

Описание метода деления амплитуды с помощью схемы Юнга

Доцент Митин И.В.
Физический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова

Существуют два способа формирования интерференционной картины: метод деления волнового фронта и метод деления амплитуды.

Классической моделью первого является схема Юнга (рис. 1), второго – отражение узкого пучка от двух границ плоскопараллельной пластины (ППП) (рис. 2).

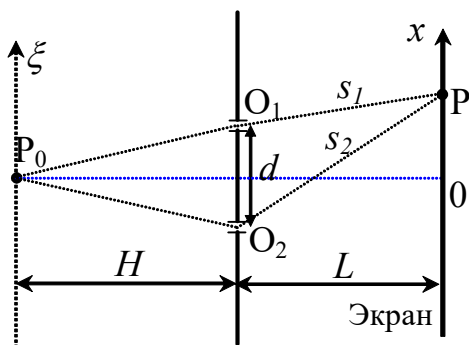


Рис. 1. Схема Юнга

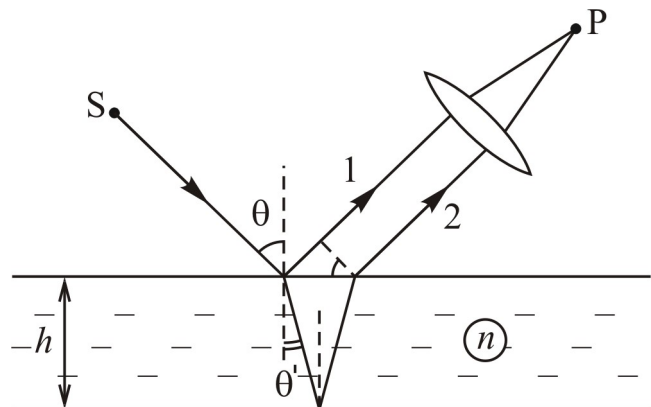


Рис. 2. К расчету разности хода в ППП

Напомним основные моменты в каждой из схем.

Схема Юнга

Между точечным монохроматическим источником P_0 и экраном находится препятствие с двумя малыми отверстиями O_1 и O_2 , расстояние d между которыми существенно меньше расстояний H и L . Разность хода Δs между двумя волнами, приходящими из P_0 в точку P равна

$$\Delta s = s_2 - s_1 \approx \frac{x \cdot d}{L}, \quad (1)$$

где x – координата точки P ($x \ll H, L$).

Разность хода равна нулю в центре экрана ($x=0$) и монотонно растет по мере удаления от него.

ППП

Узкий пучок света из точки S падает на ППП (толщина h , показатель преломления n) под углом θ , два пучка 1 и 2, отраженные от поверхностей ППП собираются с помощью линзы в точке P . Разность хода Δs между волнами, приходящими из S в P равна

$$\Delta s = 2hn \cos \theta' + \frac{\lambda}{2}, \quad (2)$$

где θ' – угол преломления, λ – длина волны излучения.

В дальнейшем слагаемое $\frac{\lambda}{2}$, связанное с тем, что при отражении от оптически более плотной среды возникает дополнительная разность фаз, равная π , указывать не будем:

$$\Delta s = 2hn \cos \theta'. \quad (3)$$

Разность хода принимает максимальное значение при нормальном падении ($\theta = \theta' = 0$) и монотонно убывает с ростом угла падения.

Видим, что схемы формирования интерференционных картин существенно отличаются. Но!!! Постараемся все же объединить схемы.

Сместим в схеме Юнга источник P_0 вдоль оси ξ на расстояние R , сравнимое с H (рис. 3). Точку наблюдения P переместим в $x=0$.

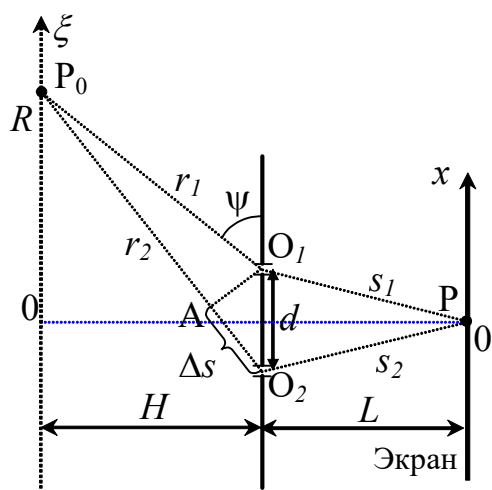


Рис. 3. Схема Юнга для ППП

Разность хода Δs для двух волн, идущих из P_0 в P , равна

$$\Delta s = (r_2 - r_1) + (s_2 - s_1) = (r_2 - r_1).$$

Опустим перпендикуляр из т. O_1 на P_0O_2 . Так как $d \ll H, R$, то $P_0O_1 \approx P_0A$, и для разности хода получим

$$\Delta s \approx d \cdot \cos \psi, \quad (4)$$

где ψ - угол, образованный лучом P_0O_1 (или P_0O_2) с плоскостью препятствия с отверстиями.

Из сравнения (3) и (4) видим, что они совпадают, если

$$d = 2hn; \quad \cos \psi = \cos \theta'.$$

Угол ψ можно выразить из геометрии:

$$\cos \psi = \frac{H}{\sqrt{H^2 + R^2}}. \quad (5)$$

Таким образом, можно для описания интерференции в ППП воспользоваться и схемой Юнга. Понятно, что такой переход является эквивалентным только с точки зрения математики, но ни в коей мере не из физики.

Теперь воспользуемся предложенным сравнением для случая протяженного источника. Сначала кратко напомним, как проводится анализ в классической схеме Юнга (рис. 4).

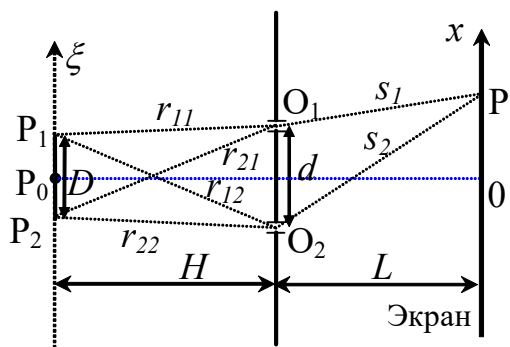


Рис. 4. Схема Юнга с протяженным источником

Протяженный монохроматический источник P_1P_2 , отдельные точки которого не когерентны, имеет размер D . Можно показать, что видность интерференционной картины на экране не зависит от x и задается формулой

$$V = \sin c\left(\frac{kdD}{2H}\right) = \sin c\left(\pi \frac{dD}{\lambda H}\right), \quad (6)$$

где $\sin c(y) = \frac{\sin y}{y}$ - функция «синк».

Из (6) следует, что видность становится равной нулю (картина полностью размывается), если выполнено условие

$$d \cdot D = \lambda \cdot H. \quad (7)$$

Так как отношение $\frac{D}{H}$ есть угловой размер источника $\beta_{\text{ист}}$, то (7) можно записать в виде

$$d \cdot \beta_{\text{ист}} = \lambda. \quad (7A)$$

Условие размытия можно получить и из следующих рассуждений.

Для каждой из точек источника с координатой ξ $\left(-\frac{D}{2} \leq \xi \leq \frac{D}{2}\right)$ разность хода $\Delta r(\xi)$ до отверстий O_1 и O_2 находится по формуле (1):

$$\Delta r(\xi) \approx \frac{\xi \cdot d}{H},$$

Соединим крайние точки источника P_1 и P_2 с точками O_1 и O_2 , введя для этих отрезков обозначения r_{ij} , где первый индекс i соответствует номеру точек P , а второй j – номеру точек O . Для разности хода от этих точек P_1 и P_2 получим:

$$\Delta r(P_1) = r_{12} - r_{11} \approx \frac{D \cdot d}{2H}; \quad \Delta r(P_2) = r_{22} - r_{21} \approx -\frac{D \cdot d}{2H}. \quad (8)$$

Понятно, что для полного размытия диапазон изменения разности хода должен быть равен длине волны λ , т.е.

$$\Delta r(P_2) - \Delta r(P_1) = 2 \frac{D \cdot d}{2H} = \lambda. \quad (9)$$

Из этого условия и следует (7).

Сделаем небольшое замечание. В учебной литературе в задачах с протяженным источником часто задают вопрос: при каком максимальном размере источника интерференционная картина еще будет видна? Условие (7) соответствует полному размытию, т.е. видность $V=0$ при $D_{\text{разм}} = \frac{\lambda \cdot H}{d}$. Для случая «еще видна» волевым усилием размер источника уменьшают в два раза, т.е. $D_{\text{еще видна}} = \frac{D_{\text{разм}}}{2} = \frac{\lambda \cdot H}{2d}$. Видность при этом в соответствии с (6) равна

$V_{\text{еще видна}} = \sin c \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{2}{\pi} \approx 0,64$ - довольно большая величина. В дальнейшем будем рассматривать только случай полного размытия.

Вернемся к рассмотрению особенностей интерференции от протяженного источника в схеме деления амплитуды, но будем делать это на аналогии со схемой Юнга.

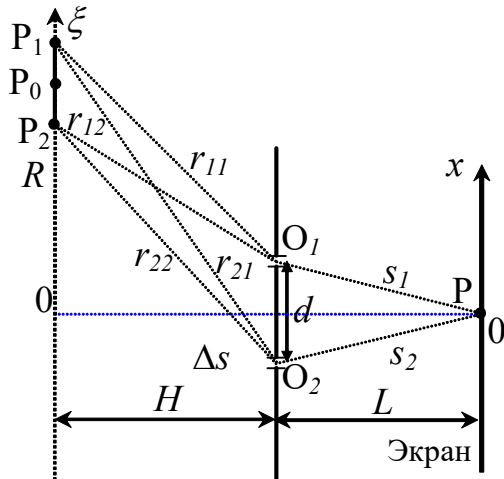


Рис. 5. Схема Юнга для ППП с протяженным источником

В данном случае центр P_0 протяженного источника имеет координату $\xi=R$, крайние точки источника соединим с O_1 и O_2 и введем те же обозначения (рис. 5).

По аналогии с (8) запишем

$$\Delta r(P_1) = r_{12} - r_{11} > 0;$$

$$\Delta r(P_2) = r_{22} - r_{21} > 0.$$

Обе величины теперь больше нуля (в отличие от симметричного расположения), но главным для нахождения условия размытия является условие (9), записанное в виде:

$$\Delta r(P_1) - \Delta r(P_2) = (r_{12} - r_{11}) - (r_{22} - r_{21}) = \lambda, \quad (9A)$$

т.е. изменение разности хода при переходе от одной крайней точки источника P_1 к другой P_2 должно быть равно длине волны λ .

Сделаем дополнительные построения (рис. 6).

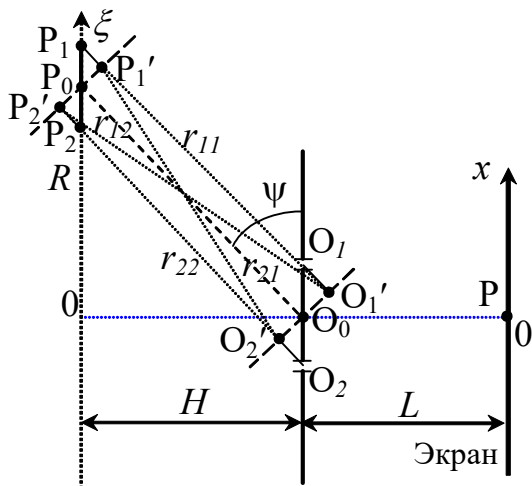


Рис. 6. Дополнительные построения в схеме Юнга для ППП

Соединим центральную точку P_0 источника с центральной точкой O_0 , находящейся между отверстиями. Отрезок P_0O_0 образует угол ψ с плоскостью препятствия. Теперь проведем через точки P_0 и O_0 линии, перпендикулярные к P_0O_0 . Опустим на эти линии перпендикуляры из точек P_1 , P_2 , O_1 и O_2 , они попадут в точки, отмеченные штрихами P_1' , P_2' , O_1' и O_2' .

Воспользуемся тем, что как размер D источника, так и расстояние d между отверстиями существенно меньше характерных размеров H и R .

Представим величины r_{ij} как сумму получившихся отрезков (длины отрезков – положительные величины, обращаем внимание на знаки!):

$$r_{11} = P_1O_1 \approx P_1P_1' + P_1'O_1' - O_1'O_1;$$

$$r_{12} = P_1O_2 \approx P_1P_1' + P_1'O_2' + O_2'O_2;$$

$$r_{21} = P_2O_1 \approx -P_2P_2' + P_2'O_1' - O_1'O_1;$$

$$r_{22} = P_2O_2 \approx -P_2P_2' + P_2'O_2' + O_2'O_2;$$

Учитывая равенства отрезков $P_1P_1' = P_2P_2'$ и $O_1'O_1 = O_2'O_2$ и подставляя в (9А), получим:

$$\Delta r(P_1) - \Delta r(P_2) \approx (P_1'O_2' - P_1'O_1') - (P_2'O_2' - P_2'O_1') = \lambda. \quad (10)$$

В (10) входят только координаты точек со штрихами, причем отрезки $P_1'P_2'$ и $O_1'O_2'$ параллельны друг другу. Подобная схема полностью идентична приведенной на рис.4, где теперь отрезок $P_1'P_2'$ - это новый «источник» размера D' , а отрезок $O_1'O_2'$ - новое «расстояние между отверстиями», равное d' . Применим к данной схеме все полученные ранее результаты.

Из рис.6 следует, что новые размеры источника D' и расстояния между отверстиями d' уменьшились:

$$D' = D \cdot \sin \psi; \quad d' = d \cdot \sin \psi,$$

а расстояние от источника до отверстий увеличилось:

$$H' = \sqrt{H^2 + R^2} = \frac{H}{\cos \psi}.$$

Условие полного размытия (7) запишется в виде

$$d' \cdot D' = \lambda \cdot H'. \quad (11)$$

Но удобнее воспользоваться формулой (7А), т.к. угловой размер источника – очень понятная для наблюдателя характеристика. Тогда (11) запишется в виде

$$d' \cdot \beta_{\text{ист}} = \lambda \cdot \frac{H'}{D'} = \frac{\lambda}{\beta_{\text{ист}}}.$$

Вспоминая, что

$$d' = d \cdot \sin \psi = 2hn \cdot \sin \theta',$$

получим, что угловой размер источника, при котором интерференционная картина полностью размоется, равен

$$\beta_{\text{ист}} = \frac{\lambda}{d'} = \frac{\lambda}{2hn \sin \theta'}. \quad (12)$$

При меньших размерах источника интерференция будет наблюдаться. Из (12) следует, что при $\theta' \rightarrow 0$ размер источника может быть любым.

Теперь вспомним, что интерференцию в тонких пленках наблюдают глазом, угловой размер $\delta_{\text{глаз}}$ которого равен отношению диаметра зрачка $d_{\text{зрачок}}$ к расстоянию L от глаза до точки наблюдения (рис. 7):

$$\delta_{\text{глаз}} = \frac{d_{\text{зрачок}}}{L}.$$

При зеркальном отражении от пленки именно глаз определяет угловой размер источника, т.е. $\delta_{\text{глаз}} = \beta_{\text{ист}}$, ведь отраженные лучи должны попасть в глаз! Иными словами, свет в точку наблюдения падает со всех направлений, но глаз выделяет и направление, и диапазон углов.

Оценим толщину пленки, при которой при наблюдении глазом интерференция размывается:

$$h = \frac{\lambda}{2n\beta_{\text{ист}} \sin \theta'} = \frac{\lambda}{2n\delta_{\text{глаз}} \sin \theta'}. \quad (13)$$

При наблюдении под углами, не близкими к нулю (например, $\sin \theta' > 0,3$), для грубой оценки можно считать, что $2n \sin \theta' \approx 1$, тогда

$$h \approx \frac{\lambda}{\delta_{\text{глаз}}}.$$

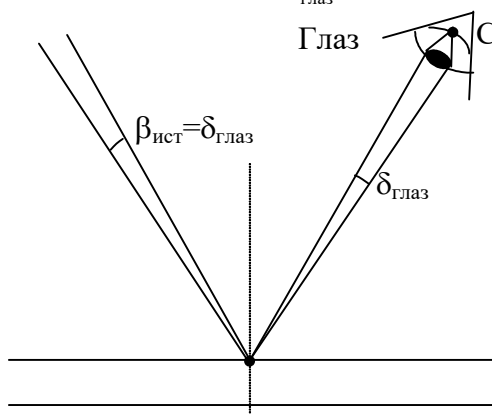


Рис. 7. Интерференция, наблюдаемая на поверхности пленки (полосы равной толщины).

При обычных значениях $d_{\text{зрачок}} \approx 5$ мм и $L \approx 5$ м $\delta_{\text{глаз}} \approx 0,001$ и $h \approx 1000 \lambda$. Следовательно, при меньших толщинах картина будет хорошо видна глазом. Но, т.к., как правило, освещение осуществляется белым светом (во всем видимом диапазоне), то при такой толщине и цвет пленки будет белесым, однотонным. Ведь условие интерференционных максимумов будет выполнено сразу для многих длин волн. И только если толщина пленки порядка длины волны, и условие максимума будет выполнено только для одной-двух длин волн из видимого диапазона, интерференционная картина будет иметь интенсивную окраску.

Таким образом, самым важным фактором для наблюдения красивой интерференционной картины, является малая толщина пленки, порядка длины волны видимого диапазона. В этом случае её можно наблюдать и глазом, и фотографировать объективом с практически любым диаметром, и с самых разных направлений. И тогда можно увидеть красоту (рис. 8).



Рис. 8. Интерференционные картины

PS. Честно говоря, получив формулу

$$\beta_{\text{ист}} = \frac{\lambda}{d'} = \frac{\lambda}{2hn \sin \theta'}. \quad (12)$$

автор был несколько разочарован. Ведь если взять формулу (3) для разности хода в ППП

$$\Delta s = 2hn \cos \theta'. \quad (3)$$

взять дифференциал по θ' , то получим

$$d(\Delta s) = d(2hn \cos \theta') = 2hn \sin \theta' \cdot d\theta'.$$

Логично предположить (это мы делали в наших рассуждениях), что картина полностью размоется, если изменение разности хода будет равно длине волны, т.е. $d(\Delta s) = \lambda$. Отсюда

$$d\theta' = \frac{\lambda}{2hn \sin \theta'}. \quad (14)$$

Правая часть (14) совпадает с (12), отличаются левые части. Но угловой размер источника $\beta_{\text{ист}}$, и диапазон углов $d\theta'$, по своей сути практически одно и то же (осторожно добавим слово «наверное»). А формула получена буквально в две строчки.

Но! Все-таки полагаю, что смысл в предлагаемом сведении математической модели интерференции в тонких пленках к схеме Юнга, есть. А какой – пусть каждый (кто дочитал до конца!) решит самостоятельно!

PPS. Задача.

По приведенной фотографии оценить массу разлившегося топлива. Все табличные данные найти в Интернете.

