Оптические явления на границе раздела диэлектриков

Так как свет представляет собой электромагнитную волну, то при переходе границы раздела должны выполняться граничные условия для электрической и магнитной компонент поля:

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}, \qquad H_{\tau 1} = H_{\tau 2}$$

Кроме этого, в бегущей волне существует связь между амплитудами E и B:

$$E = B \cdot v = B \cdot \frac{c}{n},$$

где v и n – соответственно скорость волны в среде и показатель преломления среды. Если магнитные свойства обеих сред одинаковы, то

$$H \sim nE.$$

Рассмотрим сначала случай **нормального падения** света из среды с показателем преломления n_1 в среду с показателем преломления n_2. Пусть амплитуда падающей волны равна $E_{\text{пад}}$, отраженной волны $E_{\text{отр}}$, а преломленной $E_{\text{пр}}$ (аналогичные обозначения и для H). Тогда:

$$E_{пад} + E_{отр} = E_{пр}, \qquad H_{пад} + H_{отр} = H_{пр}.$$

Второе уравнение запишется в виде:

$$n_1\left(E_{пад} - E_{отр}\right) = n_2 E_{пр},$$

(знак «минус» перед $E_{отр}$ учитывает, что одна из компонент поля E или H должна поменять фазу на 180 градусов). Отсюда легко получить соотношения для коэффициентов отражения $r = \dfrac{E_{отр}}{E_{пад}}$ и преломления $t = \dfrac{E_{пр}}{E_{пад}}$ по амплитуде:

$$r = \frac{E_{отр}}{E_{пад}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \qquad t = \frac{E_{пр}}{E_{пад}} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}.$$

Теперь разберемся с энергетическими характеристиками. Казалось бы, мы привыкли, что энергия пропорциональна квадрату амплитуды поля, поэтому коэффициенты отражения R и преломления T по энергии должны находиться по простым формулам:

$$R = r^2; \qquad T = t^2$$ (аккуратно, это неточные формулы!).

Но прямой подстановкой в формулы для нормального падения нетрудно убедиться, что $R + T \neq 1$, т.е. нарушается закон сохранения энергии!!! Уточним, что есть две энергетические характеристики: объемная плотность энергии $w \sim ED \sim n^2 E^2$ и плотность потока энергии $\vec{S} = \left[\vec{E}, \vec{H}\right] \sim nE^2$. Видим, что в формулы входит показатель преломления n, что существенно при переходе света из одной среды в другую. Но он входит в разной степени: во второй и в первой. Что же выбрать???

Поскольку в эксперименте измеряется интенсивность света I (равная среднему по времени значению вектора Умова-Пойнтинга $\vec{S} = \left[\vec{E}, \vec{H}\right]$), то для определения коэффициентов отражения R и преломления T по энергии можно поступить следующим образом: выберем единичную площадку на границе раздела и сравним энергии падающей, преломленной и отраженной волн, переносимых через эту площадку в единицу времени. По закону сохранения энергии для нормальных компонент вектора Умова-Пойнтинга:

$$S_{n,пад} = S_{n,отр} + S_{n,пр}.$$

Так как амплитуды электрической $\left|\vec{E}\right|$ и магнитной $\left|\vec{H}\right|$ составляющих бегущей волны связаны соотношением $n \cdot \left|\vec{E}\right| \sim \left|\vec{H}\right|$, то для коэффициентов отражения и преломления по энергии получим:

$$R = \frac{S_{n,отр}}{S_{n,пад}} = r^2; \qquad T = \frac{S_{n,пр}}{S_{n,пад}} = \frac{n_2 \cdot \cos\theta_2}{n_1 \cdot \cos\theta_1} \cdot t^2, \tag{20}$$

где θ_1, θ_2 - углы падения и преломления соответственно.

В случае нормального падения $\cos\theta_1 = \cos\theta_2 = 1$ и

$$R = \frac{S_{n,отр}}{S_{n,пад}} = \frac{n_1 E_{отр}^2}{n_1 E_{пад}^2} = r^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2,$$

$$T = \frac{S_{n,пр}}{S_{n,пад}} = \frac{n_2 E_{пр}^2}{n_1 E_{пад}^2} = \frac{n_2}{n_1} t^2 = \frac{4 n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}.$$

(заметим, что $R + T = 1$, т.е. закон сохранения энергии справедлив).

Если $n_1 - n_2 < 0$ (свет падает из менее оптически плотной среды в более оптически плотную) r<0, что означает, что фаза E-компоненты поля отраженной волны изменяет свою фазу на 180 градусов. Во всех остальных случаях скачка фазы нет.

Из закона сохранения энергии, записанного в виде:

$$S_{n,пад} = S_{n,отр} + S_{n,пр}$$

и из соотношения $I = \langle S \rangle$ следует:

$$I_{пад} \cdot \cos\theta_1 = I_{отр} \cdot \cos\theta_1 + I_{пр} \cdot \cos\theta_2,$$

или

$$I_{пад} = I_{отр} + I_{пр} \cdot \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}$$

(несколько неожиданная формула, не правда ли?).

<u>Общий случай</u>[1]**.** Пусть плоская линейно – поляризованная световая волна

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \vec{E}_1 e^{i\left(\omega t - \vec{k}_1 \vec{r}\right)} \tag{2}$$

падает на плоскую границу раздела двух сред с показателями преломления n_1 и n_2 под углом θ_1 (угол между волновым вектором $\vec{k}_1$ и нормалью к границе раздела). Плоскость поляризации падающей волны (в которой лежат векторы $\vec{E}_0$ и $\vec{k}_0$) ориентирована под углом α_1 (азимут поляризации, $-\frac{\pi}{2} \le \alpha_1 \le \frac{\pi}{2}$) к плоскости падения (в которой лежат вектор $\vec{k}_1$ и нормаль $\vec{N}$), так что:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_1^s + \vec{E}_1^p, \quad E_1^s = E_1 \sin\alpha_1, \quad E_1^p = E_1 \cos\alpha_1$$

(компонента $\vec{E}_1^s$ перпендикулярна к плоскости падения, компонента $\vec{E}_1^p$ – лежит в плоскости падения).

В общем случае падающая волна (2) порождает две другие волны (см. рис. 1 и 2): отраженную –

$$\vec{E}_0(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i\left(\omega t - \vec{k}_0 \vec{r}\right)} \tag{3}$$

и преломленную –

$$\vec{E}_2(\vec{r}, t) = \vec{E}_2 e^{i\left(\omega t - \vec{k}_2 \vec{r}\right)}, \tag{4}$$

[1] Внимание: обозначения поменялись!

причем векторы $\vec{k}_1$, $\vec{k}_0$ и $\vec{k}_2$ лежат в одной плоскости с нормалью к поверхности раздела (ось z). В силу непрерывности тангенциальных составляющих векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в любой точке на границе двух сред (т.е., при любом x) следует, что:

$$k_{1x} = k_{0x} = k_{2x}. \qquad (5)$$

С учетом (1) из (5) следует, что:

$$\theta_1 = \theta_0 \text{ (закон отражения)} \qquad (6)$$

и

$$n_1 \cdot \sin\theta_1 = n_2 \cdot \sin\theta_2 \text{ (закон преломления).} \qquad (7)$$

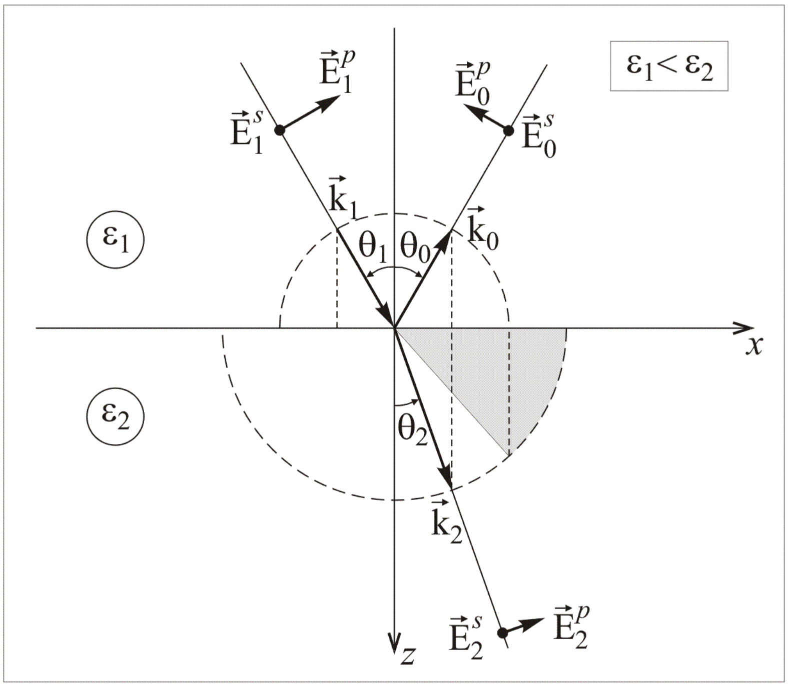

Рис. 1.

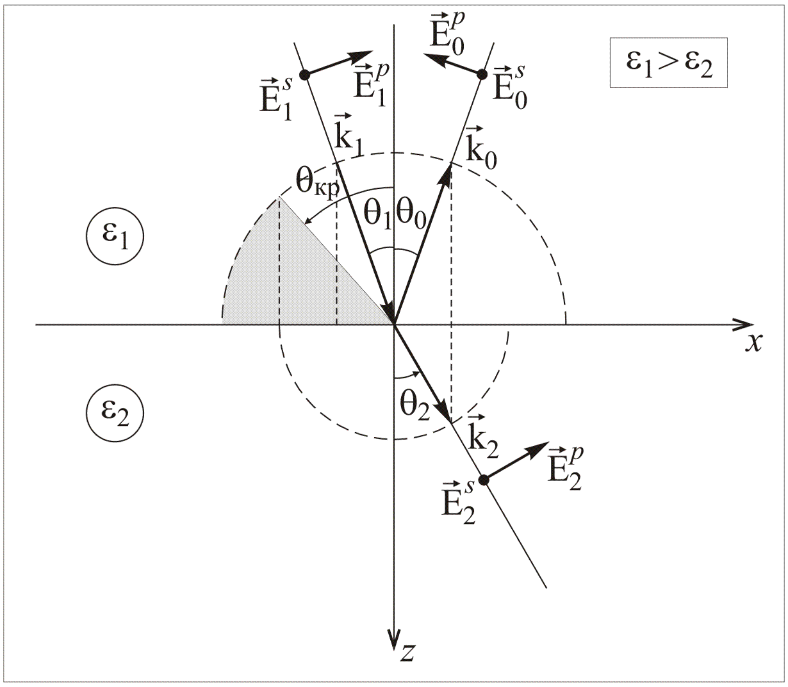

Рис. 2.

Если волна (2) падает из оптически менее плотной среды ($\varepsilon_1 < \varepsilon_2$), то при любом угле падения θ_1 ($0 \le \theta_1 \le \frac{\pi}{2}$) во второй среде распространяется преломленная волна (4). Если же свет падает из оптически более плотной среды ($\varepsilon_1 > \varepsilon_2$), то при углах $\theta_1 \ge \theta_{\text{кр}} = \arcsin\frac{n_2}{n_1}$ имеет место полное внутреннее отражение (нет преломления волн). Так, для границы «стекло – воздух» ($n_1 = 1{,}5$; $n_2 = 1$) критический угол (угол полного внутреннего отражения) $\theta_{\text{кр}} \approx 41°$.

Соотношения между амплитудами $\vec{E}_1$, $\vec{E}_0$ и $\vec{E}_2$ при различных θ_1, ε_1 и ε_2 называют формулами Френеля:

$$r_s \equiv \frac{E_0^s}{E_1^s} = \frac{n_1 \cdot \cos\theta_1 - n_2 \cdot \cos\theta_2}{n_1 \cdot \cos\theta_1 + n_2 \cdot \cos\theta_2}, \tag{12}$$

$$t_s \equiv \frac{E_2^s}{E_1^s} = \frac{2n_1 \cdot \cos\theta_1}{n_1 \cdot \cos\theta_1 + n_2 \cdot \cos\theta_2}, \tag{13}$$

$$r_p \equiv \frac{E_0^p}{E_1^p} = \frac{n_2 \cdot \cos\theta_1 - n_1 \cdot \cos\theta_2}{n_2 \cdot \cos\theta_1 + n_1 \cdot \cos\theta_2}, \tag{14}$$

$$t_p \equiv \frac{E_2^p}{E_1^p} = \frac{2n_2 \cdot \cos\theta_1}{n_2 \cdot \cos\theta_1 + n_1 \cdot \cos\theta_2}. \tag{15}$$

Наконец, после тригонометрических преобразований (с учетом закона преломления):

$$r_s = -\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}, \tag{16}$$

$$t_s = \frac{2\cos\theta_1 \cdot \sin\theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}, \tag{17}$$

$$r_p = \frac{\operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2)}, \tag{18}$$

$$t_p = \frac{2\cos\theta_1 \cdot \sin\theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2)}. \tag{19}$$

Примерные графики зависимостей (12) – (15) приведены на рис. 3 ($n_1 < n_2$) и рис. 4 ($n_1 > n_2$).

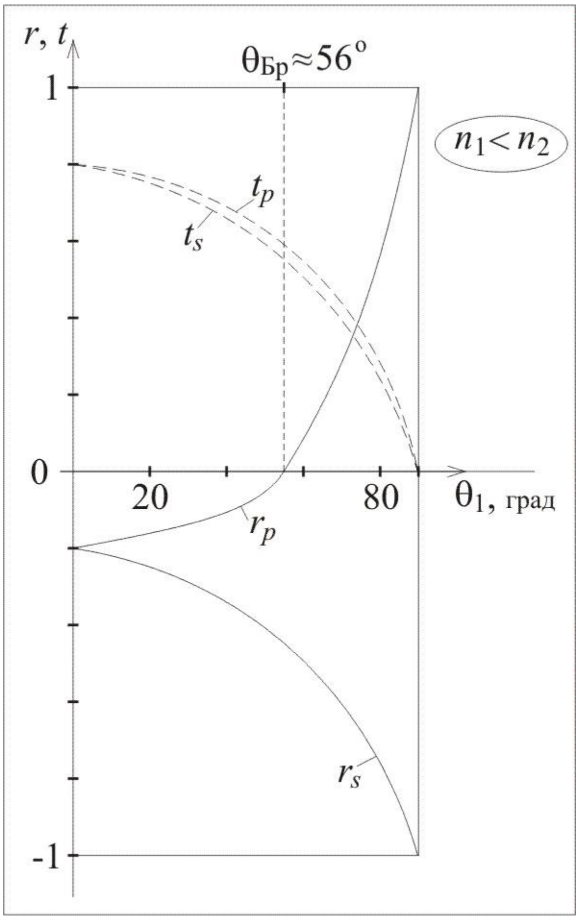

Рис. 3

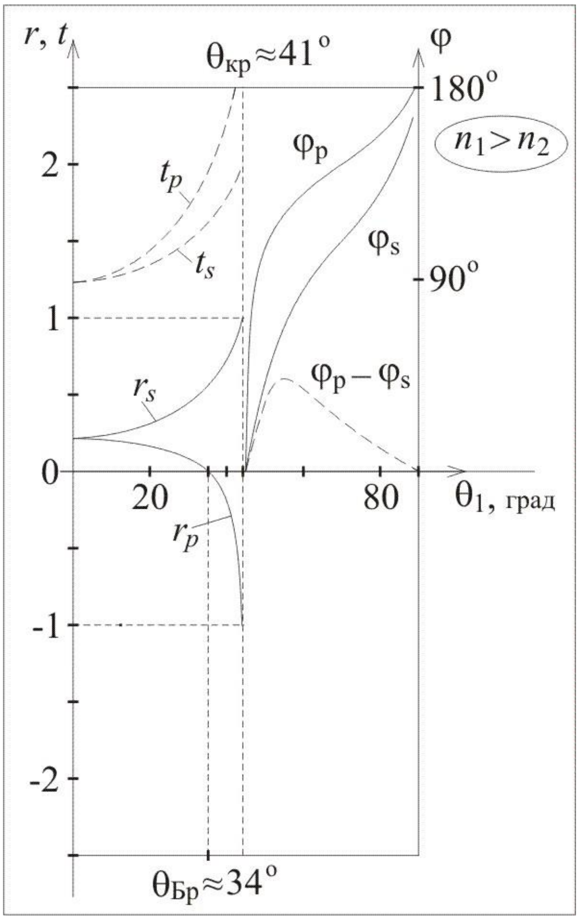

Рис. 4

При $\theta_1 = \operatorname{arctg}\dfrac{n_2}{n_1} \equiv \theta_{\text{Бр}}$ $\left(\theta_1 + \theta_2 = \dfrac{\pi}{2}\right)$ p-компонента не испытывает отражения. Угол $\theta_{\text{Бр}}$ называют <u>углом Брюстера</u> или <u>углом полной поляризации</u> отраженного света. Например, для границы «воздух – стекло» $\theta_{\text{Бр}} \approx 56°$.

По определению, **<u>степень поляризации</u>** преломленного света определяется как:

$$\Delta_2 = \frac{I_2^s - I_2^p}{I_2^s + I_2^p}$$

(аналогично и для отраженного). Так как коэффициенты отражения и преломления для разных поляризаций различны, то и степень поляризации будет изменяться. В частности, если естественный свет (степень поляризации равна нулю) падает на пластинку под углом Брюстера., то у отраженной волны $\Delta_0 = 1$ (нет p-компоненты), а у преломленной $\Delta_2 \neq 0$. Если установить несколько пластинок под углом Брюстера (**<u>стопа Столетова</u>**), то степень поляризации прошедшей волны будет возрастать.

Для нахождения коэффициентов отражения R и преломления T по энергии поступаем следующим образом: выбираем площадку единичной площади на границе раздела и сопоставляем энергии падающей, преломленной и отраженной волн, переносимых через эту площадку в единицу времени. Иными словами, закон сохранения энергии выражается через нормальные компоненты вектора Умова-Пойнтинга:

$$S_{n0} = S_{n1} + S_{n2},$$

откуда

$$R = \frac{S_{n1}}{S_{n0}} = r^2; \qquad T = \frac{S_{n2}}{S_{n0}} = \frac{n_2 \cdot \cos\theta_2}{n_1 \cdot \cos\theta_1} \cdot t^2.$$

Подставляя в данные соотношения формулы Френеля для s- и p-компонент, получим для каждой из них

$$R+T=1.$$

<u>Пример.</u> Волна интенсивностью I_0, линейно поляризованная в плоскости падения (*p*-поляризация), падает на границу раздела воздух-диэлектрик с показателем преломления *n* под углом Брюстера. Найти интенсивность преломленной волны.

При падении под углом Брюстера коэффициент отражения r_p для *p*-поляризации равен нулю, т.е. $I_{отр}=0$. Кроме того, $\theta_1+\theta_2=\pi/2$. «Неожиданная» формула

$$I_{пад}=I_{отр}+I_{пр}\cdot\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}$$

запишется в виде:

$$I_{пр}=I_{пад}\cdot\frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1}=\frac{I_{пад}}{tg\theta_1}=\frac{I_{пад}}{n},$$

т.е. энергия волны проходит через границу без потерь, а интенсивность уменьшается в *n* раз! Это связано с увеличением в *n* раз поперечного сечения прошедшего пучка по сравнению с падающим. Напомним, что интенсивность «говорит» об энергии, прошедшей в единицу времени через единичное поперечное сечение. Та же самая энергия теперь проходит через бОльшее сечение, следовательно, интенсивность уменьшается.

Если же аналогичная волна будет падать под углом Брюстера из более оптически плотной среды, то интенсивность вырастет в *n* раз!

<u>Полное внутреннее отражение.</u>

Так как

$$k_{2z}=\sqrt{k_2^2-k_{2x}^2}=\sqrt{k_2^2-k_{1x}^2}=\frac{\omega}{c}\sqrt{n_2^2-\left(n_1\cdot\sin\theta_1\right)^2}\,, \qquad (20)$$

то при $\theta_1>\theta_{кр}$:

$$n_1\cdot\sin\theta_1>n_2,$$

$$k_{2z}=\pm i\frac{\omega}{c}\sqrt{\left(n_1\cdot\sin\theta_1\right)^2-n_2^2}=\pm ik''_{2z}, \qquad (21)$$

и уравнение преломленной волны с волновым вектором $\vec{k}_2=k_{1x}\vec{e}_x-ik''_{2z}\vec{e}_z$ имеет вид:

$$\vec{E}_2\left(\vec{r},t\right)=\vec{E}_2e^{-k''_{2z}z}e^{i(\omega t-k_{1x}x)}. \qquad (22)$$

(Знак «+» в (21) отброшен по физическим соображениям.)

Таким образом, при полном внутреннем отражении преломленная волна $\vec{E}_2\left(\vec{r},t\right)$ – это плоская <u>неоднородная</u> волна (22), бегущая вдоль оси *x* с фазовой скоростью $\upsilon_{2x}=\frac{\omega}{k_{1x}}$. Амплитуда этой волны экспоненциально затухает вдоль оси *z*. Глубина Δz проникновения света в среду с $n_2<n_1$, соответствующая уменьшению амплитуды в *e* раз:

$$\Delta z=\frac{1}{k''_{2z}}=\frac{c}{\omega\sqrt{\left(n_1\cdot\sin\theta_1\right)^2-n_2^2}}. \qquad (23)$$

При полном внутреннем отражении преломленная волна существует, но она проникает вглубь на очень маленькие расстояния, при этом энергия не теряется (см. ниже).

Так как $n_1\cdot\sin\theta_1=n_2\cdot\sin\theta_2$, то

$$\cos\theta_2=\sqrt{1-\sin^2\theta_2}=\frac{1}{n_2}\sqrt{n_2^2-\left(n_1\cdot\sin\theta_1\right)^2}=\frac{i}{n_2}\sqrt{\left(n_1\cdot\sin\theta_1\right)^2-n_2^2}$$

Тогда структуры формул (12) и (14) примут вид:

$$r_s=\frac{a_1-ia_2}{a_1+ia_2}=e^{i\varphi_s}, \qquad (24)$$

$$r_p = \frac{b_1 - ib_2}{b_1 + ib_2} = e^{i\varphi_p}, \qquad (25)$$

т.е. амплитуда отраженной волны равна амплитуде падающей:

$$\left|r_s\right| = \left|r_p\right| = 1,$$

однако между отраженной и падающей волнами на границе возникает разность фаз:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi_s}{2} = \frac{k''_{2z}}{k_{1z}} = \frac{\sqrt{\left(n_1 \cdot \sin\theta_1\right)^2 - n_2^2}}{n_1 \cdot \cos\theta_1}, \qquad (26)$$

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi_p}{2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\operatorname{tg}\frac{\varphi_s}{2} = \frac{n_1\sqrt{\left(n_1 \cdot \sin\theta_1\right)^1 - n_2^2}}{n_2^2 \cdot \cos\theta_1}. \qquad (27)$$

В частность, для границы «воздух – стекло» при угле падения $\theta_1 \approx 45°$ разность фаз φ_s - $\varphi_p \approx 40^\circ$. При двукратном полном внутреннем отражении разность фаз будет близка к $\pi/2$, что позволяет преобразовать линейно поляризованный свет в свет с круговой поляризацией.