их называют «**<u>узлами</u>**») и точки, в которых амплитуда колебаний максимальна и равна удвоенной амплитуде бегущей волны (их называют «**<u>пучностями</u>**»). При этом узел одной компоненты (например, электрической) совпадает с пучностью другой (магнитной) (координаты этих точек определяются из условия $\cos kx=0$), и наоборот. Кроме этого, в тот момент времени, когда одна компонента (например, электрическая) равна нулю во всех точках (т.е. $\cos\omega t=0$), вторая (магнитная) принимает максимально возможное значение (так как в этом случае $|\sin\omega t|=1$), и наоборот. Говорят, что электрическая и магнитная компоненты сдвинуты по фазе на $\dfrac{\pi}{2}$ как по времени, так и по пространственной переменной.

Стоячая волна не переносит энергию (в узлах плотность потока энергии **всегда** равна нулю), но в промежутке между соседними узлами перенос и перераспределение энергии происходят.

Расстояние между соседними узлами (или пучностями) одной из компонент (электрической или магнитной) равно $\lambda/2$, а между соседними узлами (или пучностями) электрической и магнитной компонент равно $\lambda/4$.

<u>Импульс электромагнитной волны. Давление света.</u>

Вектор **объемной плотности импульса** $\vec{\mathbf{G}}$ (импульс единицы объема) сонаправлен с вектором скорости волны $\vec{\mathbf{v}}$ и связан с плотностью энергии $w_{элмагн}$ соотношением:

$$\left|\vec{\mathbf{G}}\right| = \frac{w_{элмагн}}{v}$$

или через вектор Пойнтинга $\vec{\mathbf{S}}$:

$$\vec{\mathbf{G}} = \frac{\vec{\mathbf{S}}}{v^2}.$$

(плотность импульса есть импульс единицы объема, размерность $\left[\vec{\mathbf{G}}\right] = \dfrac{Дж}{м^3 \cdot м/с} = \dfrac{Дж \cdot с}{м^4}$)

Замечание. Связь между энергией W и импульсом р можно установить из релятивистского соотношения:

$$W^2 = W_0^2 + p^2c^2,$$

где W_0 – энергия покоя, равная mc^2, . Так как для фотона m=0 и, следовательно, W_0 =0, то

$$W = pc.$$

Рассчитаем давление, создаваемое пучком света с поперечным сечением $\sigma_\perp$, падающим нормально на полностью поглощающую площадку. За время dt площадке передается импульс $d\vec{p}_{имп} = G \cdot dV = G \cdot \sigma_\perp \cdot vdt$. Из 2-го закона Ньютона $\dfrac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}}$ получаем:

$$F = G \cdot \sigma_\perp \cdot v = w_{элмагн} \cdot \sigma_\perp,$$

или в векторном виде:

$$\vec{\mathbf{F}} = w_{элмагн} \cdot \sigma_\perp \cdot \vec{\mathbf{n}},$$

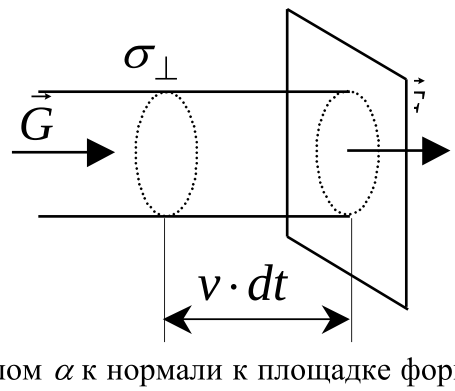
где $\vec{\mathbf{n}}$ - единичный вектор в направлении распространения волны.

Эту несложную формулу «из трех букв» для силы давления лучше запомнить. Другой вывод формулы (через поля) приведен в Приложении 3.

Для давления $p_{давл}$ в случае нормального падения получим формулу «из двух букв»:

$$p_{давл} = \frac{F}{\sigma_\perp} = w_{элмагн}$$

(обратим внимание, что размерность давления совпадает с размерностью плотности энергии: $[p_{давл}] = \dfrac{[F]}{[\sigma]} = \dfrac{Н}{м^2} = \dfrac{Дж}{м^3} = [w_{элмагн}]$)



При падении света под углом α к нормали к площадке формула для силы, естественно, останется той же самой, а для давления изменится:

$$p_{давл} = \frac{F_n}{\sigma} = \frac{F \cdot \cos\alpha}{\sigma_\perp / \cos\alpha} = w_{элмагн} \cdot \cos^2\alpha.$$

Если коэффициент отражения (по энергии) плоского зеркала равен R, то отраженная волна создает дополнительную силу, равную по модулю

$$F_R = R \cdot w_{элмагн} \cdot \sigma_\perp$$

(поперечное сечение при отражении не меняется). В результате формула для давления принимает вид:

$$p_{давл} = (1+R)\cdot w_{элмагн}\cdot \cos^2\alpha .$$

Знание выражения для силы давления позволяет легко найти и тангенциальную составляющую силы светового воздействия на площадку σ:

$$F_\tau = F\cdot\sin\alpha = (1-R)\cdot w_{элмагн}\cdot\sigma_\perp\cdot\sin\alpha = (1-R)\cdot w_{элмагн}\cdot\sigma\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha$$

В заключение **напомним формулы** «из трех букв», в которые входит скорость света c (в вакууме):

1. Связь длины волны и периода: $c = \dfrac{\lambda}{T}$ («скорость есть путь на время»).

2. Связь частоты и волнового числа: $c = \dfrac{\omega}{k}$ (запоминается из соображений размерности).

3. Связь амплитуд в электромагнитной волне: $E = Bc$ (способ запоминания: первые три буквы латинского алфавита ABC, только А заменить на Е).

4. Связь плотности энергии и плотности потока энергии: $\left|\vec{\mathbf{S}}\right| = c\cdot w_{элмагн}$ (запоминается из соображений размерности).

5. Связь плотности энергии и плотности импульса: $\left|\vec{\mathbf{G}}\right| = \dfrac{w_{элмагн}}{c}$ (запоминается из соображений размерности).

Световой пучок.

Плоских монохроматических волн в реальности не существует, все волны так или иначе ограничены во времени и в пространстве.

Световой пучок – это волна, модулированная в пространстве с масштабом модуляции, существенно превышающем длину волны (поперечное сечение пучка $d >> \lambda \approx 0{,}5\,мкм$).

(Ахманов, лекция 1 и Дополнение 13; стр. 20 и 464)

Пусть плоская монохроматическая волна распространяется вдоль оси Z (смотрим только на x-компоненту поля):

$$E_x(t,x,y,z) = E_x(t,z) = A_0\cdot\cos(\omega t - kz + \varphi)$$

Установим пространственное ограничение в сечении z=0, сформировав тем самым световой пучок (квазиплоскую волну):

$$E_x(t,x,y,0) = A(x,y)\cdot\cos\omega t .$$

Данное ограничение называют амплитудной модуляцией волны, возможна и фазовая модуляция вида:

$$E_x(t,x,y,0) = A_0\cdot\cos(\omega t + \varphi(x,y))$$

(например, установлена линза, изменяющая именно фазу волны).

Для указания на пространственное ограничение принято использовать термин «апертура» - отверстие источника, из которого выходит излучение. Пространственное ограничение есть по сути граничное условие.

Решая волновое уравнение с заданным граничным условием, можно найти изменение структуры поля. Все решения носят приближенный характер, в рамках тех или иных предположений. Например, если установлено круглое отверстие, то сформируется дифракционная картина, вид которой будет зависеть существенным образом от координаты z (теория дифракции будет рассматриваться позже).

Особое внимание уделяют рассмотрению пучка, называемого гауссовым:

$$E_x(t,x,y,0) = A_0\cdot\exp\left(-\left(x^2+y^2\right)/2d^2\right)\cdot\cos\omega t ,$$

где d называют радиусом пучка.

Можно показать, что пучок будет слабо расширяться, сохраняя свою ширину практически неизменной, до некоторой длины, называемой дифракционной, и равной

$$z_{дифр} \approx \pi \frac{d^2}{\lambda}$$

(в разных источниках данную формулу приводят по-разному, чаще используется выражение $z_{дифр} \approx \frac{d^2}{\lambda}$).

Затем пучок начинает расходиться, амплитуда убывает как $A \sim \frac{1}{z}$, структура остается гауссовой, фронт становится сферическим, угловой размер пучка равен $\theta = \frac{\lambda}{\pi d}$ (опять же есть разные варианты записи, чаще $\theta = \frac{\lambda}{d}$, для круглого отверстия $\theta_{круг} = 0{,}61\frac{\lambda}{d}$).

Из приведенных формул следует, что при $\lambda \to 0$ дифракционная длина стремится к бесконечности, т.е. пучок распространяется без расходимости. Это есть не что иное, как приближение геометрической оптики. Таким образом, волновая оптика переходит в геометрическую при $\lambda \to 0$.

Формулы для дифракционной длины и углового размера очень легко запомнить вследствие их простоты. По условию заданы всего две величины: d и λ, имеющие размерность [м]. «Придумаем» формулу для $z_{дифр}$, размерность также [м]. Так как

$$z_{дифр} >> d >> \lambda,$$

то простейшая «придумываемая» формула имеет вид:

$$z_{дифр} \cdot \lambda = d^2,$$

откуда и получаем выше приведенный результат.

Формула для безразмерного малого по величине углового размера пучка (угловой расходимости) «придумывается» сразу:

$$\theta = \frac{\lambda}{d}.$$

Световой импульс.

Световой импульс – это волна, модулированная во времени с масштабом модуляции, существенно превышающем период колебаний волны (длительность импульса $\tau >> T \approx 10^{-15} c$).

(Ахманов, стр. 25, лекция 1)

Импульс предполагает временное ограничение волны. Например, как и ранее, плоская волна распространяется вдоль оси Z и в сечении z=0 ее амплитуда изменяется со временем (пространственное ограничение пока не учитываем):

$$E_x(t, x, y, 0) = A(t) \cdot \cos\omega t$$

Это приводит к квазимонохроматичности излучения (изменению спектра) и необходимости учитывать конечность скорости распространения:

$$E_x(t, z) = A\left(t - z/c\right) \cdot \cos\left[\omega\left(t - z/c\right)\right].$$

Позднее будет рассмотрен спектр подобной волны.

Указанное решение удовлетворяет волновому уравнению, следовательно в вакууме импульс распространяется без каких-либо искажений (в отличие от распространения пучка). Но в материальной среде форма и длительность импульса могут существенно изменяться.

Энергетика световых пучков и импульсов.

Выше уже отмечалась связь интенсивности плоской волны и амплитуды вектора напряженности электрического поля волны:

$$I = \left\langle \left| \vec{\mathbf{S}} \right| \right\rangle = v_{фаз} \cdot \left\langle w_{элмагн} \right\rangle = \frac{1}{2} v_{фаз} \cdot \varepsilon\varepsilon_0 E_0^2$$

Найдем, как рассчитать напряженность поля в случае распространения светового импульса с энергией *W*, длительностью τ и поперечным сечением $\sigma_\perp$. Интенсивность есть энергия, падающая в единицу времени на площадку единичной площади, т.е.:

$$I = \frac{W}{\tau\sigma_\perp}.$$

Искомая амплитуда находится элементарно.

Зная связь электрической и магнитной компонент в волне, также легко можно найти и амплитуду магнитного поля.

В данном случае предполагается, что энергия сосредоточена в «цилиндре», площадь основания которого равна $\sigma_\perp$, а длина *L* – расстоянию, проходимому волной за время τ:

$$L = c \cdot \tau.$$

В общем случае интенсивность волны (светового пучка) может быть распределенной по поперечному сечению, т.е. $I = I(x.y)$. Тогда мощность **P** излучения равна интегралу по сечению Σ пучка:

$$P = \iint\limits_{\Sigma} I(x.y) dxdy.$$

Если же распространяется импульс, т.е. $I = I(x.y,t)$, то энергия *W* импульса находится по формуле:

$$W = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \iint\limits_{\Sigma} I(x.y) dxdy.$$

Приложение 1.

Векторный оператор ∇ («набла») в декартовых координатах имеет вид:

$$\nabla = \vec{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z},$$

Таблица, поясняющая действие оператора «набла»

Оператор	Обозначение	На кого действует	Что получается	Запись	Пример	В декарт. координатах
градиент	$grad$	на скаляр (напр. φ)	вектор	$grad\varphi$ или $\nabla\varphi$	$\vec{\mathbf{E}} = -grad\varphi$	$\vec{\mathbf{i}}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$
дивергенция	div	на вектор (напр. $\vec{\mathbf{E}}$)	скаляр	$div\,\vec{\mathbf{E}}$ или $\nabla\cdot\vec{\mathbf{E}}$	$div\,\vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$
ротор	rot	на вектор (напр. $\vec{\mathbf{E}}$)	вектор	$rot\,\vec{\mathbf{E}}$ или $\nabla\times\vec{\mathbf{E}}$	$rot\,\vec{\mathbf{E}} = 0$	$\begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$

Приложение 2.

Как запомнить систему уравнений Максвелла? (те, кто ее знает, могут не читать).

Следует помнить, что:
1)в систему входят 4 уравнения;
2)в них входят 4 полевых вектора: 2 «электрических» ($\vec{\mathrm{E}}$ и $\vec{\mathrm{D}}$) и 2 «магнитных» ($\vec{\mathrm{B}}$ и $\vec{\mathrm{H}}$);
3)в правой части стоят дифференциальные операторы div и rot, действующие на «электрические» и «магнитные» векторы.
Итак, структура уравнений следующая:

«электрические» ($\vec{\mathrm{E}}$ и $\vec{\mathrm{D}}$)	«магнитные» ($\vec{\mathrm{B}}$ и $\vec{\mathrm{H}}$)
$div\,? = ?$	$div\,? = ?$
$rot\,? = ?$	$rot\,? = ?$

Сначала правильно расставим векторы в левой части уравнений. Для этого разобьем div и rot на буквы и поищем эти буквы среди векторов. В div входят буквы: «*d*», «*i*» и «*v*» (по-русски «в»), а в векторах есть $\vec{\mathrm{D}}$ и $\vec{\mathrm{B}}$ (пишется как русская «В»). Именно на эти векторы и будет действовать оператор div. Оставшимся векторам остается подвергнуться действию rot. Кстати, разбив rot по буквам, не найдем ни одного соответствия с векторами.

В результате получим:

«электрические» ($\vec{\mathrm{E}}$ и $\vec{\mathrm{D}}$)	«магнитные» ($\vec{\mathrm{B}}$ и $\vec{\mathrm{H}}$)
$div\,\vec{\mathrm{D}} = ?$	$div\,\vec{\mathrm{B}} = ?$
$rot\,\vec{\mathrm{E}} = ?$	$rot\,\vec{\mathrm{H}} = ?$

Теперь вспомним, что поля в некоторой степени «антиподы»: электрическое (точнее, электростатическое) потенциально – работа по замкнутому контуру равна нулю; магнитное вихревое – линии поля замкнуты. Работа связана с интегралом по контуру, т.е.

с rot, замкнутость линий говорит о нулевом потоке через замкнутую поверхность, т.е. о div.

Новый результат:

«электрические» ($\vec{E}$ и $\vec{D}$)	«магнитные» ($\vec{B}$ и $\vec{H}$)
$div\,\vec{D} = ?$	$div\,\vec{B} = 0$
$rot\,\vec{E} = 0 + ?$	$rot\,\vec{H} = ?$

Теперь вспомним, что электрическое поле создается электрическими зарядами, а магнитное – токами. Но, т.к. уравнения дифференциальные, то следует говорить о плотности заряда ρ и тока $\vec{j}$. И подставить их в пока «не использованные» уравнения:

«электрические» ($\vec{E}$ и $\vec{D}$)	«магнитные» ($\vec{B}$ и $\vec{H}$)
$div\,\vec{D} = \rho$	$div\,\vec{B} = 0$
$rot\,\vec{E} = 0 + ?$	$rot\,\vec{H} = \vec{j} + ?$

Теперь вспомним, что переменное электрическое поле создает переменное магнитное и наоборот. Это приводит к появлению производных по времени $\frac{\partial}{\partial t}$, но в каких уравнениях? В тех, у которых в названии оператора есть буква «t», т.е.в уравнениях с rot. А действуют они все на те же «настырные» вектора $\vec{D}$ и $\vec{B}$, которые уже «влезли» под div, а теперь устремились к rot:

«электрические» ($\vec{E}$ и $\vec{D}$)	«магнитные» ($\vec{B}$ и $\vec{H}$)
$div\,\vec{D} = \rho$	$div\,\vec{B} = 0$
$rot\,\vec{E} = ?\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	$rot\,\vec{H} = \vec{j}?\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

Осталась «проблема знака» перед производными. Заметим, что в правой части уравнения для $rot\,\vec{E}$ стоит одно слагаемое, а правой части уравнения для $rot\,\vec{H}$ - два слагаемых. Поэтому и поставим перед производными одну и две черточки соответственно (они дадут знаки «минус» и «плюс»):

«электрические» ($\vec{E}$ и $\vec{D}$)	«магнитные» ($\vec{B}$ и $\vec{H}$)
$div\,\vec{D} = \rho$	$div\,\vec{B} = 0$
$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	$rot\,\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

Система уравнений Максвелла получена (точнее, записана). Подчеркнем, что приведенное правило запоминания не есть доказательство правильности самих уравнений. Просто подсказка на «черный» день, неизбежно наступающий в день экзамена.

Приложение 3.

Световое давление (Бутиков, стр. 159, раздел 3.5)

Пусть плоская световая волна из вакуума падает нормально на поверхность поглощающего тела. Сила, действующая на единичный заряд q в среде, задается формулой Лоренца:

$$\mathrm{F} = q\mathrm{E} + q[\mathrm{v} \times \mathrm{B}] = \mathrm{F}_{\text{эл}} + \mathrm{F}_{\text{магн}}.$$

Модель: Сила $\mathrm{F}_{\text{эл}}$ со стороны электрического поля заставляет заряд двигаться и приобретать скорость v, сонаправленную с E, в результате на движущийся заряд действует сила $\mathrm{F}_{\text{магн}}$ со стороны магнитного поля.

Вспомним связь между векторами E и B в плоской волне (на основе соотношения $|\mathrm{E}| = |\mathrm{B}| \cdot c$ и того, что векторы E, B и $\mathrm{n} = \frac{\mathrm{k}}{|\mathrm{k}|}$ составляют правую тройку векторов):

$$\mathrm{B} = \frac{[\mathrm{n} \times \mathrm{E}]}{c}.$$

Подставляем в выражение для силы:

$$\mathrm{F}_{\text{магн}} = q\left[\mathrm{v} \times \frac{[\mathrm{n} \times \mathrm{E}]}{c}\right] = \frac{q}{c}\left[\mathrm{n}(\mathrm{v} \cdot \mathrm{E}) - \mathrm{E}(\mathrm{v} \cdot \mathrm{n})\right] = \frac{\mathrm{n}(\mathrm{v} \cdot q\mathrm{E}) - 0}{c} = \frac{\mathrm{n}(\mathrm{v} \cdot \mathrm{F}_{\text{эл}})}{c}$$

Скалярное произведение силы на скорость есть мощность, передаваемая заряду. При суммировании по всем зарядам в формулу войдет мощность P, которую несет волна:

$$\mathrm{F}_{\text{магн}} = \frac{\mathrm{n} \cdot P}{c}.$$

Если пучок света имеет поперечный размер $\sigma_{\perp}$, то на площадку за время Δt падает энергия

$$\Delta W = w \cdot \Delta V = w \cdot \sigma_{\perp} \cdot c\Delta t.$$

Подставляя $P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = w \cdot \sigma_{\perp} \cdot c$, в итоге получим:

$$\mathrm{F} = \mathrm{n} \cdot w \cdot \sigma_{\perp}.$$

Сила направлена по направлению распространения волны, в нее входит поперечное сечение пучка, поэтому она справедлива при любом положении полностью поглощающего препятствия, перекрывающего весь пучок. Если часть энергии отражается, то отраженный пучок дает дополнительную силу, действующую в направлении, противоположном отраженной волне и пропорциональную коэффициенту отражения R по энергии.

Наличие силы светового давления означает наличие у волны импульса. Аккуратный подсчет дает связь между объемной плотностью энергии w и объемной плотностью импульса G (импульс единицы объема) :

$$\mathrm{G} = \mathrm{n} \cdot \frac{w}{c}.$$

Солнечный свет действует на расположенное на Земле перпендикулярно его лучам зеркалу с силой 10^{-5} Н на 1 м^2 поверхности.