Постулаты квантовой механики

1. Наблюдаемой величине ***А*** ставится в соответствие оператор $\hat{A}$, причем измеряемые значения этой величины определяются уравнением на собственные значения

$$\hat{A}\varphi_a = a\varphi_a$$

2. Если измерение наблюдаемой величины дает значение *а,* то состояние системы сразу после измерения определяется собственной функцией, соответствующей этому собственному значению

$$\hat{A}\varphi_a = a\varphi_a$$

3. Состояние квантовой системы описывается волновой функцией $\Psi(x,t)$, причем средние значения любой наблюдаемой А вычисляются по формуле:

$$\langle A \rangle = \int \Psi^* \hat{A} \Psi dx$$

4. Волновая функция $\Psi(x,t)$ находится из уравнения Шредингера:

$$ih\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = \hat{H}\Psi(x,t)$$

Операторы физических величин

координата

$$\hat{x} = x$$

импульс

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\hat{p}^2 = \hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2 = \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial z}\right)^2$$

$$\hat{p}^2 = -\hbar^2 \nabla^2$$

оператор Гамильтона

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x)$$

Момент импульса

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

$$\hat{L}_z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

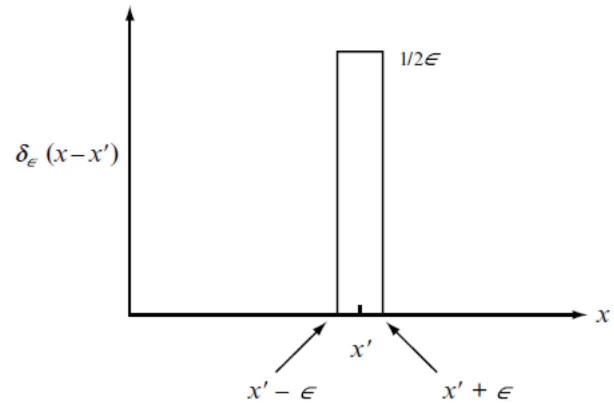
В сферических координатах

$$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Собственные функции оператора x

$$x\psi_{x'}(x) = x'\psi_{x'}(x)$$

$$\psi_{x'}(x) = \delta(x - x')$$



Условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*{}_{x''}(x)\psi_{x'}(x)dx = \delta(x'' - x')$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x'')\delta(x - x')dx = \delta(x'' - x')$$

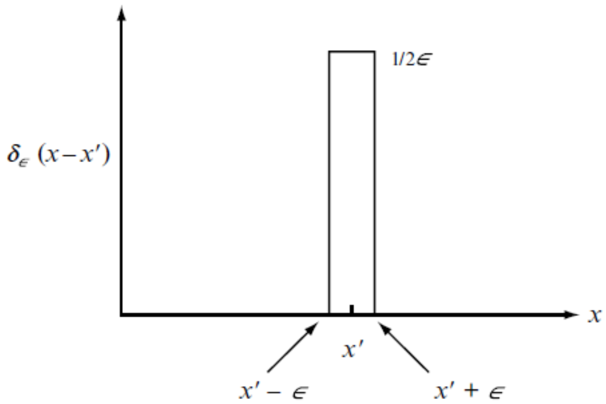
Свойства δ - функции Дирака

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x')dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-x')dx = f(x')$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x'')\delta(x-x')dx = \delta(x''-x')$$

$$\delta(x) = \delta(-x) \qquad \delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}$$



Представление
δ - функции

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}dk = 2\pi\delta(x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}dx = 2\pi\delta(k)$$

Собственные функции оператора импульса

$$\hat{p}_x\psi = -i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x} = p\,\psi$$

$$\psi_p(x,t) = C(t)e^{\frac{i}{\hbar}px} = Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et-px)}$$

Волна де Бройля

$$\langle p\rangle = \int\psi_p(x,t)^*\hat{p}\psi_p(x,t) = p\int\psi_p(x)^*\psi_p(x)dx = p$$

Нормировка в ящике

$$\psi_p(x) = \sqrt{\frac{1}{L}}e^{\frac{i}{\hbar}px} \qquad x\in(-L/2, L/2)$$

$$I = \int_{-L/2}^{L/2}\psi_{p'}(x)^*\psi_p(x)dx = \frac{1}{L}\int\exp\left\{\frac{i}{\hbar}(p-p')x\right\}dx = \frac{\sin(\Delta kL/2)}{\Delta kL/2}$$

$$\Delta k = (p-p')/\hbar \qquad \Delta k = 0 \Rightarrow I = 1 \qquad \Delta k \neq 0 \Rightarrow I = 0$$

Непрерывный спектр. Нормировка на δ - функцию

Разложение волновой функции по ортонормированному базису

Дискретный спектр

$$\psi(x) = \sum_n C_n \varphi_n(x)$$

$$C_n = \int \varphi_n^*(x)\psi(x)dx$$

$$\sum_n |C_n|^2 = 1$$

$$\int \varphi_n^* \varphi_m(x)dx = \delta_{nm}$$

$$P(n) = |C_n|^2$$

Вероятность n-го состояния

Непрерывный спектр (оператора импульса)

$$\psi(x) = \int C(p')\varphi_{p'}(x)dp'$$

$$C(p) = \int \varphi_p^*(x)\psi(x)dx$$

$$C(p) = \int dp' C(p') \int \varphi_p^*(x)\varphi_{p'}(x)dx$$

$$\Rightarrow \int \varphi_p^*(x)\varphi_{p'}(x)dx = \delta(p-p')$$

Нормировка на дельта-функцию !

$$P(p, p+dp) = |C(p)|^2 dp$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A^2 e^{i\frac{(p-p')}{\hbar}x} dx = A^2 2\pi\delta(\frac{(p-p')}{\hbar}) = \delta(p-p')$$

$$\varphi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i\frac{p}{\hbar}x} \qquad \varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$$

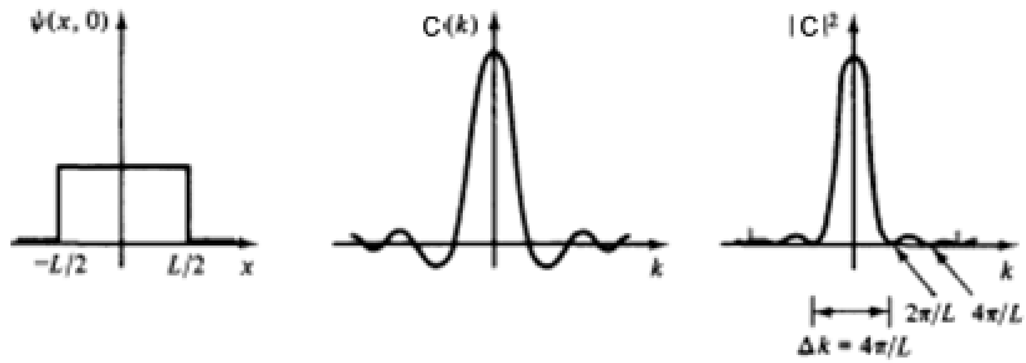
Волновая функция в x и p представлении

$$\psi(x)=\int C(p)\varphi_p(x)dp$$ Волновая функция в x представлении

$$C(p)=\int \psi(x)\varphi_p^{\;*}(x)dx$$ Волновая функция в p представлении

$$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int C(p)e^{i\frac{p}{\hbar}x}dp$$

$$C(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int \psi(x)e^{-i\frac{p}{\hbar}x}dx$$



$$\Delta p=\hbar\,\Delta k=\frac{4\pi\hbar}{L}$$

$$\Delta x=L$$

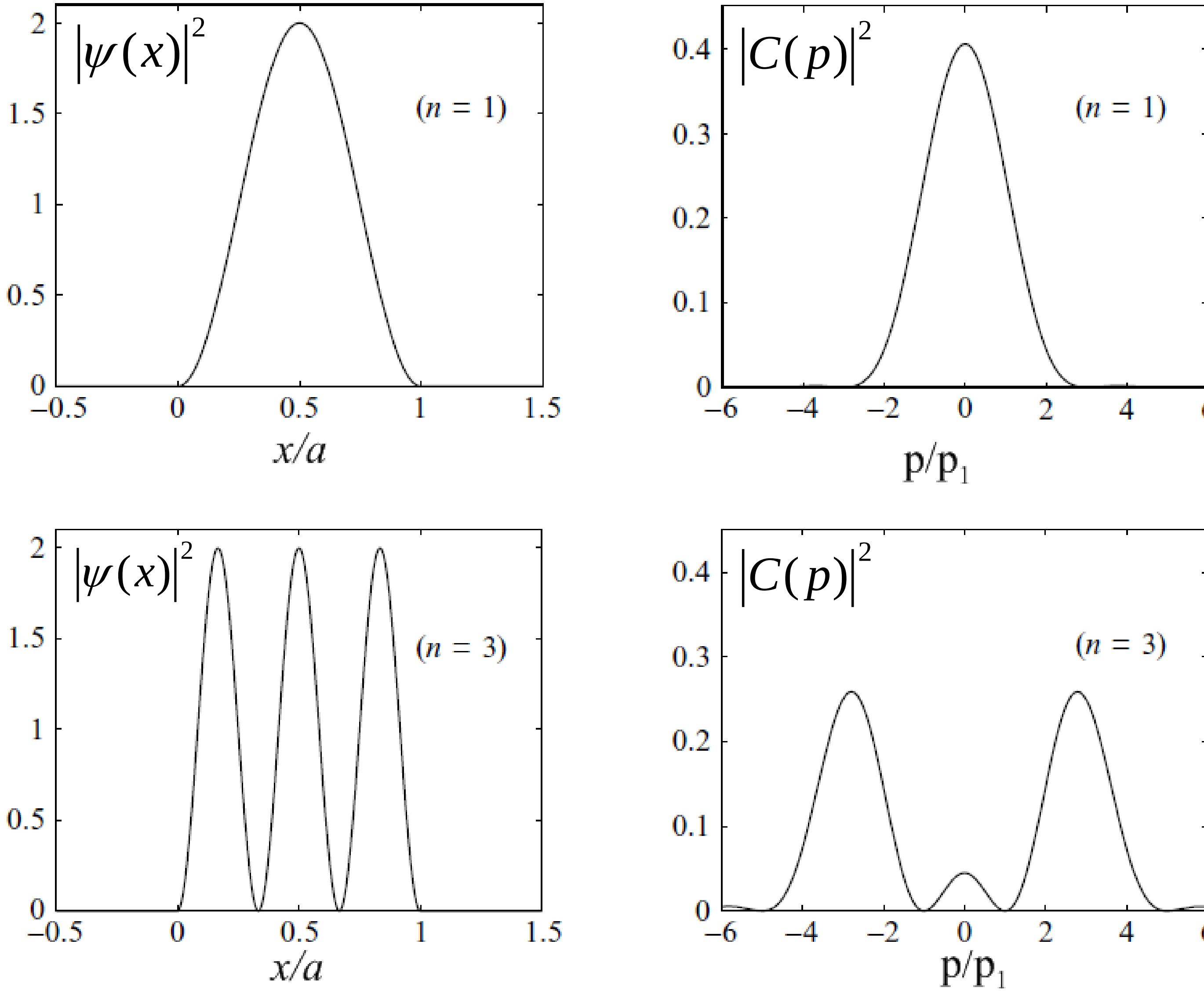
$$\Delta x\,\Delta p\simeq\hbar$$

$$C(k)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,0)\varphi_k^{*}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,0)e^{-ikx}\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi L}}\int_{-L/2}^{+L/2}e^{-ikx}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi L}}\frac{2}{k}\left(\frac{e^{ikL/2}-e^{-ikL/2}}{2i}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi L}}\,\frac{\sin(kL/2)}{k}$$

Плотность вероятности в x и p представлении



$$p_1 = \frac{\hbar\pi}{a}$$

Частица в яме шириной *a. Координата и импульс нормированы.*

Состояние, в котором физическая величина Q имеет определенное (точное) значение q, находится из уравнения на собственные значения

$$\boxed{\hat{Q}\psi(x,t) = q\psi(x,t)}$$

Дисперсия $\sigma^2 = \left\langle (\Delta Q)^2 \right\rangle = \left\langle (Q - \langle Q \rangle)^2 \right\rangle = \left\langle Q^2 \right\rangle - 2\langle Q \rangle \langle Q \rangle + \langle Q \rangle^2$

$$\boxed{\sigma^2 = \left\langle Q^2 \right\rangle - \langle Q \rangle^2}$$

В случае $\hat{Q}\psi(x,t) = q\psi(x,t)$

$$\langle Q \rangle = \int \psi^*(x,t)\hat{Q}\psi(x,t)dx = q\int \psi^*(x,t)\psi(x,t)dx = q$$

$$\left\langle Q^2 \right\rangle = \int \psi^*(x,t)\hat{Q}\hat{Q}\psi(x,t)dx = q^2\int \psi^*(x,t)\psi(x,t)dx = q^2$$

Стандартное отклонение $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 0$ (нет разброса значений Q)

Совместные измерения

Две физические величины A и B могут быть измерены точно одновременно, если они коммутируют, т.е. их *коммутатор*

$$\boxed{\left[\hat{A},\hat{B}\right] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}}$$ ***равен нулю.***

$$\text{если} \quad \hat{A}\psi = a\psi \quad \text{и} \quad \hat{B}\psi = b\psi$$

$$\text{то} \quad \hat{A}(\hat{B}\psi) = \hat{A}b\psi = b\hat{A}\psi = ba\psi$$

$$\hat{B}(\hat{A}\psi) = \hat{B}a\psi = a\hat{B}\psi = ab\psi$$

$$\text{т.е.} \quad \hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A} \quad \text{или} \quad \left[\hat{A},\hat{B}\right] = 0$$

Пример: $$\left[\hat{x},\hat{p}_x\right] = i\hbar \neq 0 \quad \text{т.к.} \left\{ x\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right) - \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)x \right\}\psi = i\hbar\psi$$

x и p_x ***не могут быть измерены точно одновременно (несовместны)***

Пример: $$\left[L_x, L_y\right] = i\hbar L_z \qquad \left[L^2, L_z\right] = 0$$

Совместны L^2 и одна из проекций (L_z)

Операторы физических величин

координата

$$\boxed{\hat{x} = x}$$

импульс

$$\boxed{\hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}}$$

$$\hat{p}^2 = \hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2 = \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 \qquad \boxed{\hat{p}^2 = -\hbar^2\nabla^2}$$

оператор Гамильтона

$$\boxed{\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x)}$$

Момент импульса

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\hat{L}_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)}$$

В сферических координатах

$$\boxed{\hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial \varphi}}$$

Свойства коммутатора

$$\boxed{\left[\hat{A},\hat{B}\right] \equiv \hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}}$$

$$[\hat{A}, a] = 0$$

$$[\hat{A}, a\hat{B}] = [a\hat{A}, \hat{B}] = a[\hat{A}, \hat{B}]$$

$$[\hat{A}, \hat{A}^2] = (\hat{A}\hat{A}^2 - \hat{A}^2\hat{A}) = (\hat{A}\hat{A}\hat{A} - \hat{A}\hat{A}\hat{A}) = 0 \quad \Rightarrow \quad [f(\hat{A}), \hat{A}] = 0$$

$$[\hat{x}, \hat{p}]g(x) = i\hbar\left(-x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}x\right)g(x) = i\hbar\left(-x\frac{\partial g}{\partial x} + x\frac{\partial g}{\partial x} + g\right) = i\hbar g(x) \quad \Rightarrow \quad \boxed{[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar}$$

Пример: $\left[\hat{x}, \hat{p}_x\right] = i\hbar \neq 0 \quad m.к. \left\{x(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}) - (-i\hbar\frac{\partial}{\partial x})x\right\}\psi = i\hbar\psi$

x и p_x *не могут быть измерены точно одновременно (несовместны)*

Пример: $\left[L_x, L_y\right] = i\hbar L_z \quad \left[L^2, L_z\right] = 0$

Совместны L^2
и одна из проекций (L_z)

Обозначения Дирака

$$\langle\psi|\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\varphi(x)\,dx \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*\varphi\,dx < \infty$$

$$\langle\psi|a\varphi\rangle = a\langle\psi|\varphi\rangle$$

$$\langle a\psi|\varphi\rangle = a^*\langle\psi|\varphi\rangle$$

$$\langle\psi|\varphi\rangle^* = \langle\varphi|\psi\rangle$$

$$\langle\varphi + \psi| = \langle\psi| + \langle\varphi|$$

$$\int(\psi_1 + \psi_2)^*(\varphi_1 + \varphi_2)\,dx = \langle\psi_1 + \psi_2|\varphi_1 + \varphi_2\rangle = (\langle\psi_1| + \langle\psi_2|)(|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle)$$

$$= \langle\psi_1|\varphi_1\rangle + \langle\psi_1|\varphi_2\rangle + \langle\psi_2|\varphi_1\rangle + \langle\psi_2|\varphi_2\rangle$$

Эрмитов оператор: $(\langle\varphi|\hat{A})|\psi\rangle = \langle\varphi|(\hat{A}|\psi\rangle)$ $\Rightarrow$ $\int(\hat{A}\varphi)^*\psi dx = \int\varphi^*(\hat{A}\psi)dx$

Пример: $\dfrac{\partial}{\partial x}$ **эрмитов ?** $\int(\dfrac{\partial}{\partial x}\varphi)^*\psi dx = -\int\varphi^*(\dfrac{\partial}{\partial x}\psi)dx$ **НЕТ!**

Обозначения Дирака

Состояние квантовой частицы может быть описано кет-вектором. Кет-векторы можно умножать на комплексные числа и складывать между собой, получая другие кет-векторы, т.е. кет-векторы образуют линейное пространство на поле комплексных чисел.

$$z_1|a\rangle + z_2|b\rangle = |c\rangle$$

Если кет-вектор, соответствующий некоторому состоянию, умножить на любое неравное нулю комплексное число, то полученный кет-вектор будет соответствовать тому же состоянию, т.е. **состояние определяется лишь направлением кет-вектора**, а длина, которую ему можно приписать, несущественна:

$$z_1|a\rangle + z_2|a\rangle = (z_1 + z_2)|a\rangle$$

Кет-вектору $|a\rangle$ можно сопоставить сопряженный ему бра-вектор $\langle a|$

Кет-вектор можно представить как вектор–столбец, координаты которого - комплексные числа. Тогда сопряженный ему бра-вектор будет вектор-строка, координаты которого равны комплексно-сопряженным координатам вектора кет, (для краткости будем считать, что размерность пространства равна двум):

$$|a\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \langle a| = \left(a^*_1, a^*_2\right)$$

Тогда скалярное произведение будет:

$$\langle a|a\rangle = \left(a^*_1 a_1 + a^*_2 a_2\right) \geq 0$$

Эрмитовы операторы

Линейный оператор $\hat{A}$ переводит кет в другой кет: $\hat{A}|a\rangle = |b\rangle$

Тогда, оператору $\hat{A}$ будет соответствовать эрмитово-сопряженный оператор $\hat{A}^+$, который действует на сопряженные векторы:

$$\langle a|\hat{A}^+ = \langle b|$$

Если $\hat{A}^+ = \hat{A}$, то оператор называется самосопряженным или эрмитовым. Такие операторы имеют действительные собственные значения, а их собственные векторы ортогональны. Действительно, рассмотрим выражение $\langle\varphi_m|\hat{A}|\varphi_n\rangle$

Если сначала подействовать на кет, то $\langle\varphi_m|\hat{A}|\varphi_n\rangle = a_n\langle\varphi_m|\varphi_n\rangle$

Если сначала подействовать на бра, то $\langle\varphi_m|\hat{A}|\varphi_n\rangle = a^*{}_m\langle\varphi_m|\varphi_n\rangle$, вычитая, имеем:

$(a_n - a^*{}_m)\langle\varphi_m|\varphi_n\rangle = 0$. Следовательно, $\boxed{a_n = a^*{}_n}$, если n=m, и $\boxed{\langle\varphi_m|\varphi_n\rangle = \delta_{nm}}$

Можно показать, что такой ортонормированный базис является полным, т.е. по нему можно разложить любой вектор.

Пусть $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$ **ортонормированный базис. Тогда:** $\boxed{|a\rangle = \sum_n |n\rangle\langle n|a\rangle}$

$$\langle m|\hat{A}|a\rangle = \sum_n \langle m|\hat{A}|n\rangle\langle n|a\rangle = \langle m|b\rangle \Rightarrow \sum_n A_{mn}a_n = b_m$$

$$\langle a|\hat{A}^+|m\rangle = \sum_n \langle a|n\rangle\langle n|\hat{A}^+|m\rangle = \langle b|m\rangle \Rightarrow \sum_n a_n{}^* A^+{}_{nm} = b_m{}^*$$

$$\boxed{A_{nm}{}^+ = A_{mn}{}^*}$$

Зависимость средних от времени

$$\frac{d\langle A\rangle}{dt} = \frac{\partial\langle A\rangle}{\partial t} \qquad \frac{d\langle\psi|\hat{A}\psi\rangle}{dt} = \int dx \frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\hat{A}\psi)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\hat{A}\psi) = \left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)\hat{A}\psi + \psi^*\hat{A}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \psi^*\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\psi \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{-i\hat{H}}{\hbar}\psi, \qquad \frac{\partial\psi^*}{\partial t} = \frac{i\hat{H}\psi^*}{\hbar}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\hat{A}\psi) = \frac{i}{\hbar}\left(\hat{H}\psi^*\hat{A}\psi - \psi^*\hat{A}\hat{H}\psi + \frac{\hbar}{i}\psi^*\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\psi\right)$$

$$\frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left(\langle\hat{H}\psi|\hat{A}\psi\rangle - \langle\psi|\hat{A}\hat{H}\psi\rangle + \frac{\hbar}{i}\left\langle\psi\left|\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\psi\right.\right\rangle\right)$$

$$\boxed{\frac{d\langle A\rangle}{dt} = \left\langle\frac{i}{\hbar}[\hat{H},\hat{A}] + \frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\right\rangle} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\langle A\rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H},\hat{A}]\rangle$$

$$\frac{d\langle x\rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar}\langle[\hat{H},\hat{x}]\rangle = \frac{i}{\hbar}\left\langle\left[\frac{\hat{p}^2}{2m},\hat{x}\right]\right\rangle = \frac{i}{2m\hbar}\langle\hat{p}[\hat{p},\hat{x}] + [\hat{p},\hat{x}]\hat{p}\rangle = \frac{i}{2m\hbar}\langle -2i\hbar p\rangle = \left\langle\frac{p}{m}\right\rangle$$

$$[\hat{H},\hat{p}] = i\hbar\frac{\partial V}{\partial x} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\langle\mathbf{p}\rangle}{dt} = -\langle\nabla V(x,y,z)\rangle = \langle\mathbf{F}(x,y,z)\rangle$$

Теорема Эренфеста

Уравнения Гамильтона

$$H = \frac{p^2}{2m} + U(x) \qquad \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{U}(x)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p} \end{aligned}} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{p}{m} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \frac{d\langle p\rangle}{dt} &= -\left\langle \frac{\partial U}{\partial x} \right\rangle \\ \frac{d\langle x\rangle}{dt} &= \frac{\langle p\rangle}{m} \end{aligned}$$

Средние значения квантовомеханических переменных удовлетворяют тем же уравнениям движения, что и соответствующие классические переменные, если волновая функция, для которой вычисляются средние ,

$$\langle p\rangle = \int \psi^* \hat{p} \psi \, dx \qquad \langle x\rangle = \int \psi^* \hat{x} \psi \, dx$$

удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = \hat{H} \psi(x,t)$$

Нестационарные состояния

Принцип суперпозиции состояний

$$\boxed{\psi(x,t) = C_1\psi_1(x,t) + C_2\psi_2(x,t)}$$

Суперпозиция двух состояний

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_1(x) + \psi_2(x)\right)$$

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_1(x)\exp(-\frac{i}{\hbar}E_1t) + \psi_2(x,t)\exp(-\frac{i}{\hbar}E_2t)\right)$$

$$\left|\psi(x,t)\right|^2 = \frac{1}{2}\left|\psi_1(x)\right|^2 + \frac{1}{2}\left|\psi_2(x)\right|^2 + \psi_1(x)\psi_2(x)\cos(\omega t)$$

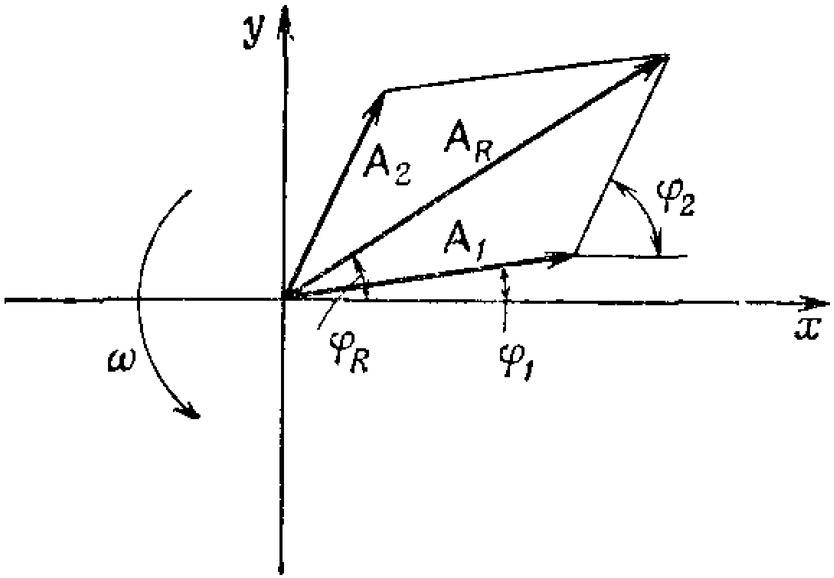
$$\omega = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$$

Дипольные переходы для электрона в яме d=e<x>

$$\left\langle x\right\rangle = \int\limits_{-a/2}^{a/2} x\left\{\frac{1}{2}\left|\psi_1(x)\right|^2 + \frac{1}{2}\left|\psi_2(x)\right|^2 + \psi_1(x)\psi_2(x)\cos(\omega t)\right\}dx$$

Правило отбора для дипольных переходов:
возможны переходы только между состояниями с разной четностью

Биения



$$Ae^{i\varphi} = Ae^{i(\omega t - kx)}$$

$$Ae^{i\varphi} = A_1e^{i\varphi_1} + A_2e^{i\varphi_2}$$

$$\varphi_1 = \omega_1 t \qquad \varphi_2 = \omega_2 t$$

$$A^2 = AA^* = (A_1e^{i\varphi_1} + A_2e^{i\varphi_2})(A_1e^{-i\varphi_1} + A_2e^{-i\varphi_2}) =$$

$$= A_1^{\,2} + A_2^{\,2} + A_1A_2(e^{i(\varphi_2-\varphi_1)} + e^{-i(\varphi_2-\varphi_1)}) =$$

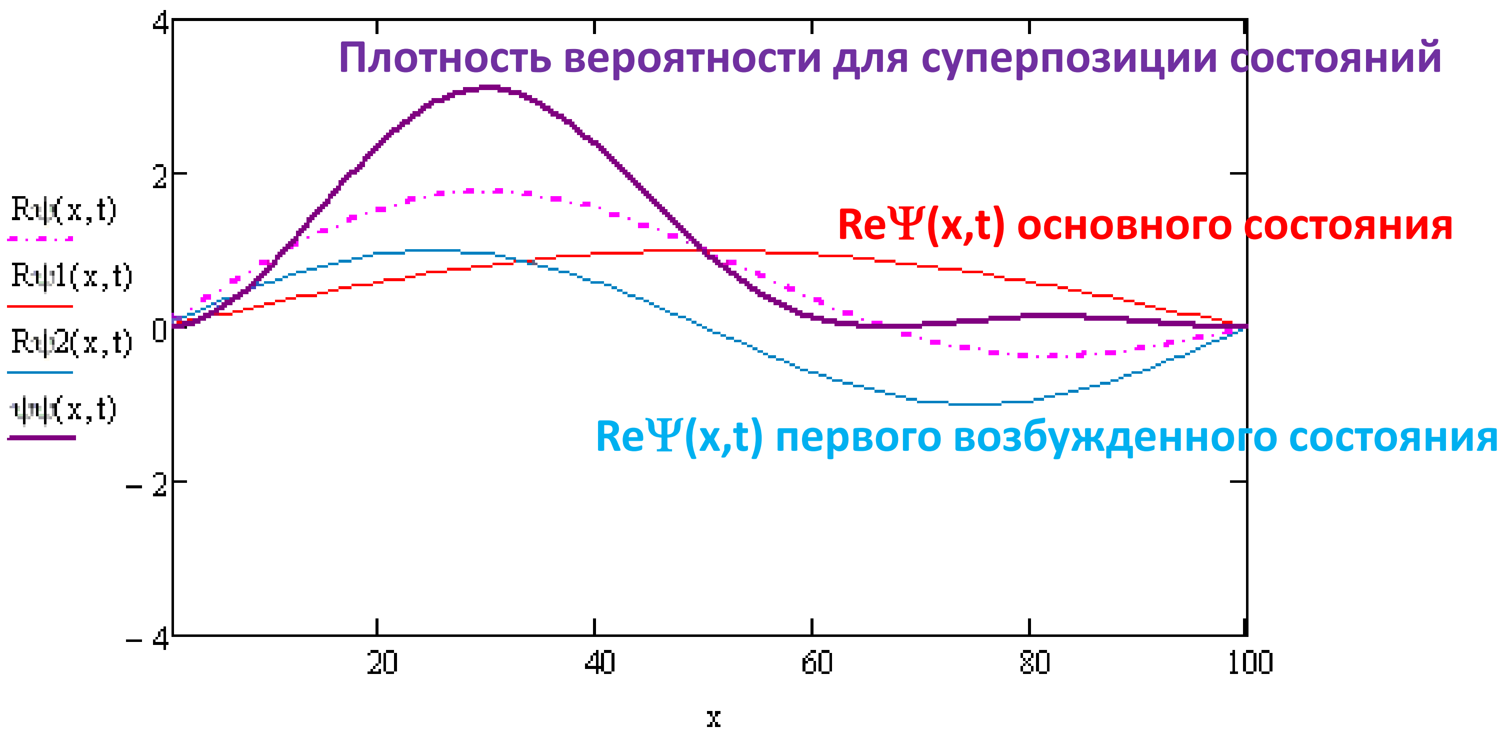
$$= A_1^{\,2} + A_2^{\,2} + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = (\omega_2 - \omega_1)t$$ **Биения на разностной частоте**

Суперпозиция двух нижних состояний электрона в прямоугольной яме

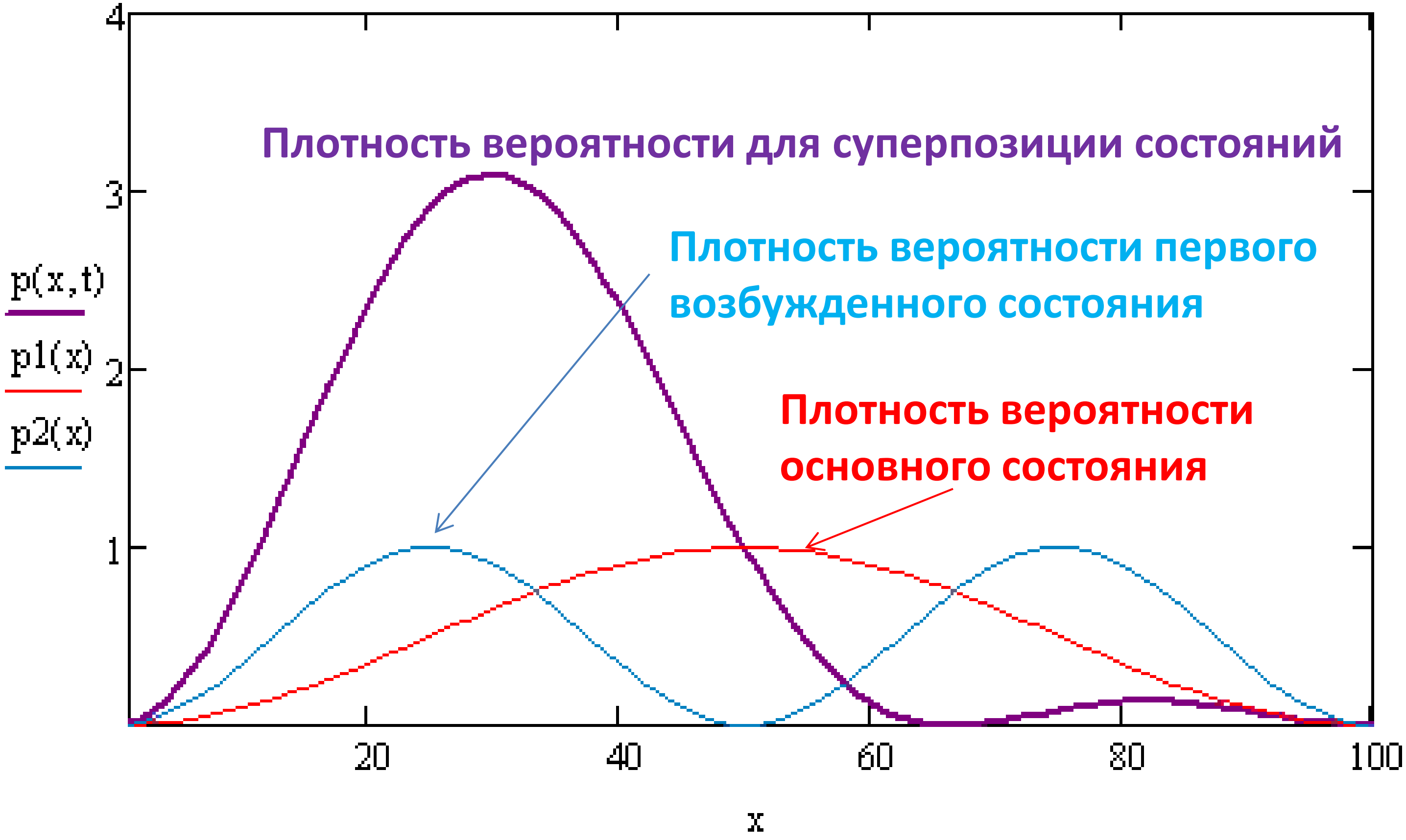
$$\psi1(x,t) := \sin\left(n1\cdot\pi\cdot\frac{x}{a}\right)\cdot e^{-i\cdot\frac{E1}{h}\cdot t} \qquad \psi2(x,t) := \sin\left(n2\cdot\pi\cdot\frac{x}{a}\right)\cdot e^{-i\cdot\frac{E2}{h}\cdot t}$$

$$\psi(x,t) := \psi1(x,t) + \psi2(x,t) \qquad \psi\psi(x,t) := \psi(x,t)\cdot\overline{\psi(x,t)}$$



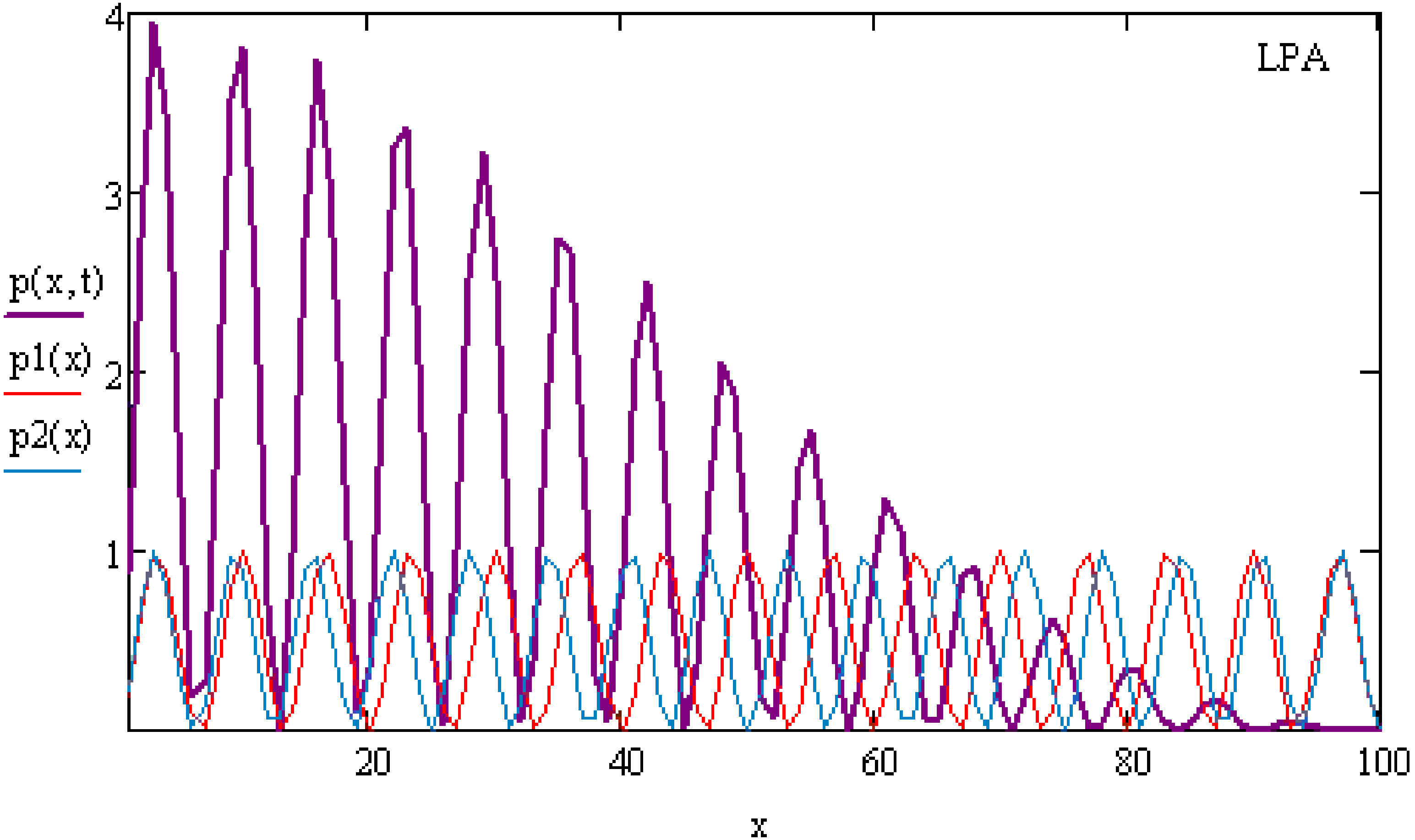
[Смотреть видео]

Суперпозиция двух нижних состояний электрона в прямоугольной яме



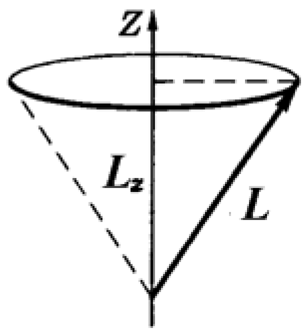
Смотреть видео

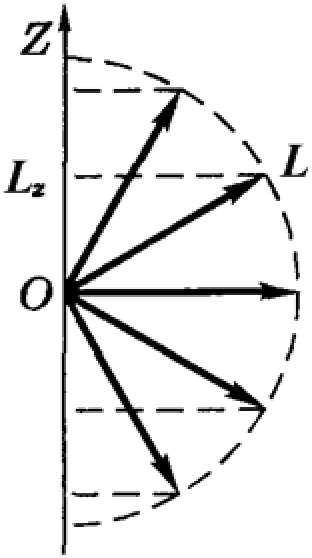
Суперпозиция 15-го и 16-го состояний электрона в прямоугольной яме



[Смотреть видео]

Квантование момента импульса





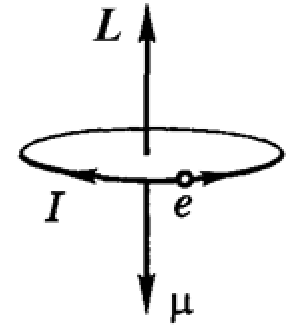
$$\left[L^2, L_z\right] = 0$$

$$\left[L_z, L_x\right] = i\hbar L_y$$

$$\left[L_y, L_z\right] = i\hbar L_x$$

Совместны L^2 и L_z

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$



В центральном поле L сохраняется

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r}\times\mathbf{F} = 0$$

Собственные значения L^2

$$\hat{L}^2\psi = L^2\psi$$

$$L^2 = l(l+1)\,\hbar^2, \qquad l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

$$L = \hbar\sqrt{l(l+1)}$$

Вращательное движение

$$\hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$x \to \varphi$$

$$p_x \to L_z$$

$$e^{i\frac{p}{\hbar}x} \to e^{i\frac{L_z}{\hbar}\varphi}$$

Собственные значения L_z

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}\psi = L_z\psi$$

$$\psi = Ae^{im\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\frac{L_z}{\hbar}\varphi}$$

$$\psi(\varphi + 2\pi) = \psi(\varphi)$$

$$L_z = m\hbar, \qquad m = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$